

לי חזל



המחלקה להוראת המדעים

מתמטיקה לשלוש יחידות לפי התוכנית החדשה

לכיתה י"ב



טיוטה לניסוי



מתמטיקה לשלוש יחידות לכיתה י"ב



טיוטה לניסוי



כל הזכויות שמורות
מכון ויצמן למדע

חומרי למידה אלה נועדו אך ורק לשימוש האישי של מורי המתמטיקה ותלמידיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בספר זה
לכל מטרה אחרת ובכלל זה שימוש מסחרי, או פרסום באתר באתר כלשהו.

חובר על-ידי:

נורית הדס
אברהם הרכבי
יוני עמיר

עריכה ממוחשבת:

אבי טל

עיצוב גרפי ושרטוטים:

ציפי עובדיה

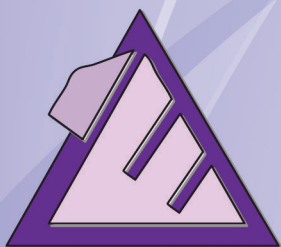
אל המורים והתלמידים

ספר זה מיועד לתלמידי כיתות י"ב הלומדים מתמטיקה לפי תכנית הלימודים החדשה, במסלול 3 יחידות לימוד. בספר מושם דגש על שיתוף התלמיד בבניית הנושאים השונים. אנו מאמינים כי לימוד המבוסס על מעורבות והבנה הוא לימוד משמעותי העשוי להביא גם הנאה ללומד. בהתאם לכך המושגים המתמטיים והנושאים החדשים מבוססים על שכל ישר, שימוש בשרטוטים, הסקת מסקנות, אפשרות לקיום דיונים, ניסיון ליצור תחושה של הבנה, ויצירת הזדמנויות להצלחה.

כשנוצר צורך להשתמש בידע קודם התזכורת וההסבר משולבים בלימוד הנושא החדש.

בספר שלושת הנושאים הנלמדים בכיתה י"ב:

- אשכול חברה ומדע - התפלגות נורמלית
- אשכול התמצאות במישור ובמרחב - הנדסת המרחב
- אשכול פיננסי כלכלי - תכנון לינארי.



לוי חזקל

אשכול חברה ומדע

התפלגות נורמלית



תוכן עניינים - התפלגות נורמלית

7	השלמות בסטטיסטיקה - חזרה על מדדי פיזור
15	מגרף שכיחויות להתפלגות נורמלית
21	ציון תקן
26	מאחוז האוכלוסיה לציון תקן
30	תרגילים נוספים
33	מבחר תשובות

השלמות בסטטיסטיקה - חזרה על מדדי פיזור

1. לפניכם ציוני התעודה של חן, רונית ושי.

חן: 70, 70, 70, 70, 70, 70, 70, 70, 70.

רונית: 40, 50, 60, 70, 70, 80, 90, 100.

שי: 40, 40, 70, 70, 70, 70, 100, 100.

א. חשבו את הציון הממוצע, ורשמו את השכיח של כל תלמיד.

ב. האם המדדים (ממוצע, שכיח) מספיקים לתיאור והשוואת הישגי התלמידים? נמקו.

ג. הציעו דרך לתאר את ההבדל בין ציוני שלושת התלמידים.

2. א. השתמשו בציוני התלמידים מהתרגיל הקודם, וחשבו את ההפרש בין הציון הגבוה ביותר לציון הנמוך ביותר של כל תלמיד.

אחת האפשרויות לאפיין פיזור של קבוצת נתונים היא לחשב את ההפרש בין הערך הגדול ביותר בקבוצה לערך הקטן ביותר בקבוצה.
מדד פיזור זה נקרא **טווח**.

ב. האם הממוצע והטווח מאפשרים להשוות בין הישגי התלמידים? נמקו.

הטווח מודד פיזור של הציונים. בדוגמה זו, הטווח עוזר לאפיין את ההבדלים בציונים בין חן לעומת רונית ושי, אך אינו עוזר לאפיין את ההבדלים בין הציונים של רונית ושי.



3. לפניכם ציוני בחנים במתמטיקה של רונית ושי.

רונית: 80 , 60 , 70 , 90 , 50 , 100.

שי: 100 , 75 , 50.

א. חשבו את הממוצע של הציונים של כל תלמיד.

ב. חשבו, עבור כל תלמיד, את הסטיות מהממוצע. מסמנים סטייה מעל

הממוצע כמספר חיובי וסטייה מתחת לממוצע כמספר שלילי.

רונית: 100 , 50 , 90 , 70 , 60 , 80

הסטיות מהממוצע:

חשבו את סכום הסטיות מהממוצע.

שי: 100 , 75 , 50

הסטיות מהממוצע:

חשבו את סכום הסטיות מהממוצע.

האם ניתן להיעזר בסכום הסטיות מהממוצע לחישוב הפיזור? נמקו.

ג. מחקו מרשימת הסטיות מהממוצע את הסימנים ומצאו את סכום הסטיות "המוחלטות"

(ללא סימן). האם אפשר להסיק ש"פיזור הציונים" אצל רונית גדול יותר מאשר אצל שי?

נמקו.

ד. חשבו את הממוצע של הסטיות "המוחלטות". כלומר, חלקו במספר הציונים.

ה. למי משני התלמידים פיזור ציונים גדול יותר?

לקראת סטיית התקן

במקום להתייחס לערכים המוחלטים של סטיות, כפי שעשינו בתרגיל הקודם, נהוג להעלות בריבוע את הסטיות מהממוצע. העלאה בריבוע פותרת אף היא, את הבעיה שהסטיות מהממוצע הן חיוביות ושליליות וכשמחברים אותן הן מבטלות אלו את אלו, ובנוסף היא נותנת משקל גדול יותר לסטיות הגדולות מהממוצע. בגלל סיבה זו (וסיבות מתמטיות נוספות) נהוג לחשב את ממוצע ריבועי הסטיות מהממוצע, כפי שתלמדו בתרגילים הבאים.



4. ברשימה מופיעים ציוני הבחנים במתמטיקה של חן. ממוצע הציונים שלו 80.

א. חשבו את הסטיות של ציוניו מהממוצע.

חשבו גם את ריבועי הסטיות מהממוצע.

שי: 95 , 80 , 75 , 70

הסטיות מהממוצע (80): _____

ריבועי הסטיות מהממוצע: _____

ב. מצאו את סכום ריבועי הסטיות מהממוצע.

חשבו את ממוצע ריבועי הסטיות מהממוצע (חלקו במספר הציונים).

לממוצע ריבועי הסטיות, קוראים **שונות** ומסמנים אותה ב- S^2 .
השונות שהתקבלה בתרגיל זה היא 87.5.

לצורך השוואת פיזור של קבוצות שונות ניתן להשתמש בשונות, או בשורש הריבועי של השונות.



השורש הריבועי של השונות נקרא **סטיית תקן**

כדי לאפיין את פיזור ציוניו של תלמיד בודד משתמשים בסטיית התקן.

במקרה זה $\sqrt{87.5} = 9.35$, כלומר, סטיית התקן של ציוני חן מהממוצע היא 9.35.
בחישוב השונות כאן, הנחנו אי-תלות בין הציונים של חן, למרות שבדרך כלל לא ניתן להניח הנחה כזו כשמדובר בציונים של אותו תלמיד.



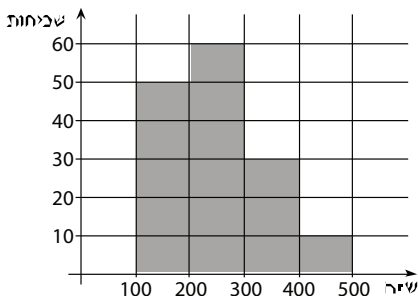
5. הגובה הממוצע של תלמידי כיתה מסוימת הוא 165 והשונות 100.

א. מהי סטיית התקן?

ב. באיזה משני המדדים, שונות או סטיית תקן, עדיף לתאר את פיזור הגבהים ביחס לממוצע בכיתה זו?

ג. בכיתה אחרת אותו גובה ממוצע. סטיית התקן 20. מה תוכלו לומר על הגבהים בשתי הכיתות האלה?

6. ההקטוֹגְרָם מתאר את הסכומים בש"ח, שנתרמו על-ידי עובדי מפעל, עבור השתלת כבד בחו"ל לאחד מהעובדים.



- כמה תורמים היו במפעל?
- ממוצע סכומי ההתרמה 250 ש"ח.
- סמנו על הציר האופקי.
- סטיית התקן היא 90.
- סמנו על הציר נקודה המתאימה לתרומה הנמצאת סטיית תקן אחת מעל הממוצע? מהי?

- סמנו על הציר נקודה המתאימה לתרומה הנמצאת שתי סטיות תקן מעל לממוצע? מהי?
- מהי התרומה הנמצאת **סטיית תקן אחת מתחת לממוצע**?
- צבעו על הציר האופקי את הקטע המתאים לתרומה שבין סטיית תקן אחת מתחת לממוצע לסטיית תקן אחת מעל לממוצע.

סטיית תקן מטבלת שכיחויות

7. בכיתה י"ב 12 תלמידים. במבחן בהסטוריה התקבלו הציונים הבאים:

שכיחות (מס' התלמידים)	הציון
2	6
4	7
5	8
1	9

- השלימו רשימה מפורטת של הציונים.
- הממוצע של הציונים הוא 4.7.
- רשמו מתחת לכל ציון את הסטייה שלו מהממוצע, ומתחת לסטייה מהממוצע את ריבוע הסטייה מהממוצע.
- כמו בחישוב הממוצע מטבלת שכיחויות, במקום לחבר את אותו ריבוע סטייה מהממוצע כמה פעמים, אפשר לכפול את ריבוע הסטייה מהממוצע במספר הפעמים המתאים לשכיחות.
- כמה פעמים מופיע ריבוע הסטייה מהממוצע 1.96? 0.16?
- כפלו וקצאו את סכום ריבועי הסטיות מהממוצע.
- חשבו את השונות ואת סטיית התקן.



8. בכיתה י"א 30 תלמידים. במבחן בלשון התקבלו הציונים הבאים.

שכיחות (מס' התלמידים)	הציון
2	5
7	6
10	7
6	8
5	9

א. השלימו רשימה מפורטת באופן הבא:

5, 5, 6, 6, _____

ב. חשבו את ממוצע הציונים.

ג. השלימו שורה של סטיות מהממוצע, שורה של ריבועי הסטיות מהממוצע, שורה של מכפלות.

ד. חשבו את סכום ריבועי הסטיות מהממוצע ואת סטיית התקן.

ה. חשבו את סטיית התקן בעזרת מחשבון, והשוו את התוצאה למה שקיבלתם בסעיף ד'.

תרגילים

9. חשבו את סטיית התקן של ציוני רונית ושי (משאלה 1). הממוצע של כל אחד מהם היה 70.

א. רונית:

40 50 60 70 80 90 100

_____ הסטיות מהממוצע:

_____ ריבועי הסטיות מהממוצע:

_____ סכום ריבועי הסטיות מהממוצע:

חלקו במספר הציונים לחישוב השונות.

חשבו את סטיית התקן.

ב. שי:

40 50 60 70 80 90 100

_____ הסטיות מהממוצע:

_____ ריבועי הסטיות מהממוצע:

חשבו את סכום ריבועי הסטיות מהממוצע.

חשבו את השונות, ואת סטיית התקן.

ג. מהי סטיית התקן של ציוני חן שבשאלה 1 (כל ציוניו היו 70)?

10. באותה כיתה ישנו תלמיד נוסף שציוניו מפורטים בשורה הבאה. ממוצע ציונים אלה 70.
 עמית: 40, 50, 65, 65, 75, 75, 90, 100.
 א. חשבו את סטיית התקן של ציוני עמית.
 ב. רשמו את סטיות התקן של ציוני חן, רונית, שי ועמית על-פי הסדר.
 למי סטיית התקן הגדולה ביותר ולמי הקטנה ביותר? הסבירו את המשמעות של תוצאות אלה.

11. א. מצאו את הממוצע וסטיית התקן של כל סדרת ציונים.

i 6, 10

ii 6, 8, 10

iii 6, 8, 8, 10

iv 6, 8, 8, 8, 10

v 6, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 10

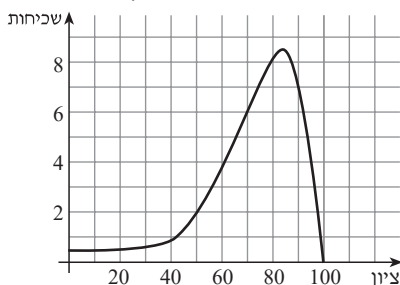
- ב. כמה פעמים צריך להופיע הציון 8 כדי שסטיית התקן תהיה בדיוק 1?
 ג. האם ניתן, על-ידי תוספת של "ציוני 8", להגיע לסטיית תקן 0? נמקו.

12. במבחנים בהסטוריה בכיתה י"א קיבל דן את הציונים: 70, 75, 80, 90.
 רונן קיבל את הציונים: 40, 50, 90, 100.

- א. חשבו את ממוצע הציונים של כל אחד מהם.
 ב. נסו לקבוע, ללא חישוב, אצל מי מהם סטיית התקן גדולה יותר.
 ג. חשבו את סטיית התקן ובידקו את תשובתכם לסעיף ב'.

13. מדדו את הגבהים (בס"מ) של הבנים והבנות בכיתה י"א בבית"ס.
 בנות: 180, 175, 172, 170, 165, 160, 158, 156, 155, 153, 152.
 בנים: 192, 190, 187, 185, 180, 175, 174, 172, 172, 170, 162, 160, 157.
 א. חשבו את ממוצע הגבהים של הבנים ואת סטיית התקן של גבהים אלה.
 ב. חשבו את ממוצע הגבהים של כל התלמידים בכיתה.
 ג. חישוב ומצאו כי ממוצע הגבהים של הבנות 163 וסטיית התקן 9.
 האם, לדעתכם, סטיית התקן של כל הגבהים בכיתה גדולה או קטנה מסטיית התקן של גובה הבנות? נמקו.
 האם, לדעתכם, סטיית התקן של כל הגבהים בכיתה גדולה או קטנה מסטיית התקן של גובה הבנים? נמקו.
 ד. חשבו את סטיית התקן של כל הגבהים בכיתה ובידקו את תשובותיכם לסעיף ג'.

14. לפניכם גרף המתאר התפלגות ציונים של מבחן.



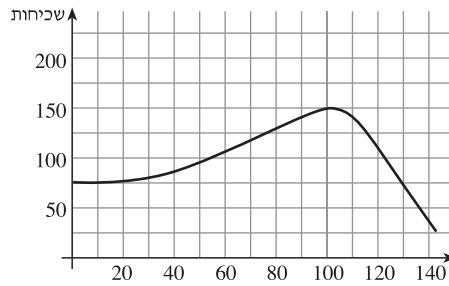
- א. נניח כי הממוצע 70 וסטיית התקן היא 17.
 סמנו על הציר האופקי את הממוצע, נקודה המתאימה לציון של סטיית תקן אחת מעל הממוצע, ונקודה המתאימה לציון של סטיית תקן אחת מתחת לממוצע.
 מהם הציונים המתאימים?
 ב. צבעו, על הציר האופקי, את החלק המתאים לציון של יותר מסטיית תקן אחת מעל הממוצע.

מס' החבילות	מס' אטבים פגומים בחבילה
1	0
40	1
50	2
6	3
2	4
1	5

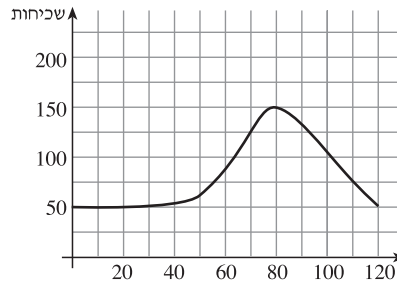
15. בדקו מדגם של 100 חבילות אטבים (מקלות כביסה). בכל חבילה 150 אטבים.
 א. שערך אם סטיית התקן גדולה או קטנה מ-1, ונמקו.
 ב. חשבו ממוצע וסטיית תקן במחשבון, או באופן ישיר על-ידי השלמת שורת סטיות מהממוצע, וריבועי סטיות מהממוצע.

16. הגרפים מתארים נתונים שונים.

גרף (i)



גרף (ii)



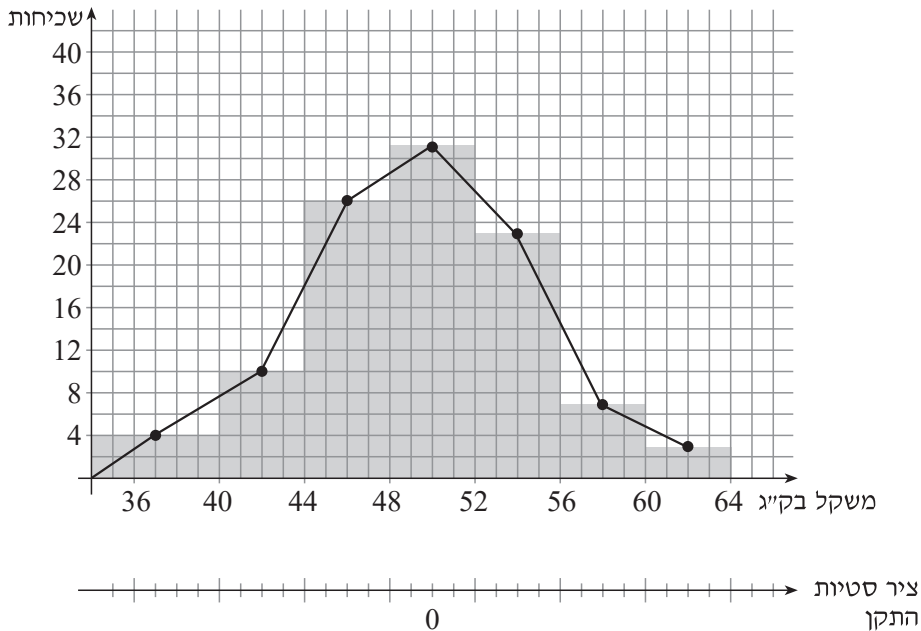
א. היכן "מתרכזים" יותר נתונים ליד הממוצע, בגרף (i) או (ii)?

ב. איזו סטיית תקן גדולה יותר, של קבוצה (i) או של קבוצה (ii)?

מגרף שכיחויות להתפלגות נורמלית

1. לפניכם טבלת התפלגות משקלם של 104 תלמידים, הסטוגרם ומצולע שכיחויות.

משקל (ק"ג)	36-39.9	40-43.9	44-47.9	48-51.9	52-55.9	56-59.9	60-64
שכיחות	4	10	26	31	23	7	3



א. הממוצע 50 בקירוב. סמנו את מקומו על ציר המשקל.
 סטיית התקן 5 בקירוב.

סמנו על ציר המשקל במקומות המתאימים:

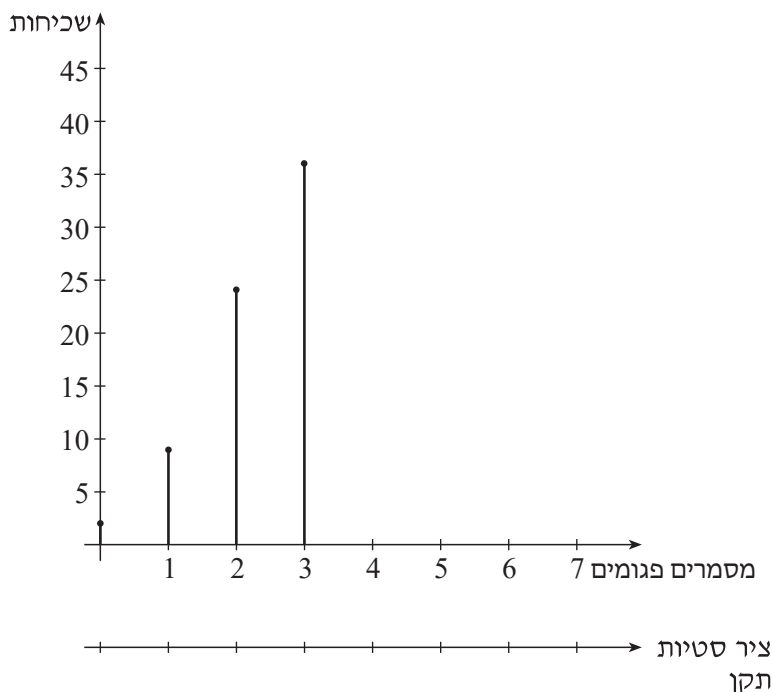
- סטיית תקן אחת מעל הממוצע, ושתי סטיות תקן מעל הממוצע.
- סטיית תקן אחת מתחת לממוצע ושתי סטיות תקן מתחת הממוצע.

ב. רשמו על "ציר סטיות התקן" את המספרים -2 , -1 , 1 , 2 .
 במקומות המתאימים מתחת ל"ציונים" שסימנתם בסעיף א'.

2. בבדיקה של 110 חבילות מסמרים נמצאו מסמרים פגומים לפי הטבלה:

7	6	5	4	3	2	1	0	מספר מסמרים פגומים
4	5	12	19	36	24	8	2	מספר חבילות

א. השלימו את דיאגרמת המקלות ושרטטו מצולע שכיחויות.

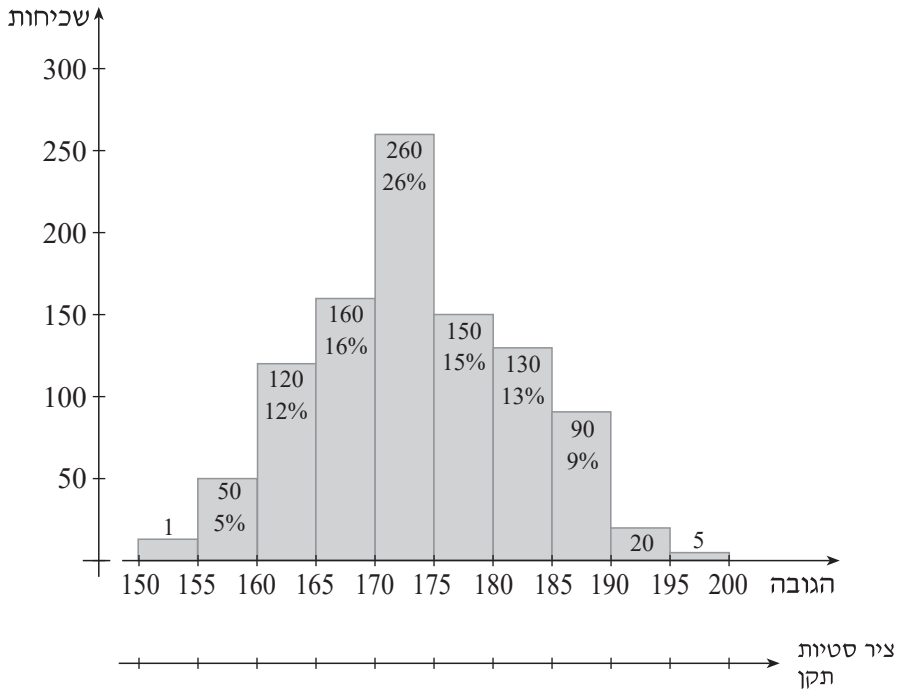


ב. ממוצע מספר המסמרים הפגומים בחבילה הוא 3.25 וסטיית התקן 1.5. סמנו את הממוצע על ציר המסמרים.

ג. סמנו, על ציר המסמרים, נקודות המתאימות למספרים הנמצאים סטיית תקן אחת מעל הממוצע וסטיית תקן אחת מתחת לממוצע. סמנו על הציר, נקודות המתאימות למספרים הנמצאים 2 סטיות תקן מעל ומתחת לממוצע.

ד. סמנו על ציר "סטיות התקן", במקומות המתאימים, את המספרים 2, 1, 0, -1, -2

3. לפניכם היסטוגרם המתאר גבהים של 1000 נבדקים בוגרים.
הממוצע: $\bar{x} \approx 173$, וסטיית התקן $s = 9$.



- א. סמנו על ציר הגובה את הממוצע.
 ב. סמנו על ציר הגובה את המקום של סטיית תקן אחת ו-2 סטיות תקן מעל ומתחת לממוצע.
 ג. סמנו על ציר "סטיות התקן" את מספרי הסטיות המתאימות.
4. א. העתיקו על דף שקוף את מצולע השכיחויות ואת ציר סטיות התקן שבתרגיל 1. הניחו אותו על הגרפים בתרגיל 2 כך שהממוצעים יתלכדו.
 מה תוכלו לומר על מקומן של "סטיות התקן" בשני הגרפים?
 הניחו את הדף השקוף על הגרף שבתרגיל 3 ובדקו את מיקום סטיות התקן.

תופעות שהתנהגותן דומה להתנהגות התופעות המתוארות בתרגילים 1-3 נקראות **"תופעות המתפלגות נורמלית"**.



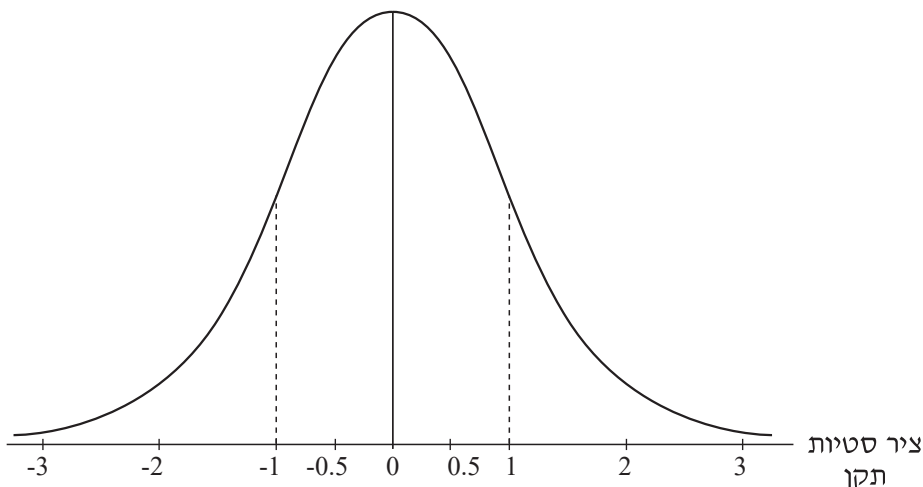
צורת הגרף, המתאר שכיחות של תופעות כאלה, דומה לגרפים שהתקבלו: הגרף סימטרי, ציר הסימטריה הוא "קו הממוצע", רוב האוכלוסיה נמצא מסביב לממוצע וככל שהמרחק מהממוצע גדל השכיחות קטנה.

ב. בחרו אחד מהגרפים שבתרגילים 1-3 וחשבו, בערך, איזה אחוז מהאוכלוסיה נמצא בין סטיית תקן אחת מתחת לממוצע וסטיית תקן אחת מעל לממוצע. (1 – עד 1).
(השוו עם תוצאה של חבר שחשב עבור גרף אחר).

אילו ניתן היה לתאר את גרף השכיחויות (ההתפלגות) של תופעות **כאלה**, לגבי **כל** האוכלוסיה שבה מדובר, היה מתקבל גרף **דומה** לגרף המשוורטט כאן בהמשך.



גרף של התפלגות נורמלית



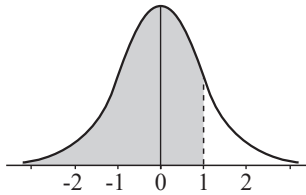
ג. בגרף זה 68% של השטח, שמתחת לעקומה, נמצא בין -1 ל-1. (כלומר, בין סטיית תקן אחת מתחת לממוצע וסטיית תקן אחת מעליה).
השוו עם תוצאות החישוב בסעיף ב'.
כמו כן חישבו ומצאו ש- 95% מהשטח נמצאים בין -2 ל-2.
כמובן שמתחת לעקומה כולה נמצא 100% של השטח.

משתמשים בגרף זה כמודל לחישוב אחוזי אוכלוסיה שבין סטיות תקן נתונות. מחישוב זה אפשר להסיק מסקנות על אחוזי האוכלוסיה הנמצאים בין הציונים עצמם, למשל גבהים.



בסוף הפרק, תמצאו דף עם טבלה של התפלגות נורמלית מצטברת. תוכלו לצלם אותו ולהשתמש בטבלה בתרגילים כאן ובהמשך.

בטבלה תמצאו את השטח הנמצא מתחת לעקומה הזו החל בקצה השמאלי ועד לסטיית התקן הנתונה. כלומר, אחוז האוכלוסיה מהקצה התחתון עד לסטיית התקן.



5. א. קראו מהטבלה מהו השטח עד 1.

ב. מה השטח עד 0.2 ?

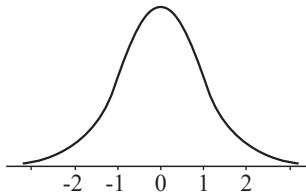
ג. מה השטח עד -1.3 ?

ד. - מה השטח עד 1.5 ?

- מה השטח עד -1.5 ?

- מה השטח שבין -1.5 ל- 1.5 ?

צבעו בגרף.



ה. איזה אחוז של אוכלוסיה המתפלגת נורמלית

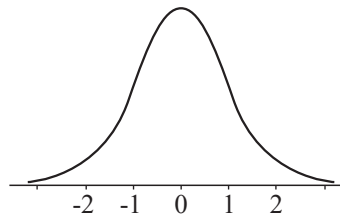
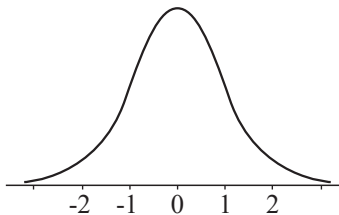
נמצא מתחת ל- 0.75 של סטיית תקן?

צבעו את השטח המתאים בגרף.

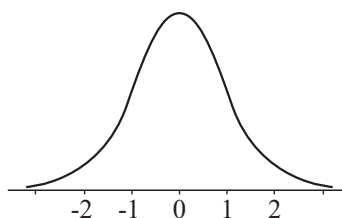
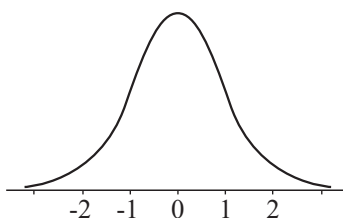
תרגילים

6. צבעו, על גרף ההתפלגות המשוורטט, את השטח המבוקש. היעזרו בטבלה ומצאו אותו.

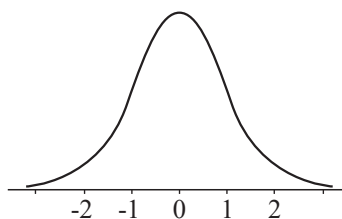
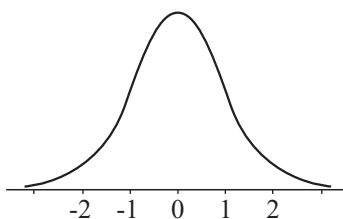
א) מתחת ל- 0.5 סטיות תקן. ב) מעל ל- 0.5 סטיות תקן.



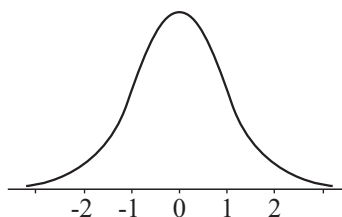
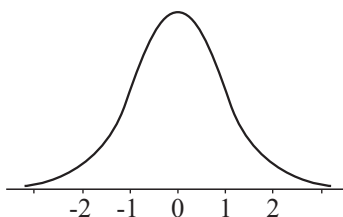
ג) מעל 0.75 סטיות תקן. ד) מתחת ל-0.75 סטיות תקן.



ה) בין -0.75 ל-0.75 סטיות תקן. ו) עד 1.4 סטיות תקן.



ז) מתחת ל-0.7 סטיות תקן. ח) בין -0.7 ל-1.4 סטיות תקן.



7. מצאו את אחוז האוכלוסיה, המתפלגת נורמלית, שציונו נתון.
(היעזרו בשרטוט עקומה וסימון השטח המתאים).

א. מתחת ל-1.2 סטיות תקן.

ב. מעל שתי סטיות תקן.

ג. מעל 0.75 סטיות תקן.

ד. בין 0.5 סטיות תקן ו-0.5 סטיות תקן.

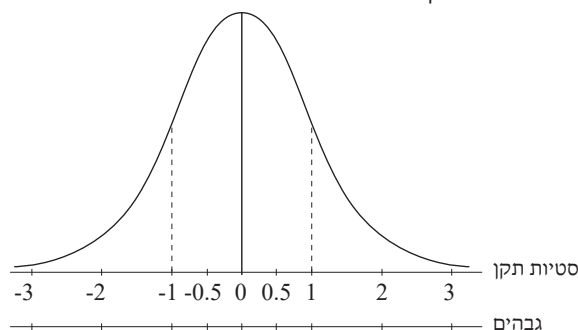
ה. בין 0.5 סטיות תקן ו-1.5 סטיות תקן.

ו. בין -0.5 סטיות תקן ו-1.5 סטיות תקן.

ז. בין 1.2 סטיות תקן ו-0.4 סטיות תקן.

ציון תקן

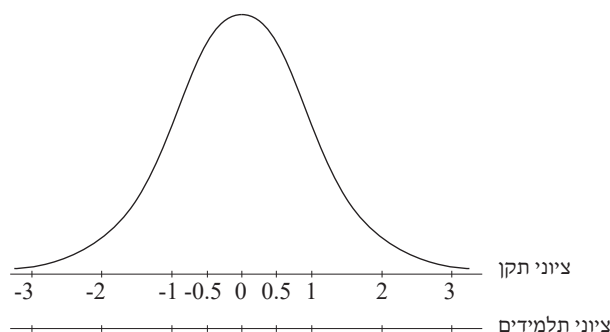
1. הגובה הממוצע של תלמידי תיכון הוא 170 ס"מ וסטיית התקן 8 ס"מ.
א. השלימו את הגבהים בנקודות המסומנות על ציר "הגבהים" שמתחת לציר סטיות התקן.



- ב. כמה סטיות תקן מעל, או מתחת לממוצע נמצא נער שגובהו:
- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 154 ס"מ | 158 ס"מ | 174 ס"מ | 162 ס"מ | 178 ס"מ |
| | 164 ס"מ | 152 ס"מ | 194 ס"מ | 180 ס"מ |

המספרים שרשמתם נקראים **ציוני התקן** של הגבהים

2. הציון הממוצע, במבחן משוב ארצי, היה 75 וסטיית התקן 6.



- א. השלימו את הציונים בנקודות המסומנות על ציר **הציונים**.
ב. בין אילו שתי סטיות תקן נמצא תלמיד שציונו 89?
חלקו בקירוב את הקטע המתאים, על ציר ציוני התלמידים, ל-6 חלקים.
סמנו את מקום הציון 98 בשני הצירים.
מה ציון התקן המתאים לתלמיד זה?

- ג. מה ציון התקן המתאים לתלמיד שציונו 65 ?
 ד. מה ציון התקן המתאים לתלמיד שציונו 80 ?
 ה. מה ציון התקן המתאים לתלמיד שציונו 60 ?

3. באוניברסיטה ניתנו מבחנים לדרוג תלמידים.

איזה ציון טוב יותר:

ציון של 65 בבחינה שהממוצע בה הוא 62 וסטיית התקן 5.

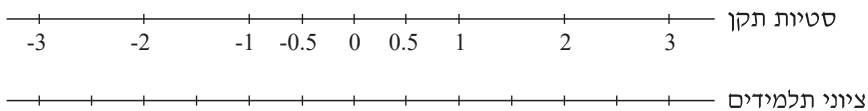
או ציון של 72 בבחינה שהממוצע בה הוא 68 וסטיית התקן 8.



4. ציוני בחינות בית ספר גדול מתפלגים נורמלית.

הציון הממוצע 75 וסטיית התקן 15.

א. רשמו על הציר התחתון את הציונים המתאימים לציוני התקן הרשומים על הציר העליון.



ב. הוסיפו על הציר התחתון את הציונים 100, 80, 70, 55.

הוסיפו על ציר ציוני התקן את הציונים המתאימים.

ג. שרטטו מעל הציר "ציון תקן" סקיצה של גרף העקומה הנורמלית והיעזרו בו לפתרון השאלות הבאות.

מצאו איזה אחוז מהתלמידים קיבלו פחות מ- 80 ?

איזה אחוז מהתלמידים קיבלו יותר מ- 80 ?

איזה אחוז מהתלמידים קיבלו פחות מ- 70 ?

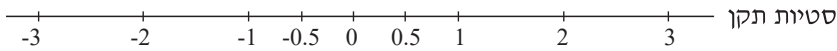
איזה אחוז מהתלמידים קיבלו יותר מ- 70 ?

איזה אחוז מהתלמידים קיבלו בין 70 ל- 80 ?

איזה אחוז מהתלמידים קיבלו בין 55 ל- 90 ?

5. ציוני I.Q. מתפלגים נורמלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 15.

א. רשמו ערכים מתאימים על ציר ציוני I.Q.



ציוני I.Q.

תוכלו לשרטט מעל הציר "ציוני תקן" סקיצה של גרף העקומה הנורמלית ולהיעזר בגרף בהמשך.

ב. לאיזה אחוז מהאוכלוסיה I.Q. גבוה מ-115?

ג. מה ההסתברות שאם נבחר באקראי אדם מהאוכלוסיה, ציון ה-I.Q. שלו גבוה מ-115?

משתמשים בעקומה הנורמלית גם לחישובי הסתברויות (דוגמת סעיף ג'). ההסתברות היא בעצם אחוז האוכלוסיה המתאים למאורע, וכידוע אחוז האוכלוסיה, או ההסתברות, נמדד בעזרת השטח המתאים שמתחת לעקומה.



ד. מה ההסתברות שאם נבחר באקראי אדם, ציון ה-I.Q. שלו:

נמוך מ-110 ?

גבוה מ-90 ?

בין 90 ל-110 ?

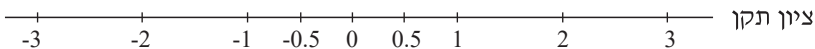
ה. מה הציון המתאים ל-5.2 סטיות תקן מעל הממוצע ?
לאיזה אחוז של האוכלוסיה I.Q. גבוה מהציון שרשמתם ?

6. ההישגים בתחרויות של ריצת 2000 מ' בנים בתיכון, מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן של דקה אחת.

א. להישג של 9 דקות מתאים ציון תקן 5.0.

העתיקו את הצירים וסמנו עליהם.

מה הממוצע ?



הישג בריצה

תוכלו לשרטט סקיצה של גרף העקומה הנורמלית ולהיעזר בגרף בהמשך.

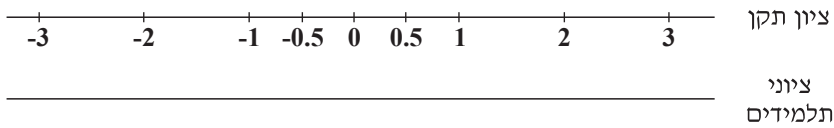
ב. לאיזה אחוז מהאוכלוסיה הישג בריצה שהוא פחות מ-5.7 דקות?

ג. מה ההסתברות, לבחור באקראי תלמיד תיכון, שהישגו בריצה **יותר** מ-9.5 דקות.

תרגילים

7. במבחני משוב ארצי הציון הממוצע 7 וסטיית התקן 5.1.

א. העתיקו את הצירים, בהנחה שהתפלגות הציונים נורמלית, רשמו, על קו ציוני תלמידים, את הערכים המתאימים לנקודות המסומנות על ציר ציוני התקן.



ב. מה ציוני התקן של תלמידים שקיבלו את הציונים:

5, 10, 4, 5.5, 7.75

ג. ציון התקן של תלמיד הוא 0.5 – . מה ציונו במבחן ?

ד. ציון התקן של תלמיד הוא 1.25. מה ציונו במבחן ?

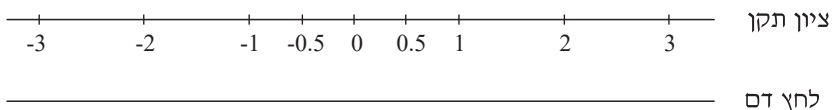
ה. ציון התקן של תלמיד הוא 0.8 – . מה ציונו במבחן ?

8. לחץ הדם של מבוגרים, המבוטחים בקופת חולים "לבריאות", מתפלג נורמלית. הממוצע 122 וסטיית התקן 16. (מדובר בערך הגבוה של מידת לחץ הדם.)

א. רשמו על ציר "לחץ הדם" את הערכים בנקודות המסומנות.

ב. העתיקו את הצירים וסמנו על שניהם ערכים מתאימים ללחץ דם של:

100, 110, 150, 140, 134



תוכלו לשרטט גרף של העקומה הנורמלית ולהיעזר בגרף כדי לענות על סעיף ג'.

ג. – לאיזה אחוז מהמבוטחים לחץ דם **נמוך** מ- 130 ?

– לאיזה אחוז מהמבוטחים לחץ דם **גבוה** מ- 130 ?

– לאיזה אחוז מהמבוטחים לחץ דם **נמוך** מ- 140 ?

– לאיזה אחוז מהמבוטחים לחץ דם **גבוה** מ- 110 ?

– לאיזה אחוז מהמבוטחים לחץ דם בין 110 ל- 140 ?

– לאיזה אחוז מהמבוטחים לחץ דם **גבוה** מ- 150 ?

9. אורך החיים של נורות מתפלג נורמלית עם ממוצע של 720 שעות וסטיית תקן של 90 שעות.

א. שרטטו סקיצה של התפלגות נורמלית עם ציר ציוני תקן וציר "אורך חיים של נורות".

ב. היעזרו בצירים, בגרף ובטבלה ומצאו:

- איזה אחוז של הנורות דולקות יותר מ- 765 שעות ?
- איזה אחוז של הנורות דולקות פחות מ- 500 שעות ?
- מה ההסתברות שנורה תדלוק פחות מ- 400 שעות ?
- מה ההסתברות שנורה תדלוק בין 720 ל- 840 שעות ?

10. הגובה הממוצע של תלמידים הוא 168 ס"מ וסטיית התקן היא 12 ס"מ. בהנחה שהתפלגות הגבהים נורמלית.

א. מה ההסתברות שאם נבחר באקראי תלמיד מקבוצה זו, גובהו יהיה בין 165 ס"מ ל- 177 ס"מ.

ב. ידוע שבקבוצה 10000 תלמידים. כמה תלמידים, בערך, גובהם בין 165 ס"מ ל- 177 ס"מ.

11. באיזור מסוים נערכו מבחנים משווים בהבנת הנקרא.

במבחן הראשון הציון הממוצע היה 75 וסטיית התקן 10.

במבחן השני הציון הממוצע היה 62 וסטיית התקן 5.

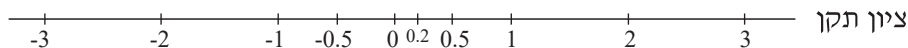
א. איזה ציון טוב יותר יחסית: 80 בראשון או 65 בשני.

ב. איזה ציון במבחן הראשון "שקול" ל- 66 במבחן השני ?

12. כמות צריכת החלב למשפחה ביום מתפלגת נורמלית, עם סטיית תקן של 500 מ"ל. צריכה של 1000 מ"ל (1 ליטר) מתאימה לציון תקן של 0.2.

א. מה ממוצע צריכת החלב למשפחה ביום ?

ב. איזה אחוז של המשפחות צורכות פחות מ- 2000 מ"ל (2 ליטר) ביום?



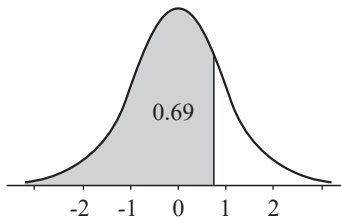
צריכת חלב

ג. מה ההסתברות לבחור באקראי משפחה שצריכת החלב שלה **נמוכה** מ- 500 מ"ל ?

מאחז האוכלוסיה לציון תקן

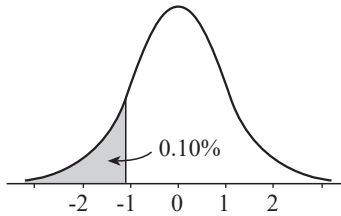
בסעיפים הקודמים למדתם, שמהגרף ומהטבלה של ההתפלגות הנורמלית אפשר להסיק מהו אחוז האוכלוסיה שנמצא מתחת, או מעל לציון תקן נתון.

בסעיף זה תלמדו כיצד להסיק מאחוז אוכלוסיה נתון את ציון התקן המתאים ואת הציון האמיתי המתאים.



ציון תקן

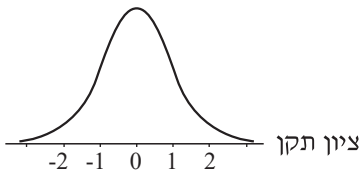
1. א. מצאו, **בתוך** הטבלה, את המספר הקרוב ביותר ל- 0.69. איזה ציון תקן מתאים לו? סמנו על ציר ציוני התקן.



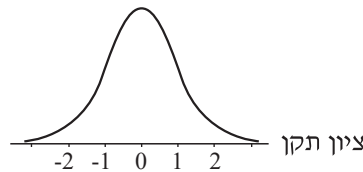
ציון תקן

- ב. מצאו את ציון התקן המתאים ורשמו על הציר.

2. קווקו את השטח המתאים על הגרף ומצאו ציון תקן המתאים לאחוז האוכלוסיה הנתון.
(א) 75% מהאוכלוסיה נמצא מתחתיו. (ב) 25% מהאוכלוסיה נמצא מעליו (רבעון עליון).

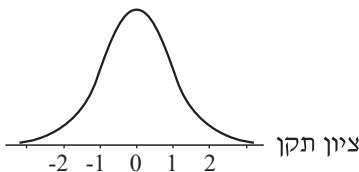


ציון תקן

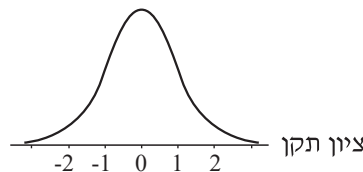


ציון תקן

- (ג) 40% מהאוכלוסיה גבוה ממנו. (ד) 60% מהאוכלוסיה גבוה ממנו.

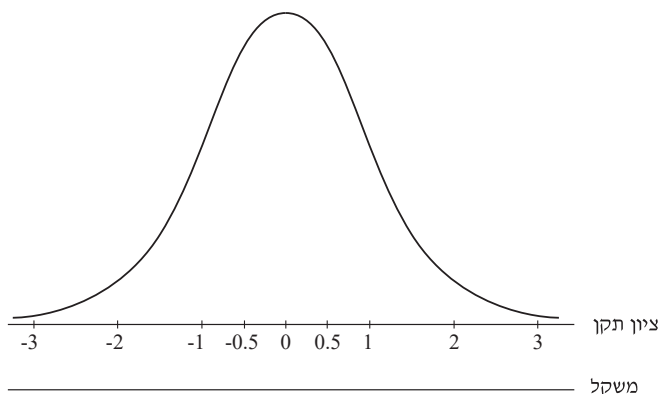


ציון תקן

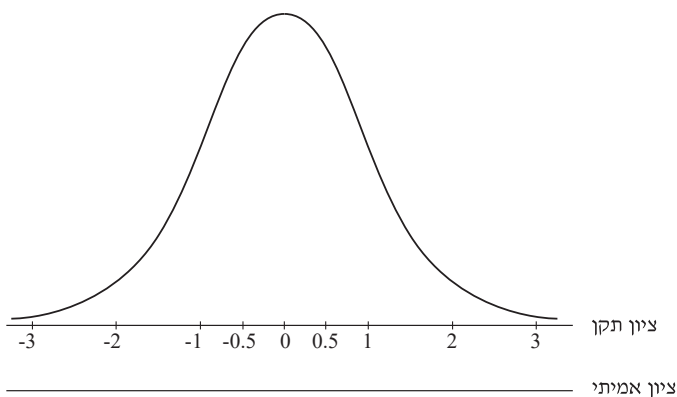


ציון תקן

3. משקל של נשים בפֶּטְלַנְד מתפלג נורמלית עם ממוצע של 68 ק"ג וסטיית תקן של 5 ק"ג.
א. רשמו את הנתונים על ציר המשקל.



- ב. מהו **ציון התקן**, שמשקלן של 75% אחוז מהנשים קטן ממנו.
(סמנו את השטח בגרף, רשמו את ציון התקן המתאים על הציר).
ג. רשמו את **המשקל**, המתאים לציון התקן הנ"ל, על ציר המשקל.
ד. רשמו **משקל** כך שמשקלן של 80% מהנשים **גדול** ממנו?
ה. רשמו **משקל** כך שמשקלן של 20% מהנשים **קטן** ממנו?
4. הציונים של אוכלוסית תלמידים מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 10.
לציון 55 מתאים ציון תקן של -1.5 .
א. מה הממוצע במבחן? (היעזרו בסימון הנתונים על הצירים).



- ב. רשמו ציון תקן, וציון אמיתי, ש- 25% מהנבחנים קיבלו ציון נמוך ממנו.

מצאתם את הציון המתאים לרבעון התחתון.



ג. מצאו ציון תקן וציון אמיתי, ש-25% מהנבחנים קיבלו ציון גבוה ממנו.

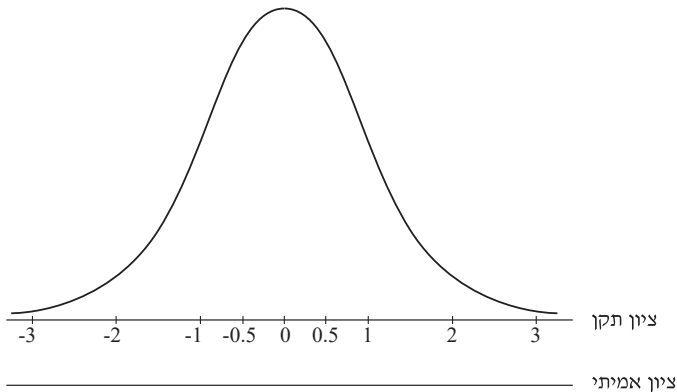
מצאתם את הציון המתאים לרבעון העליון.



תרגילים

5. ציוני בחינה של אוכלוסיה מתפלגים נורמלית עם ממוצע 78 וסטיית תקן 10.

א. רשמו ציונים מתאימים על ציר ציוני הבחינה.



ב. מצאו ציון אמיתי, שציוני 60% מהאוכלוסיה נמוכים ממנו.

(סמנו תחילה שטח מתאים של הגרף, רשמו וסמנו ציון תקן וציון אמיתי.)

ג. מצאו ציון אמיתי, שציוני 75% מהאוכלוסיה גבוהים ממנו.

(חזרו על השלבים הנ"ל)

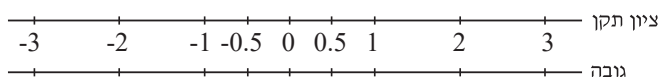
ד. מצאו ציון אמיתי, שציוני 25% מהאוכלוסיה נמוכים ממנו, (רבעון תחתון).

ה. מצאו ציון אמיתי, שציוני 32% מהאוכלוסיה גבוהים ממנו.

6. הגבהים של אוכלוסית תלמידים מתפלגים נורמלית, עם סטיית תקן 6 ס"מ.

לגובה 174 ס"מ מתאים ציון תקן של 1.5.

א. מה ממוצע הגבהים של האוכלוסיה? (העתיקו את הצירים והיעזרו בסימון הנתונים על הצירים.)



ב. שרטטו סקיצה של עקומה נורמלית והיעזרו בה למצוא ציון תקן שגובה 40% מהאוכלוסיה קטן ממנו.

מה הגובה המתאים לציון התקן שמצאתם?

7. ההישגים בקפיצה למרחק של בנות בתיכון, מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 10 ס"מ.

לקפיצה למרחק של 230 ס"מ מתאים ציון תקן של 0.5.

א. מה ממוצע ההישגים בקפיצה למרחק של בנות בתיכון?

ב. מצאו ציון תקן והישג בקפיצה למרחק, שהישגי 70% מהאוכלוסיה נמוכים ממנו.

ג. מה ההסתברות, שההישג של תלמידת תיכון שנבחרה באקראי, גבוה מ- 2.40 מ'.

1. הגובה של בנים בגיל גיוס מתפלג נורמלית. הממוצע 174 ס"מ וסטיית תקן 8 ס"מ.
 - א. מה ההסתברות שאם נבחר מתגייס באקראי, גובהו קטן מ-179 ס"מ.
 - ב. מה ההסתברות שאם נבחר שני מתגייסים באקראי הגובה של **שניהם** יהיה מתחת ל-179 ס"מ?
 - ג. מה ההסתברות, שאם נבחר שני מתגייסים באקראי, גובה של אחד מהם יהיה קטן מ-179 ס"מ ושל השני גדול מ-179 ס"מ?
2. ציוניהם של אוכלוסית תלמידים מתפלגים נורמלית, עם ממוצע 75 וסטיית תקן 12.
 - א. מצאו ציון, שלרבע מהתלמידים ציון גבוה ממנו.
 - ב. בוחרים באקראי תלמיד מהאוכלוסיה. מה ההסתברות שהציון שלו בין 63 ל-93?
 - ג. בוחרים באקראי שני תלמידים מהאוכלוסיה. מה ההסתברות שהציון של שניהם בין 63 ל-93?
3. ציוני בחינות של אוכלוסית תלמידים מתפלגים נורמלית.
 - א. סטיית התקן 21 והציון שרבע מהציונים גבוהים ממנו הוא 28 (רבעון עליון).
 - ב. מצאו את הציון התקן.
 - ג. מצאו את הממוצע. (היעזרו בציר ציוני תקן וציר ציונים אמיתיים).
 - ד. מצאו את הציון, שרבע מהציונים נמוכים ממנו (רבעון תחתון).
4. סדרת מספרים מתפלגת נורמלית עם סטיית תקן 20.
 - א. חשבו את הממוצע.
 - ב. (היעזרו בשרטוט העקומה והצירים)
 - ג. מה ההסתברות, שאיבר שנבחר באקראי מסדרה זו, יהיה נמוך מ-80?
 - ד. מה ההסתברות **שמשני** איברים שנבחרו באקראי מסדרה זו, יהיה האחד נמוך מ-80 והשני גבוה מ-80?

5. הישגים בקפיצה לגובה, של בנים בגיל תיכון, מתפלגים נורמלית עם ממוצע 1.45 מ'.

לקפיצה של 1.50 מ' מתאים ציון תקן של 0.5 .

א. מהי סטיית התקן ?

ב. מה ההסתברות, לבחור באקראי נער, שההישג שלו בקפיצה לגובה הוא בין 1.30 מ' ל- 1.70 מ'.

6. התוצאות במבחני משוב מתפלגות נורמלית.

במבחן המשוב במתמטיקה קיבל אבי ציון 70 .

הממוצע הארצי במבחן היה 60 וסטיית התקן 5.

במבחן המשוב בעברית קיבל אבי 85.

הממוצע הארצי במבחן היה 73 וסטיית התקן 7.5.

באיזה משני המבחנים, יש אחוז גדול יותר של תלמידים שקיבלו ציון גבוה מזה של אבי.

7. ציונים של מבחני כניסה, למוסד להשכלה גבוהה, מתפלגים נורמלית.

א. בשנה מסוימת התקבלו למוסד 30% מהנבחנים. (בעלי ההישגים הגבוהים ביותר).

הממוצע במבחן היה 77 וסטיית התקן 12.

דני קיבל 83. האם הוא התקבל ללימודים?

ב. בשנה שלאחר מכן נרשם דני לאותו מוסד, על סמך המבחן בו נבחן שנה קודם. (הציון שקיבל 83). בשנה זו התקבלו רק 25% מהנבחנים.

הממוצע היה שוב 77 וסטיית התקן 8.5. האם הפעם דני התקבל ?

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.0	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
-2.9	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001
-2.8	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
-2.7	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003
-2.6	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004
-2.5	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005
-2.4	0.008	0.008	0.008	0.008	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.006
-2.3	0.011	0.010	0.010	0.010	0.010	0.009	0.009	0.009	0.009	0.008
-2.2	0.014	0.014	0.013	0.013	0.013	0.012	0.012	0.012	0.011	0.011
-2.1	0.018	0.017	0.017	0.017	0.016	0.016	0.015	0.015	0.015	0.014
-2.0	0.023	0.022	0.022	0.021	0.021	0.020	0.020	0.019	0.019	0.018
-1.9	0.029	0.028	0.027	0.027	0.026	0.026	0.025	0.024	0.024	0.023
-1.8	0.036	0.035	0.034	0.034	0.033	0.032	0.031	0.031	0.030	0.029
-1.7	0.045	0.044	0.043	0.042	0.041	0.040	0.039	0.038	0.038	0.037
-1.6	0.055	0.054	0.053	0.052	0.051	0.049	0.048	0.047	0.046	0.046
-1.5	0.067	0.066	0.064	0.063	0.062	0.061	0.059	0.058	0.057	0.056
-1.4	0.081	0.079	0.078	0.076	0.075	0.074	0.072	0.071	0.069	0.068
-1.3	0.097	0.095	0.093	0.092	0.090	0.089	0.087	0.085	0.084	0.082
-1.2	0.115	0.113	0.111	0.109	0.107	0.106	0.104	0.102	0.100	0.099
-1.1	0.136	0.133	0.131	0.129	0.127	0.125	0.123	0.121	0.119	0.117
-1.0	0.159	0.156	0.154	0.152	0.149	0.147	0.145	0.142	0.140	0.138
-0.9	0.184	0.181	0.179	0.176	0.174	0.171	0.169	0.166	0.164	0.161
-0.8	0.212	0.209	0.206	0.203	0.200	0.198	0.195	0.192	0.189	0.187
-0.7	0.242	0.239	0.236	0.233	0.230	0.227	0.224	0.221	0.218	0.215
-0.6	0.274	0.271	0.268	0.264	0.261	0.258	0.255	0.251	0.248	0.245
-0.5	0.309	0.305	0.302	0.298	0.295	0.291	0.288	0.284	0.281	0.278
-0.4	0.345	0.341	0.337	0.334	0.330	0.326	0.323	0.319	0.316	0.312
-0.3	0.382	0.378	0.374	0.371	0.367	0.363	0.359	0.356	0.352	0.348
-0.2	0.421	0.417	0.413	0.409	0.405	0.401	0.397	0.394	0.390	0.386
-0.1	0.460	0.456	0.452	0.448	0.444	0.440	0.436	0.433	0.429	0.425
-0.0	0.500	0.496	0.492	0.488	0.484	0.480	0.476	0.472	0.468	0.464
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.864	0.867	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.900	0.901
1.3	0.903	0.905	0.907	0.908	0.910	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918
1.4	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932
1.5	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944
1.6	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954
1.7	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961	0.962	0.962	0.963
1.8	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.971
1.9	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977
2.0	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982
2.1	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986
2.2	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.3	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992
2.4	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994
2.5	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
2.6	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
2.7	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
2.8	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
2.9	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999
3.0	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999

טבלה של
התפלגות
נורמלית
מצטברת



מבחר תשובות

חזרה על מדדי פיזור

6. (א) 150 (תורמים ג) התרומה המתאימה לסטיית תקן אחת מעל לממוצע היא 340 ש"ח, בין 40 ל- 45 עובדים תרמו סכום זה (ד) 2 סטיות ממעל לממוצע: 430 ש"ח (ה) 160 ש"ח (ו) בין 90 ל- 100 תרומות
7. (ה) השונות 0.74, סטיית התקן: 0.86
8. (ב) הממוצע 7.17 (ד) השונות 1.34, סטיית התקן: 1.16
9. (א) סטיית התקן של רונית: 18.7 (ב) סטיית התקן של שי: 21.2 (ג) סטיית התקן של חן: 0
10. (א) סטיית התקן של עמית: 18.37 (ב) חן: 0, עמית: 18.37, רונית: 18.7, שי: 21.2
11. (א) בכל הסדרות הממוצע 8. (i) $s = 2$ (ii) $s = 1.63$ (iii) $s = 1.41$ (iv) $s = 0.85$ (v) (ב) עבור 6 פעמים 8 תתקבל סטיית תקן 1 (ג) לא
12. (א) הממוצע של דן: 78.75, של רונן: 70 (ג) סטיית התקן של דן: 7.39, של רונן: 25.49
13. (א) ממוצע הגבהים של הבנים: 175.08 ס"מ, וסטיית התקן: 10.9 (ב) ממוצע הגבהים של כל התלמידים בכיתה: 169.67 ס"מ (ד) סטיית התקן של הכיתה כולה: 11.74
14. (א) הציון המתאים לסטיית תקן אחת מעל לממוצע: 87, לסטיית תקן אחת מתחת לממוצע: 53
15. הממוצע 1.71, סטיית התקן 0.77
16. (ב) סטיית התקן בגרף (i) גדולה יותר

מגרף שכיחויות להתפלגות נורמלית

5. (א) 0.841 (ב) 0.579 (ג) 0.097 (ד) 0.933, 0.067, 0.866 (ה) 77.3%
6. (א) 0.308 (ב) 0.692 (ג) 0.227 (ד) 0.227 (ה) 0.546 (ו) 0.919 (ז) 0.242 (ח) 0.677
7. (א) 0.115 (ב) 0.023 (ג) 0.773 (ד) 0.384 (ה) 0.241 (ו) 0.625 (ז) 0.23

ציון תקן

1. (א) ל- 178 מתאים +1, ל- 162 מתאים -1, ל- 174 מתאים 0.5, ל- 158 מתאים -1.5, ל- 154 מתאים -2, ל- 180 מתאים 1.25, ל- 194 מתאים 3, ל- 152 מתאים -2.25, ל- 164 מתאים -0.75
2. (א) $2\frac{1}{3}$ (ג) $-1\frac{2}{3}$ (ד) $\frac{5}{6}$ (ה) -2.5
3. הציון 65 טוב יותר יחסית מהציון 72
4. (ג) 62.9%, 37.1%, 37.1%, 62.9%, 25.8%, 74.9%
5. (ב) 15.9% (ג) 0.159 (ד) 0.498, 0.749, 0.749 (ה) ציון ה I.Q. המתאים 137.5, אחוז האוכלוסיה מעליו 0.6%
6. (א) הממוצע 8.5 (ב) 15.9% (ג) 0.159
7. (ב) $0.5, \frac{1}{3}, -1, -2, 2, -1\frac{1}{3}$ (ג) 6.25 (ד) 8.875 (ה) 5.8
8. (ב) 1.125, 1.75, -0.75, -1.375
9. (ג) 69.2%, 30.8%, 87.1%, 77.3%, 64.4%, 4%
9. (ב) 30.9%, 0.7%, 0%, 40.8%
10. (א) 3720

11. א) 65 ב) 83
12. א) הממוצע 900 מ"ל ב) 98.6% ג) 21.2%

מאחז האוכלוסיה לציון תקן

1. א) 0.5 ב) -1.28
2. א) 0.67 ב) 0.67 ג) 0.25 ד) -0.25
3. א) 0.67 ב) 71.35 ג"ד) 63.8 ק"ג ה) 63.8 ק"ג
4. א) הממוצע 70 ב) ציון תקן -0.67, ציון אמיתי 63.3 ג) ציון תקן 0.67, ציון אמיתי 76.7
5. א) 80.5 ב) 71.3 ג) 71.3 ד) 82.7
6. א) הממוצע 165 ב) ציון תקן -0.25, הגובה 163.5 ס"מ
7. א) הממוצע 225 ב) ציון תקן 0.52, הישג בקפיצה 230.2 ס"מ ג) 0.067

ההתפלגות הנורמלית - תרגילים נוספים

1. א) 0.734 ב) 0.539 ג) 0.392
2. א) 83 ב) 0.774 ג) 0.599
3. א) 0.67 ב) 74 ג) 66
4. א) הממוצע 59 ב) 0.853 ג) 0.25
5. א) 0.1 ב) 0.927
6. במבחן בעברית
7. א) בשנה הראשונה לא התקבל, כי 30.8% נמצאים מעליו ב) בשנה השנייה התקבל, כי רק 24% נמצאים מעליו



לוי חזקל

אשכול התמצאות במישור ובמרחב הנדסת המרחב



תוכן העניינים - הנדסת המרחב

37.....	זוויות ישרות במרחב
47.....	מנסרות
54.....	מבנים מקוביות
61.....	נפח
74.....	מבטים שונים של מבנים
79.....	פירמידות
95.....	גופי סיבוב
99.....	גליל
109.....	חרוט
117.....	כדור

1. הסתכלו בפינה של החדר ובדקו כמה זוויות ישרות אתם רואים שם.
2. למעשה כל אחד יודע מהו **אנך** (ניצב) למישור ומהו **משופע** למישור. נשתמש בידע הזה כדי להגדיר במונחים מתמטיים את המושגים האלה.

ה'עליון הקיסמיס וחתיכת קלקר.

א. נעצו קיסם בקלקר כך שיהיה **משופע** לקלקר.

שרטטו על הקלקר, דרך עקב המשופע, ישר שייצור זווית ישרה עם המשופע.

שרטטו דרך עקב המשופע ישר אחר. האם גם הוא יוצר זווית ישרה עם המשופע?

נסו לשרטט ישר נוסף שייצור זווית ישרה עם המשופע.

ב. נעצו בקלקר קיסם מאונך לקלקר.

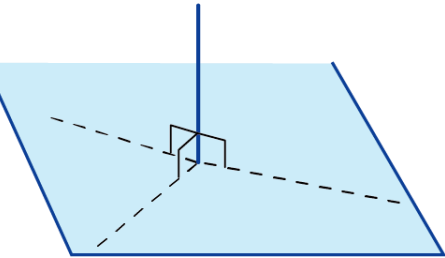
שרטטו על הקלקר, ישר כלשהו דרך עקב הקיסם המאונך לקלקר. האם הוא יוצר זווית

ישרה עם הקיסם המאונך?

שרטטו על הקלקר ישרים נוספים דרך עקב הקיסם המאונך לקלקר. האם הם יוצרים

זוויות ישרות עם הקיסם המאונך?

נסו לשרטט על הקלקר, ישר **שלא** יהיה מאונך לקיסם הזה. האם הצלחתם?

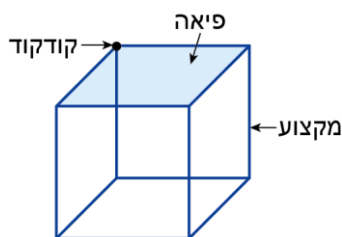


אנך למישור מאונך לכל הישרים במישור.

המרחק של נקודה ממישור הוא אורך האנך מהנקודה אל המישור (הקטע הקצר ביותר)

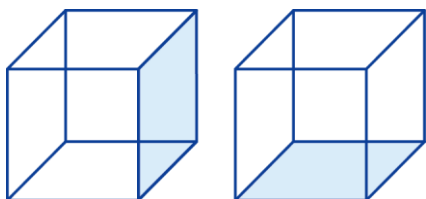
משופע למישור יוצר זווית ישרה רק עם ישר אחד במישור העובר דרך עקבו.

1. בנו לכם קוביית קיסמים: שרטטו על הקלקר ריבוע, שאורך צלעו פחות מאורך קיסם והעמידו בקודקודים קיסמים מאונכים למישור הקלקר כך שיתקבל דגם של קובייה (ללא מכסה) – "קוביית קיסמים".

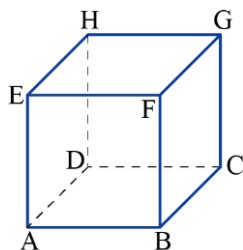


2. לפניכם שרטוט של קובייה.

- א. - כמה קודקודים לקובייה?
- כמה פאות לקובייה?
- כמה מקצועות לקובייה?
- ב. איזו צורה יש לכל פיאה בקובייה?



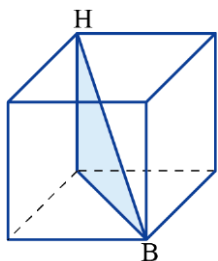
3. צבעו בשרטוטים שלפניכם את כל המקצועות המאונכים למישור הצבוע. (היעזרו בקוביית הקיסמים שבניתם).



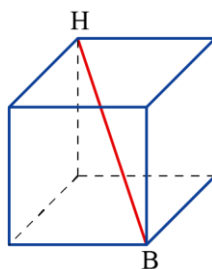
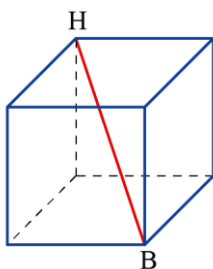
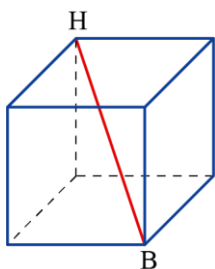
4. א. - האם הקודקודים H ו-A נמצאים על אותה פיאה?
 - האם הקודקודים H ו-G נמצאים על אותה פיאה?
 - האם הקודקודים H ו-B נמצאים על אותה פיאה?

אלכסון של קובייה הוא קטע, המחבר שני קודקודים שאינם נמצאים על אותה פיאה.

- ב. הוסיפו אלכסון בקובייה שבניתם.
 ג. אילו מבין הקטעים הבאים הם אלכסונים של הקובייה (אינם אלכסוני פאות) המשוורטטת בתרגיל 4:
 BH , AG , CH , DB , DF , HF , AC , EC
 ד. כמה אלכסונים לקובייה?



5. לפניכם שרטוט של קובייה ובתוכה משולש ישר זווית, שאחד מניצביו מקצוע של הקובייה, הניצב השני אלכסון של פיאה, והיתר אלכסון של קובייה.
 א. היעזרו בקובייה שבניתם והשלימו בכל אחד מהשרטוטים הבאים משולש, שבו אחת הצלעות היא BH (אלכסון של הקובייה) הצלע השנייה היא אלכסון של פיאה והצלע השלישית מקצוע של הקובייה.

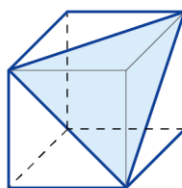


- ב. סמנו זווית ישרה בכל משולש ששרטטתם.
 ג. מה תוכלו לומר על כל המשולשים ששרטטתם? נמקו.

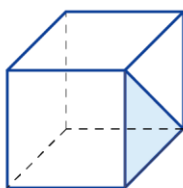
6. א. - זהו וסמנו זוויות ישרות (במידה ויש כאלה) בתוך המשולשים המודגשים (היעזרו בקוביית הקיסמים).

- רשמו מאיזה סוג כל משולש.

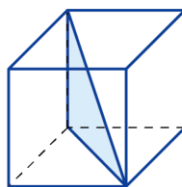
א.



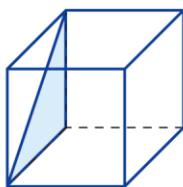
ב.



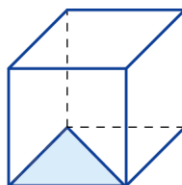
ג.



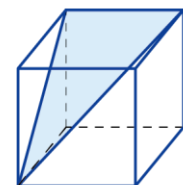
ד.



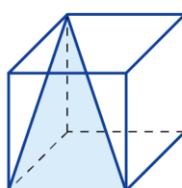
ה.



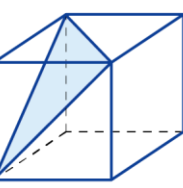
ו.



ז.

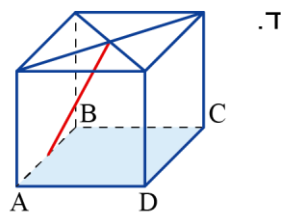
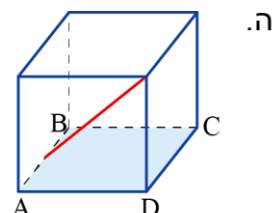
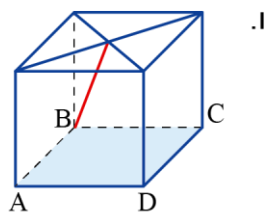
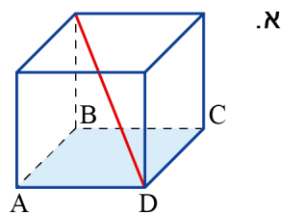
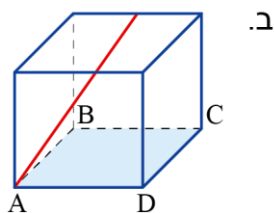
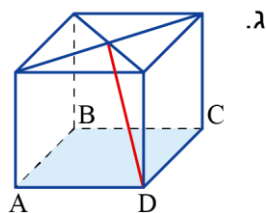


ח.



ב. חברו בקו שרטוטים בהם המשולשים המודגשים חופפים.

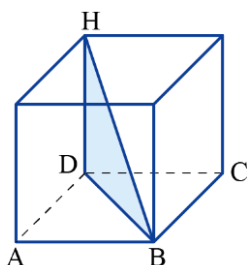
7. שרטטו אנך מהקצה העליון של המשופע (צבוע אדום) למישור הצבוע והשלימו למשולש ישר זווית בו הקטע המודגש הוא היתר והאנך ששרטטתם אחד הניצבים. (היעזרו בקוביית הקיסמים שבניתם על הקלקר). סמנו את הזווית הישרה במשולש.



חישובים בקובייה

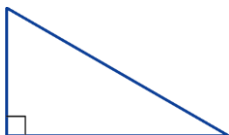
8. א. ציינו את כל הקטעים המאונכים לקטע HD?

שימו לב! בכל חישוב דייקו עד ספרה אחת לאחר הנקודה העשרונית.

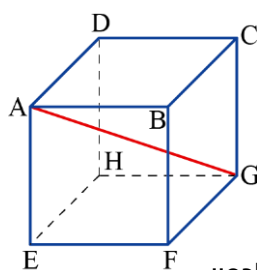


ב. אורך מקצוע הקובייה 5 ס"מ.

- שרטטו את הפיאה ABCD בצד.
- חשבו את אלכסון הפיאה BD, (על-פי משפט פיתגורס).
- סמנו בשרטוט של הקובייה, זווית ישרה ב- $\triangle HDB$.
- רשמו H, D, B במקומות המתאימים בשרטוט של המשולש
- רשמו את גודל הצלעות HD ו- DB.
- חשבו את אלכסון הקובייה HB.



בשרטוט המרחבי, משולש ישר זווית נראה לעיתים כקהה זווית או חד זווית, וריבוע או מלבן נראים לעיתים כמקביליות שאינן מלבנים. לכן, לפני החישוב כדאי לשרטט בצד את המשולשים או המרובעים, בצורתם הנכונה.

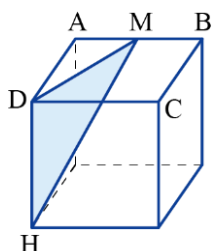


9. א. שרטטו בשרטוט הקובייה משולש ישר זווית, שצלעותיו AC,

אלכסון פיאה ומקצוע של הקובייה.

ב. אורך מקצוע הקובייה 17 ס"מ.

- שרטטו בצד את הפיאה בה העברתם אלכסון וחשבו את אלכסון הפיאה.
- שרטטו בצד את המשולש ישר זווית מסעיף א' וחשבו את אלכסון הקובייה.



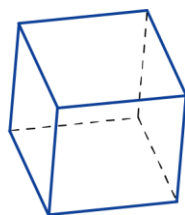
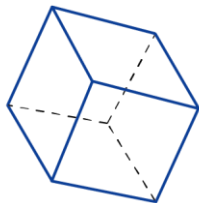
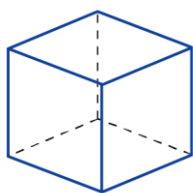
10. א. אורך מקצוע של קובייה 20 ס"מ.

M אמצע AB.

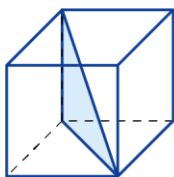
- סמנו במשולש המודגש את הזווית הישרה.
- שרטטו בצד את המשולשים ADM ו-HDM.
- חשבו את אורך DM ואת אורך MH.

ב. שרטטו בקובייה משולש נוסף החופף ל- $\triangle HDM$.

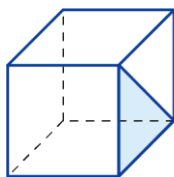
11. העבירו, בכל שרטוט, אלכסון של הקובייה ואלכסון של פיאה היוצאים מאותו קודקוד.



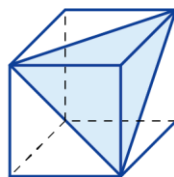
12. לפניכם שלושה שרטוטים של קוביות זהות ובתוך כל אחת שרטוט של משולש. א. שערו, לאיזה מהמשולשים היקף גדול ביותר ולאיזה מהם היקף קטן ביותר.



קוביה 3



קוביה 2

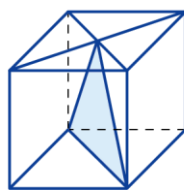
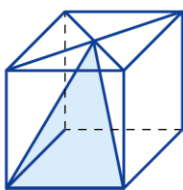
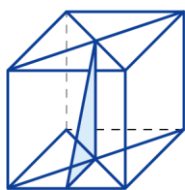


קוביה 1

ב. חשבו, את היקפי המשולשים המודגשים, אם ידוע שאורך מקצוע הקובייה 10 ס"מ, ובדקו את השערתכם.

13. בקוביית הקסמים שעל משטח הקלקר, הוסיפו קסמים לפי הצורך וקבעו מאיזה סוג המשולש המודגש.

חשבו את היקף ואת השטח של המשולשים המודגשים אם אורך צלע הקובייה 10 ס"מ.



1. בנו על הקלקר קטע AC משופע למישור וקטע AB מאונך למישור. חברו את CB על הקלקר וכאן בשרטוט. סמנו את הזווית הישרה בשרטוט.

CB הוא ההיטל של AC על מישור הקלקר.

2. במהלך שיפוץ מבנה ישן העמידו מוט תומך בקיר. שרטטו מקצה המוט אנך לקרקע ושרטטו את ההיטל של המוט.



3. AC משופע למישור.

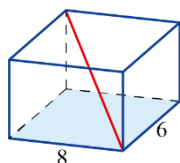
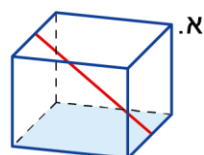
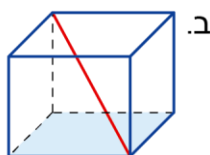
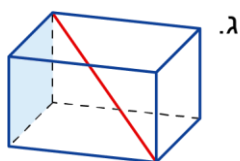
- א. שרטטו מהנקודה A אנך למישור (כדי לקבל שרטוט "מדגים" משרטטים את האנך קצר מהמשופע). שרטטו את ההיטל של AC על המישור.
- ב. אורך המשופע 10 ס"מ ואורך ההיטל שלו על המישור 6 ס"מ. חשבו את מרחק הנקודה A מהמישור.

4. מרחק נקודה A ממישור 4 ס"מ ואורך משופע מ-A למישור 7 ס"מ. שרטטו וחשבו את אורך ההיטל של המשופע על המישור.

5. א. האם ייתכן שהיטל של קטע יהיה באורך הקטע עצמו? הסבירו.
 ב. האם ייתכן שהיטל של קטע יהיה ארוך מהקטע עצמו? הסבירו.
 ג. האם ייתכן שהיטל של קטע יהיה נקודה? הסבירו.

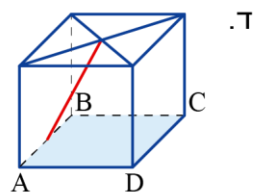
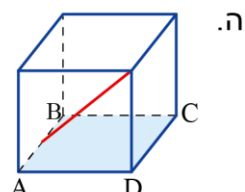
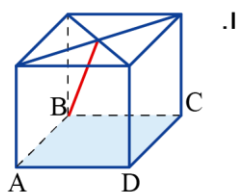
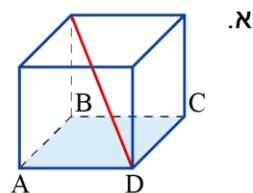
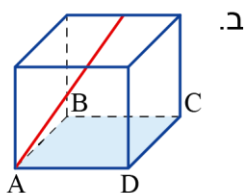
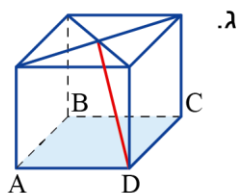
6. א. שרטטו על קלקר קטע AB.
 נעצו ב-A וב-B שני קיסמים משופעים כך שאורך ההיטל של כל אחד מהמשופעים יהיה כמחצית AB.
 ב. נעצו ב-A וב-B שני קיסמים משופעים כך שהקטע AB יהיה סכום היטליהם והם יהיו שונים באורכם.

7. שרטטו אנך מ-A למישור הצבוע ואת ההיטל של הקטע המודגש על המישור הזה.



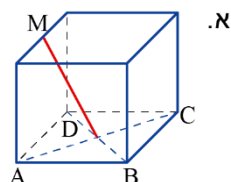
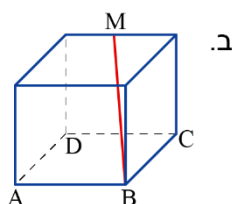
8. לפניכם שרטוט של תיבה. שרטטו את ההיטל של אלכסון התיבה משורטט על הפיאה הצבועה וחשבו על פי הנתונים את אורך ההיטל ואת אורך המקצוע השלישי של התיבה.

9. שרטטו בכל קובייה את ההיטל של הקטע הצבוע אדום על הפיאה ABCD.



10. בכל סעיף הנקודה M היא אמצע מקצוע של קובייה. שרטטו את ההיטל של הקטע המודגש

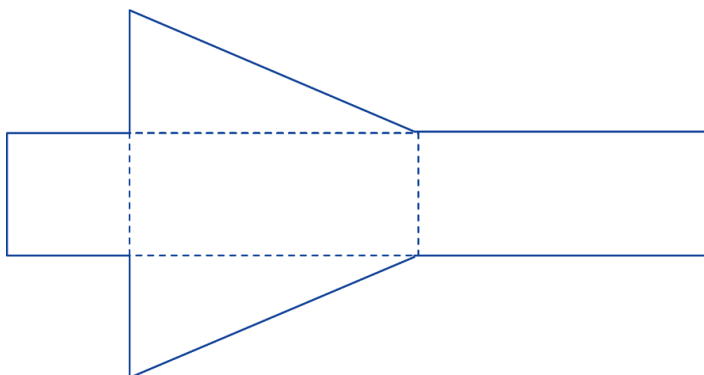
על הפיאה ABCD.



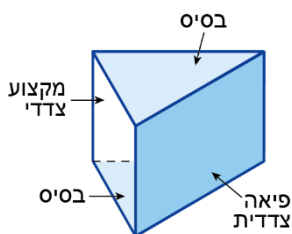
שרטטו את הפיאה ABCD בצד. שרטטו את ההיטל ששרטטתם וחשבו את אורכו אם נתון שאורך צלע הקובייה 10 ס"מ.

בנייה ושרטוט מנסרות

1. א. בנו מנסרה מהפריסה שלפניכם.



ביתם מנסרה משולשת – מנסרה שבסיסה משולש.



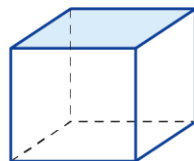
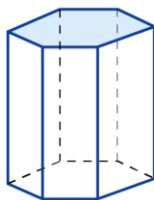
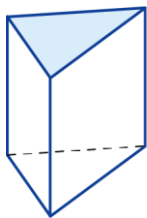
ב. כעת בנו מנסרת קיסמים:

שרטטו מרובע על משטח קלקר, ונעצו בקודקודיו קיסמים שווי אורך, המאונכים למשטח.

יצרתם מנסרת קיסמים שבסיסה מרובע.

ג. חזרו על הבניה כשעל הקלקר משורטט מחומש.

גוף החסום על-ידי שני מצולעים חופפים המקבילים זה לזה והמקצועות הצדדיים מאונכים למקצועות המצולעים החופפים, נקרא **מנסרה ישרה**.
המצולעים החופפים הם בסיסי המנסרה.



2. א. אילו מרובעים הם הפיאות הצדדיות של מנסרה ישרה?

ב. איך נקראת מנסרה ישרה שבסיסה מלבנים?

ג. איך נקראת מנסרה ישרה שכל פיאותיה ריבועים?

ד. האם קיימת מנסרה ישרה שבסיסה ריבועים ואינה קובייה? איך נקראת מנסרה כזו?

ה. יצרו אוהל סירים משמיכה. האם האוהל הוא מנסרה?



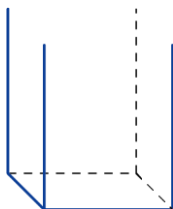
כדי שתתקבל תמונה טובה של הגוף לא תמיד משרטטים את הבסיסים והפיאות הצדדיות של מנסרות על-פי הנתונים.



3. א. השלימו שרטוט של תיבה.

מה צורת הבסיסים של תיבה?

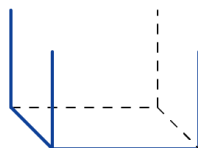
מה צורת הפיאות הצדדיות?



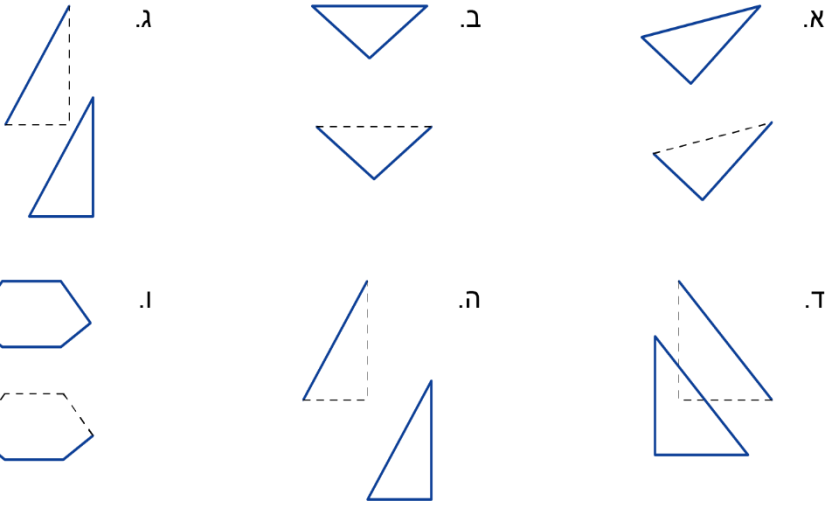
ב. השלימו שרטוט של קובייה.

מה צורת הבסיסים של

מה צורת הפיאות הצדדיות?

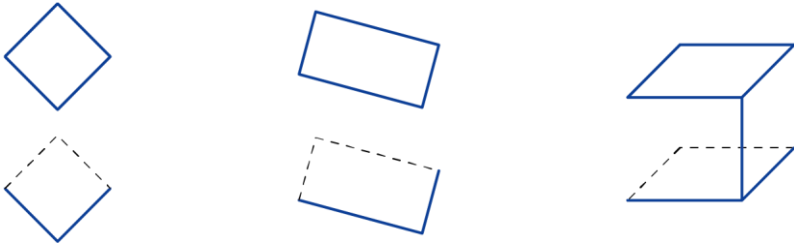


4. השלימו את שרטוט המנסרות על-פי הבסיסים הנתונים.



תיבה היא מנסרה שבסיסה מלבנים. קובייה היא תיבה שכל פיאותיה ריבועים

5. א. השלימו את שרטוט התיבות הבאות על ידי חיבור קודקודים "מתאימים".



ב. יעל שרטטה את בסיסי התיבה כמלבנים.

נסו להשלים את שרטוט התיבה.

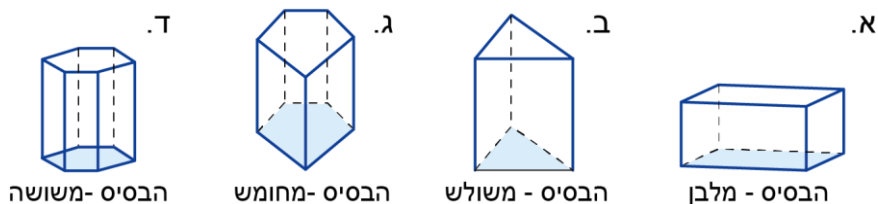
מה דעתכם על השרטוט?



כל הפיאות של תיבה הן מלבנים אך לא כולן משורטטות כמלבנים.

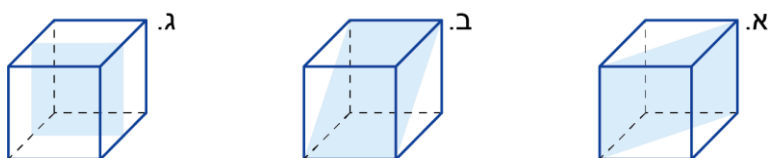


6. כמה אלכסונים, שאינם אלכסוני פיאות, יש לכל אחת מהמנסרות המשורטטות.



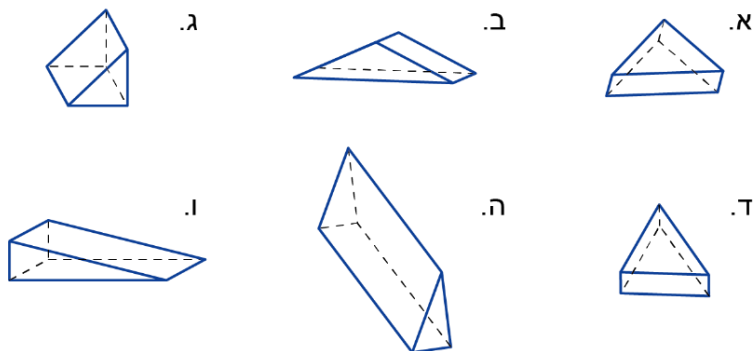
7. חילקו את הקובייה על-פי החתך הצבוע.

תארו את הגופים שהתקבלו.



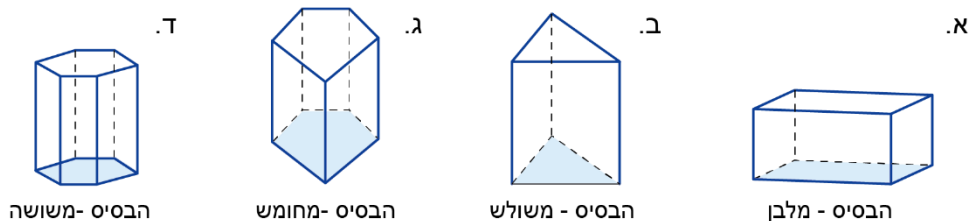
8. סמנו באותיות את קודקודי הבסיסים של כל מנסרה.

מה משותף לכל המנסרות המשורטטות?

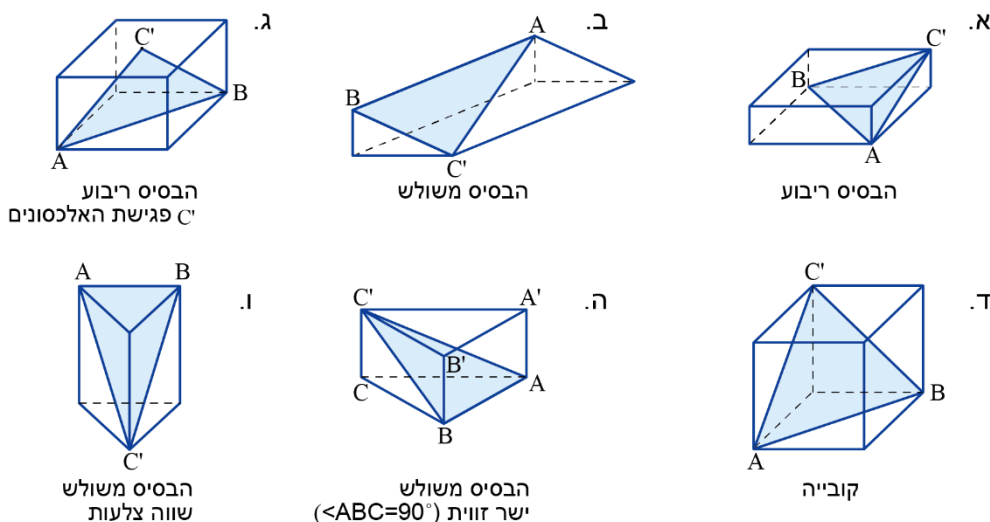


סמנו שלוש זוויות ישרות במנסרות א, ב, ו-ה.

9. כמה אלכסונים שאינם אלכסוני פאות, יש לכל אחת מהמנסרות המפורטות?



10. קבעו, על סמך הנתונים, מאיזה סוג המשולש הצבוע בכל מנסרה.



11. רשמו לגבי כל טענה אם היא נכונה או לא.

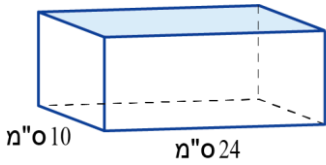
א. קובייה היא מנסרה.

ב. תיבה היא מנסרה.

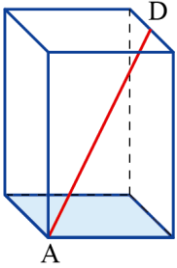
ג. מספר המקצועות של מנסרה הוא תמיד 12.

ד. מספר המקצועות הצדדיים של מנסרה הוא כמספר קודקודי הבסיס.

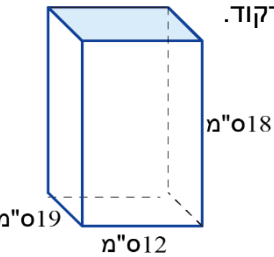
ה. מספר מקצועות המנסרה הוא פי 3 ממספר מקצועות הבסיס.



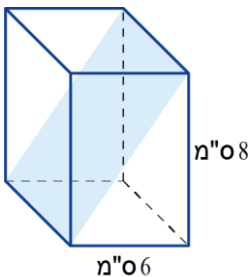
12. השתמשו בקלקר ובקיסמים ובנו תיבת קיסמים. בנו את אלכסון התיבה וחשבו את אורכו. (שרטטו תחילה את אלכסון הבסיס על הקלקר.)



13. נתונה מנסרה שבבסיסה ריבוע שאורך צלעו 4 ס"מ. גובה המנסרה 6 ס"מ. הנקודה D היא אמצע צלע הפיאה העליונה של התיבה. חשבו את אורך הקטע AD. (בנו את התיבה על הקלקר, כולל הקטע AD, וקטעים נוספים הדרושים במהלך החישוב.)

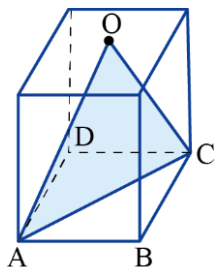


14. א. שרטטו בתיבה אלכסון פיאה ואלכסון של התיבה היוצאים מאותו קודקוד. (היעזרו בבניית דגם קיסמים והקלקר.)
ב. חשבו את אלכסון התיבה.



15. בתוך תיבה, שבבסיסה ריבוע, העבירו מישור כבשרטוט.
א. מה צורת השטח הצבוע?
היעזרו בקיסמים ובקלקר.
ב. חשבו את השטח הצבוע.

16. הנקודה O היא נקודת פגישה של אלכסוני הבסיס העליון במנסרה. הבסיסים הם ריבועים שאורך הצלע שלהם 10 ס"מ. גובה המנסרה 21 ס"מ. חשבו את שטח המשולש



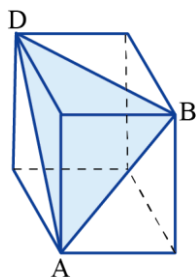
17. בסיס תיבה הוא ריבוע שאורך צלעו 8 ס"מ.

גובה התיבה 10 ס"מ.

א. מאיזה סוג משולש ADB?

ב. חשבו את צלעותיו.

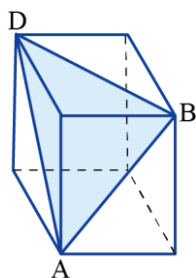
ג. חשבו את שטחו.



18. אורך מקצוע של קובייה 5 ס"מ.

א. מאיזה סוג משולש ABD?

ב. חשבו את אורכי הצלעות והגדלים של זוויות משולש ABD.

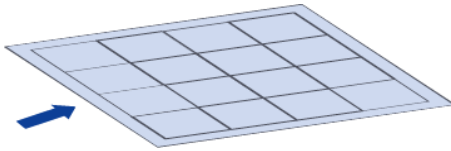


- כתבו את הכתובת: www.fi.uu.nl/wisweb.

- כשייפתח האתר, הקישו על  (אנגלית).

- אחר כך הקישו על applets (יישומונים).

- כשייפתח הדף, הקישו על applets ותקבלו רשימה של יישומונים.



- הקישו על **Building with blocks**

על המסך מופיע לוח של 16 משבצות.

לכל מבנה אפשר לשרטט "מפה" על פיה ניתן לבנות את המבנה.

במקום בו רשום 3, יש להניח 3 קוביות זו על גבי זו.

1. בנו עליה מבנים לפי המפות הבאות: (הבנייה מתבצעת על-ידי הקשה על עכבר במשבצת המתאימה. מחיקת קובייה מתבצעת על-ידי הקשה ממושכת על העכבר בקובייה המתאימה.) (אל תתייחסו בשלב זה לשאלות של היישומון.)

		2	1
			3

			1
2	1	1	3

	2	1	2
	3		

מה פירוש "מבנים זהים"?

הכוונה במבנים זהים למבנים שניתן לסובב את "הרצפה" עליה מונח אחד המבנים, או לשקף אותו (להסתכל עליו במראה) או לבצע את שתי הפעולות האלה גם יחד, ולקבל בדרך זו בדיוק אותו מראה של המבנה.

2. בדקו איזה מבין המבנים הבאים הם מבנים זהים. תוכלו לבדוק באמצעות בנייתם.

ב.

	2		
	1		
2	3		

א.

			2
	2	1	3

ד.

3	1	2	
2			

ג.

2	1	3	
2			

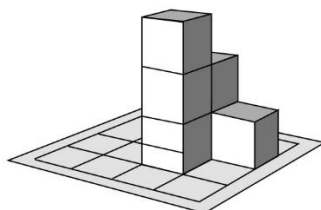
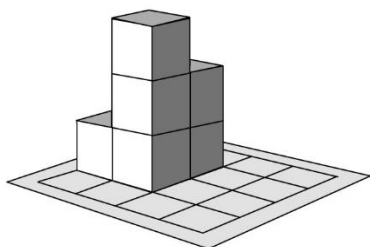
בתרגיל זה כל הקוביות נראות בתמונה או שידוע כי הן קיימות מאחר והן חייבות להימצא מתחת לקובייה נראית.



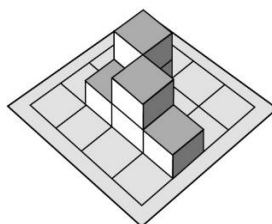
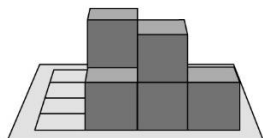
3. בנייה לפי תמונה: בנו כל זוג מבנים ובדקו אם הם זהים.

בנו את המבנים ביישומון **על Building with blocks** (הבנייה מתבצעת על-ידי הקשה על עכבר במשבצת המתאימה. מחיקת קובייה מתבצעת על-ידי הקשה ממושכת על העכבר בקובייה המתאימה.)

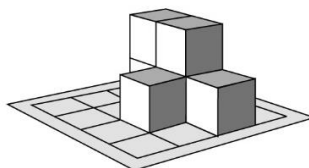
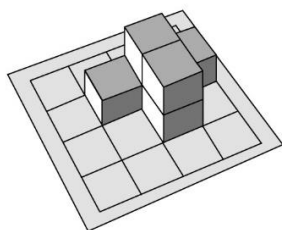
א.



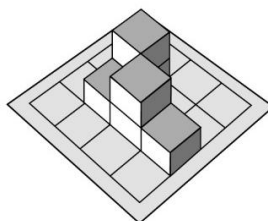
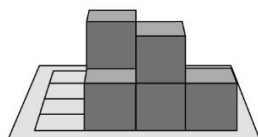
ב.



ג.

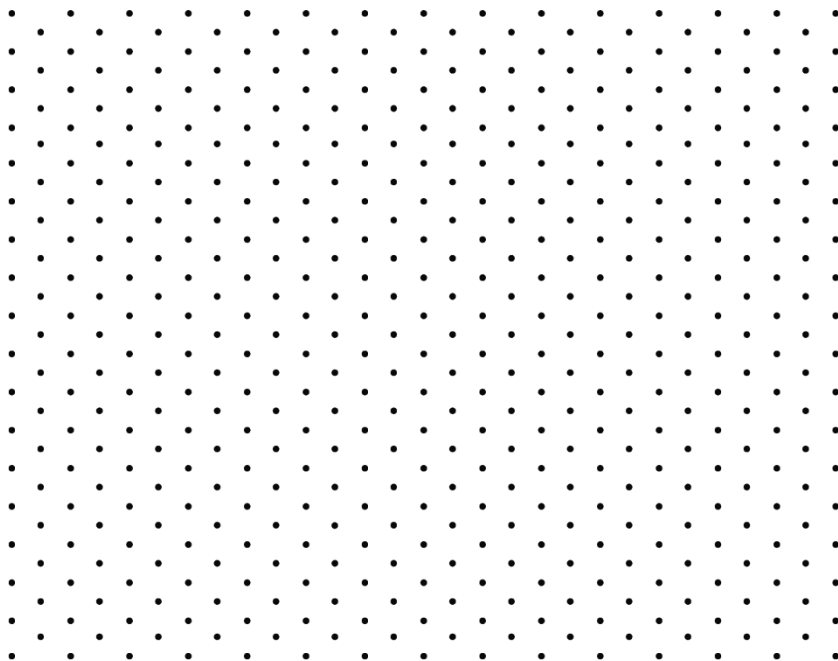


ד.



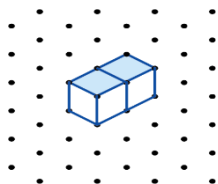
4. לפניכם דף נקודות איזומטרי:

א. העתיקו על הדף את השרטוט של הקובייה.

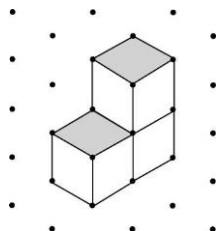


ב. הוספנו קובייה באותה שורה. ראו שרטוט.

הוסיפו בשרטוט שלכם (בדף הנקודות), שתי קוביות נוספות בשורה של הקובייה ששרטטתם.



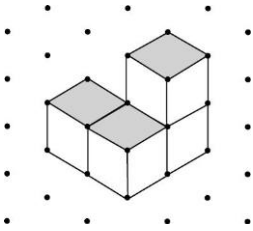
ג. כעת הוסיפו קובייה בקומה השנייה. ראו שרטוט.



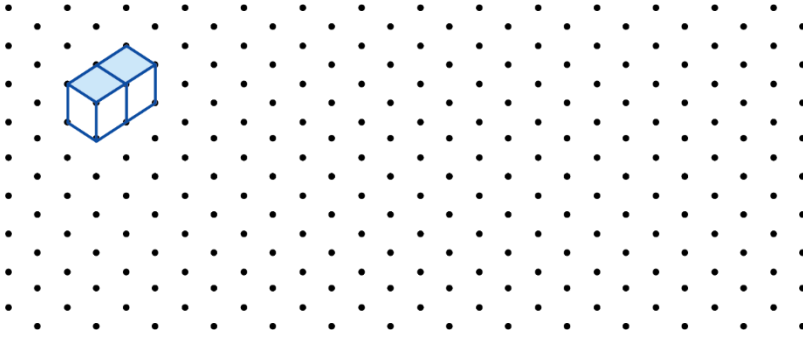
ד. הוסיפו למבנה שלכם קובייה בקומה ראשונה

אך בשורה אחרת, ראו שרטוט.

הוסיפו קובייה זו גם בשרטוט שלכם.



ה. העתיקו מבנה של שתי קוביות כבשרטוט.



- הוסיפו לשרטוט קובייה כך ששלוש הקוביות תהיינה מונחות בשורה.

- הוסיפו לשרטוט קובייה רביעית, כך שהקובייה הרביעית לא תהיה באותה שורה, אך

תהיה באותה קומה ומחוברת למבנה.

- הוסיפו קומה שנייה לכל המבנה ששרטטתם.

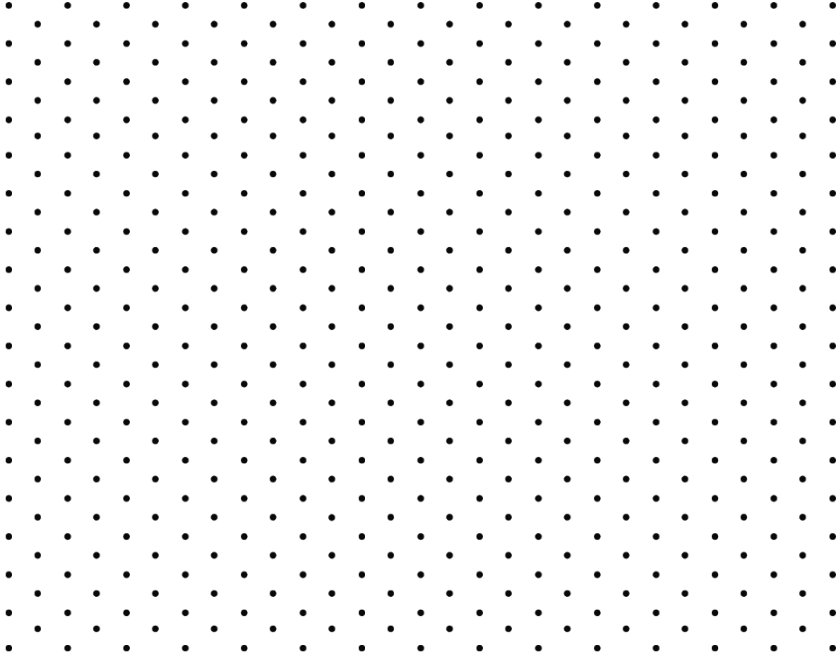
5. א. שרטטו מבנים על פי המפות. (תוכלו להיעזר בבניית המבנים)

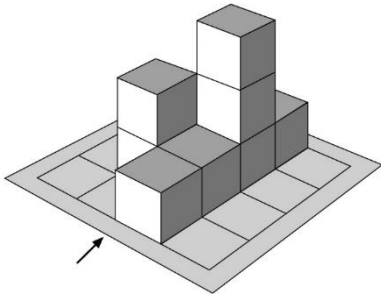
א.

		1	
	1	2	

ב.

	2	1	

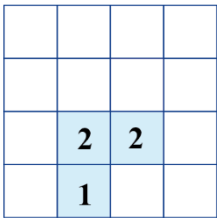




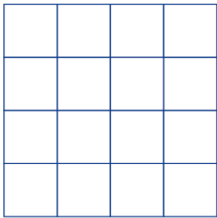
6. א. בנו על המסך את המבנה המופיע בתמונה.

ב. סובבו את התמונה שעל המסך, הוסיפו במבנה קוביות שלא תראנה מהכיוון שבתמונה. סובבו בחזרה.

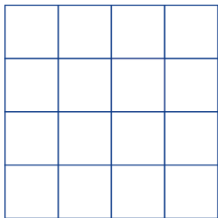
כמה קוביות הצלחתם להסתיר?



↑
מפת המבנה



↑
מפת המבנה



7. א. בנו על מסך המחשב, מבנה על-פי המפה.

שימו לב למקום החץ. סובבו את המבנה ובדקו כיצד נראה המבנה מכיוונים שונים.

ב. הוסיפו קובייה, כך שהמבנה יראה מלפנים כמו קודם. שרטטו את המפה החדשה של המבנה.

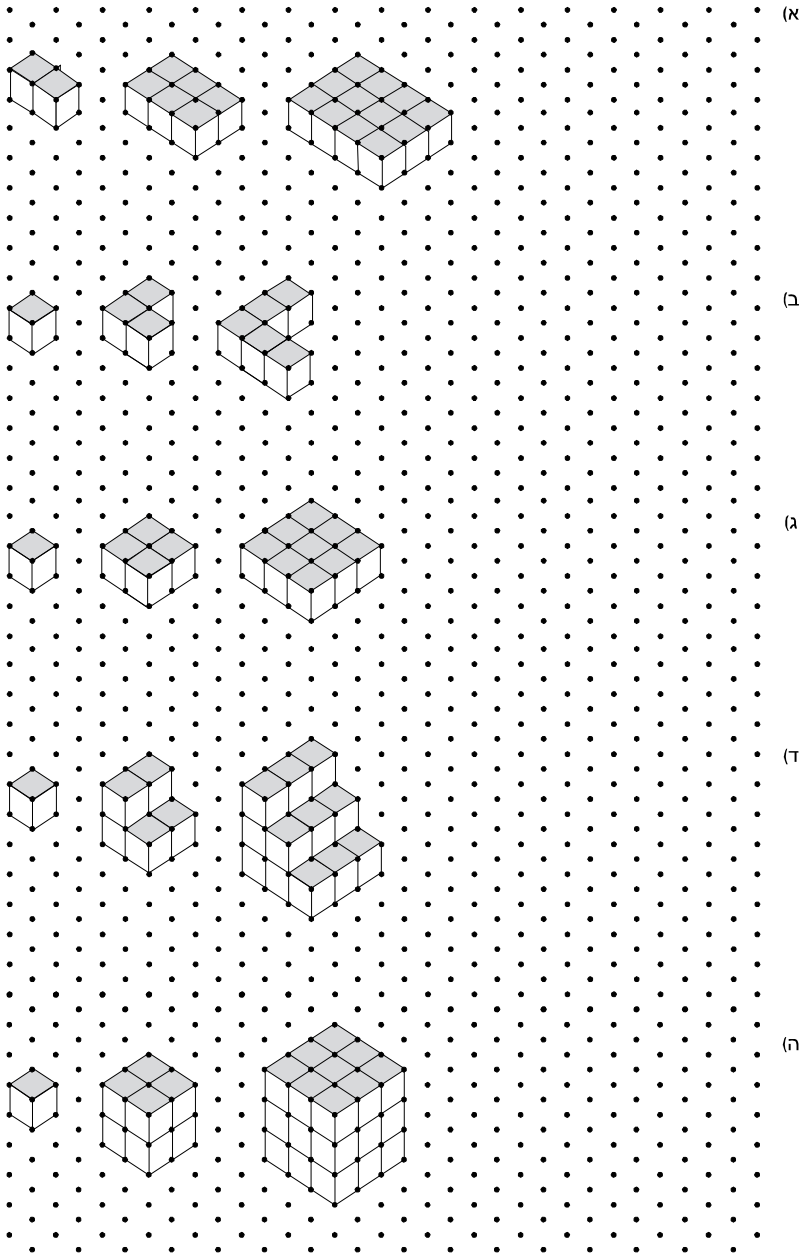
ג. הסתירו קוביות רבות ככל האפשר.

(הוסיפו קוביות וסובבו את הרצפה כרצונכם). שרטטו מפה מתאימה.

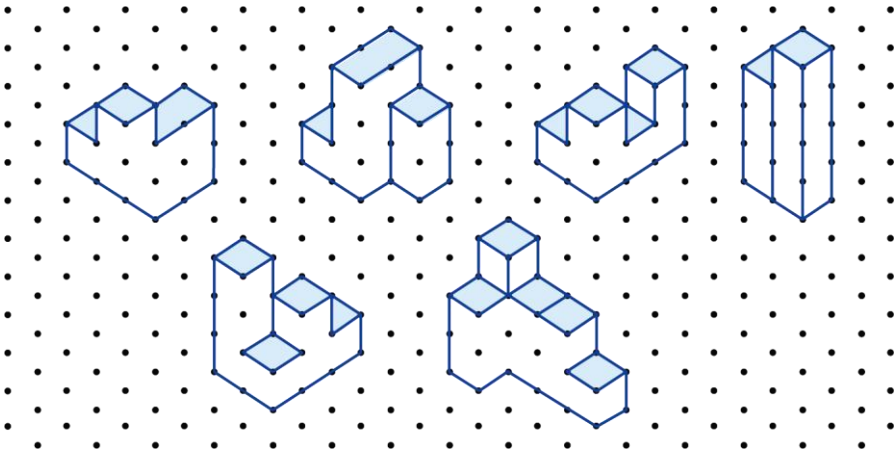
כמה קוביות בסך הכל הצלחתם להסתיר?

1. רשמו כמה קוביות בכל מבנה וכמה קוביות תהיינה במבנה הרביעי; נסו לשרטט את המבנה

הרביעי בסדרה.



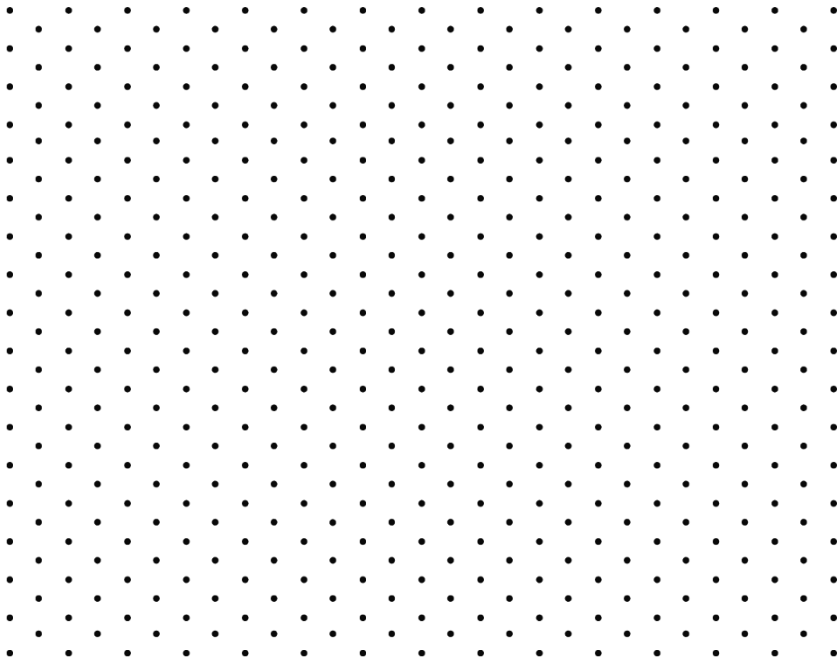
2. מצאו כמה קוביות בכל מבנה. (אין קוביות נסתרות).



קובייה קטנה יכולה להיחשב כיחידת נפח.

אם אורך צלע הקובייה 1 ס"מ יהיה הנפח שלה 1 סמ"ק (סנטימטר מעוקב אחד).

3. א. שרטטו על דף הנקודות **תיבה** שהנפח של 10 יחידות נפח. מה אורכי מקצועות התיבה הזו?
- ב. שרטטו על דף הנקודות **תיבה שונה** שהנפח של 10 יחידות נפח. מה אורכי מקצועות התיבה הזו?
- ג. שרטטו על דף הנקודות מבנה שאינו תיבה והנפח של 10 יחידות נפח.

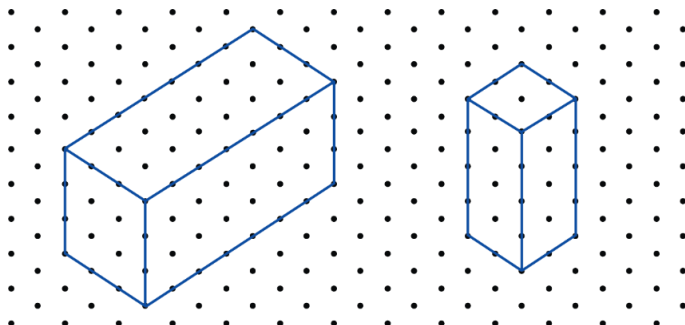




4. א. אורך צלע קובייה קטנה 1 ס"מ.

חלקו כל תיבה לקוביות כאלה.

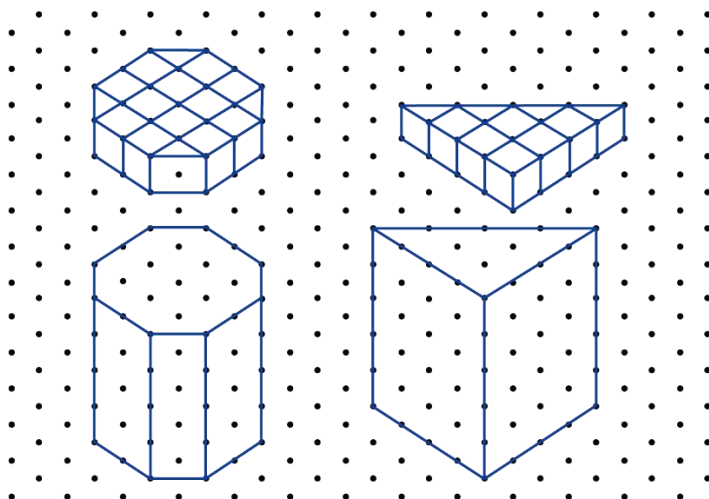
מצאו את הנפח של כל מנסרה (מספר הקוביות הקטנות מהן היא בנויה).



ב. רשמו מה שטח הבסיס של כל תיבה ומה הגובה שלה (מספר הקומות).

נפח תיבה שווה למכפלת שטח הבסיס בגובה התיבה

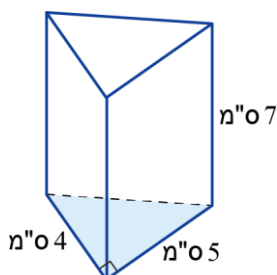
ג. נבדוק כעת נפח של מנסרה שאינה תיבה. חשבו את מספר הקוביות ב"פרוסה" אחת של כל מנסרה, את מספר ה"פרוסות", ואת הנפח של המנסרה.



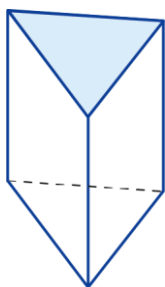
ד. רשמו בשרטוט, מה שטח הבסיס של כל מנסרה, ומה הגובה שלה.

אורך מקצוע, שאינו מקצוע בסיס, הוא **גובה המנסרה**.
 נפח של מנסרה: מכפלה של אורך הגובה בשטח הבסיס.
 בכתוב אלגברי: $V = B \times H$ כאשר V הנפח, B שטח הבסיס, H הגובה.

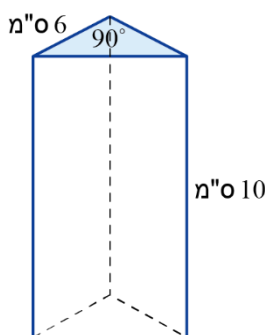
5. מצאו נפח של מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית, על-פי הנתונים הרשומים בשרטוט.



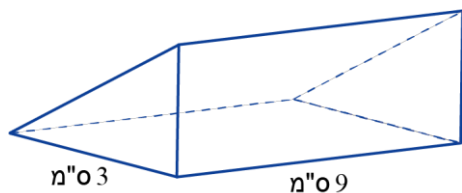
6. הבסיס של מנסרה הוא משולש שווה צלעות שאורך צלעו 8 ס"מ.
 א. חשבו את שטח המשולש (שרטטו אותו).
 ב. גובה המנסרה אף הוא 8 ס"מ. חשבו את נפח המנסרה.



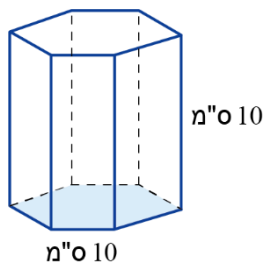
7. חשבו את נפח המנסרות על פי הנתונים הרשומים בשרטוט.
 א. בסיס המנסרה משולש שווה שוקיים וישר זווית.



ב. בסיס המנסרה משולש שווה צלעות.



ג. בסיס המנסרה הוא משושה משוכלל. (שרטטו בצד את המשושה...)

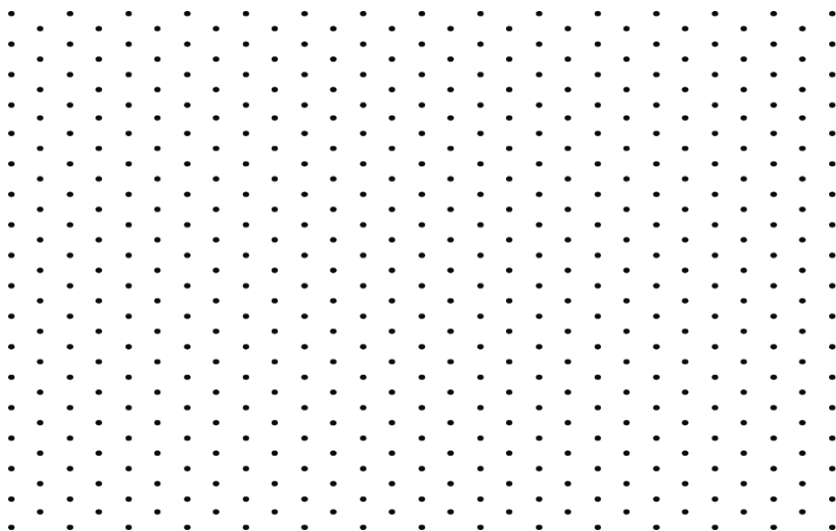


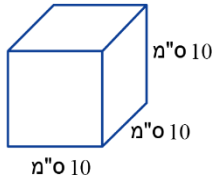
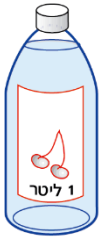
8. נפח של מנסרה שבסיסה ריבוע הוא 200 יחידות מעוקבות.

אורך צלע הריבוע 5 יחידות אורך.

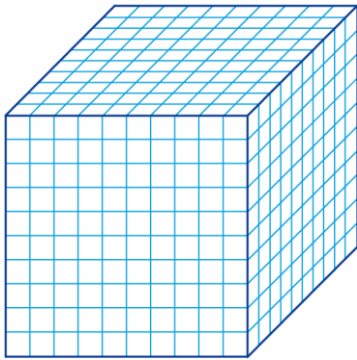
א. שרטטו את המנסרה על דף הנקודות.

ב. חשבו את גובה המנסרה.





נפח קוביה שנפחה 1000 סמ"ק
כנפח בקבוק המכיל ליטר אחד.



קובייה שאורך מקצועה 1 מטר
מכילה 1000 קוביות קטנות
שנפחן 1 ליטר. (השרטוט מוקטן).

9. אורך בריכת שחיה 24 מטר ורוחבה 14 מטר. עומק המים, לכל אורך הבריכה, 2 מטר.
א. מה נפח המים בבריכה במ"ק (מטרים מעוקבים).

1000 ליטר = 1 מ"ק

ב. כמה ליטר מים בבריכה?
ג. צינור ממלא את הבריכה בקצב של 800 ליטר בדקה.
בכמה דקות ימלא הצינור את הבריכה?



10. אורך האקווריום 0.9 מטר,
רוחבו 0.5 מטר וגובה המים 0.4 מטר.
חשבו את כמות המים באקווריום בליטרים.

11. צבעו כל אחת מהפיאות של המבנים הבאים. כמה ריבועים צבעו?



ד.



ג.



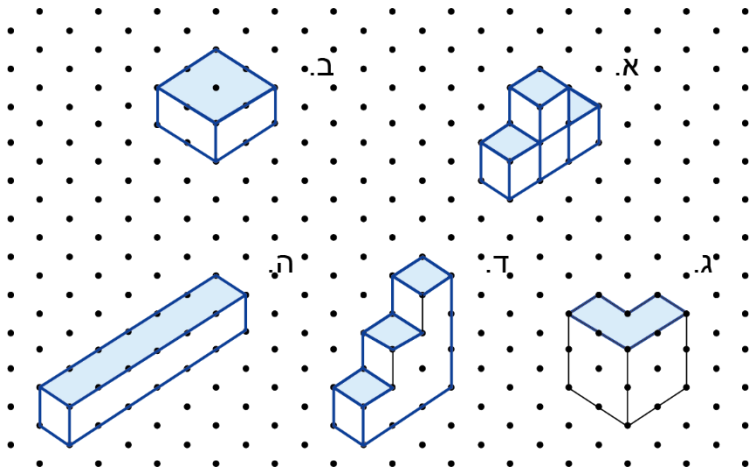
ב.



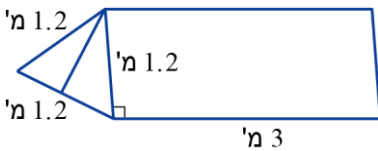
א.

כשצובעים את כל הפיאות של גוף (מבנה) השטח הצבוע נקרא שטח הפנים של הגוף.

12. חשבו את שטח הפנים של כל מבנה (ביחידות ריבועיות).



13. תכננו אוהלי סיירים ליחידה צבאית.



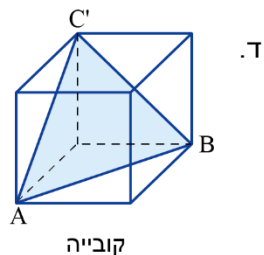
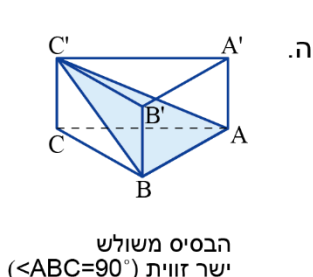
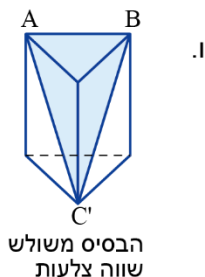
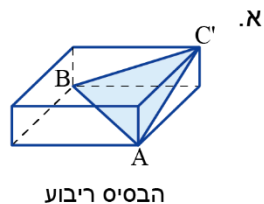
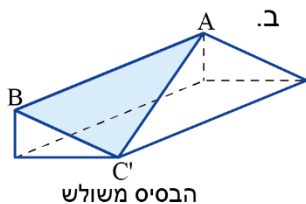
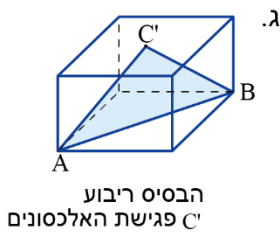
הפתח הוא משולש שווה צלעות, אורך הצלע 1.2 מטר.

א. שרטטו בצד את המשולש (הכניסו לאוהל).

ב. חשבו את שטח הבד הדרוש לאוהל, כולל הפתח.

ג. חשבו את נפח האוהל.

1. קבעו, על סמך הנתונים, מאיזה סוג המשולש הצבוע בכל מנסרה. היעזרו בקלקר ובקיסמים.



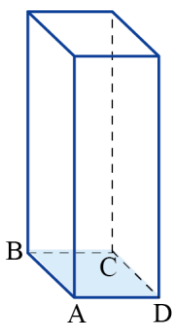
2. בסיס תיבה הוא ריבוע שאורך צלעו 5 ס"מ.

אורך האלכסון של פאה צדדית 13 ס"מ.

א. מהו גובה התיבה?

ב. מצאו את נפח התיבה.

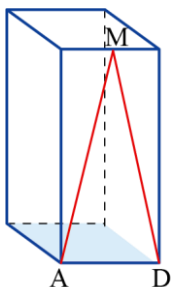
ג. מצאו את שטח פני התיבה.



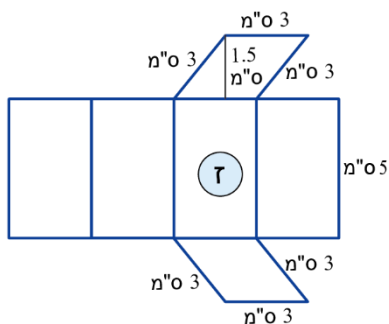
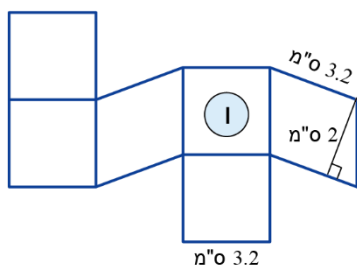
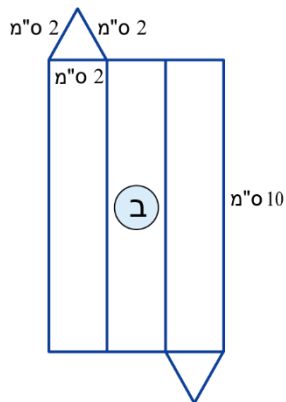
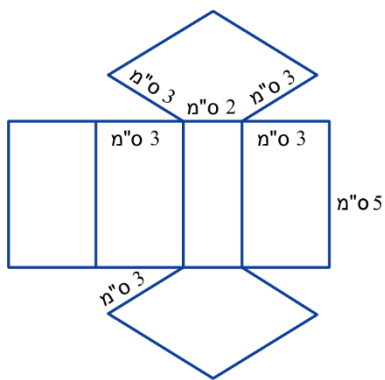
3. נפח של תיבה שבסיסה ריבוע, 96 סמ"ק. גובה התיבה 6 ס"מ.

M אמצע המקצוע - ראו שרטוט.

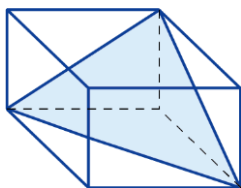
חשבו את היקף המשולש AMB.

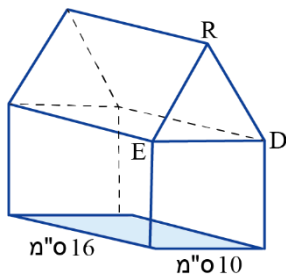


4. קבעו אלו מהפריסות המשורטטות הן פריסות של מנסרה. (תוכלו להעתיק לגזור לקפל ולבדוק).



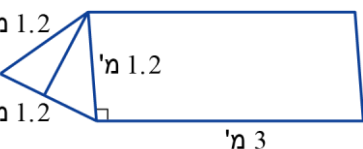
5. בסיס המנסרה הוא ריבוע שאורך צלעו 5 ס"מ. גובה המנסרה 3 ס"מ. חשבו את שטח המשולש הצבוע.





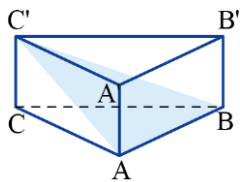
6. תארו מאיזה גופים מורכב הבית.

חשבו את נפח הגג, אם ידוע כי המשולש RED שווה צלעות.



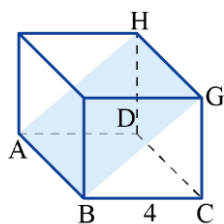
7. תכננו אוהל סיירים ליחידה צבאית. הפתח הוא משולש שווה-צלעות שאורך כל צלע שלו 1.2 מ'. חשבו את שטח הבד הדרוש ליצירת האוהל.

א. חשבו את נפח האוהל.
ב. חשבו את נפח האוהל.



8. בסיס מנסרה הוא משולש שווה-צלעות שאורך צלעו 12 ס"מ. אורך מקצוע צדדי 4 ס"מ. חשבו את נפח המנסרה.

א. חשבו את נפח המנסרה.
ב. מאיזה סוג משולש ABC'?

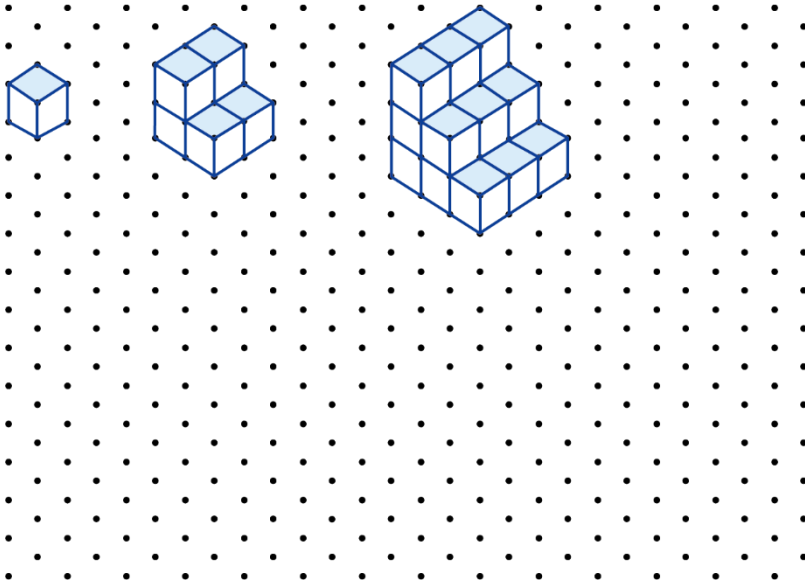


9. לפניכם שרטוט של תיבה שבסיסה ריבוע. גודל הזווית בין BG ל-BC הוא 45° . חשבו את גובה התיבה.

א. חשבו את נפח התיבה.
ב. חשבו את נפח התיבה.
ג. איזה מרובע הוא המרובע הצבוע? חשבו את שטחו.

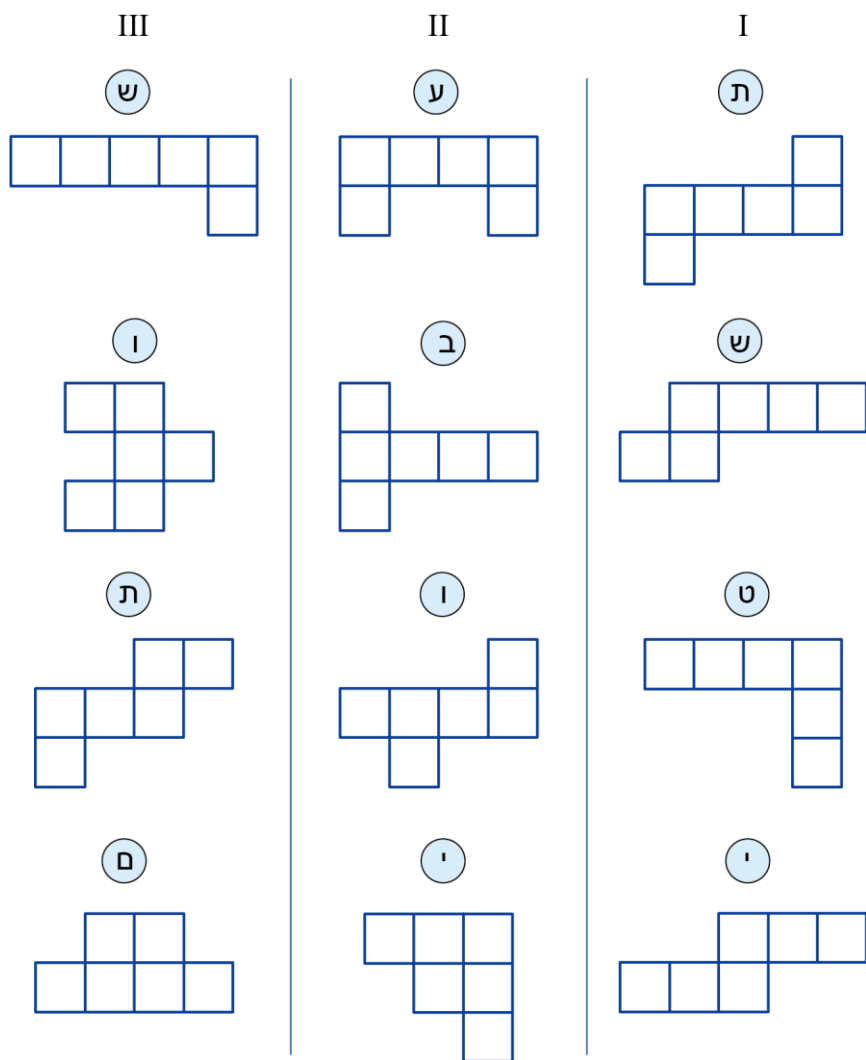
10. א. מה הנפח של כל מבנה?

ב. שרטטו מבנה נוסף בסדרה. כמה קוביות נוספו? מה הנפח שלו?



ג. נסו לשרטט שני מבנים שנפחם 6 קוביות יחידה, וחשבו את שטח הפנים של המבנים.

11. לפניכם 12 שרטוטים של צירופי 6 ריבועים. סמנו את השרטוטים אותם ניתן לקפל כך שתתקבל קובייה. (כלומר, סמנו אילו מהם פריסות של קובייה.)



לבדיקה רשמו את האותיות הרשומות ליד הפריסות שסימנתם ותקבלו שם לקבוצת גופים הכוללת בתוכה את הקוביות. (רשמו תחילה אותיות מטור I אחר כך מטור II ולבסוף מטור III.)

מבטים שונים של מבנים

שרטוט מבטים של מבנים

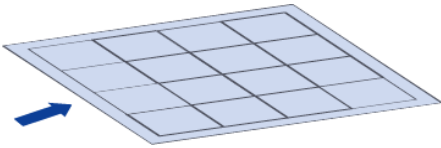
1. כתבו שוב את הכתובת: www.fi.uu.nl/wisweb

כשייפתח האתר, הקישו על  (אנגלית).

אחר כך הקישו על applets (יישומונים).

הקישו **Building with blocks**

על המסך מופיע לוח של 16 משבצות.



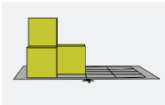
המפה.

בנו מבנה על-פי

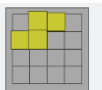
	2	1	
1	2		



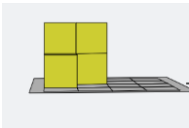
הצד שאליו פונה החץ, הוא המבט מלפנים סובבו את המבנה כך שיתקבל מבט מלפנים.



סובבו את המבנה כך שיתקבל מבט מלמעלה.



סובבו את המבנה כך שיתקבל המבט מימין.

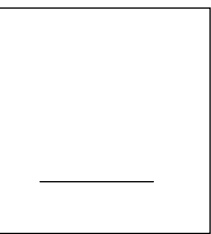


2. בנו מבנה על-פי המפה.

2			
2	1		
1			

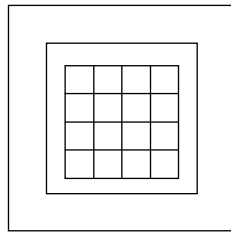
↑

שרטטו את שלושת המבטים. היעזרו בסיבוב המבנה על המסך.



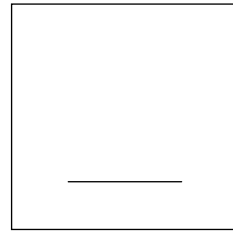
מלפנים:

front



מלמעלה:

top



מימין:

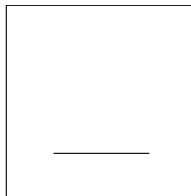
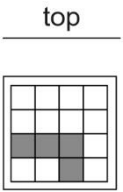
right

בנייה על-פי מבט נתון

3. פרקו את המבנה שעל המסך.

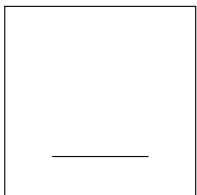
א. בנו מבנה כלשהו, כך שיתקבל מבט מלמעלה כמו בתמונה:

ב. סובבו את המבנה כך שיתקבל המבט שלו **מלפנים**, ושרטטו אותו:



מלפנים:

front



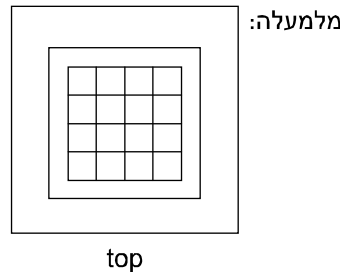
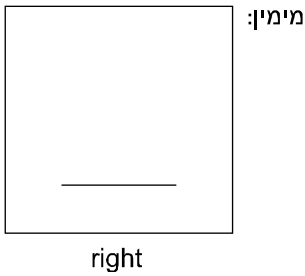
ג. סובבו את המבנה כך שיתקבל המבט שלו **מימין**, ושרטטו אותו. מימין:

right

4. בנו על המסך מבנה, כך שיתקבל מבט שלו מלפנים כמו בתמונה:

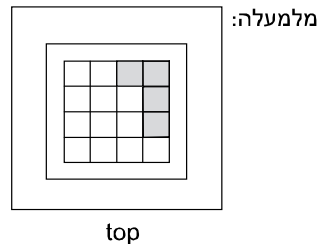
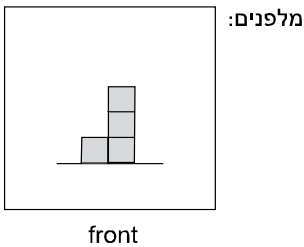


סובבו את המבנה על המסך, ושרטטו את המבטים מלמעלה ומימין.

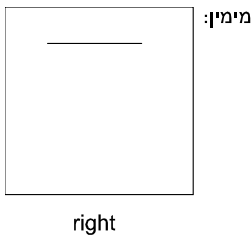


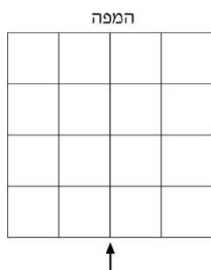
בנייה על-פי שני מבטים

5. א. בנו מבנה על המסך, כך שיתקבלו המבטים שבתמונות:



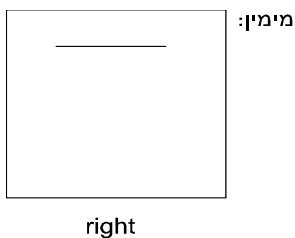
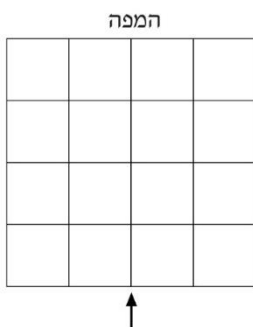
שרטטו את המבט מימין:





שרטטו גם את מפת המבנה.

- ב. נסו לבנות מבנה **אחר**, כך שיתקבלו אותם מבטים, הנתונים בסעיף א'.
שרטטו את המבט של המבנה מימין, שרטטו את מפת המבנה.



- נסו לבנות מבנה כזה עם מספר קוביות **גדול** ככל האפשר. כמה קוביות במבנה שבניתם?
- נסו לבנות מבנה כזה עם מספר קוביות **קטן** ככל האפשר. כמה קוביות במבנה שבניתם?

פתחו את התוכנה **Colouring sides 1**.

בכל שאלה מופיע גוף עם פיאה צבועה ולעיתים גם שתי פיאות צבועות.

עליכם להצביע (בעזרת העכבר) על הפיאות המתאימות שיש לצבוע בשרטוט המבט

המתאים. אחר כך לחצו על check

אם טעיתם, תוכלו לתקן על-ידי הקשה על הפיאה שצבעתם והקשה על על הפיאה המתאימה.

שימו לב: ניתן לסובב את הגוף ...

לאחר סיום 20 השאלות בדקו כמה נקודות צברתם? השוו עם חברים.

7. שחקו במשחקים נוספים הקיימים באתר:

א. פתחו את המשחק: **Colouring sides 2** ושחקו.

ב. פתחו את המשחק: **Rotating houses** ושחקו.

ג. פתחו את המשחק: **Building using two side views** ושחקו.

ד. פתחו את המשחק: **Building with side views 1** ושחקו.

לכל אומד משטח קלקר, קיסמים.

1. א. שרטטו על קלקר מלבן.

מקודקודי המלבן נעצו קיסמים כך שהם יפגשו בנקודה אחת.

על-ידי כך מתקבלת "פירמידת קיסמים".

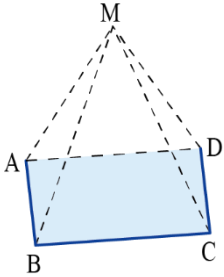
כדי לשרטט את הפירמידה חברו את

הקטעים MA, MB, MC ו- MD .

הקטעים האלה הם "המקצועות הצדדיים" של הפירמידה.

AB, BC, CD, DA מקצועות הבסיס.

M קודקוד הפירמידה.



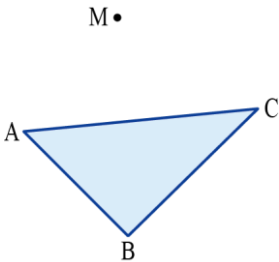
אם אורכי הקיסמים שהעברתם שווים זה לזה ($MD = MC = MB = MA$)

הפירמידה נקראת **פירמידה ישרה**.

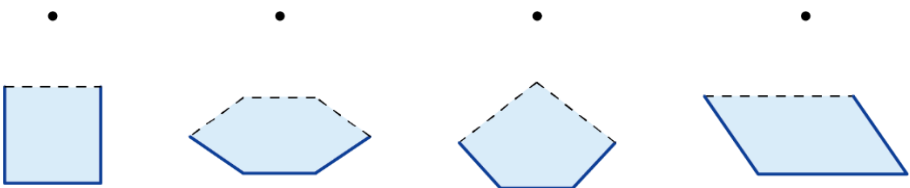


ב. שרטטו משולש על קלקר ובנו פירמידה משולשת.

השלימו את השרטוט לפירמידה שקודקודה M .



ג. השלימו את השרטוטים לפירמידות שקודקודיהן ובסיסיהן משורטטים.





כשמשרטטים פירמידה, הבסיס לא תמיד משורטט על-פי הנתונים. למשל, בפירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים, הבסיס יכול להראות כמשולש שאינו שווה שוקיים. בפירמידה שבסיסה מלבן, לעיתים משורטט הבסיס כמקבילית וכו'. כל זאת כדי שיתקבל שרטוט שמדגים היטב את הגוף.

פירמידה נקראת על שם הבסיס (פירמידה משולשת, מרובעת, מחומשת וכו').
אם מקצועותיה **הצדדיים** של הפירמידה שווים זה לזה, הפירמידה נקראת **פירמידה ישרה**.

2. א. מה צורת הפאות הצדדיות של פירמידה כלשהי? נמקו.
ב. מה צורת הפאות הצדדיות של פירמידה ישרה? נמקו.

3. א. כמה קודקודים וכמה מקצועות לפירמידה **משולשת**?
ב. כמה קודקודים וכמה מקצועות לפירמידה מרובעת?
ג. כמה קודקודים וכמה מקצועות לפירמידה שבסיסה משושה?
ד. כמה קודקודים וכמה מקצועות לפירמידה שבסיסה מצולע בעל n צלעות?

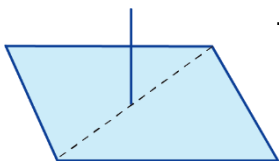
4. שרטטו ריבוע על הקלקר.

העמידו קיסם מאונך במרכז הריבוע (בנקודת הפגישה של אלכסוניו).

חברו את הקצה העליון של הקיסם עם קודקודי הריבוע.

קיבלתם פירמידה ריבועית ישרה. השלימו את השרטוט.

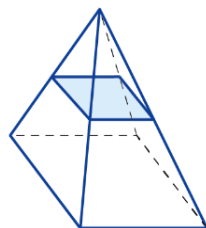
הקיסם המאונך לריבוע הוא גובה הפירמידה.



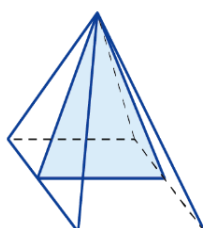
5. הפירמידות המשורטטות הן פירמידות ישרות. כל הנקודות שאינן קודקודים הן אמצעי מקצועות.

קבעו מאיזה סוג הצורה הצבועה. (היעזרו בקלקר ובקיסמים.)

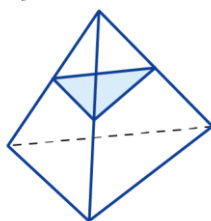
א. בסיס הפירמידה ריבוע



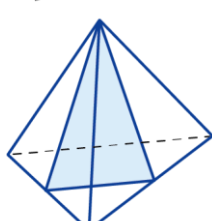
ב. בסיס הפירמידה ריבוע



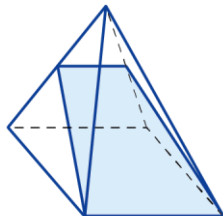
ג. בסיס הפירמידה משולש שווה צלעות



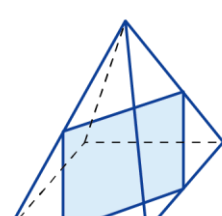
ד. בסיס הפירמידה משולש שווה צלעות



ה. בסיס הפירמידה ריבוע



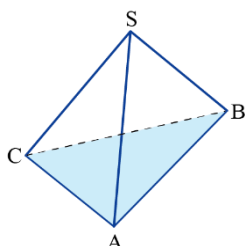
ו. בסיס הפירמידה ריבוע



6. כל המקצועות של הפירמידה המשורטטת שווים זה לזה (טטראדר).

צרו פריסה של טטראדר.

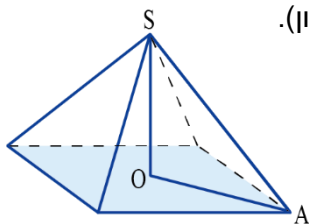
גזרו, קפלו, והדביקו והניחו על השולחן כך שבכל פעם פיאה אחרת תהיה הבסיס.



7. בפירמידה ישרה שבבסיסה ריבוע אורך מקצוע הבסיס 4 ס"מ ואורך מקצוע צדדי 5 ס"מ.

א. שרטטו בנפרד את הבסיס (ריבוע) וחשבו את OA (חצי האלכסון).

ב. חשבו את גובה הפירמידה.



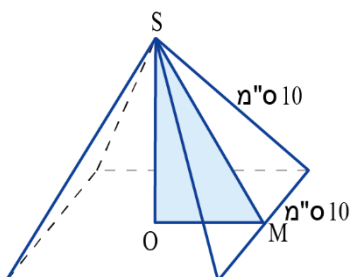
8. לפניכם שרטוט של פירמידה ישרה שבבסיסה ריבוע. M אמצע

מקצוע הבסיס.

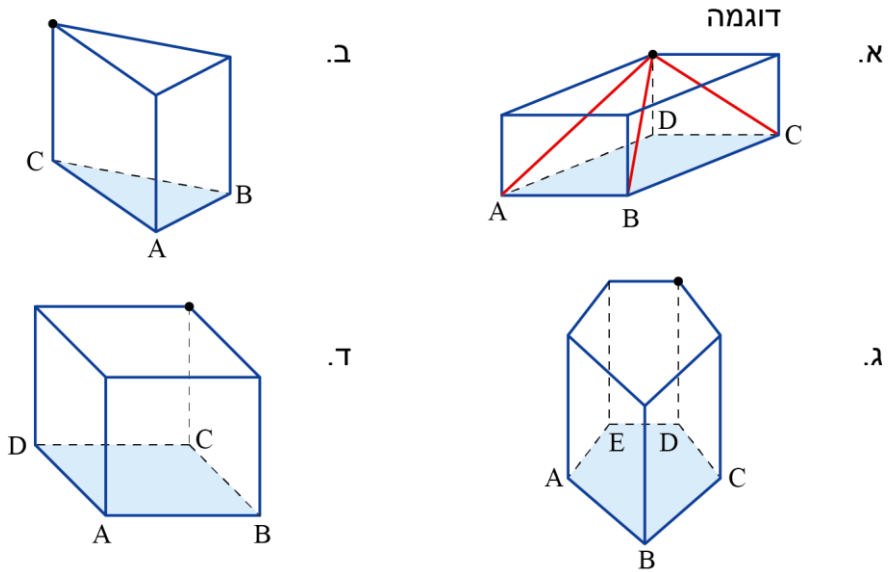
א. חשבו את SM (שרטטו בצד את משולש SMA).

ב. חשבו את גובה הפירמידה.

ג. חשבו את שטח המשולש הצבוע.



9. א. חברו את הקודקוד המודגש עם הקודקודים המסומנים באותיות. צבעו את בסיס הפירמידה שהתקבלה והדגישו את מקצועותיה הצדדיים.



ב. בכל אחת מהפירמידות שהתקבלו אחד המקצועות הצדדיים מאונך למישור הבסיס. צבעו אותו. (בדוגמה המקצוע המאונך מקווקו.)

הפירמידות האלה אינן פירמידות ישרות, כי המקצועות הצדדיים אינם שווים זה לזה באורכם. (הגובה הוא מקצוע צדדי ומרחקו מהבסיס קצר משאר המקצועות)



10. א. שרטטו משולש על הקלקר בחרו נקודה מחוץ למישור הקלקר וחברו אותה בקיסמים עם קודקודי המשולש ששרטטתם.

ב. בנו באמצעות קיסם, אנך מקודקוד הפירמידה אל מישור הקלקר. האנך הוא הגובה של הפירמידה.

אנך מהקודקוד שמחוץ למישור בסיס פירמידה, אל מישור הבסיס, הוא הגובה של

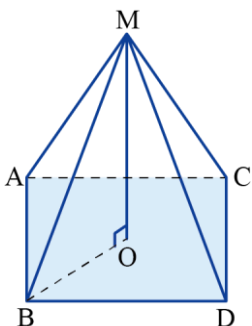
ג. בנו על הקלקר פירמידה ישרה שבסיסה מלבן. נעצו את גובה הפירמידה ושרטטו את

היטלי המקצועות הצדדיים. על בסיס הפירמידה.

ד. השלימו בשרטוט הפירמידה שבסיסה מלבן, את ההיטלים של

המקצועות הצדדיים של הפירמידה על הבסיס. מה תוכלו לומר

על אורכי ההיטלים? הסבירו.



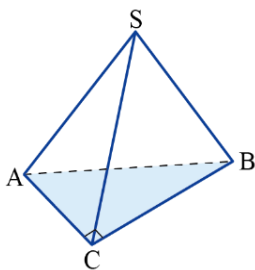
11. א. שרטטו על הקלקר משולש קהה זווית. בחרו נקודה מחוץ למישור הקלקר וצרו שלד של

פירמידה ישרה שבסיסה המשולש ששרטטתם. צרו גובה לפירמידה. היכן נוגע הגובה בקלקר?

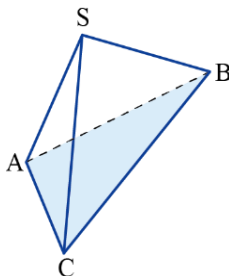
בדקו היכן נוגע הגובה במישור בסיס פירמידה שבסיסה משולש שכל זוויותיו חדות.

בדקו היכן נוגע הגובה במישור בסיס פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית.

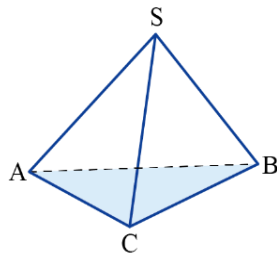
ב. שרטטו גובה מ-S בכל פירמידה.



הבסיס משולש
ישר-זווית

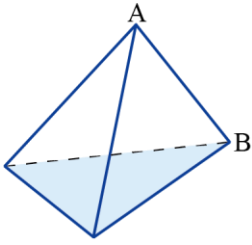


הבסיס משולש של
זוויותיו חדות

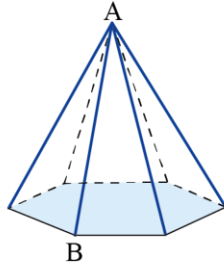


הבסיס משולש
קהה-זווית

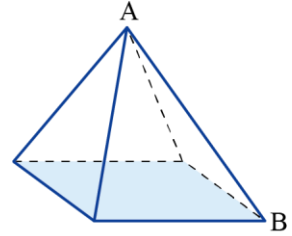
12. שלוש הפירמידות המפורטות הן פירמידות ישרות.
שרטטו גובה מ- A , ואת ההיטל של AB על בסיס הפירמידה.



הבסיס משולש
שווה-צלעות



הבסיס משושה
משוכלל

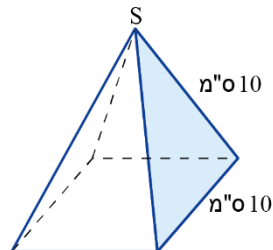
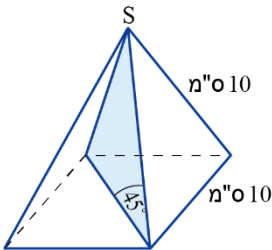
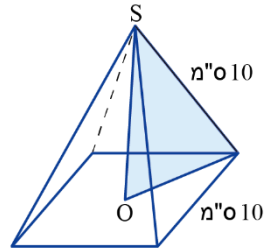
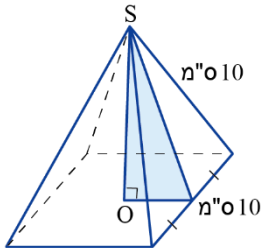


הבסיס -ריבוע

תרגילים

13. לפניכם שרטוטים של פירמידות ישרות שבסיסן **ריבוע**.

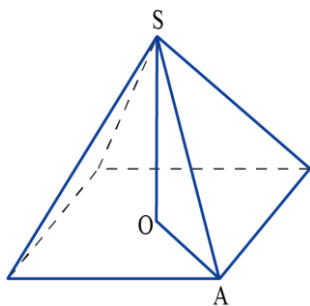
- רשמו מאיזה סוג המשולש הצבוע.
- הדגישו, או שרטטו את גובה הפירמידה וחשבו את אורכו.



14. בפירמידה ישרה שבסיסה ריבוע אורך מקצוע הבסיס 4 ס"מ,

ואורך מקצוע צדדי 5 ס"מ.

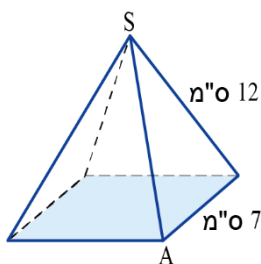
חשבו את אורך OA ואת שטח משולש SOA.



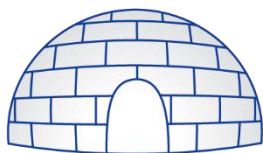
15. הפירמידה המשורטטת היא פירמידה ישרה שבסיסה ריבוע.

שרטטו את גובה הפירמידה שרטטו וחשבו את היטל מקצוע על

הבסיס ואת גובה הפירמידה.



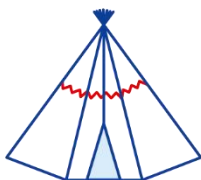
16. איזה גוף מתואר על-ידי כל אחד מהמבנים?



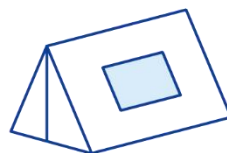
ב.



א.



ד.



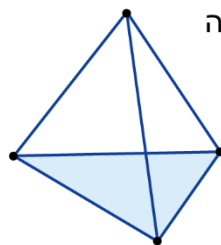
ג.

17. לפניכם שלשות של נקודות.

סמנו נקודה רביעית והשלימו שרטוט של פירמידה.

צבעו משולש שיהיה בסיס הפירמידה והדגישו את המקצועות הצדדיים.

דוגמה



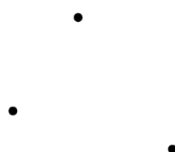
א.



ג.



ב.



18. לפניכם תמונה של הפירמידה במוזיאון הלובר בפריז.

בסיס הפירמידה הוא ריבוע שאורך צלעו 35 מ'.



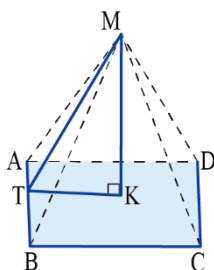
לפניכם שרטוט של דגם הפירמידה

לפניכם שרטוט של דגם הפירמידה:

גובה הפירמידה ואורכו 20.6 מ', MT אנך ל-

AB . חשבו את אורך MT גובה הפאה הצדדית ואת

סכום שטחי הפאות הצדדיות העשויות זכוכית.

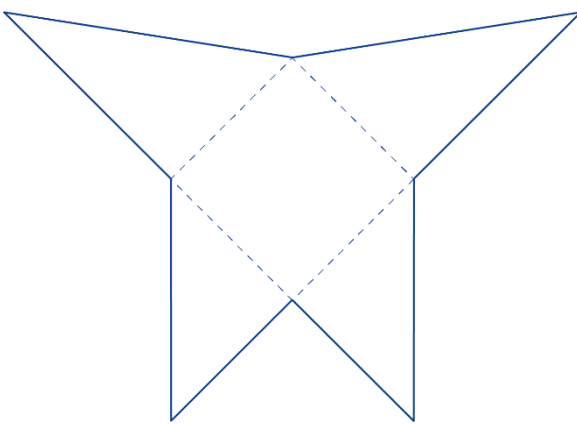


נפח פירמידה

לפניכם פריסה של פירמידה משולשת (לא ישרה).

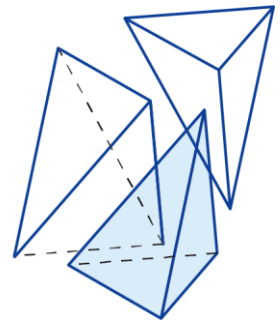
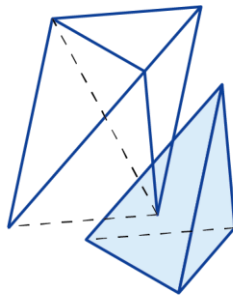
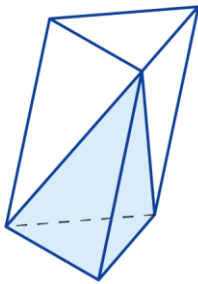
משלוש פירמידות כאלה ניתן להרכיב קובייה. משלוש פירמידות כאלה ניתן ליצור קובייה.

(תוכלו להעתיק, לגזור וליצור את הקובייה)



נפח כל פירמידה כזו היא $\frac{1}{3}$ מנפח הקובייה שהתקבלה.

באופן כללי אפשר לחלק כל מנסרה, גם אם איננה קובייה, ל-3 פירמידות שוות נפח. לפניכם שרטוט חלוקה של מנסרה משולשת.



לכן נפח פירמידה יהיה $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$ כאשר B שטח הבסיס של הפירמידה, H הגובה של הפירמידה.

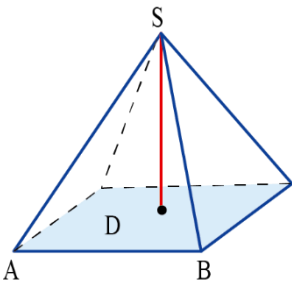
1. נתונה פירמידה ישרה שבסיסה מלבן.

אורך צלעות המלבן 3 ס"מ ו-5 ס"מ וגובה הפירמידה 6 ס"מ.

א. רשמו את הנתונים בשרטוט.

ב. חשבו את שטח בסיס הפירמידה.

ג. חשבו את נפח הפירמידה.

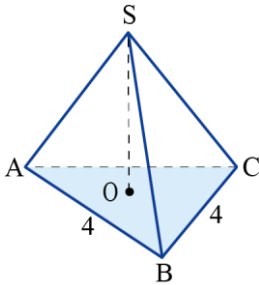


2. נתונה פירמידה ישרה שבסיסה משולש שווה צלעות.

(אורך הצלע 4 ס"מ.)

א. שרטטו את הבסיס בצד וחשבו את שטחו.

ב. גובה הפירמידה (SO) 5 ס"מ חשבו את נפח הפירמידה.

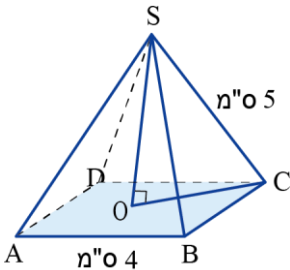


3. נתונה פירמידה ישרה שבסיסה מלבן.

א. שרטטו את הבסיס בצד, חשבו את שטח הבסיס ואת

אלכסון המלבן.

ב. חשבו את גובה הפירמידה ואת הנפח שלה.



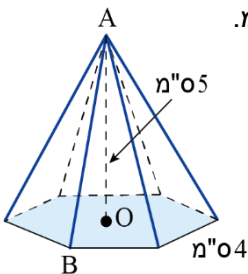
4. נתונה פירמידה ישרה עם בסיס משושה משוכלל, שאורך צלעו 4 ס"מ.

א. שרטטו את הבסיס בצד וחלקו למשולשים מהמרכז O.

איזה משולשים התקבלו?

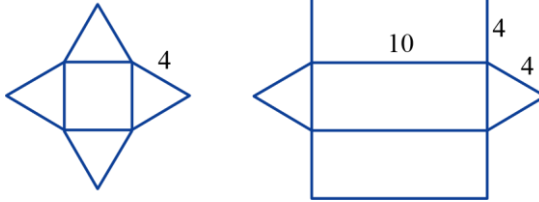
ב. חשבו שטח של משולש אחד ואת השטח של הבסיס כולו.

ג. חשבו את נפח הפירמידה.



5. לפניכם שתי פריסות של גופים

א. זהו את הגופים



ב. חשבו את השטח של כל פריסה, אם ידוע כי כל המשולשים המשורטטים שווי צלעות.

חישבתם את שטח הפנים של שני הגופים.

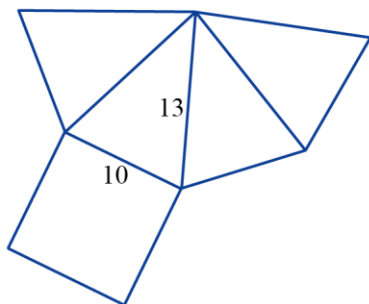


6. לפניכם שרטוטים שונים.

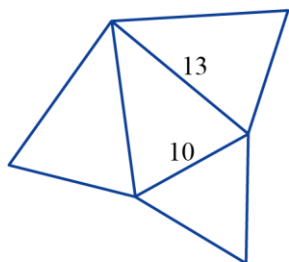
א. אלו מהם פריסות של פירמידה?

ב. חשבו שטח פנים של שתיים מבין הפירמידות.

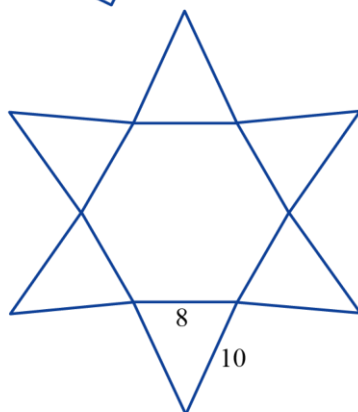
א.



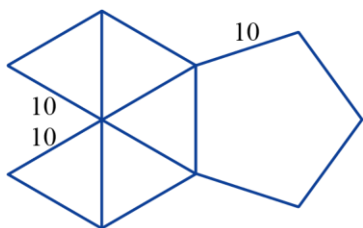
ב.



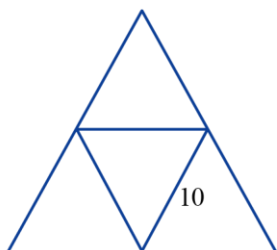
ג.



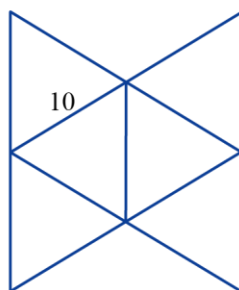
ד.



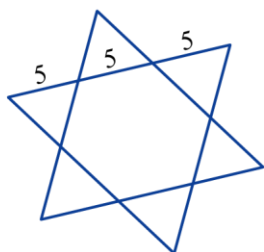
ה.



ו.



ז.



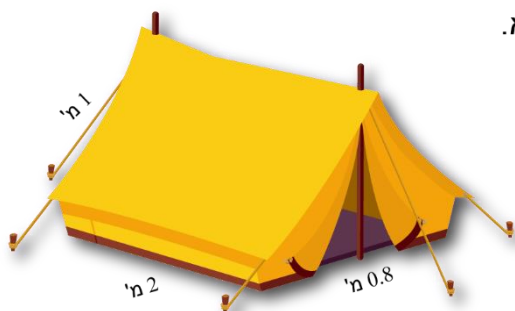
7. לפניכם תמונות של שני אוהלים. האוהלים (ללא הרצפה) עשויים מיריעות PVC.

א. מה הצורה של כל אוהל?

ב. באיזה אוהל שטח היריעות גדול יותר?



ב.



א.

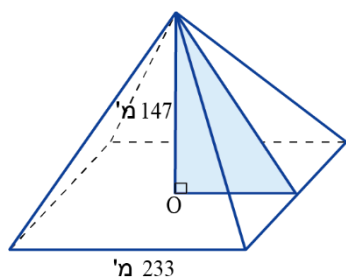
8. בתמונה הפירמידה הגדולה בגיזה שבמצרים.

בסיס הפירמידה הישרה הוא ריבוע שאורך צלעו 233 מטר.

גובה הפירמידה 147 מטר.

בעבר ציפו את הפאות באבן גיר מבריקה.

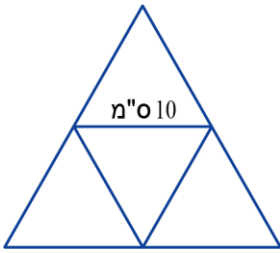
מה צורת ארבע הפאות הצדדיות? האם הן חופפות? הסבירו.



היעזרו בשרטוט וחשבו שטח השטח שציפו.

9. לפניכם שרטוט פריסה של גוף (כל המשולשים שווים צלעות). מהו

הגוף?



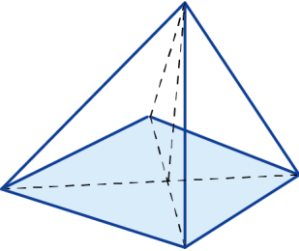
חשבו את שטח הפנים של הגוף.

תרגילים

10. חשבו את הנפח של כל אחת מהפירמידות.

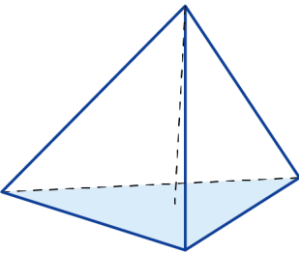
א. בסיס הפירמידה הוא ריבוע שאורך צלעו 4 ס"מ.

גובה הפירמידה 5 ס"מ.



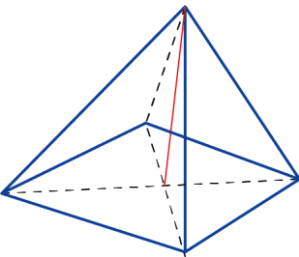
ב. בסיס הפירמידה הוא משולש שווה צלעות שאורך צלעו 5 ס"מ.

גובה הפירמידה 7 ס"מ. (שרטטו וחשבו את שטח הבסיס)

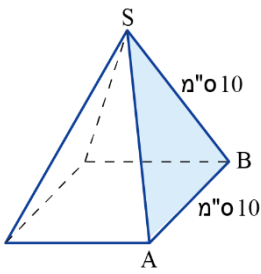


ג. בסיס הפירמידה הוא מלבן שאוריו צלעותיו 6 ס"מ ו-8 ס"מ.

אורך מקצוע צדדי 31 ס"מ.



11. לפניכם שרטוט של פירמידה ישרה שבסיסה ריבוע.

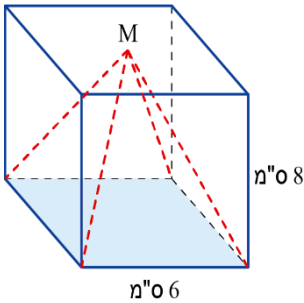


א. חשבו את שטח משולש SAB.

ב. חשבו את שטח בסיס הפירמידה.

ג. חשבו את שטח הפנים של הפירמידה.

12. נתונה פירמידה חסומה בתוך מנסרה שבסיסה ריבוע.

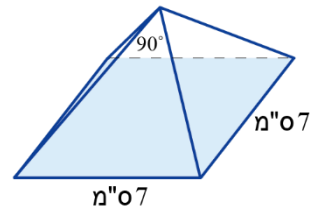
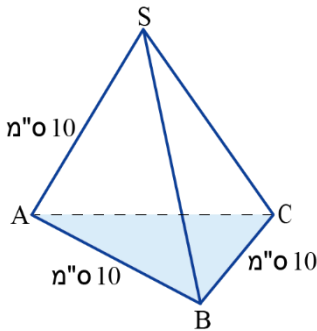


M נקודת הפגישה של אלכסוני הבסיס העליון. (ראו שרטוט).

חשבו את נפח המנסרה ואת נפח הפירמידה.

13. לפניכם שתי פירמידות ישרות.

חשבו את שטח הפנים של כל אחת מהן.



מדגלים לגופים



1. גזרו פיסת נייר בצורת מלבן והדביקו אותה לשיפוד (או לקיסם).

סובבו את השיפוד (או הקיסם) כציר.

דימוי של איזה גוף "נוצר" על-ידי סיבוב דגל כזה?

2. בעת הסיבוב מתקבל דימוי של גוף.

איזה גוף מתקבל בכל מקרה? ציינו שם או תארו את הגוף.

ד.



ג.



ב.



א.



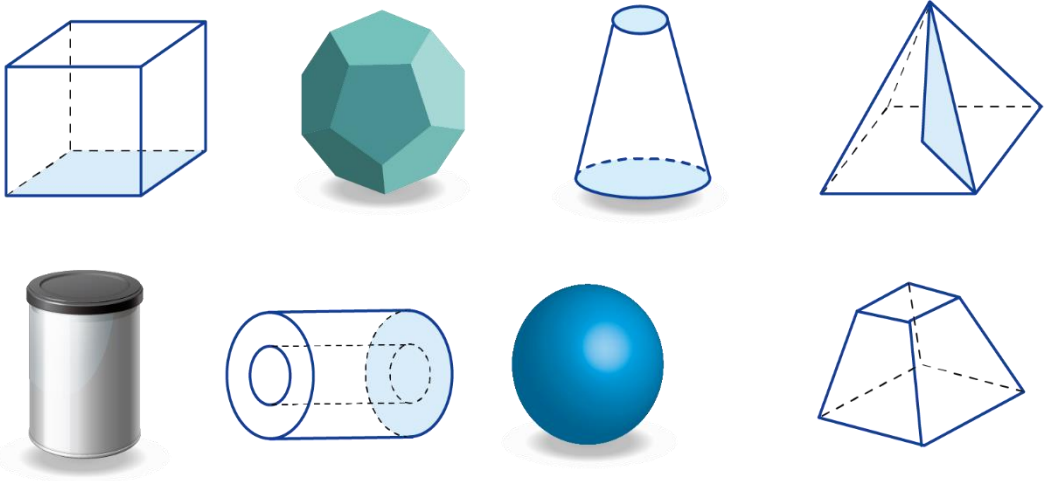
(תוכלו לבדוק באמצעות בניית "דגלים", וסיבובם סביב ציר הסיבוב.)

בסעיפים א' ו- ג' התקבלו דימויים של **גילים**.

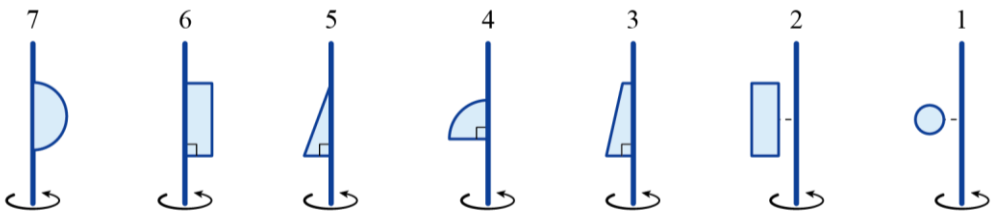
בסעיפים ב' ו- ד' התקבלו דימויים של **חרוטים**.

3. דימוי של איזה מהגופים הבאים ניתן לקבל על ידי סיבוב דגלים?

אם אפשר שרטטו דגל מתאים. אם אי-אפשר הסבירו מדוע.



4. התאימו לכל שרטוט של צורה מסתובבת, את הגוף המתקבל לאחר הסיבוב.



א. ב. ג. ד. ה. ו. ז.



לעבודת קדרות רבות (למשל, כדים, אגרטלים, צלחות ופמוטים) צורת גוף סיבוב.
 הקדר מניח על גלגל מסתובב (אבניים) גוש חמר רטוב, ומעצב אותו בידי. (ראו תמונות).
 לאחר עיצובם מחמר רטוב, עוברים הכלים תהליך של צביעה ו"שריפה" בתנורים מיוחדים
 המייצרים חום גבוה מאוד (800 עד 1,200 מעלות צלזיוס).



5. א. אלו מכלי השחמט שבתמונה הם גופי סיבוב?



ב. בחרו אחד מהכלים האלה ושרטטו את הצורה המסתובבת.



6. בתמונה שלוש ממגורות (ממגורות הן אסמי
 תבואה גדולים לאכסון גרעינים בתפזורת).
 שרטטו דגל שאם נסובב אותו סביב צירו יתקבל
 דימוי של ממגורה.

7. א. רשמו בשרטוט של הצורה המסתובבת

ובשרטוט של הגליל:

r על קטע שהוא רדיוס הבסיס של הגליל

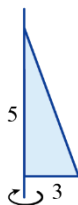
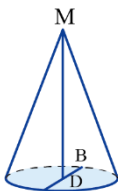
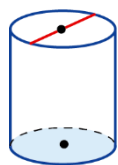
ו- h על קטע שהוא גובה הגליל.

ב. רשמו בשרטוט של הצורה המסתובבת ובשרטוט

של החרוט:

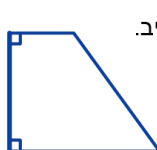
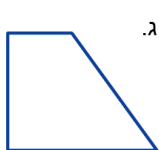
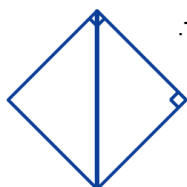
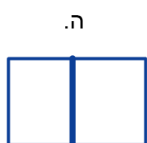
r על קטע שהוא רדיוס הבסיס של החרוט ו- h על

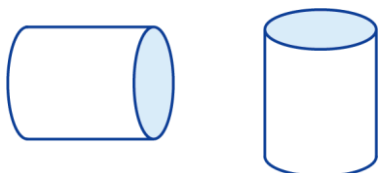
קטע שהוא גובה החרוט.



8. זהו את גופי הסיבוב: דימוי של איזה גוף מתקבל מסבוב של כל צורה סביב הקטע המודגש.

(המשולשים א, ב, ג, ד, ז, ח הם שווים שוקיים.)





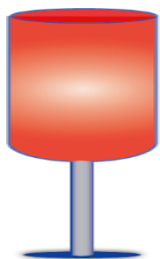
1. א. הוסיפו בשרטוט של כל גליל:

רדיוס של הבסיס - r

היקף של הבסיס - P

גובה הגליל - h

ב. גלגלו דף נייר מלבני לצורת גליל. פתחו את הדף ורשמו היכן בדף מופיע היקף הבסיס - p והיכן גובה הגליל - h .

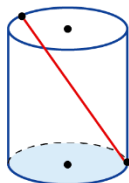


2. א. כמה גלילים במנורה שבצילום?

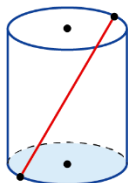
ב. תארו גלילים שונים "ומשונים" שבסביבתכם. למשל, מצאו גליל שרדיוס בסיסו מאוד קטן. וגובהו גדול.

(תוכלו לבדוק באמצעות בניית "דגלים", וסיבובם סביב ציר הסיבוב.)

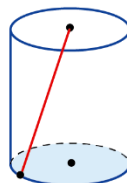
3. שרטטו את ההיטל של המשופע שבכל גליל.



ג.

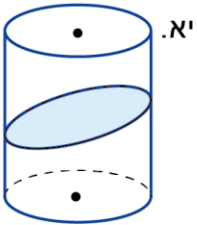
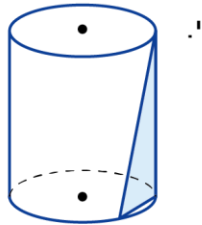
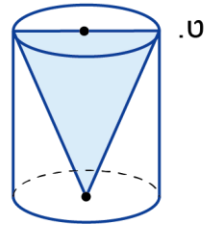
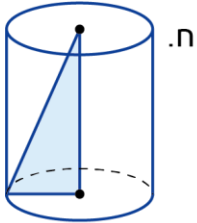
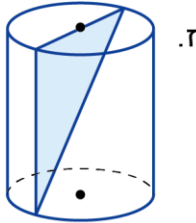
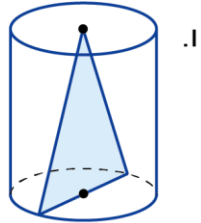
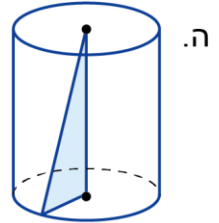
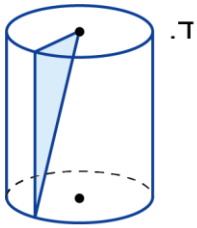
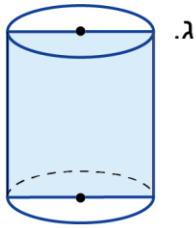
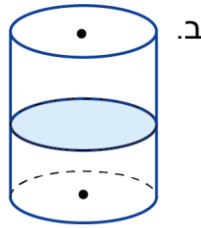
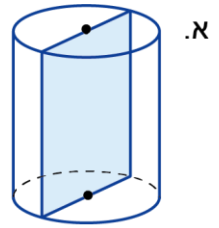


ב.

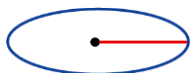


א.

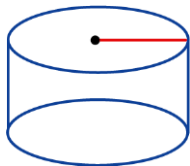
4. קבעו מהי הצורה הצבועה.



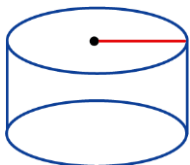
5. מלאו כוס בצורת גליל במים. רדיוס הבסיס 10 ס"מ.
א. מהו שטח הבסיס?



ב. מהי כמות המים בכוס אם הגובה ס"מ אחד?



ג. חשבו את נפח הכוס אם רדיוס הבסיס 10 ס"מ וגובהה 13 ס"מ?
ד. בטאו את נפח הכוס אם רדיוס הבסיס r והגובה h .



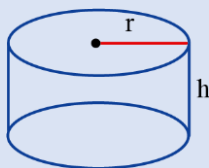
מחשבים נפח של גליל, בדומה לנפח מנסרה ישרה, על-ידי המכפלה של **שטח הבסיס בגובה הגליל**.

בסיס הגליל הוא עיגול ששטחו πr^2 .

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad \text{לכן:}$$

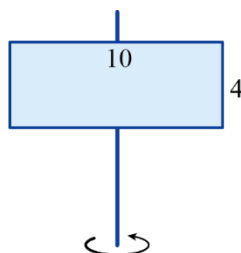
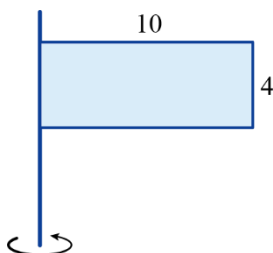
h - גובה הגליל

r - רדיוס הבסיס

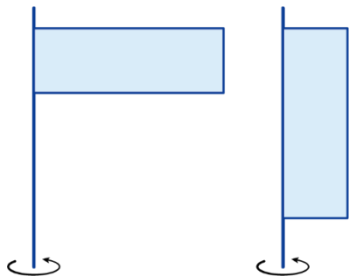


6. סובבו אותו מלבן פעמיים כל פעם סביב ציר אחר.

א. שערו אם לשני דימויי הגלילים אותו נפח. אם לא, איזה מהם בעל נפח גדול יותר לדעתכם?



ב. שרטטו לכל דגל גליל מתאים, רשמו את גובהו ורדיוס בסיסו וחשבו את נפחו.



7. גזרו שני מלבנים שאורך צלעותיהם 8 ס"מ ו-5 ס"מ.

צרו שני דגלים כבשרטוט וסובבו אותם.

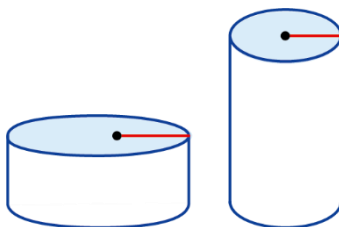
א. שערו האם לשני הגלילים אותו נפח. אם לא,

לאיזה משני הגלילים נפח גדול יותר?

ב. רשמו בשרטוט של כל דגל וכל גליל את הנתונים

המספריים (רדיוס בסיס הגליל וגובהו), בדקו את

השערתכם על-ידי חישוב הנפח של כל גליל.



8. חשבו, על-פי הנתונים, את נפח הגליל ואת נפח המנסרה.

ב. ABCD ריבוע

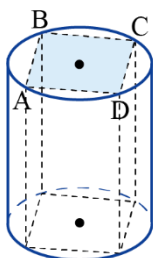
א. $r = 4$ ס"מ

$h = 10$ ס"מ

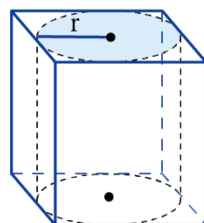
$h = 8$ ס"מ

צלע הריבוע 6 ס"מ

(חשבו תחילה את קוטר המעגל)



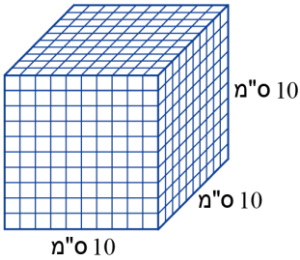
ב.



א.

9. לשני הכלים בשרטוט אותו נפח.

כמה סמ"ק בליטר?



א. כמה סמ"ק בבקבוק של 2 ליטר?

ב. כמה סמ"ק בבקבוק שתייה המכיל $\frac{1}{2}$ ליטר?

ג. כמה סמ"ק בפחית מיץ המכילה $\frac{1}{3}$ ליטר?

10. קוטר של דלי (בצורת גליל) 28 ס"מ וגובהו 30 ס"מ.

א. מה נפח הדלי בסמ"ק?

מה הנפח בליטרים?

ב. כמה כוסות "רגילות" מים יש בדלי? (כוס מכילה $\frac{1}{4}$ ליטר)

סמ"ק אחד נקרא גם מיליליטר אחד - אלפית ליטר (מ"ל).

11. א. כמה מיליליטר בכל כוס?

ב. כמה מיליליטר בבקבוק מיץ המכיל ליטר וחצי?

ג. בכל פחית משקה כ- 11 כפיות סוכר. פחית משקה מכילה כ- 330 מיליליטר. $\left(\frac{1}{3}\right)$ ליטר ?

כמה כפיות סוכר בליטר משקה?

ד. במתכון לעוגה כתוב שיש להוסיף לבצק 375 מיליליטר חלב ו- 100 מיליליטר יין.

כמה כוסות חלב יש לשים בבצק?

כמה כוסות יין יש לשים בבצק?

ה. בקבוק סירופ נגד שיעול מכיל 150 מיליליטר.

ילד מקבל כפית של 5 מיליליטר, 3 פעמים ביום.

לכמה ימים יספיק הסירופ בבקבוק?

12. במיכל 250 ליטר מיץ.

מעבירים את המיץ לכלים בצורת גליל.

רדיוס בסיס הכלי 5 ס"מ וגובה הכלי 10 ס"מ.

האם המיץ ימלא: 200 כלים כאלה? 250 כלים כאלה? 300 כלים כאלה? 350 כלים כאלה?

13. מה מכיל יותר שמפו, שני הבקבוקים (משמאל) או שלושת הבקבוקים (מימין).

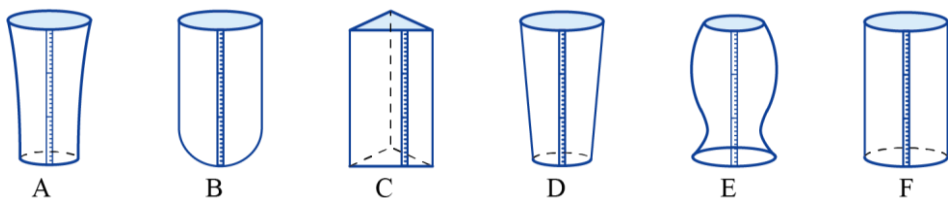


ביחידה על מנסרות ראינו שקובייה שאורך הצלע שלה מטר אחד מכילה 1000 ליטר, יחידה זו משמשת למדידת צריכת מים ונקראת מטר מעוקב ובקיצור קוב. כאן ראינו כי ליטר הוא נפח של 1000 סמ"ק או 1000 מיליליטר.



14. מוזגים לכל אחד מהכלים האלה מים בקצב קבוע.

א. סמנו את הכלים בהם גובה המים בתוך הכלי גדל בקצב קבוע.

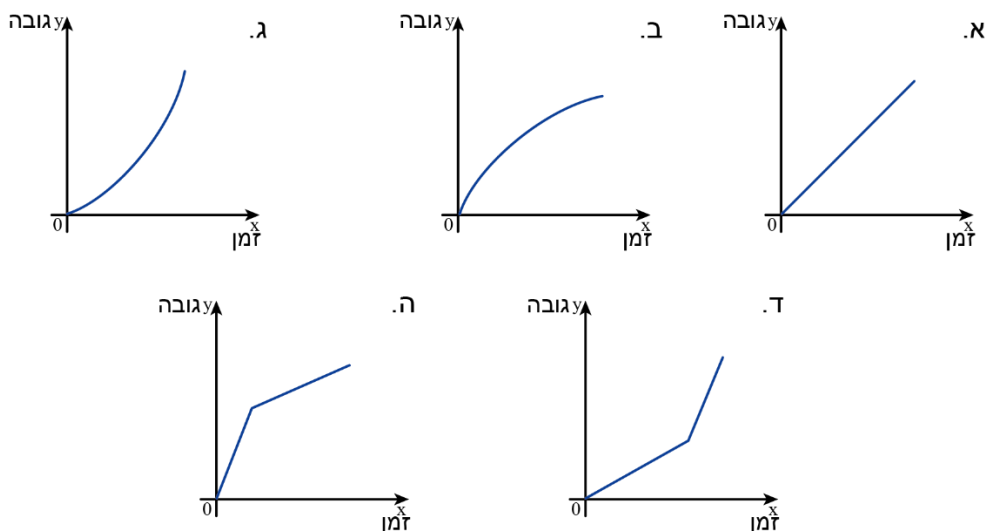


ב. הגרפים מתארים את הקשר בין זמן המילוי לגובה המים בכלים המצוירים (המים מתמלאים בקצב קבוע). התאימו לכל כלי גרף מתאים.

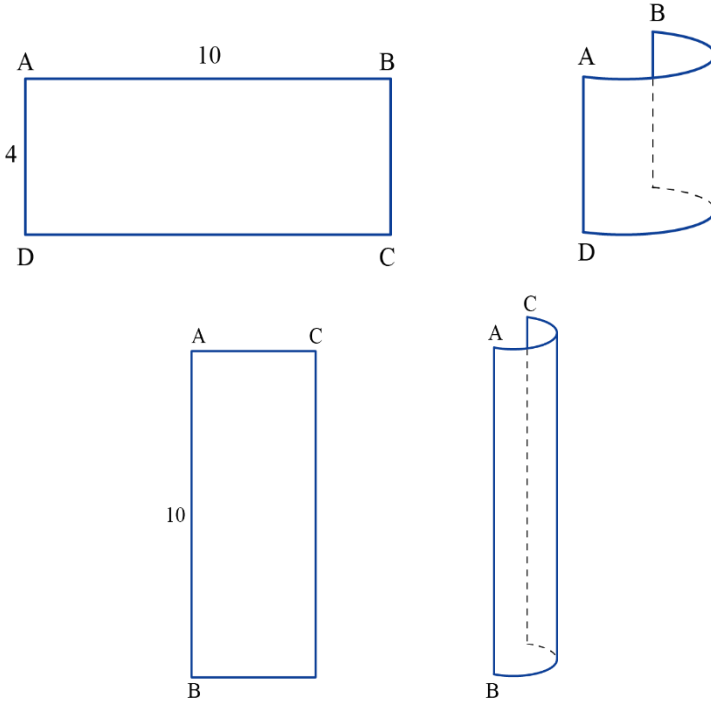
כלים



גרפים



15. א. קחו שני דפי נייר זהים ובנו מהם שני גלילים כמודגם בשרטוטים.

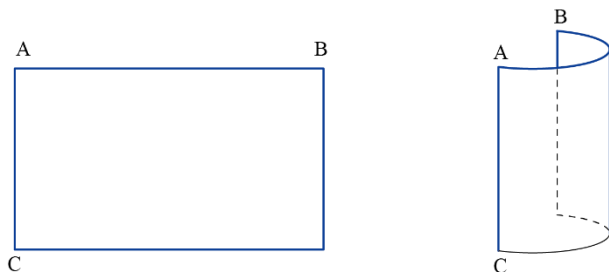


השטח הנוצר נקרא שטח המעטפת של הגליל.

קבעו מה שווה ומה שונה בשני הגלילים האלה:
רדיוס הבסיס, הנפח, קוטר הבסיס, הגובה, שטח המעטפת.

16. א. רדיוס הבסיס של גליל הוא 10 ס"מ וגובהו 6 ס"מ. מהו אורך הדף ממנו נוצר הגליל? מהו

שטח הדף?



ב. רדיוס בסיס גליל r.

- בטאו את היקף הבסיס (רשמו בשרטוט למעלה על המלבן ועל הדף המעוגל).
- גובה הגליל h. מה שטח המלבן ממנו יוצרים גליל כזה?

$$S = 2\pi \cdot h \cdot r \quad \text{שטח המעטפת של גליל הוא:}$$

שטח הפנים הוא שטח העוטף את כל הגוף.

שטח המעטפת של גליל הוא שטח הפנים ללא הבסיסים.

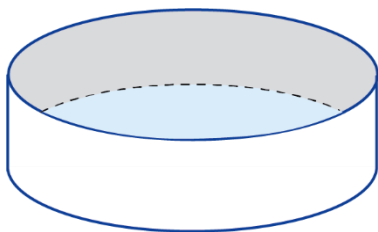


17. חשבו שטח מעטפת של גליל על-פי הנתונים.

- א. $r = 3$ ס"מ $h = 6$ ס"מ
 ב. שטח ABCD הוא 40 סמ"ר $r = 5$ ס"מ



18. צבעו בריכת מים מבחוץ.



קוטר הבסיס הוא 20 מטר, וגובה הבריכה 2 מטר.
לצביעת מ"ר אחד משתמשים ב- 0.5 ליטר של צבע.
כמה ליטר צבע דרושים לצביעת הבריכה?

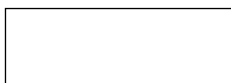
19. רדיוס בסיס של גליל 5 מטר ושטח המעטפת 128 מ"ר.

חשבו את גובה הגליל ואת נפחו.

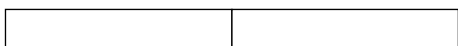


20. קוטר פחית קולה 6.2 ס"מ ונפחה כידוע 330 מיליליטר.
חשבו את שטח לוח האלומיניום הדרוש ליצירת הפחית
(כולל הבסיסים).

21. יוצרים סדרה של מעטפות גלילים (ללא בסיסים) מדפים באותו גודל באופן הבא:



גליל 1 מהדף השלם:



גליל 2: גוזרים לרוחב את הדף לשניים ומדביקים

יוצרים גליל:

גליל 3: חוזרים על התהליך (גוזרים את הרוחב לשניים מדביקים ויוצרים גליל)



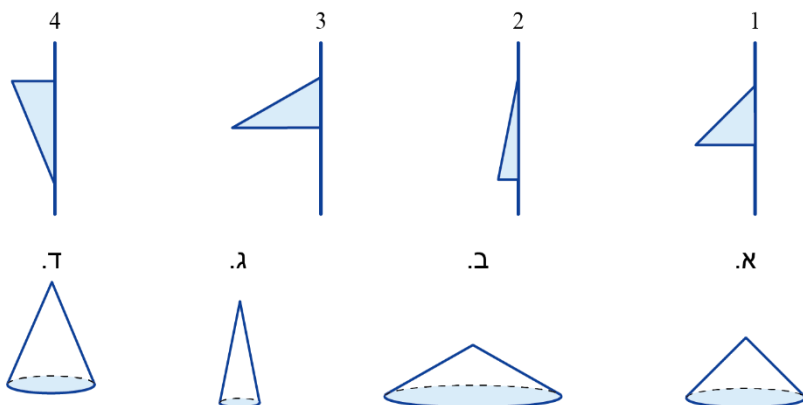
א. ציינו לגבי כל אחד מהגדלים הבאים אם הוא גדל, קטן, או שאינו משתנה.
רדיוס הבסיס, גובה הגליל, שטח המעטפת, הנפח.

ג. כיצד משתנים נפחי הגלילים הנוצרים מהדפים באופן הנ"ל? הסבירו.

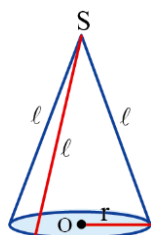
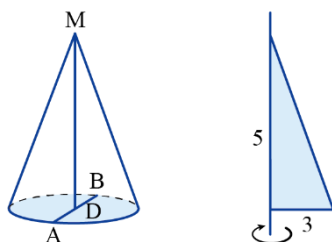
22. רדיוס בסיס של גליל 5 מטר ושטח המעטפת 128 מ"ר.

חשבו את גובה הגליל ואת נפחו.

1. התאימו לכל שרטוט של צורה מסתובבת את החרוט המתאים.



2. על פי הנתונים הרשומים על הדגל, רשמו בשרטוט של החרוט את אורכי הקטעים AB ו-DM.



3. שרטטו על קלקר מעגל. העמידו קיסם מאונך במרכז. מנקודה S על הקיסם, נעצו קיסמים לנקודות שונות על היקף המעגל. אילו חברנו כל נקודה על המעגל עם הנקודה S היה מתקבל חרוט.

הקטע המיוצג על-ידי קיסם, מההיקף לקודקוד נקרא בשם "קו יוצר" (ℓ בשרטוט) והוא היתר של המשולש ישר-הזווית המסתובב (בתרגיל הקודם).

4. תארו במה דומה החרוט לגליל ובמה דומה החרוט לפירמידה.

נפח חרוט

בדומה לחישוב נפח של פירמידה על-פי מנסרה בעלת אותו בסיס וגובה, מחשבים נפח של חרוט על-פי גליל בעל אותו בסיס ואותו גובה:

כפי שראיתם קודם, נפח של פירמידה הוא $\frac{1}{3}$ מנפח מנסרה בעלת אותו בסיס ואותו גובה.



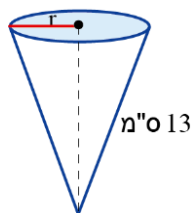
נפח חרוט (V) הוא $\frac{1}{3}$ מנפח גליל בעל אותו בסיס (אותו רדיוס בסיס) ואותו גובה h .

$$V = \frac{\text{שטח הבסיס} \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

5. אורך הקו היוצר של גביע גלידה בצורת חרוט הוא 13 ס"מ. רדיוס הבסיס 5 ס"מ.

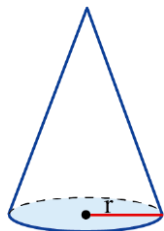
א. חשבו את גובה הגביע.

ב. כמה סמ"ק גלידה ניתן לדחוס בתוך הגביע?



6. אורך הקו היוצר של החרוט הוא 10 ס"מ, והזווית בינו לבסיס 60° .

חשבו את גובה החרוט, את רדיוס הבסיס, ואת נפח החרוט.



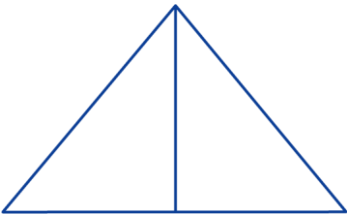
7. סובבו משולש שווה שוקיים סביב הגובה לבסיס ונוצר

חרוט.

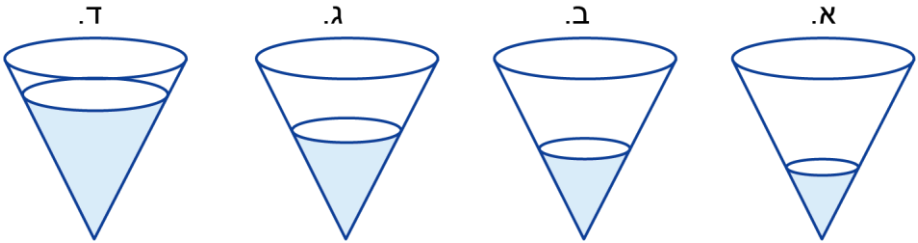
אורך בסיס המשולש המסתובב 20 ס"מ.

זווית הראש שלו 90° .

חשבו את נפח החרוט המתקבל.

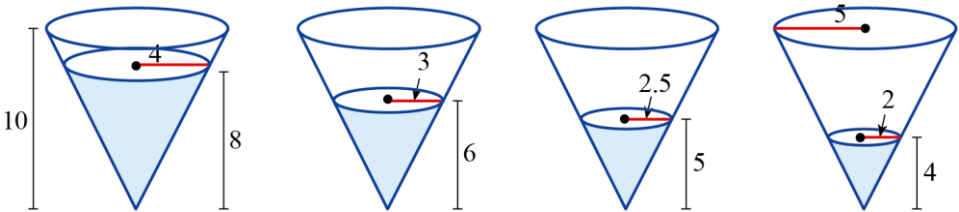


8. א. לפניכם ארבעה חרטים. איזה מהם "מלא למחצה"? נמקו.



ב. חשבו את כמות הנוזל בכל חרוט ובדקו באיזה מהכלים כמות הנוזל קרובה ביותר למחצית

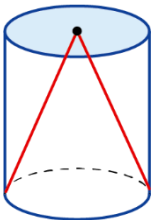
מקיבול החרוט.



9. חסמו חרוט בתוך גליל.

הקודקוד העליון של החרוט במרכז הבסיס העליון של הגליל.

פי כמה גדול נפח הגליל מנפח החרוט? הסבירו.

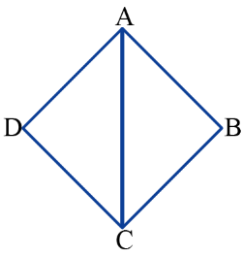


10. א. סובבו ריבוע סביב האלכסון AC.

תארו את הגוף שהתקבל.

ב. אורך צלע הריבוע 10 ס"מ.

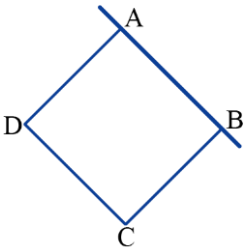
חשבו את נפח הגוף שהתקבל.



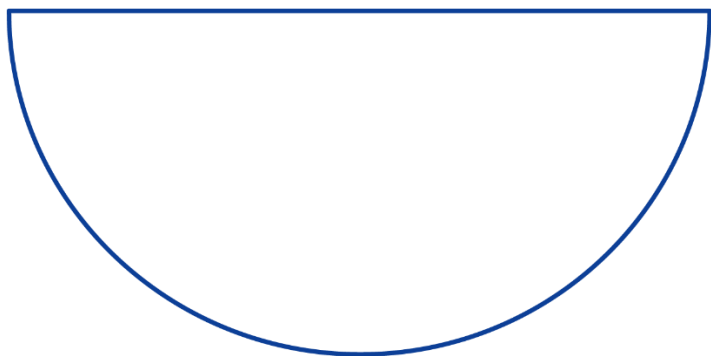
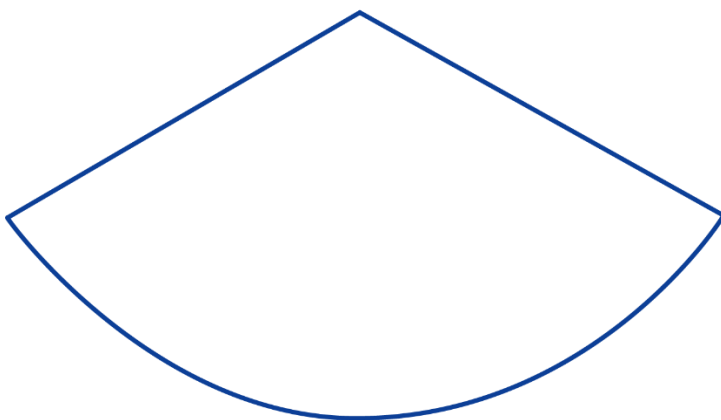
ג. איזה גוף יתקבל אם נסובב את הריבוע סביב אחת הצלעות

(למשל AB)?

מה הנפח של הגוף שהתקבל?

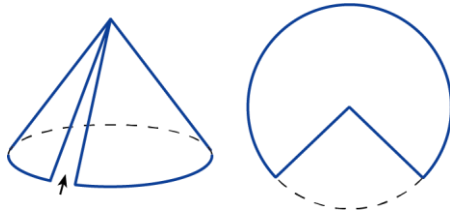


11. סמנו צורות אשר לדעתכם ניתן לגזורן ולקפלן כך שיתקבל חרוט. שרטטו גזרו ובדקו.



12. קיפלו "גזרה" והתקבל חרוט.

א. רשמו ℓ ליד הקו היוצר בגזרה ובחרוט.



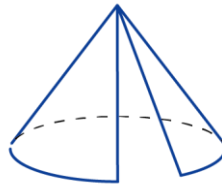
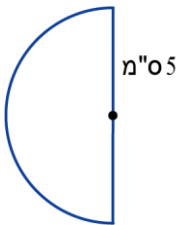
ב. הדגישו את **היקף** הבסיס של החרוט בחרוט ובגזרה.

ג. צבעו את שטח המעטפת בחרוט ובגזרה.

פריסה של **מעטפת** חרוט היא חלק של עיגול, הנקרא "גזרה". במעטפת הכוונה לחרוט ללא הבסיס.

13. מהגזרה המשורטטת בנו חרוט.

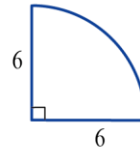
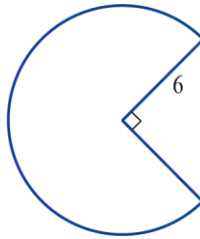
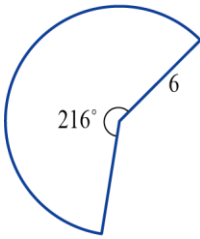
א. איזה חלק מהווה הגזרה משטח העיגול השלם?



ב. חשבו את שטח הגזרה (מעטפת החרוט).

14. מהגזרות המשורטטות בנו חרוטים.

- א. מצאו איזה חלק מהווה הגזרה משטח העיגול.
- ב. השלימו וחשבו את שטח הגזרה (מעטפת החרוט).



אפשר גם לחשב שטח מעטפת של חרוט באמצעות הנוסחה: $\pi \cdot r \cdot l$ כאשר r רדיוס בסיס החרוט, ו- l אורך הקו היוצר של החרוט.



15. גובה גביע גלידה בצורת חרוט הוא 12 ס"מ.

רדיוס הבסיס 3 ס"מ.

- א. כמה סמ"ק גלידה אפשר לדחוס לתוך הגביע?
- ב. חשבו את שטח הגביע (חשבו תחילה את l).

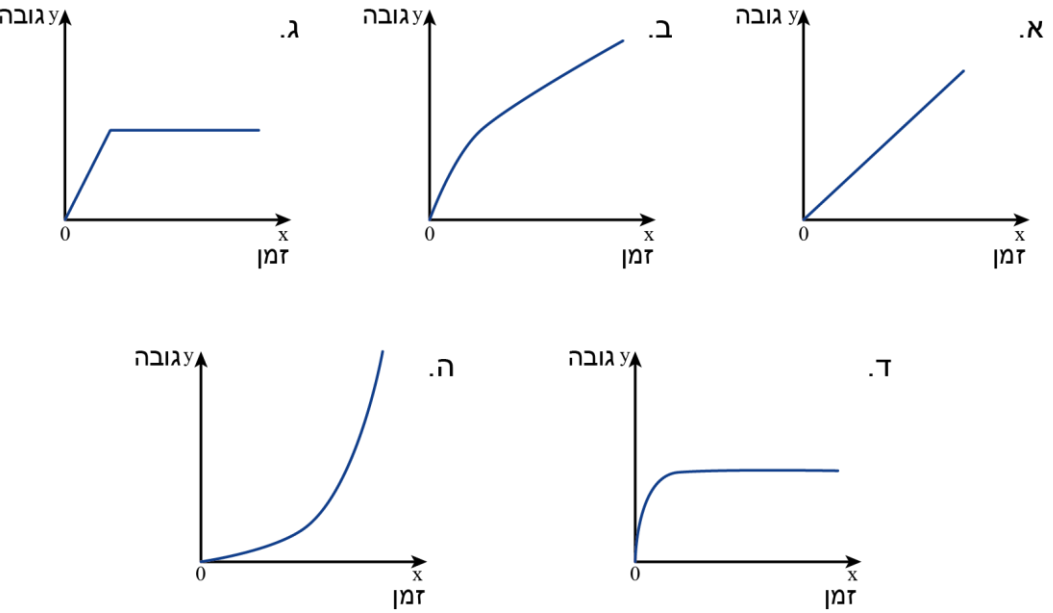
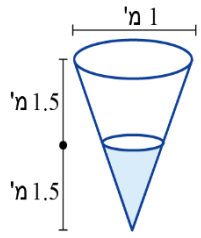
16. קוטר ראשו של נדב 16 ס"מ. שרטטו צורה של

הבריסטול ממנו תוכלו ליצור לנדב כובע ליצן.

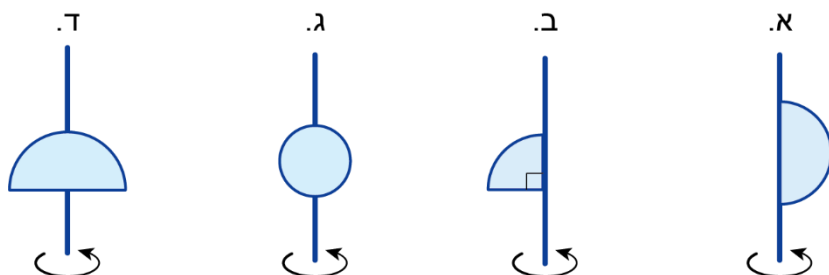


17. ממלאים מים בכלי שצורתו ומידותיו כבשרטוט:

בהתחלה הכלי ריק, ואז ממלאים אותו במים בקצב של ליטר אחד בשנייה. איזה מהגרפים מתאר את השינוי של גובה פני המים לפי הזמן שחלף? הסבירו.



1. תארו דימוי של איזה גוף נוצר מסיבוב סביב ציר של כל אחד מהדגלים שלפניכם.



2. נתאר ניסוי למציאת נפח כדור:

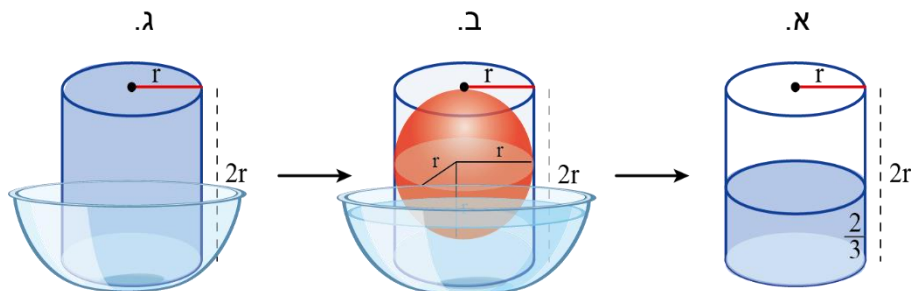
רשמו נוסחה לנפח הגליל שבתמונה:

הניחו את הגליל המלא במים בקערה.

הכניסו לגליל כדור שרדיוסו r

הכדור גרם למים להישפך לקערה.

נפח המים בקערה שווה לנפח הכדור. הסבירו.

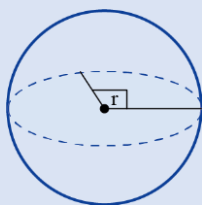


רוקנו את הגליל ושפכו לתוכו את המים מהקערה.

מדדו ומצאו שגובה המים כעת הוא $\frac{2}{3}$ מגובה הגליל.

לכן נפח הכדור הוא $\frac{2}{3}$ מנפח הגליל בעל אותו רדיוס בסיס: $\frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot r^3$ כלומר,

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$



הנוסחה לחישוב נפח כדור לפי r רדיוס הכדור היא:

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

3. רדיוס כדורגל בערך 12 ס"מ, ורדיוס כדור טניס בערך 3 ס"מ.

א. פי כמה גדול רדיוס כדורגל מרדיוס כדור טניס?

ב. שער פי כמה גדול נפח כדורגל מנפח כדור טניס.

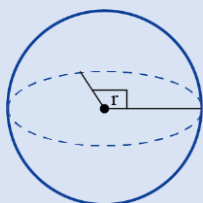
ג. פתחו בגוגל מחשבון נפח כדור ובדקו את השערתכם.

4. א. חשבו באמצעות הנוסחה נפח של כדור שרדיוסו 2 ס"מ, 4 ס"מ, ו-6 ס"מ.

ב. מצאו מבלי לחשב מה יהיה נפח כדור שרדיוסו 20 ס"מ?

ג. רדיוס כדור טניס גדול פי 1.5 מרדיוס כדור פינג-פונג.

פי כמה גדול נפח כדור טניס מנפח כדור פינג-פונג?



הנוסחה לחישוב שטח פנים של כדור לפי r רדיוס הכדור היא:

$$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

5. רדיוס כדור הארץ 6,378 ק"מ.

א. חשבו את שטח הפנים של כדור הארץ.

ב. רק 29.2% משטח פני כדור הארץ הם יבשה (השאר מים). חשבו את שטח היבשה.

ג. שטח פני המאדים הוא 53% משטח פני כדור הארץ. מצאו את שטח פני המאדים.

ד. כוכב הלכת הקטן ביותר במערכת השמש הוא כוכב חמה. שטח פני כוכב חמה

74,815,144 קמ"ר

חשבו איזה אחוז מהווה שטחו משטח פני כדור הארץ.

6. קוטרו של כדור טניס 6 ס"מ.

רשמו גדלים של גליל שיכיל בדיוק 3 כדורי טניס.



7. האוהלים במחנה הקיץ הם בצורת חצאי כדורים בשני גדלים:

קוטר האוהל הגדול 4 מ' וקוטר האוהל הקטן 3 מ'



א. פי כמה גדול ה שטח להנחת מזרונים של האוהל הגדול מזה של האוהל הקטן?

ב. פי כמה קטן נפח האוהל הקטן מנפח האוהל הגדול?

ג. חשבו את גודל היריעה הדרושה ממנו עשוי כל אחד מהאוהלים (ללא הרצפה).

8. לפניכם 3 קערות.

קוטר הקערה הקטנה 10 ס"מ, קוטר הקערה הבינונית 12 ס"מ, קוטר הגדולה 15 ס"מ.



III



II



I

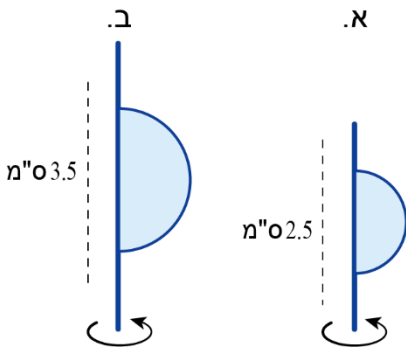
א. מצאו מה כמות הנוזלים (בסמ"ק) שמכילה קערה II.

ב. פי כמה גדולה כמות הנוזלים שמכילה קערה III מכמות הנוזלים שמכילה I?

9. תכננו תיבה שתכיל בדיוק כדור שנפחו 4188.79 סמ"ק.

10. א. חשבו את הנפח של דימוי הכדור המתקבל מסיבוב דגל א' סביב הציר.

ב. פי כמה גדול הנפח של דימוי הכדור המתקבל מסיבוב דגל ב' סביב הציר?
חשבו ובדקו.

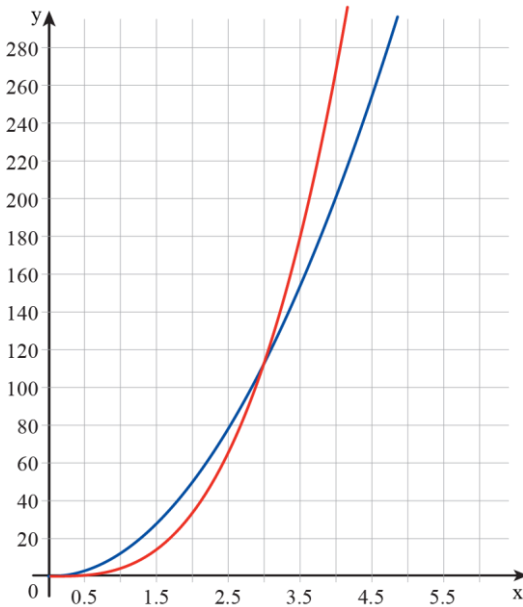


11. לפניכם שני גרפים. האחד מתאר נפח

כדור לפי הרדיוס (x) , והשני מתאר שטח פנים של כדור לפי הרדיוס.

א. זהו איזה גרף מתאים לנפח ואיזה לשטח הפנים.

ב. מה מתארת נקודת החיתוך של שני הגרפים?
מצאו אותה.



12. א. כמה כדורים שרדיוס כל אחד מהם 4 ס"מ אפשר לארוז בקופסה בצורת קובייה שאורך מקצוע שלה 40 ס"מ?

ב. איזה חלק מנפח הקופסה תופסים הכדורים?

13. כמה כדורי שוקולד שקוטנם 3 ס"מ אפשר להניח (שכבה אחת) על מגש מלבני שאורכי צלעותיו 24 ס"מ ו-36 ס"מ?



לוי חזקל

אשכול פיננסי כלכלי

תכנון ליניארי



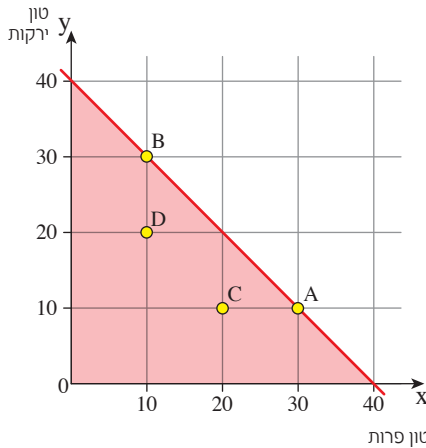
123	נגיעה קלה בכלכלה
125	בין מקבילים
133	"הפרד ומשול" במישור
137	שרטוט ישרים (חזרה)
139	עוד על הפרדה במישור
145	"טובים השניים מן האחד"
153	קוד לחישוב קדקוד
156	התחום האפשרי
160	"אל המטרה"
164	"על הגובה"
168	"אל הקודקוד"
173	"חלוצים ואילוצים" - שאלות לסיכום
176	מי ירוויח יותר? עוד שאלות לסיכום
179	ארגון נתונים בתכנון לינארי
186	"הכל פתוח"
189	ומה אם מתעניינים רק בנקודות שלמות?
191	בעיות שלמות

נגיעה קלה בכלכלה



1. מטוסי תובלה מובילים ירקות ופירות. מנהל חברת "שחף" נתן למנהל הייצור דף ובו הגרף הבא. השטח הצבוע מתאר את כל המשלוחים האפשריים. עזור לו לפענח את הגרף.

א. כמה טון פירות וכמה טון ירקות יש לשלוח, אם המשלוח הוא:



- לפי הנקודה A?
- לפי הנקודה B?
- לפי הנקודה C?
- לפי הנקודה D?

ב. סמנו נקודות המתארות הובלה של: 30 טון פירות ו-5 טון ירקות, 20 טון פירות ו-20 טון ירקות, 20 טון פירות, ללא ירקות.

ג. האם אפשר לשלוח 30 טון פירות ו-20 טון ירקות? נמקו.

ד. היכן נמצאות כל הנקודות, המתארות משלוח של ירקות בלבד?

ה. היכן נמצאות נקודות, המתארות משלוח של פירות בלבד?

ו. אם המשלוח הוא על-פי נקודה C, האם לדעתכם יש עוד מקום בטיסה?

ז. רשמו שיעורים של שלוש נקודות, המתארות מטוס מלא.

ח. היכן בתחום המשוורטט ימצאו המשלוחים הנ"ל? נמקו!

ט. האם ניתן לשלוח 50 טון של פירות וירקות ביחד?

← המשך

י. ידוע שהרווח ממשלוח טון אחד של פירות הוא 700 ש"ח ומטון אחד של ירקות 500 ש"ח.

יא. מה יהיה הרווח:

- לפי הנקודה A?
- לפי הנקודה B?
- לפי הנקודה C?
- לפי הנקודה D?

יב. באיזה מקרה מהמקרים שחישבתם, הרווח של החברה יהיה הגדול ביותר?

יג. סמנו במערכת הצירים נקודה, המייצגת רווח גדול יותר מאלה שמצאות עד כה.

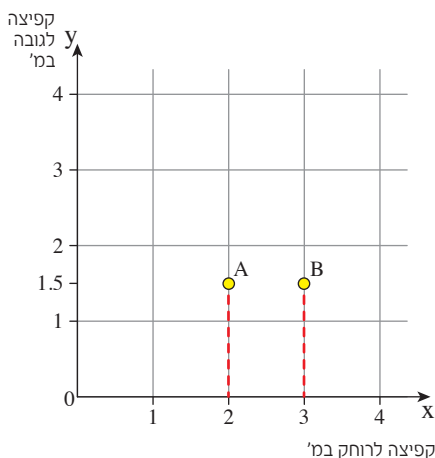
בהמשך הפרק תלמדו לפתור בעיות מן הסוג הזה, ותחפשו בשאלות מורכבות את הרווח הגדול ביותר.

יד. נסו למצוא בגרף נקודה המייצגת את הרווח הגדול ביותר.

בין מקבילים



1. ביום ספורט נרשמו תוצאות של תחרויות בקפיצה לרוחק ולגובה.
המורה לספורט תיאר את התוצאות באמצעות **נקודות**, במערכת צירים.
אחת הטיטות שלו התגלגלה לידי התלמידים.
ההישגים של דן מיוצגים על-ידי הנקודה A ושל שירה על ידי B.

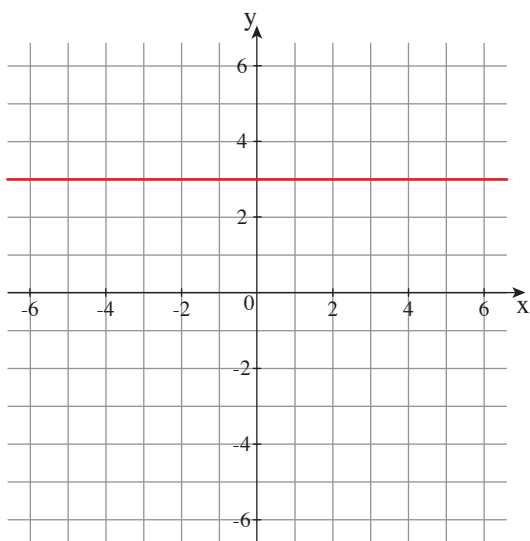


- א. מה ההישגים של דן ושירה בכל אחת מהקפיצות?
- ב. רשמו וסמנו נקודות נוספות, המתאימות לתלמידים שקפצו **לגובה** כמו דן ושירה.
- ג. מהי **משוואת הישר**, העובר דרך הנקודות A, B?
- ד. אילו תוצאות מיוצגות על-ידי הנקודות על הישר AB?

2. א. רשמו את משוואת הישר המשוורט.

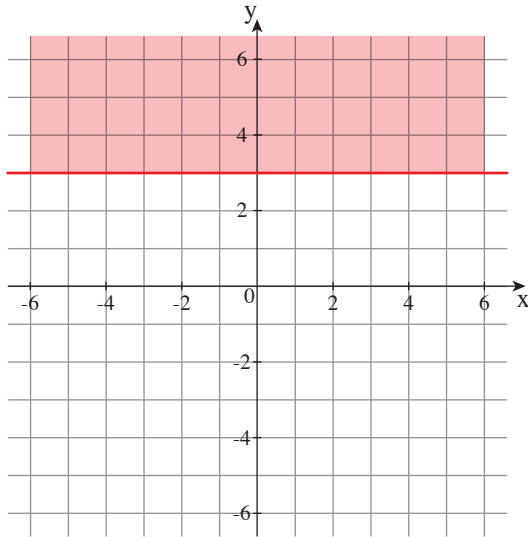
- ב. סמנו ורשמו שיעורים של ארבע נקודות, ששיעור y שלהן גדול מ-3.
- ג. צבעו את כל האזור המתאים לנקודות, ששיעור y שלהן **גדול** מ-3.

אי השוויון המתאים לאזור הצבוע, כולל הישר, הוא $y \geq 3$.



3. א. מהי משוואת הישר בגבול האזור הצבוע?

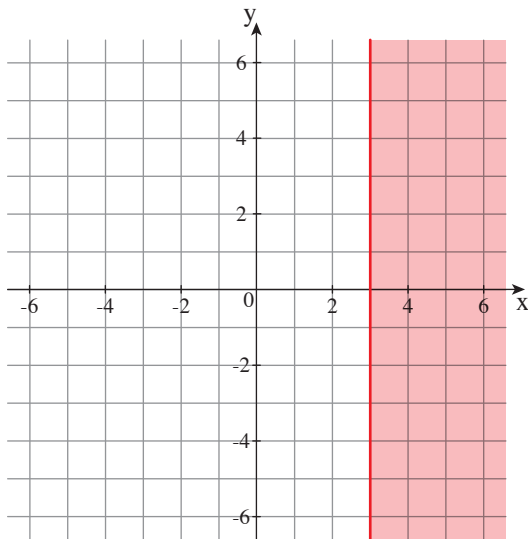
ב. נסו לאפיין בעזרת אי שוויון מתאים את האזור הצבוע.



כשמדובר ב"אזור צבוע", הכוונה לאזור כולל הישר שבגבולו, ולכן סימני האי-שוויון המתאימים הם $\leq$ או $\geq$.

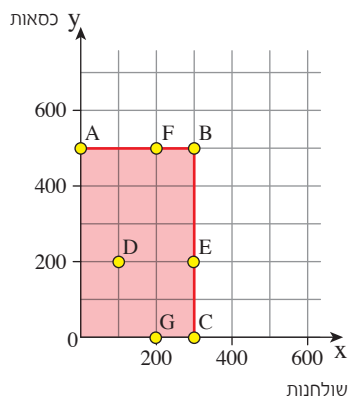
4. א. מהי משוואת הישר בגבול האזור הצבוע?

ב. רשמו אי שוויון מתאים לאזור הצבוע.



5. א. סמנו במערכת צירים נקודות, ששיעור x שלהן 5, ורשמו את משוואת הישר העובר דרכן.

ב. צבעו את האזור בו נמצאות כל הנקודות, ששיעור x שלהן קטן מ-5. רשמו אי-שוויון מתאים לאזור הצבוע.



6. יצרן מייצר שולחנות וכיסאות. אפשרויות הייצור השבועי מתוארות בשרטוט.

א. כמה שולחנות וכמה כיסאות מייצרים, אם הייצור השבועי הוא:

לפי הנקודה A?

לפי הנקודה B?

לפי הנקודה C?

לפי הנקודה D?

לפי הנקודה E?

ב. סמנו נקודה המתארת ייצור של 100 שולחנות בלבד.

ג. היכן נמצאות הנקודות, המתארות ייצור של שולחנות בלבד?

ד. היכן נמצאות הנקודות, המתארות ייצור של כיסאות בלבד?

ה. ידוע שהרווח ממכירת שולחן 50 ש"ח, וממכירת כיסא 30 ש"ח.

מהו הרווח ממכירה של: 200 שולחנות ו-300 כיסאות?

150 שולחנות ו-100 כיסאות?

300 שולחנות בלבד?

200 כיסאות בלבד?

ו. האם ניתן לייצר **רק** כיסאות ולהרוויח לפחות 17,000 ש"ח? נמקו?

ז. כמה שולחנות וכמה כיסאות אפשר לייצר, לפי המגבלות, ולקבל רווח מקסימלי?

ח. מהי משוואת הישר AB?

ט. רשמו אי-שוויון מתאים לנקודות מתחת לישר AB.

י. רשמו אי-שוויון מתאים לנקודות משמאל לישר BC.

יא. נסו להסביר מה מתאר האזור הצבוע.

7. א. שרטטו ישר מתאים לנקודות, ששיעור x שלהן שווה ל-2.

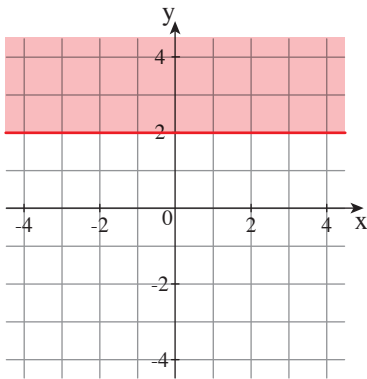
ב. צבעו את האזור בו נמצאות כל הנקודות, ששיעור x שלהן גדול מ-2.

ג. רשמו אי-שוויון מתאים.

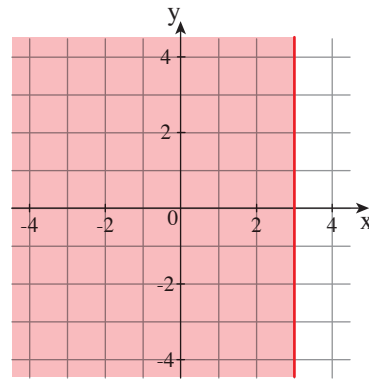
בסעיף זה למדתם לתאר אי שוויונות בצורות שונות,

דוגמה

לאוסף הנקודות, ששיעור y שלהן גדול או שווה ל-2, מתאים האי-שוויון $y \geq 2$ והגרף:



לאוסף הנקודות, ששיעור x שלהן קטן או שווה ל-3, מתאים האי-שוויון $x \leq 3$ והגרף:

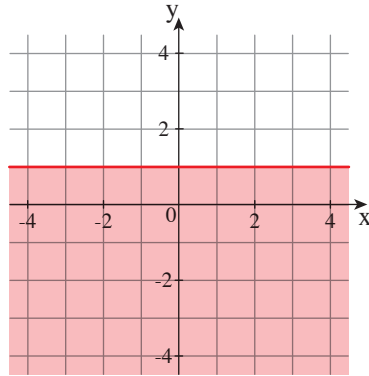


כמו כן ראיתם, שכדי לשרטט גרף של אי-שוויון, שהישר בגבולו מקביל לאחד הצירים, יש לשרטט תחילה את הישר.

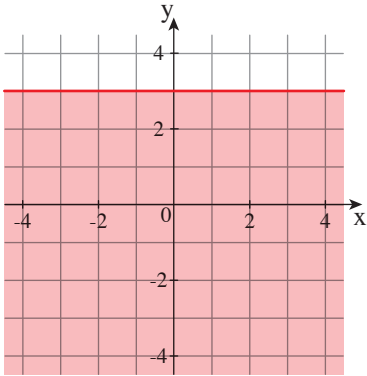
8. רשמו את משוואת הישר המודגש.

רשמו את האי-השוויון המתאים לאזור הצבע.

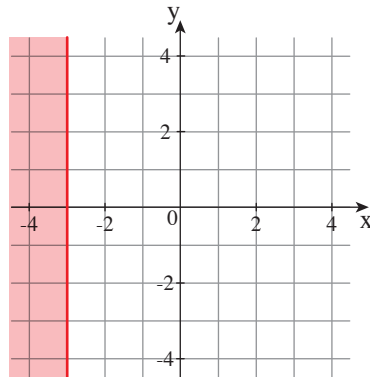
א.



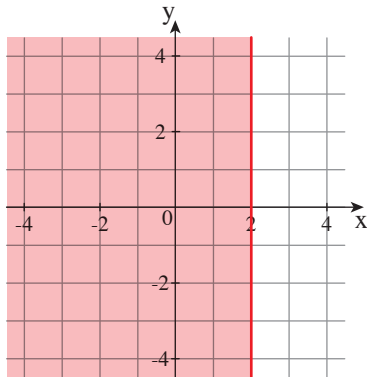
ב.



ג.

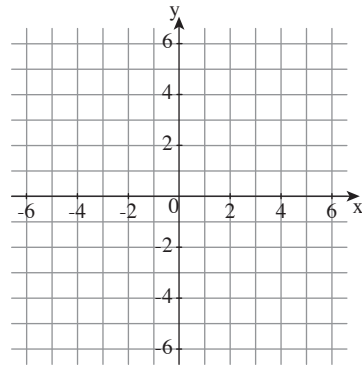
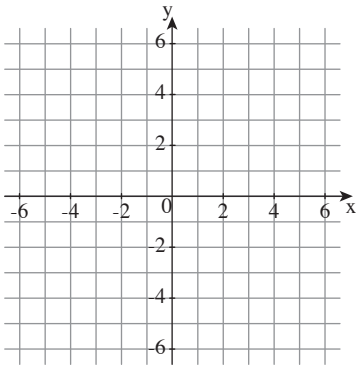


ד.



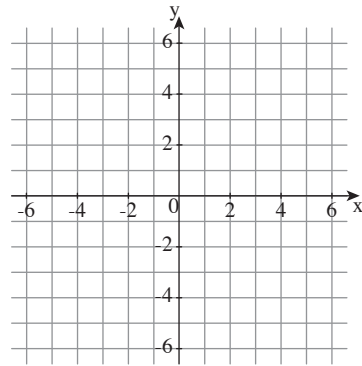
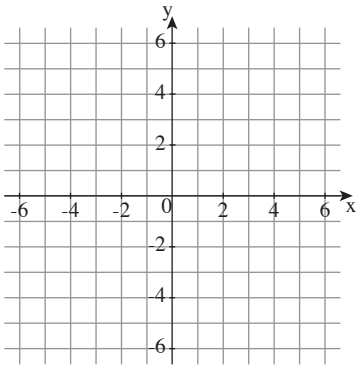
9. שרטטו גרפים מתאימים.
א. $x \geq 5$

ב. כל הנקודות ששיעור x גדול או שווה ל-1, $(x \geq -1)$



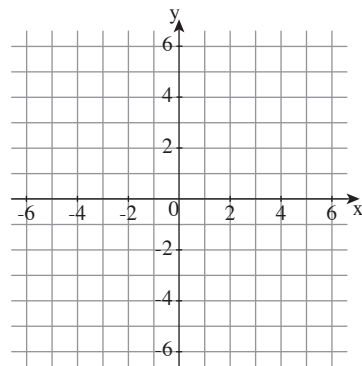
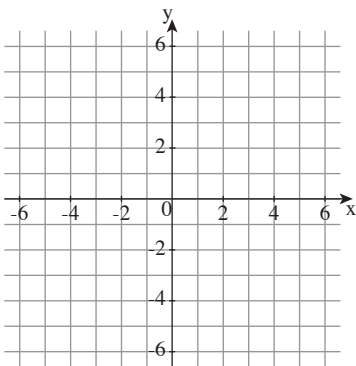
ד. $x \leq 0$

ג. כל הנקודות, ששיעור y שלהן גדול או שווה ל-5.

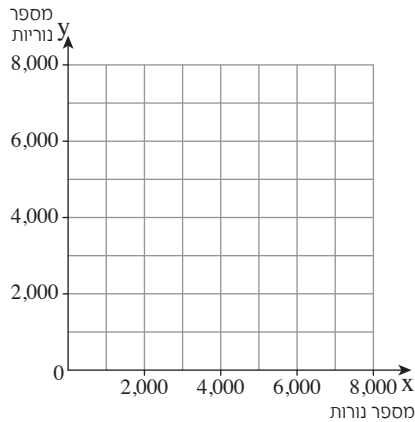


ו. כל הנקודות ששיעור y שלהן גדול או שווה ל-1-

ה. $y \leq 0$



א. סמנו נקודות, המתאימות לייצור של 5000 נורות. העבירו את הישר המתאים ורשמו את משוואתו.



- צבעו אזור מתאים לייצור של לא יותר מ-5000 נורות.
- רשמו אי-שוויון מתאים לאזור הצבוע.
- ב. סמנו נקודות המתאימות לייצור של 7000 נוריות, העבירו את הישר המתאים ורשמו את משוואתו.
- צבעו אזור מתאים לייצור של לא יותר מ-7000 נורות.
- רשמו אי-שוויון מתאים לאזור הצבוע.
- ג. מגבלות הייצור מתוארות בתחום הצבוע פעמיים. רשמו אותן.
- ד. היכן נמצאות הנקודות המתארות ייצור של נוריות בלבד?
- ה. ידוע שהמפעל מרוויח 0.30 ש"ח מנורה ו-0.20 ש"ח מנורית.
מה יהיה רווח המפעל:
- ממכירה של 2000 נורות ו-1000 נוריות?
- ממכירה של 5000 נורות ללא נוריות?
- ממכירה של 7000 נורות ללא נוריות?
- ו. כמה נורות ונוריות אפשר לייצר, כדי להגיע לרווח מקסימלי?

11. מנהל חברת "שחף" עסוק מאוד. מחוסר זמן נתן למנהל הייצור שלו את הדף הבא, כדי שישרטט גרף.

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

x - משקל פרחים בטונות

y - משקל פירות בטונות

א. שרטטו גרף של שני האי-השוויונות, באותה מערכת צירים, ברביע הראשון.
(שרטטו תחילה את הישרים).

ב. מה מייצגות הנקודות $A(2, 4)$, $B(5, 3)$?

ג. סמנו במערכת הצירים נקודות המתארות משלוח של:

3 טון פרחים ו-2 טון פירות.

5 טון פרחים ו-2 טון פירות.

2 טון פרחים ו-3 טון פירות.

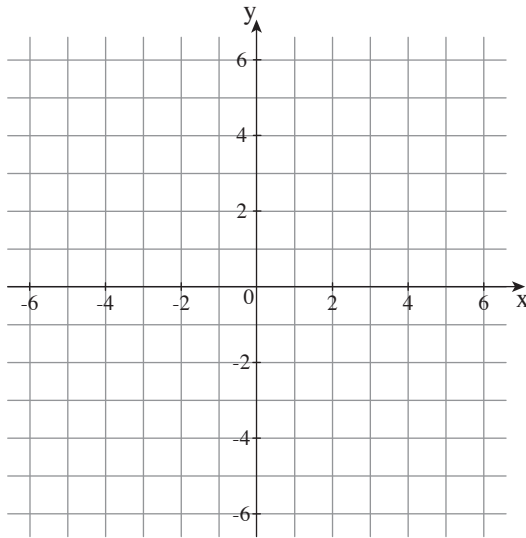
ד. השטח הצבוע בגרף ששרטטתם מתאר את אפשרויות הייצור השונות.
רשמו 3 דוגמאות למשלוחים אפשריים.

"הפרד ומשול" במישור



עד כה שרטטתם גרף של אי-שוויון, כשהישר המתאים מקביל לאחד הצירים. עתה תלמדו לשרטט גרפים של אי שוויונות נוספים. לשם כך נחזור על שרטוט ישרים.

1. א. שרטטו במערכת הצירים את הישר שמשוואתו $y = x + 2$.



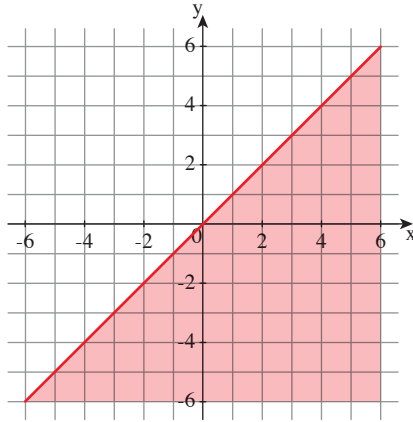
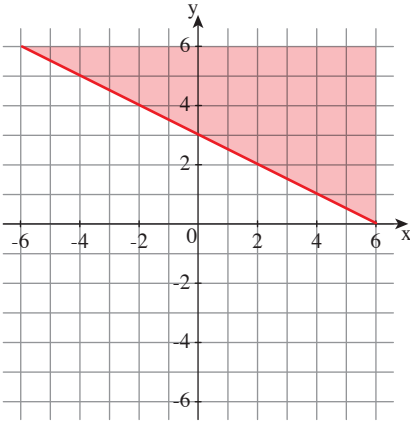
- ב. היכן, לדעתכם, יימצאו הנקודות המקיימות $y \geq x + 2$?
- צבעו אזור מתאים.
- סמנו שלוש נקודות באזור הזה, רשמו את שיעוריהן.
- הציבו ובדקו אם שיעוריהן מקיימים את האי-שוויון הנ"ל.
- סמנו שתי נקודות באזור שאינו צבוע, ובדקו אם שיעורי הנקודות אינם מקיימים את האי-שוויון.

2. רשמו את משוואת הישר המודגש.

- רשמו אי-שוויון המתאים לאזור הצבוע.

א.

ב.



3. שרטטו את הישר שמשוואתו $y = \frac{1}{2}x + 3$

א. צבעו את חלק המישור, המתאר את האי-שוויון $y \geq \frac{1}{2}x + 3$.

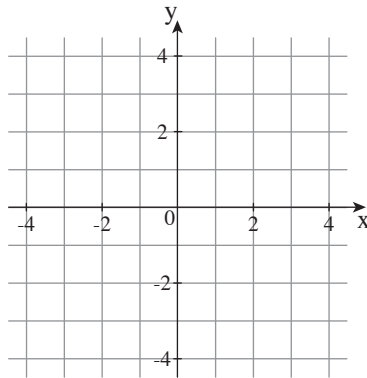
ב. בחרו 2 נקודות באזור הצבוע, ובדקו על ידי הצבה אם הן מקיימות את האי-שוויון.

ג. רשמו אי-שוויון, המתאים לאזור **שאינו** צבוע.

ראינו שהישר מפריד בין שני "חצאי מישור", שלכל אחד מהם מתאים אי-שוויון מהצורה

$y \leq \boxed{}$ או $y \geq \boxed{}$ (האזורים כוללים את הישר המפריד).

4. א. שרטטו את הישר שמשוואתו $y = -3x + 2$.
צבעו את האזור, המתאים לאי-שוויון $y \leq -3x + 2$.

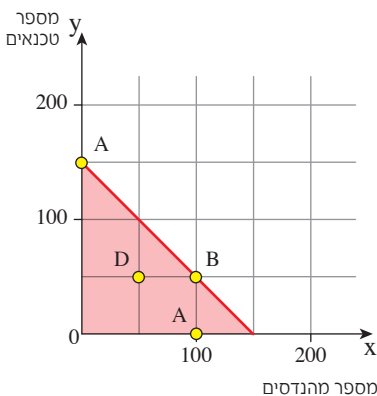


- ב. שרטטו את הישר שמשוואתו $y = 2x - 1$.
צבעו את האזור המתאים לאי-שוויון $y \geq 2x - 1$.

5. שרטטו במערכת צירים נפרדת גרף מתאים לכל אי שוויון (שרטטו תחילה את הישר שבגבול האזור).

א. $y \geq -\frac{1}{2}x + 1$ ב. $y \leq \frac{1}{2}x + 3$ ג. $x \leq 5$

6. מקימים מפעל, שבו יעבדו מהנדסים וטכנאים.
האפשרויות השונות מתוארות בשרטוט.

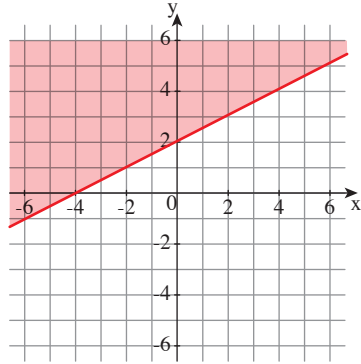


- א. כמה מהנדסים, לכל היותר, יוכלו לעבוד במפעל זה?
ב. רשמו את משוואת הישר AB.
ג. רשמו אי שוויונות מתאימים לבעיה.
ד. מה מייצגת כל אחת מהנקודות A, B, C ו-D?
ה. אילו מהנקודות הנ"ל אינן מאפשרות תוספת עובדים?
ו. מהו המספר הגדול ביותר של עובדים שאפשר להעסיק?
ז. האם הנקודה (52.5, 70) נמצאת בתחום הצבוע?

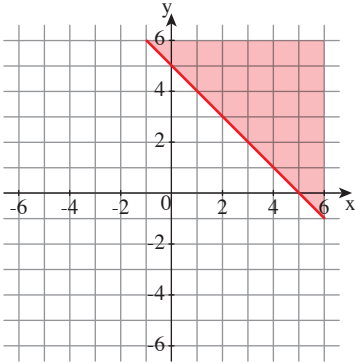
- ח. האם כל הנקודות בתחום הצבוע אכן מתאימות לאפשרויות ההעסקה? נמקו!

7. - רשמו את משוואת הישר המודגש.
 - רשמו אי שוויון, המתאים לאיזור הצבוע.

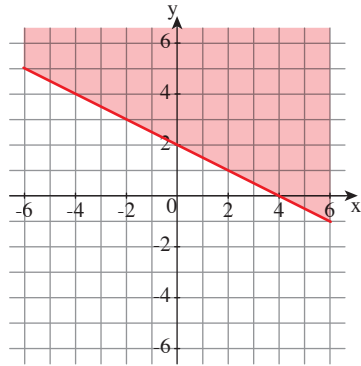
א.



ב.



ג.

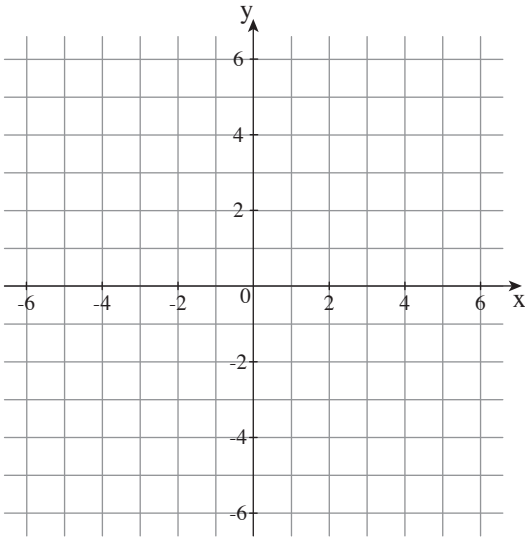


שרטוט ישרים (חזרה)

כדי לשרטט גרפים של אי שוויונות, שאינם רשומים בצורה $y \geq$ או $y \leq$, נחזור על שרטוט ישרים לפי נקודות.

1. כדי לשרטט ישר שמשוואתו $2x - 3y = 6$, אפשר לבחור שתי נקודות (ושלישית לביקורת) הנמצאות על הישר, לסמן ולהעביר את הישר. השלימו את הטבלה ושרטטו.

x	0		-3
y		0	



2. שרטטו את הישרים שמשוואתיהם נתונות (אפשר באותה מערכת צירים).

$$\frac{x-y}{2} = 3$$

$$x - 2y = 1$$

$$2x - y = 5$$

x	-1	0	-3
y			

x	0		-1
y		0	

x	0		-3
y		0	

כפי שראיתם, נוח לבחור נקודות על הצירים.

3. שרטטו את הישרים.

א. $y - 3x = 5$

ג. $\frac{y-x}{2} = 0$

ב. $2y + x = 10$

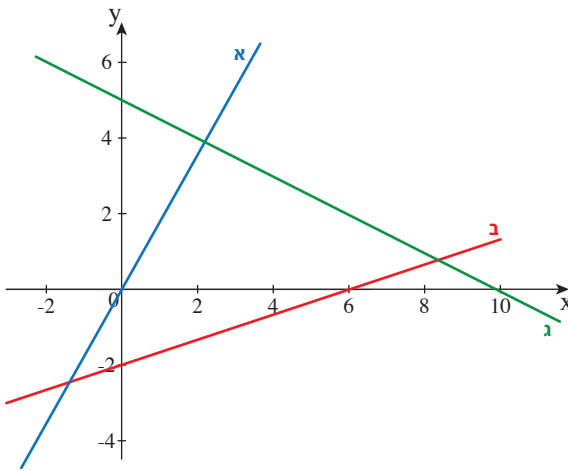
ד. $2x - 3y = 6$

4. התאימו לכל ישר את משוואתו.

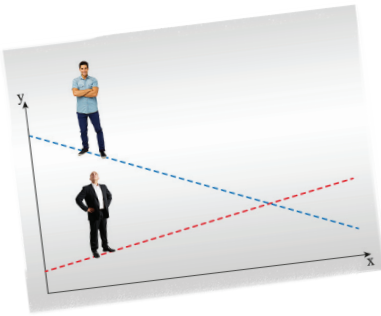
(3) $2x - y = 0$

(2) $x - 3y = 6$

(1) $x + 2y = 10$



עוד על הפרדה במישור



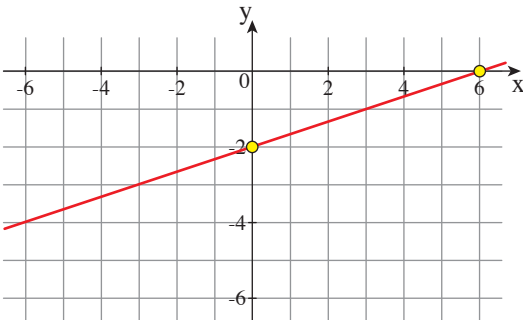
1. נתון ישר שמשוואתו $x - 3y = 6$. הציבו את שיעורי

הנקודה $(5, -1)$ בביטוי $x - 3y$.

אם היא מקיימת $x - 3y > 6$,

סמנו אותה במערכת הצירים בצבע כלשהו.

אם היא מקיימת $x - 3y < 6$, סמנו אותה בצבע אחר.



חזרו על הפעולה לגבי כל אחת מהנקודות הבאות.

$(6, 1)$

$(5, 1)$

$(0, 0)$

$(3, 2)$

$(\frac{1}{2}, -2)$

$(-2, -1)$

$(-5, -4)$

$(3, -2)$

$(0, -4)$

אם לא טעיתם, קיבלתם, כפי שראינו בסעיף הקודם, שהישר מפריד בין שתי הקבוצות של הנקודות:

אלה שמתאימות לאי-שוויון $x - 3y > 6$

ואלה שמתאימות לאי-שוויון $x - 3y < 6$

לכן מספיק לבחור נקודה אחת, ולבדוק בעזרתה איזה אזור מתאים לכל אי שוויון.

כשנתון האי שוויון $2x - 3y \geq 6$, לא נוהג לעבור לצורה $y \geq$ או $y \leq$, לכן נשרטט את הישר המפריד על פי נקודות, ואחר כך נקבע את האזור המתאים על ידי בדיקת נקודה.

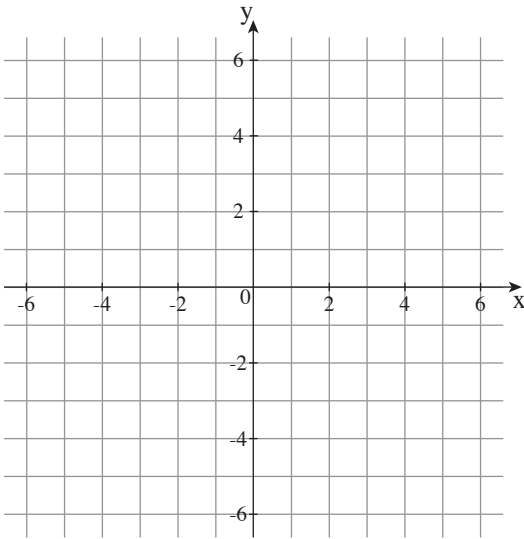
2. א. שרטטו תחילה את הישר $2x - 3y = 6$.

x			
y			

ב. שערו איזהו האזור המתאים לאי שוויון

$$2x - 3y \geq 6$$

בחרו נקודה באזור זה, הציבו שיעוריה, ובדקו אם היא מקיימת האי שוויון $2x - 3y \geq 6$. אם כן, צבעו את האזור. אם לא, צבעו את ה"אזור השני".

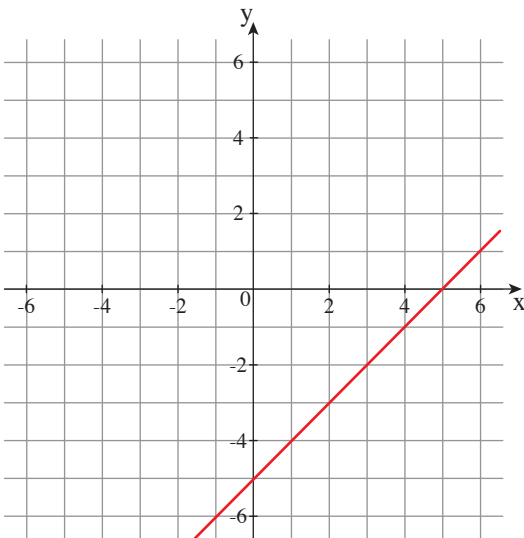


3. נתון ישר שמשוואתו $x - y = 5$ (ראו שרטוט).

א. סמנו נקודה כלשהי **מעל** הישר ורשמו את שיעוריה.

ב. הציבו ובדקו איזה אי שוויון מתאים לאזור שמעל הישר.

ג. הנקודות $(3, 0)$, $(5, 0)$ נמצאות באזור הצבוע. הציבו ובדקו אם שיעוריהן מקיימים את האי שוויון שרשמם.



4. א. שרטטו תחילה את הישר $2x - 3y = 6$ במערכת הצירים.

x			
y			

בחרו נקודה באחד משני האזורים,

ובדקו אם היא מקיימת את האי

$$2x - 3y \geq 6$$

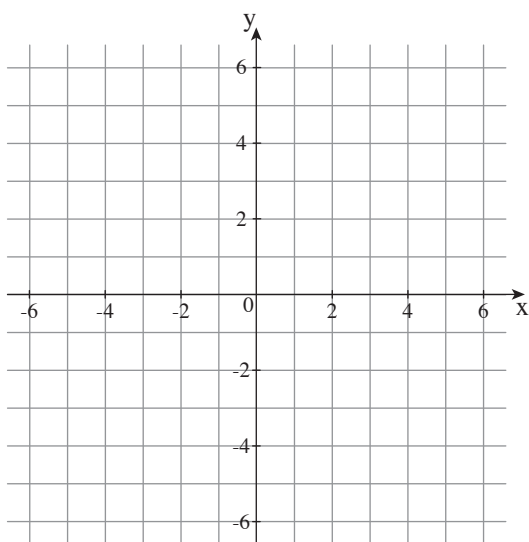
שוויון. צבעו את האזור המתאים לאי שוויון

$$2x - y \geq 6$$

ביקורת: בחרו נקודה נוספת באזור

הצבוע, ובדקו אם שיעוריה מקיימים

את האי שוויון.

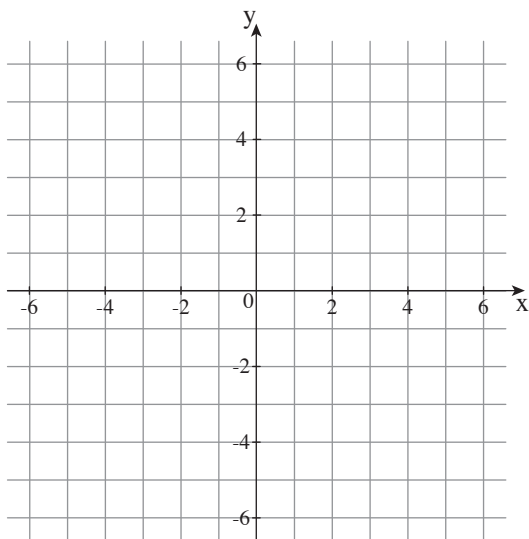


ב. שרטטו את הישר שמשוואתו $x - 2y = 6$.

בחרו נקודה מעל או מתחת לישר,

והשלימו שרטוט גרף מתאים לאי

$$x - 2y \leq 6$$



5. רשמו את משוואת הישר "המפריד" בין האי שוויונות.

$$y - x \leq 3$$

$$y - x \geq 3$$

6. רשמו לכל אי שוויון את משוואת הישר "המפריד".

ב. $2y - x \leq 5$

א. $2y - x \geq 5$

7. שרטטו גרפים מתאימים לאי שוויונות הבאים.

(שרטטו תחילה את הישר המפריד, בחרו נקודה באחד האזורים, בדקו איזה אי שוויון היא מקיימת, ואחר כך צבעו את האזור המתאים לאי שוויון הנתון).

ג. $y \geq -1$

א. $x + 2y \geq 2$

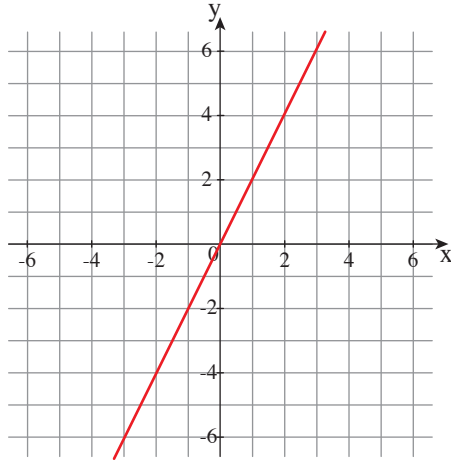
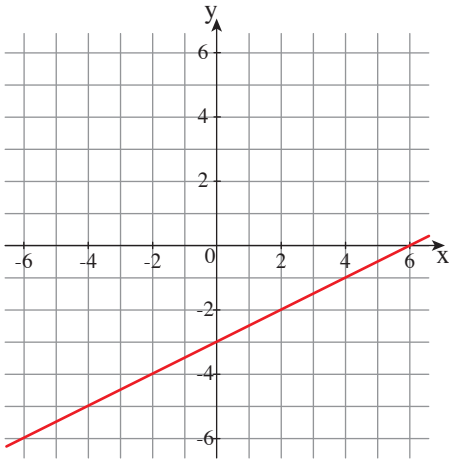
ד. $2x - 5y \leq 10$

ב. $2x - y \leq 0$

8. סמנו נקודה באחד משני האזורים, רשמו את שיעוריה, ובדקו אם היא מקיימת את האי שוויון. אחר כך צבעו את האזור המתאים לאי שוויון.

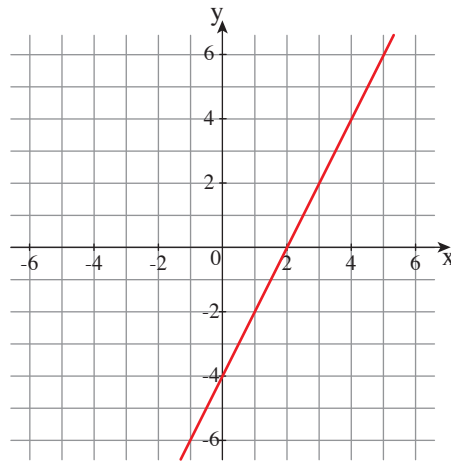
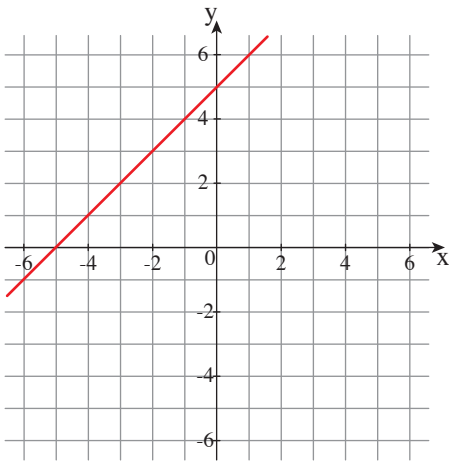
ג. $x - 2y \leq 6$

א. $y \geq 2x$



ד. $y - x \leq 5$

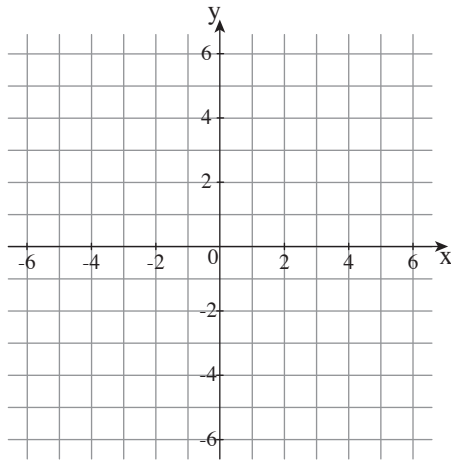
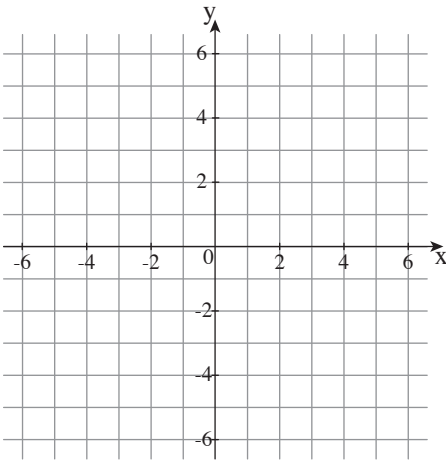
ב. $2x - y \leq 4$



9. שרטטו את הישר המפריד, וצבעו את האזור המתאים לאי שוויון.

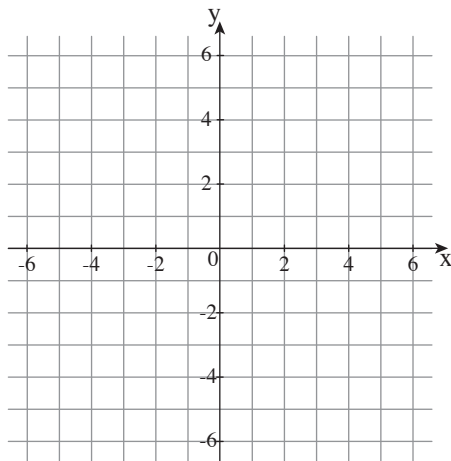
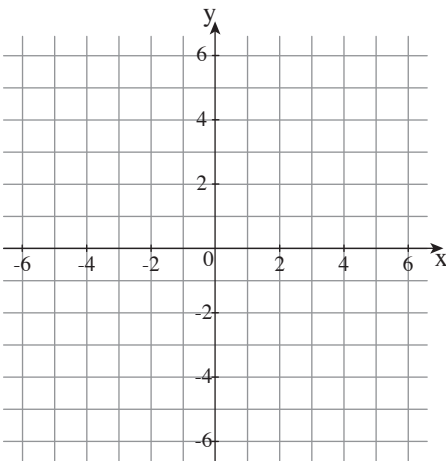
ג. $x + 2y \geq -6$

א. $x + y \leq 5$



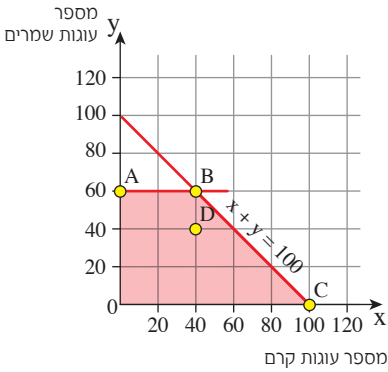
ד. $y \leq \frac{1}{2}x + 3$

ב. $2x + 3y \geq 12$



"טובים השניים מן האחד"

1. קונדיטוריה מייצרת עוגות שמרים ועוגות קרם, בסך-הכל לא יותר מ- 100 עוגות ביום. מספר עוגות השמרים אינו עולה על 60 (ראה שרטוט).



- א. רשמו מה מתארת כל אחת מהנקודות A, B ו-C.
 ב. רשמו אי שוויונות מתאימים לבעיה.
 ג. ידוע שהרווח מעוגת קרם הוא 10 ש"ח, והרווח מעוגת שמרים 5 ש"ח.
 מהו הרווח על פי הנקודות A, B ו-C?
 היכן, לדעתכם, יהיה הרווח גדול יותר, בנקודה B או D?

בפרק הקודם ראינו כיצד לתאר גרף של אי שוויון בודד. בסעיף זה תלמדו לשרטט גרף משותף לשני אי שוויונות.

2. א. שרטטו את הישר שמשוואתו $y = 2x + 5$.
 ב. צבעו את האזור המתאים לאי שוויון $y \leq 2x + 5$.
 ג. שרטטו באותה מערכת צירים גרף מתאים לאי שוויון $y \leq -x + 5$ (שרטטו תחילה את הישר המפריד).
 ד. רשמו שיעורי נקודה, הנמצאת באזור המשותף לשני האי שוויונות.
 ה. הדגישו את האזור המשותף.
3. א. שרטטו את הגרף של האי שוויון $y \leq 2x + 4$ (זכרו לשרטט תחילה את הישר המפריד).
 ב. שרטטו באופן דומה, באותה מערכת צירים, גרף של האי שוויון $y \leq x + 1$.
 ג. הדגישו את האזור המשותף.
 ד. מצאו נקודה באזור המשותף. רשמו את שיעוריה, ובדקו אם היא מקיימת את שני האי שוויונות.

$$y = -x + 5$$

$$y = x + 3$$

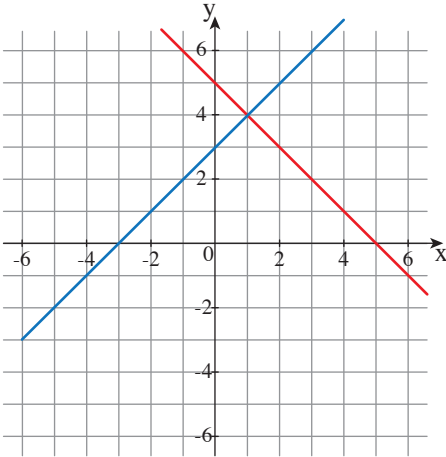
4. במערכת הצירים משורטטים הישרים

א. התאימו כל ישר למשוואתו.

ב. צבעו את הגרפים המתאימים לאי שוויונות

$$y \leq x + 3 \quad y \geq -x + 5$$

ג. הדגישו את האזור המשותף.



5. א. התאימו כל ישר למשוואתו.

$$y = x + 2 \quad (I)$$

$$2x + y = 5 \quad (II)$$

ב. רשמו אי שוויון מתאים לשטח הצבוע

ש"מתחת ל-I.

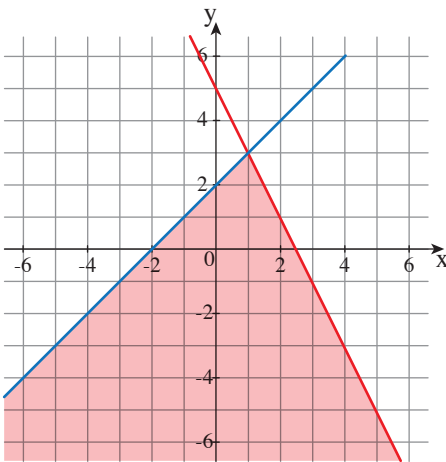
רשמו אי שוויון מתאים לאזור הצבוע

ש"מתחת" ל-II.

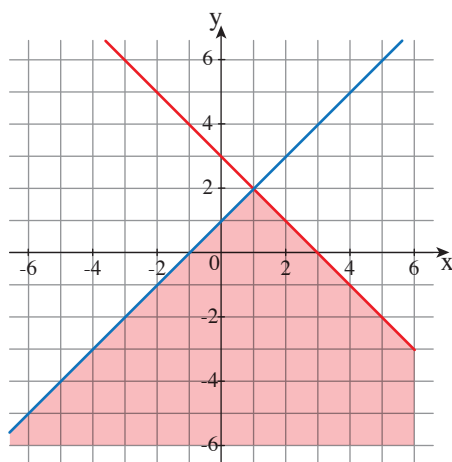
ג. מצאו 3 נקודות באזור המשותף, הציבו

ובדקו אם שיעוריהן מקיימים את שני האי

שוויונות שרשמת.



כדי לשרטט גרף של מערכת אי שוויונות, יש לשרטט תחילה את הגרף של כל אי שוויון בנפרד. האזור המשותף של גרפים אלה הוא **גרף המערכת**.



לדוגמה: השטח הצבוע בשרטוט שלפניך, מכיל את כל הנקודות ש"מתחת" לשני הישרים $y = x + 1$, $y = -x + 3$, ולכן מהווה **פתרון למערכת האי שוויונות**:

$$\begin{cases} y \leq x + 1 \\ y \leq -x + 3 \end{cases}$$

6. א. סמנו במערכת הצירים את הנקודות:

$$A(-1, 3) \quad B(2, 5) \quad C(0, 6)$$

שרטטו ישר, כך ש- 3 הנקודות יהיו **מעליו**, ורשמו את משוואתו.

שרטטו ישר נוסף, כך ש- 3 הנקודות יהיו מתחתיו, ורשמו את משוואתו.

ב. צבעו אזור, הכלוא בין הישרים, באופן שיכיל את כל הנקודות הללו.

ג. רשמו מערכת אי שוויונות, המתאימה לשטח הצבוע שנוצר.

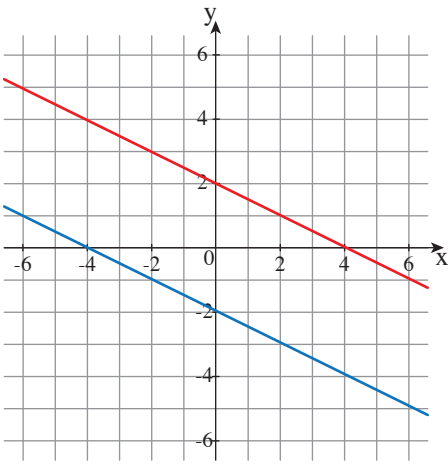
7. א. התאימו כל ישר למשוואה.

$$y = -\frac{1}{2}x + 2 \quad (I)$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 2 \quad (II)$$

ב. שרטטו גרף המתאים למערכת האי שוויונות.

$$\begin{cases} y \leq -\frac{1}{2}x + 2 \\ y \geq -\frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$$

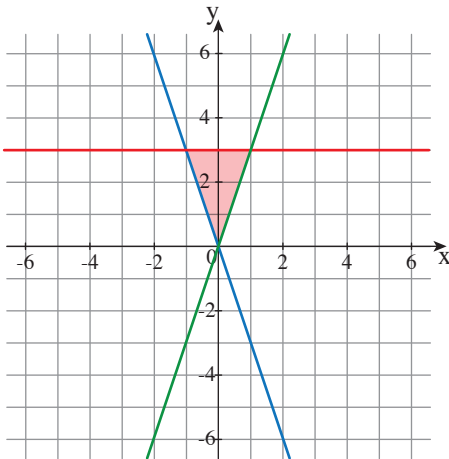


8. א. רשמו את משוואות הישרים שבשרטטו.

ב. רשמו מערכת אי שוויונות, שפתרונה הוא השטח הצבוע שבשרטטו.

ג. רשמו את שיעורי הקדקודים של המשולש שהתקבל.

ד. רשמו שיעוריהן של 2 נקודות בתוך המשולש.



9. א. שרטטו את הישרים הבאים:

$$y = x + 3$$

$$y = -2x + 3$$

$$y = 1$$

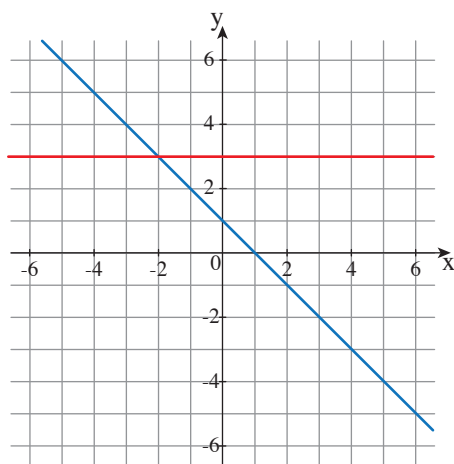
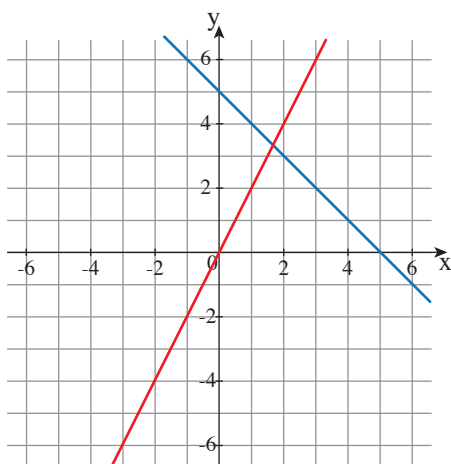
ב. צבעו את האזור המשותף לאי שוויונות:

$$\begin{cases} y \leq x + 3 \\ y \leq -2x + 3 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

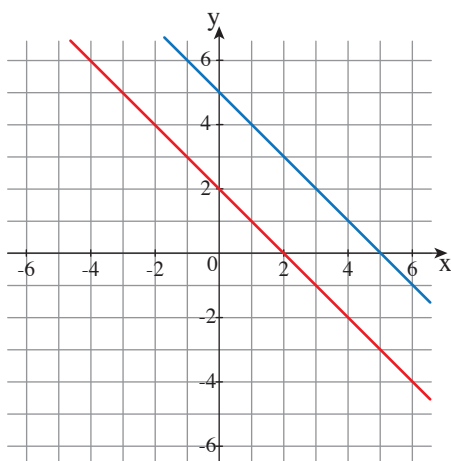
10. צבעו במערכת הצירים את האזורים המתאימים, כך שיתארו את מערכות האי שוויונות.

ב.
$$\begin{cases} y \geq 2x \\ y \leq -x + 5 \end{cases}$$

א.
$$\begin{cases} y \leq 3 \\ y \leq -x + 1 \end{cases}$$



ג.
$$\begin{cases} y \leq -x + 5 \\ y \geq -x + 2 \end{cases}$$



11. שרטטו גרפים מתאימים, והדגישו את האזור המשותף (אם קיים אזור כזה).

$$\begin{cases} x + 2y \leq 10 \\ y \geq x - 5 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

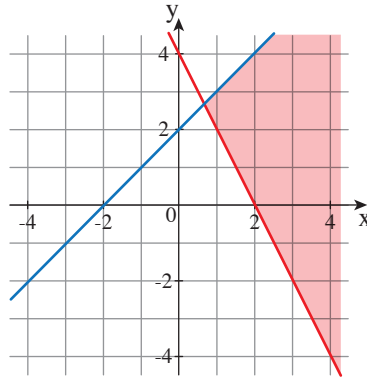
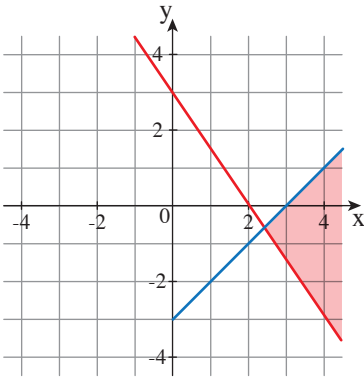
$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} \geq 0 \\ y \leq x+5 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 3x + y \geq 5 \\ y \leq -3x \end{cases} \quad \text{ג.}$$

12. רשמו מערכות של אי שוויונות, המתאימים לגרף.

ב.

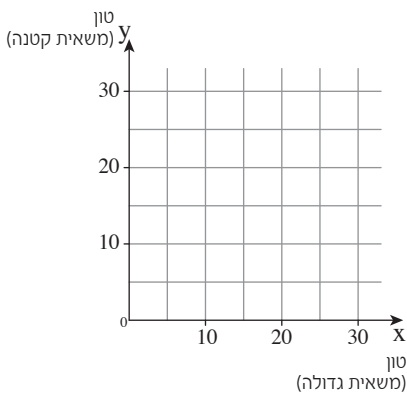
א.



13. משאית גדולה מסוגלת להעביר בכל הובלה x טון ברזל, ומשאית קטנה - y טון ברזל.

לפניך האי שוויונות, המתארים את האילוצים של הבעיה.

א. שרטטו גרף מתאים לבעיה, ורשמו במילים את אילוצי הבעיה (בהקשר לסיפור).



$$\begin{cases} x + y \leq 20 \\ y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

← המשך

ב. בדקו לגבי כל אחת מהנקודות הבאות, אם שיעוריה מתארים הובלה אפשרית

$$C(-3, 10), D(18, 5), A(20, 0), B(9, 6)$$

ג. סמנו שתי נקודות בתחום המתאים לבעיה, ורשמו מה מתארים שיעוריהן.

ד. רשמו שיעורי נקודה, הנמצאות על אחת מהצלעות של הצורה שהתקבלה, רשמו מה מתארים שיעורי הנקודה.

ה. היכן נמצאות הנקודות, המתארות משלוח של 20 טון ברזל בסך הכל?

14. שרטטו במערכת צירים את הגרפים של מערכות האי שוויונות.

צבעו את האזור המשותף (אם קיים כזה), ורשמו עבורו את שיעורי הקדקודים.

$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ y \leq -2x \\ x \geq -2 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

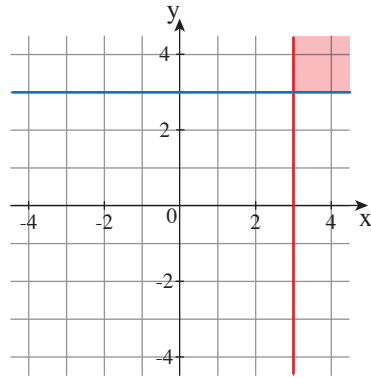
$$\begin{cases} y \geq 2x \\ y + x \leq 5 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq x \end{cases} \quad \text{ד.}$$

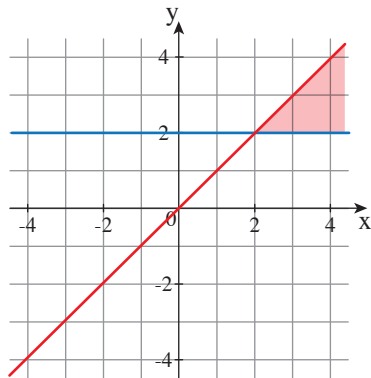
$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq x + 2 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 2x + 1 \\ x - y \leq 5 \end{cases} \quad \text{ה.}$$

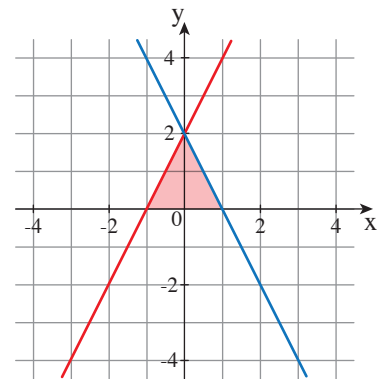
15. רשמו מערכת אי שוויונות, המתאימה לאזור הצבוע.
א.



ב.



ג.



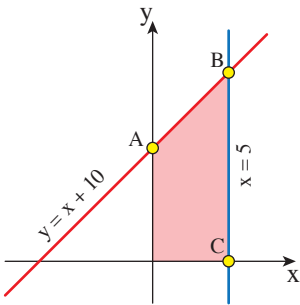
קוד לחישוב קדקוד



עד כה קראנו מתוך השרטוט את שיעורי הקדקודים של התחום המשורטט. בסעיף זה נחזור על מציאת שיעורי הקדקודים כשאין יחידות בשרטוט, כפי שעשינו בגיאומטריה אנליטית.

1. א. רשמו מערכת אי שוויונות, שתתאר את התחום הצבוע.

ב. מצאו את שיעורי A, B ו-C, (רשמו את השיעור הידוע, ואחר כך חשבו את השיעור הנוסף).



2. א. התאימו כל ישר למשוואתו.

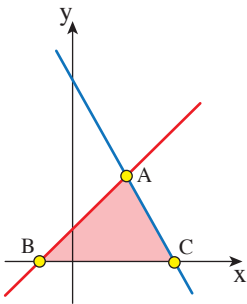
$$y = x + 1$$

$$y = -2x + 10$$

ב. רשמו מערכת אי שוויונות, המתאימה לאזור הצבוע.

ג. חשבו את שיעורי הנקודות B, C.

ד. חשבו את שיעורי הנקודה A.



3. א. רשמו מערכת אי שוויונות, שתתאר את האזור הצבוע.

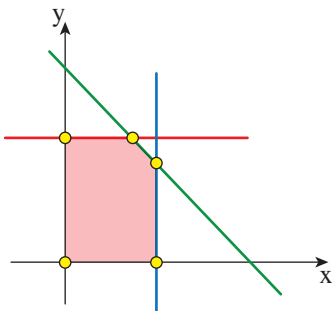
$$y = 5$$

משוואות הישרים:

$$y + x = 8$$

$$x = 4$$

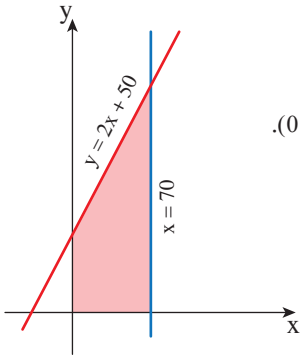
ב. מצאו את קדקודי הצורה שהתקבלה.



4. א. רשמו מערכת אי שוויונות מתאימה לאזור הצבוע.

ב. חשבו את שיעורי הקדקודים.

ג. רשמו אי שוויונות, היוצרים משולש שקדקודיו: $(0, 2)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$.



תרגילים

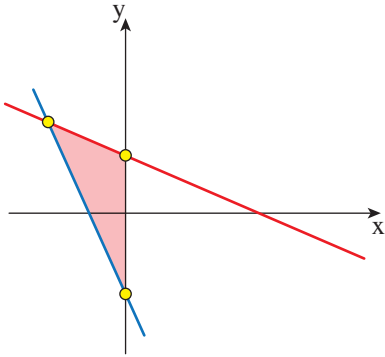
5. א. משוואות הישרים:

$$y = -2x - 3$$

$$x + 3y = 6$$

רשמו מערכת אי שוויונות, שתתאר את האזור הצבוע.

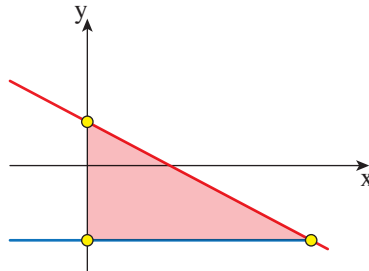
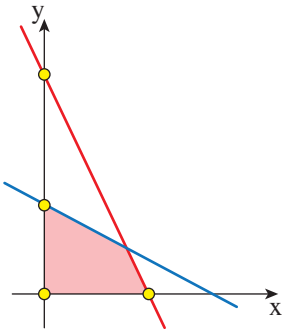
ב. מצאו את שיעורי הקדקודים.



6. מצאו את הקדקודים

ב.
$$\begin{cases} x + 2y \leq 3 \\ 3x + y \leq 4 \end{cases}$$

א.
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -2 \\ x + 2y \leq 3 \end{cases}$$

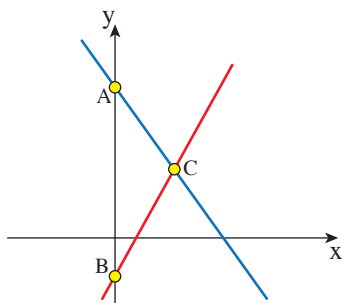
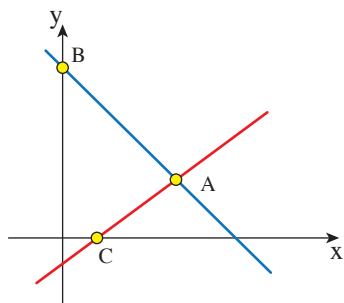


7. מצאו את שיעורי הנקודות, המסומנות בכל שרטוט, על פי המשוואות הרשומות.

(התאימו תחילה לכל ישר את משוואתו.)

א. $y = 2x - 1$ ג. $x - 2y = 2$

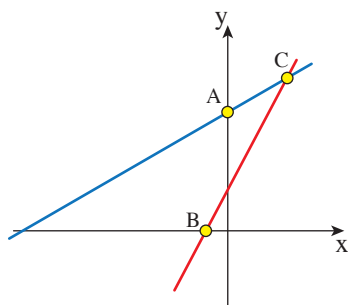
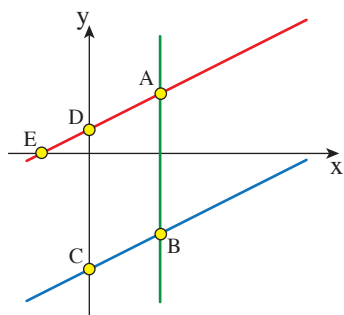
ב. $3x + 2y = 6$ ד. $x + y = 5$



ב. $2x - y = -1$ ד. $x = 5$

ג. $x - 2y = -5$ ה. $x - 2y = 15$

ו. $x - 2y = -2$



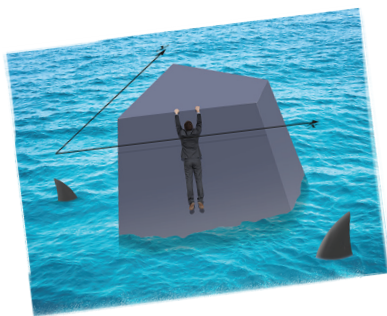
8. פתרו את מערכות המשוואות הבאות

(רשמו תחילה, אם אפשר, בצורה $y = ax + b$.)

א. $\begin{cases} x = 5 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} y - 5x = 10 \\ 2y - 3x = 6 \end{cases}$ ה. $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} x = 3 \\ y - x = 5 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 9 \end{cases}$

התחום האפשרי



1. בבעיות הבאות נעבוד ברביע הראשון בלבד, כלומר $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

במפעלים מייצרים שני סוגי מיצים: מיץ אשכוליות ומיץ ענבים.

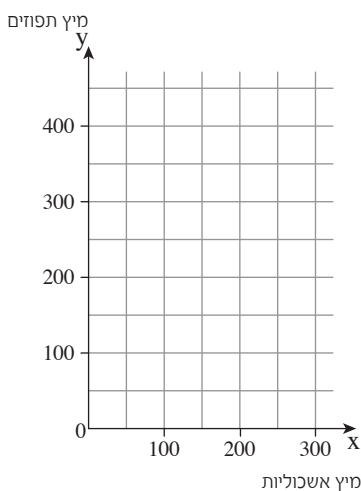
x כמות בליטרים של מיץ אשכוליות, שמייצר המפעל בשעה.

y כמות בליטרים של מיץ ענבים, שמייצר המפעל בשעה.

א. רשמו פונקציית מטרה לכמות המיץ שמייצרים במשך 5 שעות.

ב. במשך 5 שעות ניתן לייצר לא יותר מ- 1000 ליטר. רשמו אי שוויון מתאים.

ג. שרטטו במערכת הצירים גרף מתאים לאי שוויון.

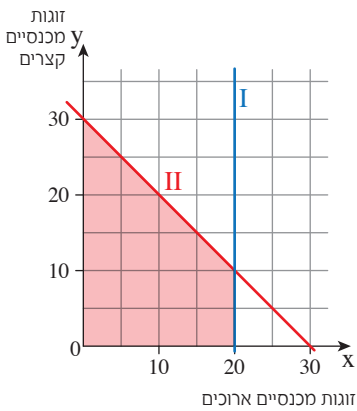


ד. האם הנקודות הבאות נמצאות בתחום שנוצר?

$A(50, 200), B(100, 100), C(0, 200)$

ה. האם המפעל יכול לייצר 70 ליטרים מיץ אשכוליות ו- 140 ליטרים מיץ ענבים?

אוסף כל הפתרונות האפשריים של בעיה נקרא **התחום האפשרי**.

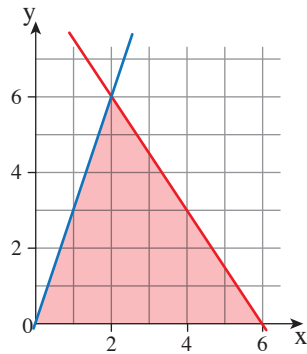


2. בית חרושת מייצר מכנסיים ארוכים וקצרים. כמות המכנסיים, שהמפעל יכול לייצר בשעה, מתוארת בגרף.
- א. האם ניתן לייצר בשעה 20 זוגות של מכנסיים קצרים בלבד?
- ב. האם ניתן לייצר בשעה 6 זוגות של מכנסיים קצרים ו-12 זוגות של מכנסיים ארוכים?
- ג. רשמו את משוואת הישר II שבשרטוט.
- ד. רשמו מערכת אי שוויונות מתאימה לאזור הצבוע.
- ה. רשמו במילים את המגבלות של בית החרושת.

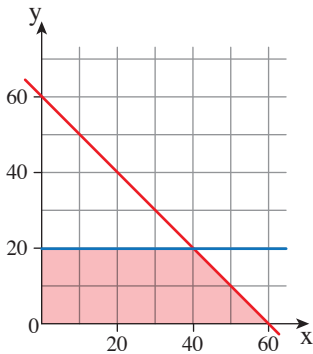
מערכת אי שוויונות, המתארת מגבלות, נקראת **מערכת אילוצים**.

3. כתבו מערכות של אי שוויונות מתאימים.

א.

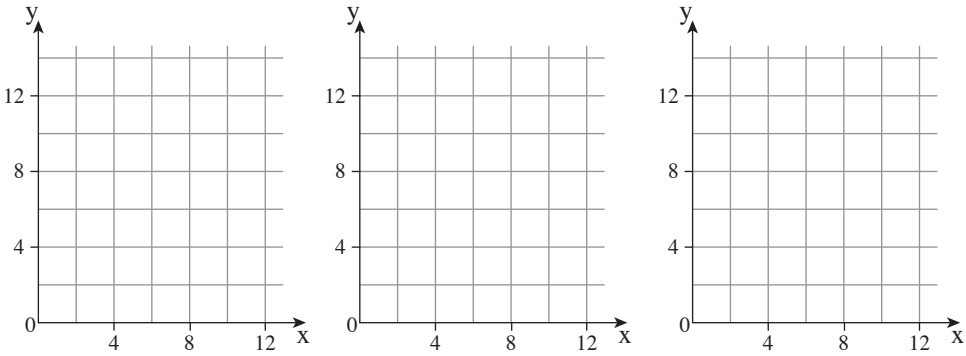


ב.



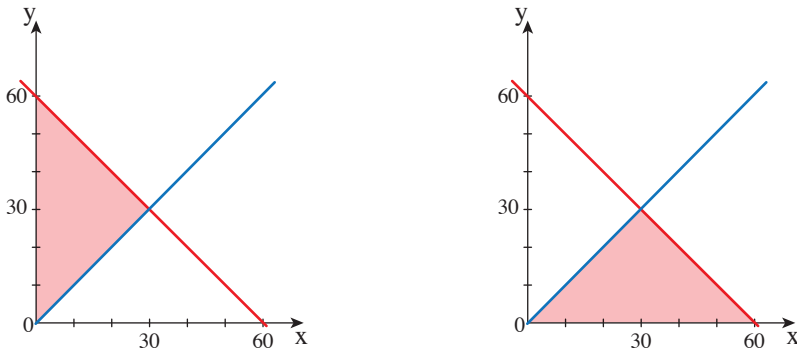
4. שרטטו גרף מתאים לכל מערכת, ברביע הראשון.

א. $\begin{cases} y \leq 3 \\ y \leq -x + 10 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y \leq 10 \\ x - y \leq 5 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} x \leq 4 \\ 2x + y \leq 10 \end{cases}$



5. לאיילת התפזרו הדפים של שיעורי הבית. עיזרו לה "לשדך" את האי שוויונות לגרפים המתאימים (ברביע ה-I).

א. $y \leq 60 - x$ ב. $y \leq 60 - x$
 $y \geq x$ $x \geq y$



6. א. ידוע, שדרור מקבל **לכל היותר** 50 ש"ח לשבוע דמי-כיס.

האם ייתכן, שבשבוע שעבר קיבל דרור 30 ש"ח?
 האם ייתכן שקיבל 60 ש"ח?
 האם ייתכן שקיבל 50 ש"ח?

ב. איילת מקבלת **לכל הפחות** 40 ש"ח דמי-כיס.

האם ייתכן, שאיילת קיבלה בשבוע מסוים 30 ש"ח?

האם ייתכן שקיבלה 60 ש"ח?

האם ייתכן שקיבלה 50 ש"ח?

ג. האם ייתכן, שבשבוע מסוים יקבלו דרור ואיילת אותו סכום?

7. משאית גדולה מסוגלת להעביר בכל הסעה x טון ירקות, ומשאית קטנה y טון ירקות.

כמות הירקות, שמעבירות 2 המשאיות ביחד ב- 3 הסעות, היא לכל היותר 60 טון.

א. כיתבו פונקציית מטרה לכמות הירקות המועברת ב- 3 הסעות.

ב. כיתבו אי שוויון מתאים לאילוץ הנ"ל, ושרטטו גרף.

ג. רשמו אילו מהנקודות A, B, C, D, E מהוות פתרון אפשרי.

$E(6, 15)$, $D(10, 12)$, $C(10, 10)$, $B(20, 0)$, $A(5, 12)$

"אל המטרה"



למדתם לשרטט תחום אפשרי. כעת תלמדו להשתמש בתחום האפשרי, כדי לבצע שיקולים כלכליים. לשם כך תכירו בסעיף זה מושג חדש: "פונקציית מטרה".

1. במפעל מייצרים שני מוצרים.

רווח המפעל הוא 5 ש"ח מק"ג של המוצר הראשון, ו-1.5 ש"ח מק"ג של המוצר השני.

א. מה יהיה הרווח מייצור של 5 ק"ג מהמוצר הראשון ו-10 ק"ג מהמוצר השני?

ב. רשמו פונקציית מטרה לרווח, המתקבל מייצור x ק"ג מהמוצר הראשון ו- y ק"ג מהמוצר השני.

$$f(x, y) = \boxed{} \cdot x + \boxed{} \cdot y$$

ג. חשבו את ערך פונקציית המטרה אם $x = 12$ ו- $y = 3$.

ד. חשבו את הרווח אם $x = 7$ ו- $y = 50$.

ה. חשבו את רווח המפעל מייצור 4.8 ק"ג מהמוצר השני **בלבד** (ללא ייצור של המוצר הראשון)

2. x מייצג משקל, בק"ג, של עגבניות הנמכרות ביום:

y מייצג משקל, בק"ג, של מלפפונים הנמכרים ביום.

ממכירת ק"ג עגבניות מרוויחים 1 ש"ח.

ממכירת ק"ג מלפפונים מרוויחים 0.5 ש"ח.

א. רשמו פונקציית מטרה לרווח המתקבל ביום: $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$

ב. מה ערך פונקציית המטרה שרשמתם, אם $x = 20$ ו- $y = 30$?

ג. מה היה הרווח ביום בו נמכרו 50 ק"ג עגבניות ו-40 ק"ג מלפפונים?

ד. ערך פונקציית המטרה 100. רשמו שתי אפשרויות שונות ל- x ול- y .

ה. הרווח 120 ש"ח. רשמו שתי אפשרויות שונות של מכירה.

3. x מייצג כמות של חלב בליטרים, הנמכרת ביום.

y מייצג כמות של מיץ בליטרים, הנמכרת ביום.

ממכירה של ליטר חלב מרוויחים 0.5 ש"ח.

ממכירה של ליטר מיץ מרוויחים 2 ש"ח.

רשמו פונקציית מטרה מתאימה לרווח.

פונקציות כמו אלה שרשמתם, נקראות "פונקציות מטרה". אנו מעוניינים בערכיהן בנקודות מסוימות בתוך התחום האפשרי.

4. בתחרות ידע זוכים ב- 5 נקודות עבור כל תשובה נכונה, ומפסידים 2 נקודות עבור כל תשובה שאינה נכונה.

x מייצג את מספר התשובות הנכונות של משתתף בתחרות.

y מייצג את מספר התשובות השגויות שלו.

רשמו פונקציית מטרה, שתציג את מספר הנקודות שצבר.

א. מה ערך פונקציית המטרה אם $x = 7$ ו- $y = 10$?

ב. מה מספר הנקודות שצבר מתחרה שענה נכון על 10 שאלות, ושגה ב- 3 שאלות?

ג. רשמו שתי אפשרויות, המתאימות למשתתפים שצברו 45 נקודות.

ד. אילו מספרים ניתן להציב במקום x ו- y בשאלה זו?

5. לחברת נסיעות ישנן הוצאות קבועות: 100 ש"ח לטיול פרטי, ו- 50 ש"ח לטיול קבוצתי.

א. רשמו פונקציית מטרה להוצאות החברה עבור x טיולים פרטיים ו- y טיולים קבוצתיים.

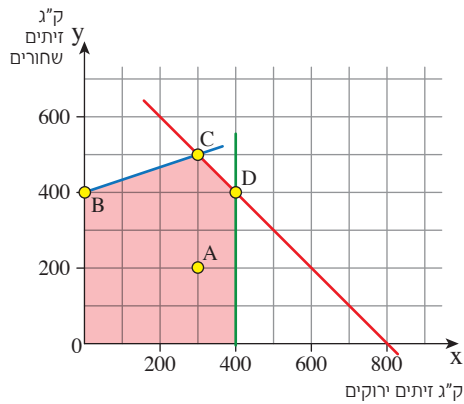
ב. מה הוצאות החברה עבור 50 טיולים פרטיים ו- 10 טיולים קבוצתיים?

ג. אילו מספרים ניתן להציב במקום x ו- y בשאלה זו?

6. מפעל מייצר שימורי זיתים ירוקים ושחורים.

א. רשמו מערכת אילוצים מתאימה לתחום המפורט (מערכת אי שוויונות).

סמנו ב- x את המשקל בק"ג של זיתים ירוקים, שמייצר המפעל במחזור ייצור, וב- y את המשקל בק"ג של זיתים שחורים שמיוצר במחזור ייצור.



רווח המפעל מזיתים ירוקים הוא 2 ש"ח לק"ג, ומזיתים שחורים 1 ש"ח לק"ג.

ב. חשבו את רווח המפעל מייצור של 200 ק"ג זיתים ירוקים ו- 450 ק"ג זיתים שחורים.

ג. רשמו פונקציית מטרה לרווח.

ד. מצאו את הערך של פונקציית המטרה שרשמתם בנקודה A.

ה. מצאו את ערך פונקציית המטרה בנקודות B, D, C.

ו. באיזו מהנקודות A, B, C, D הרווח הוא הגדול ביותר?

ז. האם ניתן להרוויח 1300 ש"ח במחזור ייצור אחד? נמקו.

7. א. רשמו פונקציית מטרה לרווח ממכירה של x ק"ג פירות ו- y ק"ג ירקות, אם הרווח לק"ג פירות 2 ש"ח, ולק"ג ירקות 1.5 ש"ח.

ב. מצאו את הרווח, אם מוכרים 30 ק"ג פירות ו- 20 ק"ג ירקות.

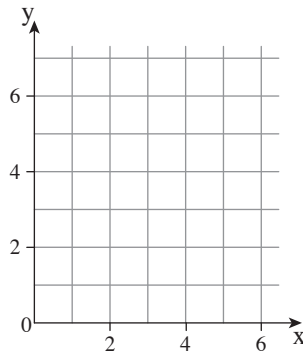
ג. רשמו שתי אפשרויות של מכירה, המתאימות לרווח של 150 ש"ח.

8. נתונה מערכת אילוצים:

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x - y \leq 2 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

(ברביע ה- I: $x \geq 0, y \geq 0$)

א. שרטטו את התחום האפשרי.



ב. סמנו בתחום את הנקודות $A(1, 1)$, $B(1.5, 2)$, $C(0.5, 2)$.

ג. חשבו את ערך פונקציית המטרה $f(x, y) = x - 5y$ בנקודות A , B , C .

ד. באיזו מהנקודות הנ"ל הערך הוא הגדול ביותר?

9. במפעל מייצרים שני סוגי מרצפות: ריבועיות ומלבניות. ייצור מרצפת ריבועית נמשך 3 דקות, וייצור מרצפת מלבנית נמשך 4 דקות.

א. רשמו פונקציית מטרה לזמן, בדקות, הדרוש לייצור x מרצפות ריבועיות ו- y מרצפות מלבניות.

ב. רשמו 3 אפשרויות שונות לייצור מרצפות בשעה (60 דקות).

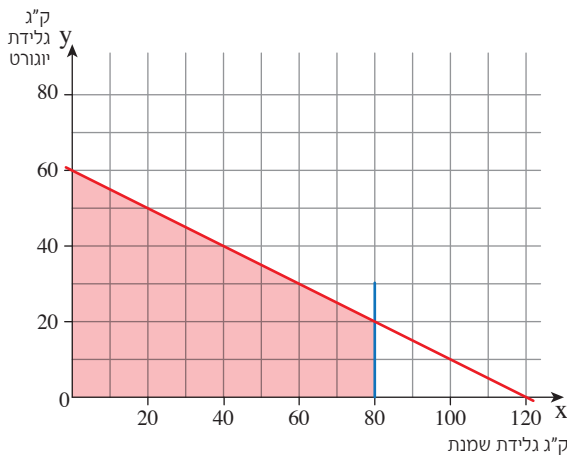
"על הגובה"



בסעיף הקודם ראינו ש"פונקציית מטרה" מקבלת ערכים שונים בתחום האפשרי. בסעיף זה נחפש היכן נמצאות הנקודות, שעבורן מקבלת "פונקציית המטרה" אותו ערך.

1. במחלבה מייצרים גלילות שמנת וגלילות יוגורט. אפשרויות הייצור מתוארות בשרטוט.

א. רשמו את האי שוויונות, המתאימים לתחום המשוורט



ב. מק"ג גלילת שמנת מרוויחים 4 ש"ח. ומק"ג גלילת יוגורט מרוויחים 2 ש"ח. רשמו פונקציית מטרה לרווח.

ג. נניח שהרוויחו 120 ש"ח. רשמו משוואה מתאימה, ושרטטו את הישר.

ד. נניח שהרוויחו 60 ש"ח. רשמו משוואה מתאימה, ושרטטו את הישר.

ה. נניח שהרוויחו 40 ש"ח. רשמו משוואה מתאימה, ושרטטו את הישר.

הקווים ששרטטתם נקראים קווי גובה.

ו. מה תוכלו לומר על כל קווי הגובה?

ז. רשמו את משוואות הישרים ששרטטתם בצורה מפורשת ($y = ax + b$), ובדקו את שיפועי הישרים. מה מצאתם?

ח. מה תוכלו לומר על הרווח, המתקבל בנקודות על הישר $24x + 2y = 120$?

2. א. רשמו את המשוואות הבאות בצורה $y = ax + b$.

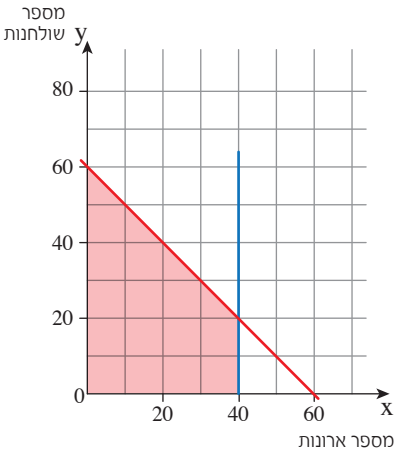
$$2x + y = 10$$

$$2x + y = 7$$

$$2x + y = 100$$

ב. הסבירו את הטענה הבאה: "אם במשוואות מהצורה הנ"ל המקדמים של x שווים והמקדמים של y שווים, אז הישרים מקבילים".

ג. רשמו משוואה של ישר המקביל לישר שמשוואתו $2x + 3y = 0$.



3. התחום המשוורטט מתאר אפשרויות שונות של הוצאות נגריה.

x מייצג את מספר הארונות שמייצרים ביום, y מייצג את מספר השולחנות שמייצרים ביום. ההוצאות לייצור ארון 450 ש"ח, וההוצאות לייצור שולחן 150 ש"ח.

א. רשמו פונקציית מטרה להוצאות הנגריה ביום.

ב. נניח שההוצאות ביום מסוים היו 6000 ש"ח.

- רשמו משוואה, צמצמו, שרטטו את קו הגובה.
- רשמו שיעורים של שתי נקודות, הנמצאות בתחום האפשרי ועל קו הגובה.
- מה הסכום המתקבל בכל נקודה?

ג. ביום מסוים היו ההוצאות 10,500 ש"ח. רשמו משוואה, צמצמו, שרטטו ישר מתאים.

- רשמו שיעורים של שתי נקודות, הנמצאות בתחום האפשרי ועל קו הגובה.
- תארו מה מייצגות הנקודות האלה.

- כשקובעים ערך לפונקציית המטרה, מתקבלת משוואת ישר, שנקרא קו גובה. ערך הפונקציה זהה בכל הנקודות על קו גובה זה.
- כשמשינים את הערך של פונקציית המטרה, מתקבל קו גובה מקביל לקו הגובה הקודם.

4. א. שרטטו את הישרים. $x - 2y = 5$

$x - 2y = 7$

ב. רשמו משוואה של ישר מקביל להם, ושרטטו אותו באותה מערכת צירים.

5. א. ערן טען, כי הישרים: $5x + 2y = 3$

מקבילים. $5x + 4y = 10$

האם צדק? נמקו?

ב. שירה טענה, כי הישרים: $5x + 2y = 3$

מקבילים. $10x + 4y = 10$

האם צדקה? נמקו!

6. לפניכם משוואות ישרים מקבילים זה לזה. חלק מהמידע על המשוואות נמחק. השלימו, כך שהישרים יהיו מקבילים.

$x + 2y = \underline{\hspace{2cm}}$

$x + \underline{\hspace{2cm}} = 8$

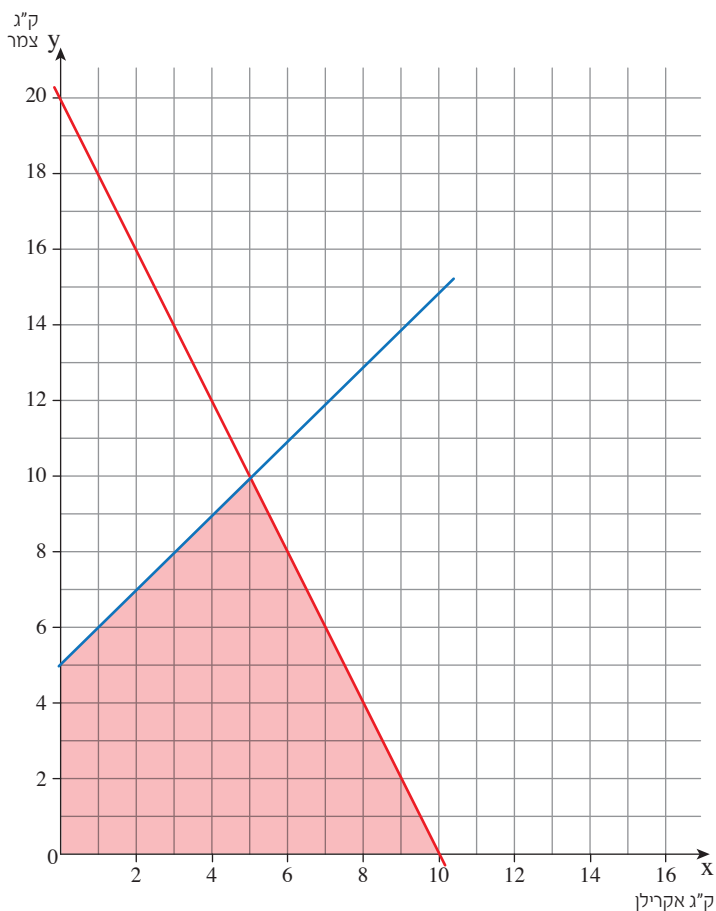
$\underline{\hspace{2cm}} + 2y = \underline{\hspace{2cm}}$

$\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = 20$

$2x + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

7. אפשרויות הייצור בשעה, של מפעל חוטים, מתוארות בשרטוט.

א. רשמו אי שוויונות, המתארים את התחום האפשרי.



ב. מק"ג אקרילן מרוויחים 5 ש"ח, ומק"ג צמר 2 ש"ח.
רשום פונקציית מטרה לרווח.

ג. נניח שהרוויחו 20 ש"ח. רשמו משוואה ושרטטו קו גובה מתאים.

ד. רשמו שיעורי נקודה, שנמצאת על הישר ובתחום האפשרי.

ה. מכרו 2 ק"ג אקרילן. כמה ק"ג צמר יש למכור, כדי להרוויח 20 ש"ח?

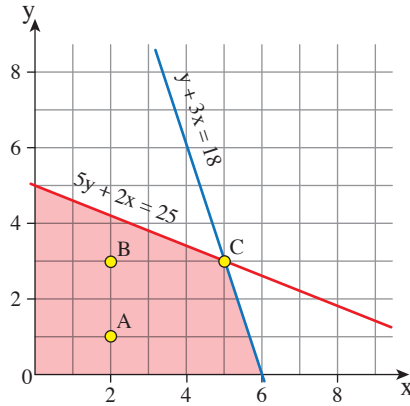
ו. מכרו 3 ק"ג אקרילן. כמה ק"ג צמר יש למכור, כדי להרוויח 20 ש"ח.

ז. מה ערכה של פונקציית המטרה בנקודה $(1, 7)$? האם ייצור כזה אפשרי?

ח. שרטטו קו גובה מקביל לישר ששרטטתם בסעיף ג'. מה משוואתו?

"אל הקודקוד"

1. א. נתונה פונקציית המטרה: $f(x, y) = 6x + 3y$. שרטטו במערכת הצירים את הישר שמשוואתו $6x + 3y = 24$. מה ערך פונקציית המטרה בנקודות על הישר ששרטטתם?

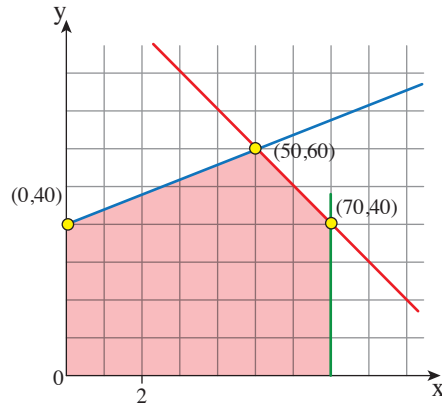


- ב. הניחו ישר על הישר ששרטטתם, והזיזו אותו במקביל לישר המשוורטט, עד שיעבור דרך A. מה ערך פונקציית המטרה ב-A?
- ג. הזיזו את הישר במקביל, לכיוון ראשית הצירים, וקבעו אם ערך פונקציית המטרה גדל או קטן.
- ד. באיזה כיוון יש להזיז את הישר, אם רוצים להגדיל את ערך פונקציית המטרה?
- ה. הזיזו את הישר במקביל (כך שערך פונקציית המטרה יגדל) עד יציאתו מהתחום האפשרי. מה ערך פונקציית המטרה בנקודה זו?
- ו. מהו הערך המקסימלי של פונקציית מטרה בתחום האפשרי?

כל קו גובה מבטא ערך של פונקציית מטרה. הזהה מקבילה לכיוון אחד מגדילה את ערך הפונקציה, והזהה לכיוון השני מקטינה אותו.

בתרגיל הקודם ראינו, שהזהה עד לקודקוד הגדילה את ערך פונקציית המטרה עד למקסימום בתחום האפשרי.

2. נתון תחום אפשרי משורטט, ופונקציית מטרה $f(x, y) = 5x + y$.

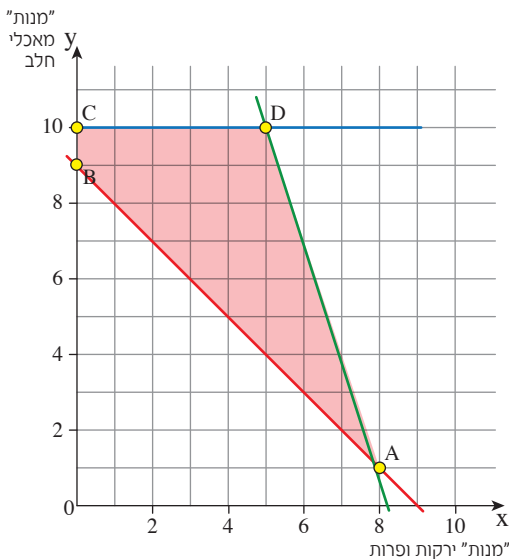


א. השלימו למשוואת ישר כלשהו, $5x + y = \square$, ושרטטו את הישר.

ב. הניחו ישר על הישר ששרטטתם, והזיזו במקביל, כך שערך פונקציית המטרה יגדל.

ג. באיזו נקודה בתחום האפשרי מתקבל הערך הגבוה ביותר?
מה ערך פונקציית המטרה בנקודה זו?

3. בחישוב קלוריות נקרא לכל 100 גר' "מנה".
במנה אחת של פירות וירקות 40 קלוריות.
במנה אחת של מאכלי חלב 70 קלוריות.

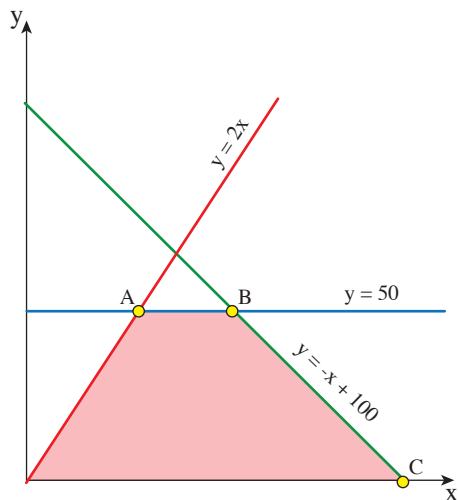


א. רשמו פונקציית מטרה למספר הקלוריות המתקבל מ x מנות של ירקות ופירות ו- y מנות של מאכלי חלב.

ב. רשמו משוואת קו גובה כלשהו (המתאים לפונקציית המטרה), ושרטטו במערכת הצירים.

ג. כמובן שמעוניינים להפחית את כמות הקלוריות ככל האפשר. הזיזו את הישר בכיוון המתאים. באיזו נקודה בתחום מתקבל מינימום קלוריות? מהו הערך המינימלי?

4. א. רשמו את שיעורי הקדקודים של התחום האפשרי המשוורט: A, B, C, ורשמו יחידות על הצירים.
(דייקו עד כמה שאפשר).



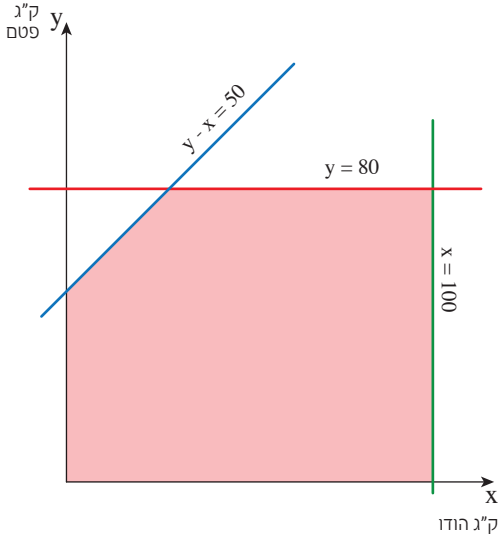
- ב. נתונה פונקציית מטרה $f(x, y) = 2x + y$. השלימו למשוואת ישר כלשהו $2x + y = \square$ ושרטטו.
ג. הניחו ישר על הישר ששרטטת, והזיזו במקביל, כך שערך פונקציית מטרה יגדל. באיזו נקודה בתחום מתקבל הערך הגבוה ביותר של פונקציית המטרה, מהו?
ד. נתונה פונקציית מטרה $f(x, y) = x + y$. השלימו למשוואת ישר כלשהו $x + y = \square$ ושרטטו.
ה. הזיזו ישר במקביל לישר ששרטטתם, כך שערך פונקציית המטרה יגדל.
- היכן בתחום מתקבל הערך הגבוה ביותר?
- כמה נקודות מתאימות לערך זה?

5. מתי, לדעתכם, יהיה לפונקציית המטרה בתחום נתון יותר מערך מקסימלי אחד?

הערך המקסימלי, או המינימלי, של פונקציית מטרה בתחום נתון, מתקבל באחד הקדקודים, או בנקודות שעל אחת הצלעות של התחום.

6. התחום האפשרי מתאר אפשרויות שונות של ייצור מאכלי עוף בשעה, במפעל "עוף-עף".
 x מייצג מספר ק"ג של בשר הודו, y מייצג מספר ק"ג של פטם.

א. חשבו את שיעורי הקדקודים של התחום האפשרי.
 סמנו יחידות על הצירים.



ב. מק"ג בשר הודו מרוויחים 2 ש"ח.

מק"ג בשר פטם מרוויחים 4 ש"ח.
 רשמו פונקציית מטרה.

ג. השלימו את פונקציית המטרה למשוואת ישר כלשהו, ושרטטו.

ד. הזיזו ישר במקביל, כך שערך פונקציית מטרה יגדל. לאיזה קדקוד הגעתם?
 מהו הרווח המקסימלי האפשרי?

ה. כמה ק"ג מכל סוג אפשר לייצר, ולקבל רווח מקסימלי?

7. א. שרטטו את התחום האפשרי, המתאים למערכת האי שוויונות.

$$\begin{cases} x \leq 30 \\ y \geq 2x + 10 \\ y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

ב. חשבו או קראו את שיעורי הקדקודים.

ג. נתונה פונקציית מטרה $f(x, y) = x + 2y$.

ד. מצאו באיזה קדקוד ערך פונקציית מטרה הוא הגדול ביותר, ומה ערך פונקציית המטרה בנקודה זו?

8. בחנות יש מקרר, שיכול להכיל 60 ק"ג גלידה.

x מייצג את הכמות של גלידת וניל.

y מייצג את הכמות של גלידת שוקולד.

בעל החנות מוכר לכל היותר 50 ק"ג גלידת וניל, ולכל היותר 40 ק"ג גלידת שוקולד.

א. רשמו מערכת אי שוויונות מתאימה, ושרטטו תחום אפשרי.

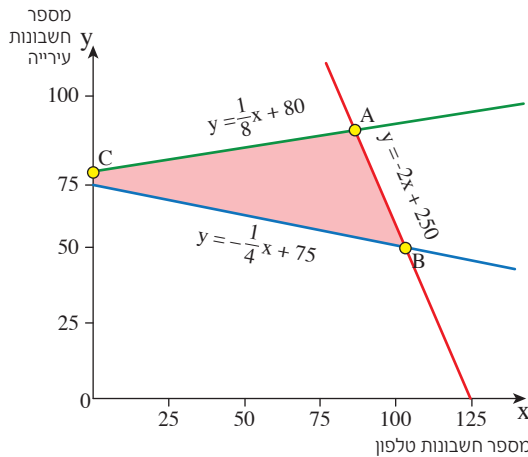
ב. מצאו את שיעורי הקדקודים.

ג. בעל החנות מרוויח 2 ש"ח מק"ג אחד של גלידת וניל, ו-3 ש"ח מק"ג אחד של גלידת שוקולד,

רשמו פונקציית מטרה.

כמה ק"ג מכל סוג כדאי לו למכור, כדי שהרווח יהיה מקסימלי.

9. התחום המשורטט מתאר מגבלות של עבודת מחשב, הנותן שירותים לחברת טלפונים ולעירייה.



א. זמן חישוב לחשבון טלפון - 1 שנייה.

זמן חישוב לחשבון עירייה - 5 שניות

רשמו פונקציית מטרה לזמן החישוב של x חשבונות טלפון ו-y חשבונות עירייה.

ב. מצאו באיזה קדקוד מתקבל **הערך הנמוך** ביותר של הזמן.

חשבו את שיעורי הקדקוד.

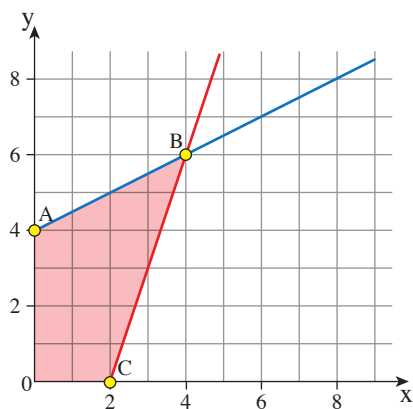
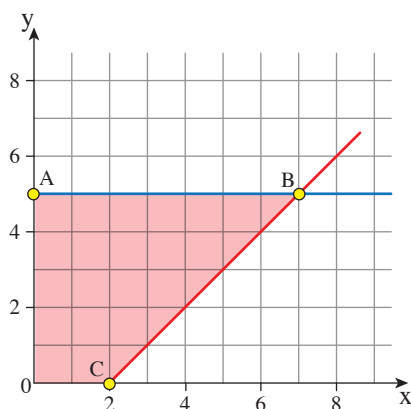
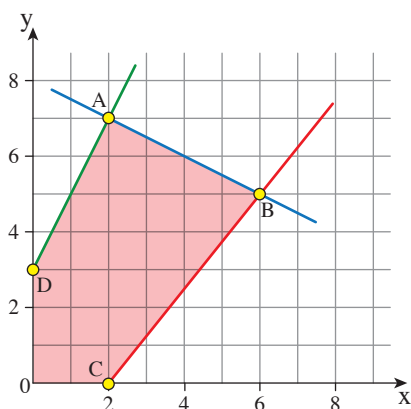
ג. כמה חשבונות מכל סוג ניתן לחשב בזמן המינימלי?



"חלוצים ואילוצים" - שאלות לסיכום

1. לצורך הקמת מפעל,

הכינו שלושה תחומים אפשריים שונים, המתארים את האילוצים.



א. ידוע, כי הרווח ממוצר א' 2 ש"ח, ומוצר ב' 3 ש"ח.

מייצרים x מוצרים מסוג א' ו- y מוצרים מסוג ב'.

רשמו פונקציית מטרה.

ב. מי מהתחומים מאפשר רווח מקסימלי?

2. בית חרושת מייצר שני סוגי מלט.

x - משקל בטונות של מלט מסוג א'.

y - משקל בטונות של מלט מסוג ב'.

א. משקל המלט משני הסוגים יחד אינו עולה על 300 טון ליום. רשמו אי שוויון מתאים.

ב. משקל המלט מסוג א' אינו עולה על 200 טון.

משקל המלט מסוג ב' אינו עולה על 150 טון.

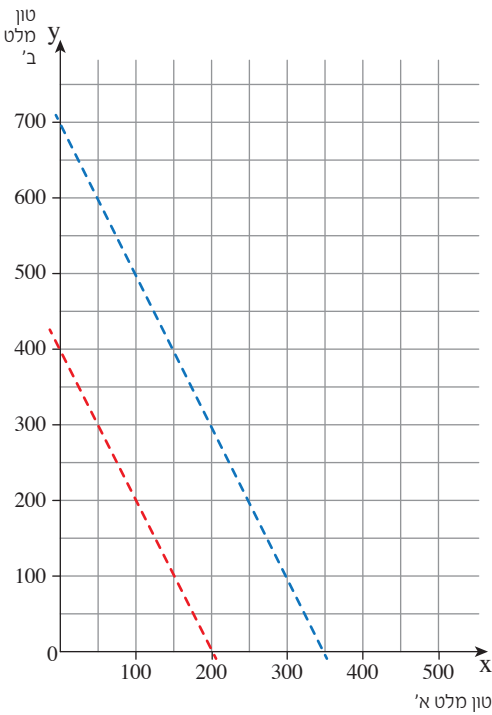
רשמו אי שוויונות מתאימים.

ג. שרטטו את התחום האפשרי במערכת הצירים.

ד. הרווח מטון אחד של מלט מסוג א' הוא 2 ש"ח, וממלט מסוג ב' הוא 1 ש"ח.

- רשמו את פונקציית המטרה.

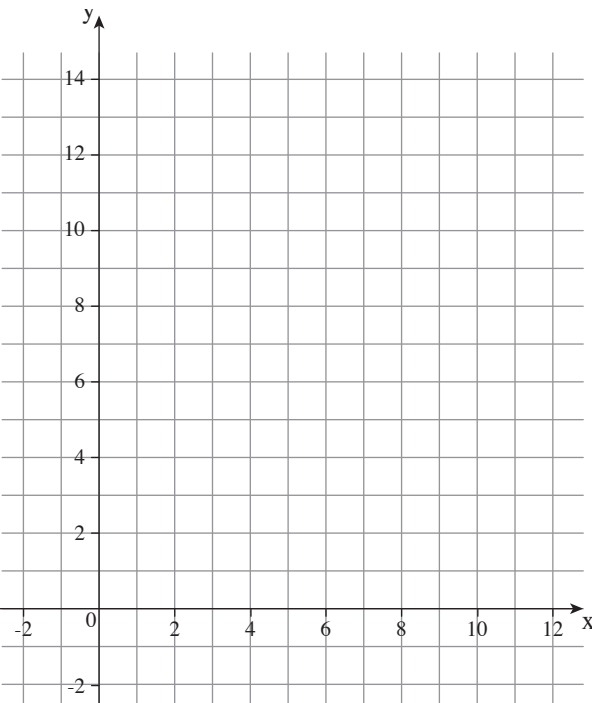
- איזה קדקוד של התחום מאפשר רווח מקסימלי?



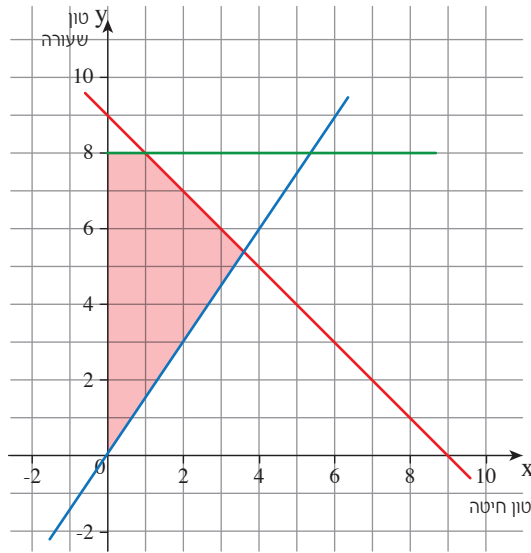
3. שרטטו את התחום המתאים

למערכת האי שוויונות.

$$\begin{cases} x \leq 10 \\ x + 2y \geq 4 \\ x - y \geq -4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



4. א. רשמו מערכת אי שוויונות מתאימה לתחום המשוורט.



ב. x מייצג משקל, בטונות, של חיטה שקוצרים ביום.
 y מייצג משקל, בטונות, של שעורה שקוצרים ביום.
 נסו לתאר במילים את האילוצים המתוארים באי שוויונות.

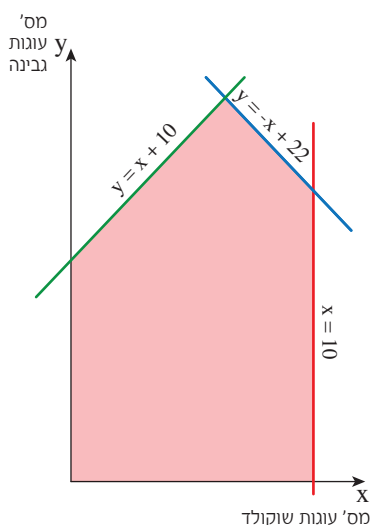
ג. על טון חיטה מרוויחים 100 ש"ח, ועל טון שעורה 50 ש"ח.
 רשמו פונקציית מטרה, ומצאו את הרווח המקסימלי האפשרי.



מי ירוויח יותר? עוד שאלות לסיכום

1. 3 קונדיטוריות מייצרות עוגות שוקולד ועוגות גבינה.
 x מייצג מס' עוגות שוקולד, שנמכרות בשעה.
 y מייצג מס' עוגות גבינה, שנמכרות בשעה.
 לפניהם תחום אפשרי, שנקבע לפי אילוצים שונים, ומתאים ל- 3 הקונדיטוריות.

א. מצאו את שיעורי הקודקודים, ורשמו, בערך, יחידות על הצירים.



- ב. קונדיטוריה "חיים" מוכרת עוגת שוקולד ליחיד ב- 5 ש"ח, ועוגת גבינה ב- 3 ש"ח.
 קונדיטוריה "איציק" מוכרת עוגת שוקולד ב- 3 ש"ח, ועוגת גבינה ב- 4 ש"ח.
 קונדיטוריה "מלכה" מוכרת עוגת שוקולד ב- 4 ש"ח, ועוגת גבינה ב- 5 ש"ח.
 רשמו פונקציית מטרה למכירות של כל קונדיטוריה.
- ג. מצאו עבור כל קונדיטוריה את ההכנסה המקסימלית האפשרית.
- ד. למי מהן ההכנסה המקסימלית הגדולה ביותר?

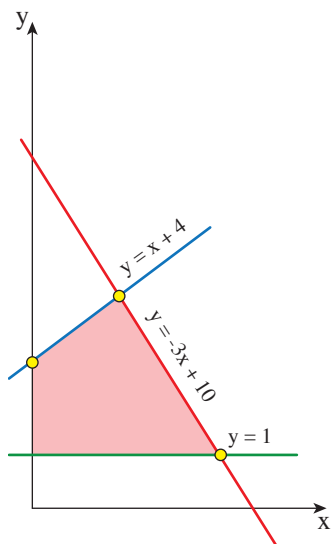
תרגילים

2. לפניהם שרטוט של תחום אפשרי.

א. רשמו את מערכת האי שוויונות המתאימה.

ב. מצאו את שיעורי הקדקודים. סמנו יחידות על הצירים.

- ג. באיזו נקודה מקבלת פונקציית המטרה $f(x, y) = 2x + y$ ערך מקסימלי, ומהו הערך המקסימלי?



3. בבית חרושת מייצרים מוטות של ברזל ושל נחושת.

x מייצג משקל בטונות של מוטות ברזל.

y מייצג משקל בטונות של מוטות נחושת.

בשעה מייצרים, לכל היותר, 8 טון של מוטות משני הסוגים יחד.

בשעה חייבים לייצר, לכל הפחות, 3 טון של מוטות משני הסוגים יחד.

כמות הברזל שמייצרים בשעה היא לכל היותר 7 טון.

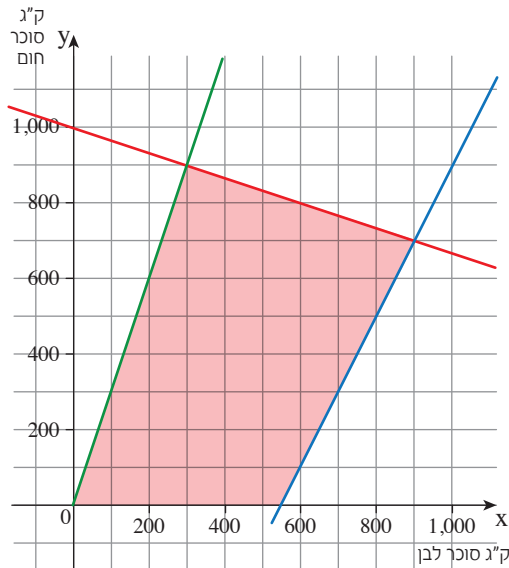
כמות הנחושת שמייצרים בשעה היא לכל היותר 5 טון.

א. רשמו מערכת אי שוויונות, ושרטטו את התחום האפשרי.

ב. מכל טון של ברזל מרוויח ביהח"ר 500 ש"ח, ומכל טון נחושת 1000 ש"ח.

רשמו פונקציית מטרה, ומצאו מהו הרווח המקסימלי האפשרי.

4. הגרף מתאר אפשרויות של ייצור סוכר לבן וחום.



מק"ג אחד של סוכר לבן מרוויח 0.5 ש"ח.

מק"ג אחד של סוכר חום מרוויח 1 ש"ח.

רשמו פונקציית מטרה, ומצאו מהו הרווח הגדול ביותר האפשרי.

5. במפעל מייצרים חומר להדברת נמלים וחומר להדברת תיקנים (ג'וקים).

x מייצג משקל בק"ג של חומר להדברת נמלים, המיוצר ביום.

y מייצג משקל בק"ג של חומר להדברת תיקנים, המיוצר ביום.

- בסה"כ מייצרים לא יותר מ- 500 ק"ג חומרי הדברה ביום.

- כמות החומר המיוצר ביום להדברת תיקנים היא לפחות 50 ק"ג.

- כמות החומר המיוצר להדברת תיקנים היא יותר מפי 2 מהכמות להדברת נמלים.

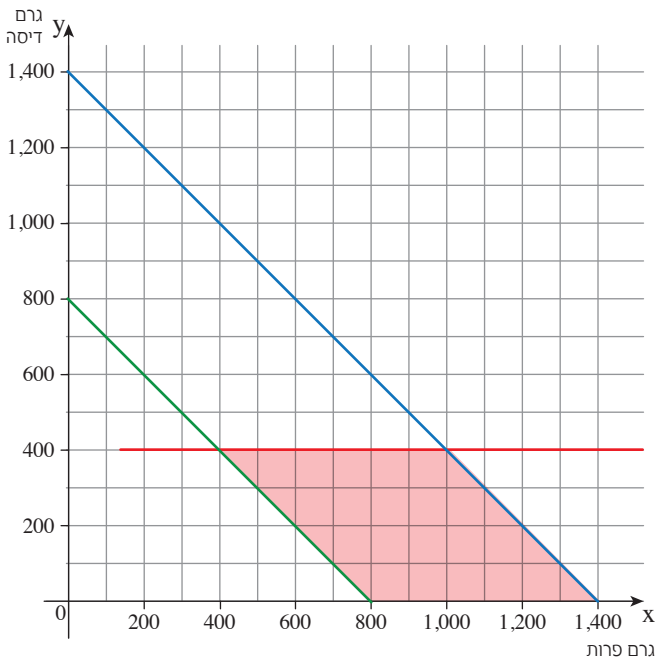
א. רשמו מערכת אי שוויונות מתאימה, ושרטטו במחברתכם את התחום האפשרי. (בחרו ביחידת מידה של 50 ק"ג)

ב. מכל ק"ג של חומר להדברת נמלים מרוויחים 2 ש"ח.

מכל ק"ג של חומר להדברת תיקנים מרוויחים 1.5 ש"ח.

רשמו פונקציית מטרה, מצאו מהו הרווח המקסימלי האפשרי.

6. הגרף מתאר אפשרויות של תפריט יומי לתינוקות.



בכל גרם פירות יש 0.007 גרם ברזל, ובכל גרם דיסה יש 0.005 גרם ברזל.

א. רשמו פונקציית מטרה למשקל הברזל ב x גרם דיסה ו- y גרם פירות.

ב. מצאו תפריט יומי אפשרי, שבו כמות הברזל מקסימלית.

מה כמות הברזל בתפריט שמצאתם?

... וזוהי רק ההתחלה של בעיות תכנון בכלכלה...

ארגון נתונים בתכנון לינארי

עד כה הכרתם כלים לפתרון בעיות פשוטות בתכנון לינארי. בבעיות עם מספר רב יותר של אילוצים, נוח להשתמש בטבלה לארגון הנתונים. נדגים זאת בשאלות הבאות:

1. מפעל מייצר שני סוגי מיצים: מיץ תפוזים ומיץ ענבים. בייצור שלושה שלבים: סחיטה, ערבוב, מילוי. הזמן הנדרש לכל שלב מתואר בטבלה:

סוג המיץ	סחיטה	ערבוב	מילוי
תפוזים	8 דקות לליטר	2 דקות לליטר	5 דקות לליטר
ענבים	3 דקות לליטר	10 דקות לליטר	4 דקות לליטר

א. כמה דקות דרושות **לסחיטה** של 3 ליטר מיץ תפוזים?

לערבוב של 3 ליטר מיץ תפוזים?

למילוי של 3 ליטר מיץ תפוזים?

חשבו כמה דקות דרושות לייצור כולל של 3 ליטר מיץ תפוזים.

רשמו פונקציית המטרה למספר הדקות הדרושות לייצור כולל של x ליטר מיץ תפוזים.

ב. חשבו כמה דקות דרושות לסחיטה של 4 ליטר מיץ תפוזים ו- 5 ליטר מיץ ענבים.

ג. רשמו פונקציית מטרה למספר הדקות הדרוש לסחיטה של x ליטר מיץ תפוזים ו- y ליטר מיץ ענבים.

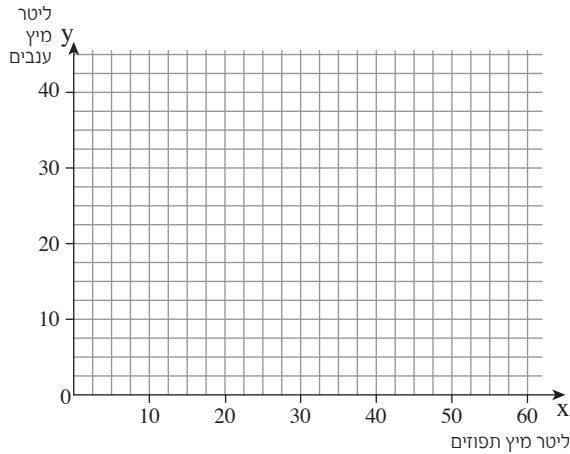
ד. רשמו פונקציית מטרה למספר הדקות הדרושות לערבוב של x ליטר מיץ תפוזים ו- y ליטר מיץ ענבים.

ה. רשמו פונקציית מטרה למספר הדקות הדרושות למילוי של x ליטר מיץ תפוזים ו- y ליטר מיץ ענבים.

ו. ביום מסוים פרצה במפעל שביתה לאחר שעתיים של עבודה (120 ד') רשמו משוואות מתאימות.

ז. שרטטו את הישרים שבסעיף ו'.

(צבעו שטח המתאים לייצור אפשרי של מיץ תפוזים ומיץ ענבים.)



ח. האם אפשר ביום זה לסיים יצור של 10 ליטרים מיץ תפוזים ו-10 ליטרים של מיץ ענבים? הסבירו.
האם אפשר להספיק לייצר 10 ליטרים של מיץ תפוזים ו-8 ליטרים מיץ ענבים? הסבירו.

תרגילים 4 ו-5 בהמשך דומים לתרגיל 1, תוכלו להיעזר בפתרון של תרגיל 1 כדי לפתור אותם.

2. מפעל מייצר שני סוגי מרגרינה: דלת-קוריות ורגילה. הייצור נעשה בשלושה שלבים:

ייצור מרגרינה דלת-קלוריות:

משך הבישול:	30 דקות לק"ג.
ערבוב:	5 דקות לק"ג.
מיצוק:	2 דקות לק"ג.

ייצור מרגרינה רגילה:

משך הבישול:	10 דקות לק"ג.
ערבוב:	15 דקות לק"ג.
מיצוק:	5 דקות לק"ג.

א. הכינו טבלה מתאימה לנתונים ורשמו אותם בתוכה.

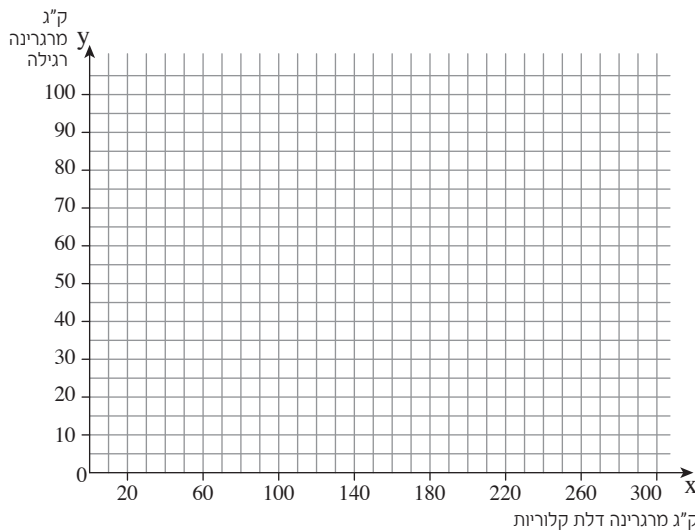
ב. מהו זמן הבישול של 3 ק"ג מרגרינה דלת-קלוריות, ו-5 ק"ג מרגרינה רגילה.

ג. האם ניתן להספיק לבשל 10 ק"ג מרגרינה דלת-קלוריות ו-5 ק"ג מרגרינה רגילה במשך שעתיים?

ד. רשמו פונקציית מטרה לזמן הבישול של x ק"ג מרגרינה דלת-קלוריות ו- y ק"ג מרגרינה רגילה.

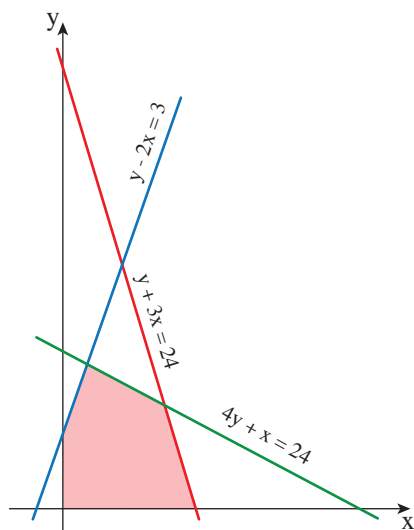
הזמן המוקצב לבישול הוא 10 שעות (____ דקות). רשמו אי-שוויון מתאים.

ה. הזמן המוקצב לערבוב הוא: 12 שעות.
 הזמן המוקצב למיצוק הוא: 8 שעות. רשמו עוד שני אי שוויונות.
 שרטטו גרף של האי שוויונות שרשמתם.



האם ניתן בזמן המוקצב לייצר 20 ק"ג מרגרינה רגילה ו- 30 ק"ג מרגרינה דלת-קלוריות?
 האם ניתן בזמן המוקצב לייצר 20 ק"ג מרגרינה רגילה ו- 20 ק"ג מרגרינה דלת-קלוריות?

כעת תוכלו לפתור את תרגיל 7 בתרגילים



3. נתון תחום אפשרי, המתאר ייצור של x ק"ג מוצר א' ו- y ק"ג מוצר ב'. רשמו את האי שוויונות המתוארים בתחום.
- ידוע שהרווח לק"ג מוצר א' הוא 3 ש"ח ולק"ג מוצר ב' 5 ש"ח.
- א. רשמו פונקציית מטרה לרווח המתקבל מייצור של x ק"ג מוצר א' ו- y ק"ג מוצר ב'.
- ב. היכן יתקבל הרווח המקסימלי? כמה ק"ג מכל מוצר כדאי לייצר? חשבו מהו הרווח המקסימלי.

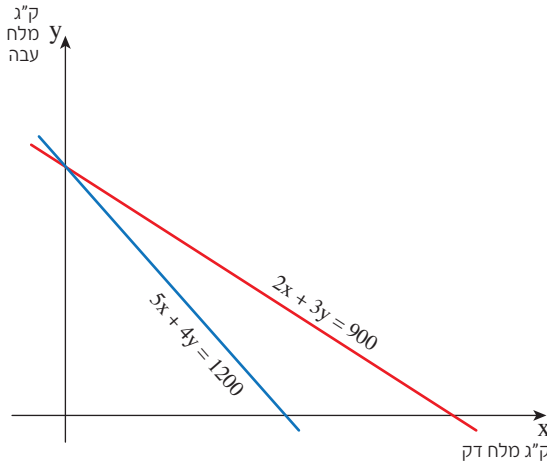
תרגילים

4. הטבלה שלפניכם מתארת תהליך ייצור של שני סוגי מלח: מלח דק ומלח עבה.

סוג	זמן עיבוד	זמן אריזה
מלח דק	2 דקות לק"ג	5 דקות לק"ג
מלח עבה	3 דקות לק"ג	4 דקות לק"ג

- א. חשבו כמה דקות דרושות לעיבוד של 10 ק"ג מלח דק ו-15 ק"ג מלח עבה. המכונה המעבדת יכולה לעבוד לכל היותר 15 שעות ביום, (900 דקות), והמכונה האורזת יכולה לעבוד לכל היותר 20 שעות (1200 דקות).
- ב. ביום מסוים עיבדו רק מלח דק. האם אפשר היה להספיק לעבד 300 ק"ג מלח דק?
- ג. אם מייצרים רק מלח עבה, האם אפשר להספיק לעבד 300 ק"ג מלח עבה? האם אפשר היה להספיק לעבד ולארז 300 ק"ג מלח עבה?
- ד. רשמו פונקציית מטרה לזמן ה**עיבוד** של x ק"ג מלח דק ו- y ק"ג מלח עבה. רשמו פונקציית מטרה לזמן ה**אריזה** של x ק"ג מלח דק ו- y ק"ג מלח עבה.
- ה. רשמו אי שוויונות מתאימים.

- ו. לפניכם משוואות הישרים שהם גבולות התחומים.
התאימו לכל משוואה את האי שוויון וצבעו שטח מתאים.



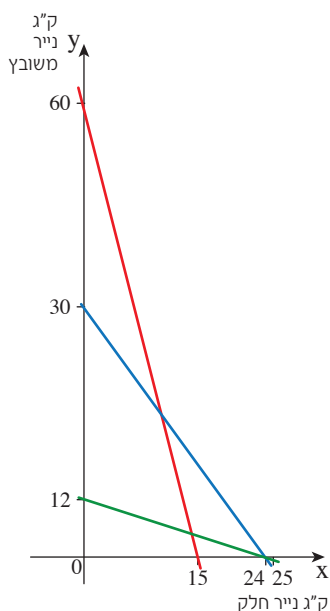
- ז. סמנו 2 נקודות באזור הצבוע, ורשמו במילים כמה ק"ג מכל סוג מייצרים עפ"י נקודות אלה, ומהו זמן העיבוד והאריזה.

5. מפעל מייצר שני סוגי נייר: משובץ וחלק.
תהליך הייצור מורכב מהשלבים הבאים: הרכבת העיסה, ערבוב ועיבוד.
בטבלה נתונים פרטי הייצור **בדקות לק"ג**.

סוג	הרכבת העיסה	ערבוב	עיבוד
נייר חלק	20	10	8
נייר משובץ	5	8	15

- א. כמה דקות דרושות להרכבת עיסה של 20 ק"ג נייר חלק ו- 10 ק"ג נייר משובץ?
כמה דקות דרושות לערבוב עיסה של 20 ק"ג נייר חלק ו- 10 ק"ג נייר משובץ?
כמה דקות דרושות לייצור כולל של 20 ק"ג נייר חלק?
במחזור ייצור אחד:
המכונות המרכיבות את העיסה יכולות לפעול 5 שעות לכל היותר (שהן _____ דקות).
המכונות המערבבות יכולות לפעול 4 שעות לכל היותר (שהן _____ דקות).
המכונות המעבדות יכולות לפעול 3 שעות (שהן _____ דקות).
- ב. רשמו פונקציית מטרה לזמן העיבוד של x ק"ג נייר חלק ו- y ק"ג נייר משובץ, ורשמו אי שוויון מתאים.
- ג. רשמו שני אי שוויונות נוספים, המתאימים לזמן **ההרכבה** ולזמן **הערבוב**.

ד. לפניכם הישרים שבגבולות האי שוויונות. התאימו את המשוואות לישרים וצבעו אזור המתאים לא שוויונים.



ה. אם מייצרים רק נייר חלק, כמה ניתן לייצר במחזור ייצור אחד? אילו מכונות אינן מנוצלות בכל הזמן שניתן להן? הסבירו.

6. נתונה מערכת האילוצים הבאה:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 180 \\ x + y \leq 90 \\ y - x \geq -50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

א. שרטטו את התחום האפשרי.

(כדאי לחלק את הצירים ליחידות של 20).

ב. נתונה פונקציית המטרה: $f(x, y) = 2x + 10y$. שרטטו קו גובה כלשהו, ורשמו את ערכה של פונקציית המטרה בנקודות על הקו הזה.

ג. מצאו את ערכי x ו y , עבורם מקבלת פונקציית המטרה ערך מקסימלי בתחום האפשרי. חשבו ערך זה.

7. מפעל מייצר שני סוגי סלטים: סלט חמוץ וסלט חריף.

ייצור סלט חמוץ: משך הבישול 20 דקות לק"ג.

משך הערבוב: 5 דקות לק"ג

ייצור סלט חריף: משך הבישול 10 דקות לק"ג.

משך הערבוב: 10 דקות לק"ג

א. הכינו טבלה מתאימה לנתונים, ורשמו אותם בתוכה.

ב. מהו זמן הבישול של 5 ק"ג סלט חמוץ ו- 10 ק"ג סלט חריף?

ג. האם ניתן להספיק לבשל במשך שעתיים 3 ק"ג סלט חמוץ ו- 2 ק"ג סלט חריף?

ד. רשמו פונקציית מטרה לזמן הבישול של x ק"ג סלט חמוץ ו- y ק"ג סלט חריף.

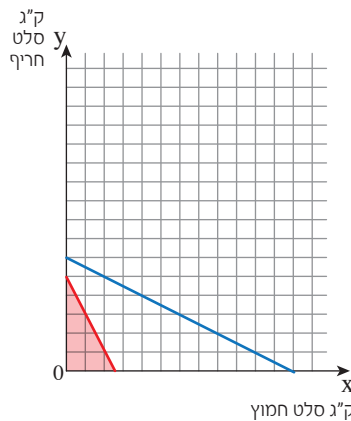
ה. הזמן המוקצב לבישול הוא 8 שעות (____ דקות). רשמו אי שוויון מתאים.

ו. הזמן המוקצב לערבוב הוא 10 שעות. רשמו אי שוויון מתאים.

ז. לפניהם גרף של האי שוויונות שרשמתם. התאימו לכל ישר את המשוואה.

ח. בחרו נקודה באזור הצבוע ורשמו במילים מה היא מתארת.

ט. האם קיים אילוץ, שהורדתו לא תשנה את הפתרון? אם כן - רשמו מהו ונמקו.



"הכל פתוח"...

1. נתונה מערכת האילוצים הבאה:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 50 \\ y \leq 2x + 40 \end{cases}$$

א. שרטטו את התחום האפשרי; מה המיוחד בתחום הזה?

ב. נתונה פונקציית המטרה $f(x, y) = 3x + 5y$

שרטטו קו גובה מתאים למקרה שבו ערך פונקציית המטרה הוא 100.

הזיזו את קו הגובה במקביל לקו המשוורטט, ובדקו מה קורה לערכה של פונקציית המטרה בהזזה "כלפי מעלה" ובהזזה "כלפי מטה".

היכן, בתחום האפשרי, מקבלת פונקציית המטרה ערך מינימלי?

האם יש ערך מקסימלי לפונקציית המטרה, במסגרת התחום האפשרי? נמקו.

בתחום פתוח, לא תמיד מקבלת פונקציית המטרה ערך מקסימלי או מינימלי, יש לבדוק על פי פונקציית המטרה הנתונה, כלומר, בעזרת קווי הגובה המתאימים.

2. נתונה מערכת האילוצים הבאה:

$$\begin{cases} y - x \leq 3 \\ 5y - x \geq -10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

א. שרטטו את התחום האפשרי.

ב. נתונה פונקציית המטרה

i) $f(x, y) = x + y$

בדקו אם פונקציית המטרה מקבלת מקסימום או מינימום בתחום.

ג. נתונות עוד שתי פונקציות מטרה:

ii) $f(x, y) = x - 2y$

iii) $f(x, y) = x - y$

בדקו לגבי כל אחת מהן, אם היא מקבלת מינימום או מקסימום בתחום.

האם יש יותר מערך אחד כזה בתחום?

3. רשמו מערכת אי שוויונות, כך שהתחום המשותף המתאים להם יהיה פתוח, ושרטטו את התחום.

4.

במפעל מייצרים בשעה לפחות 4 ק"ג ריבת משמש. ולפחות 5 ק"ג ריבת שזיפים.

ידוע גם, שהמשקל של ריבת המשמש הוא לכל היותר 10 ק"ג יותר מהמשקל של ריבת השזיפים.

א. רשמו מערכת אי שוויונות מתאימה, כאשר x מייצג משקל בק"ג של ריבת משמש, ו- y מייצג משקל בק"ג של ריבת שזיפים.

ב. שרטטו תחום אפשרי מתאים.

ג. עלות הייצור היא 5 ש"ח לק"ג ריבת משמש, ו-7 ש"ח לק"ג ריבת שזיפים. רשמו פונקציית מטרה, $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ ומצאו עלות מינימלית. (מצאו תחילה כמה יש לייצר מכל סוג כדי לקבל עלות מינימלית).

5. נתונה מערכת אי שוויונות:

$$\begin{cases} y \geq 2 \\ x \leq -1 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$$

א. שרטטו את התחום המשותף.

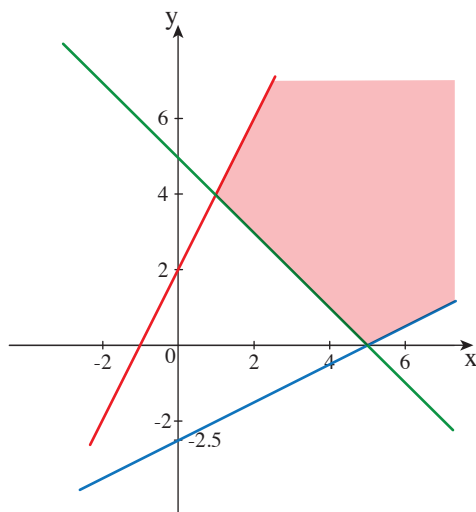
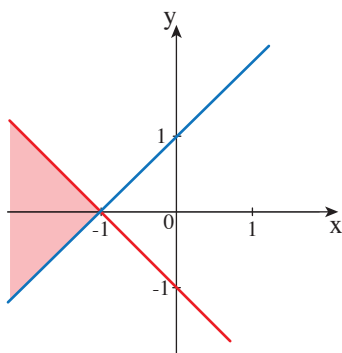
ב. הוסיפו אי שוויון כרצונכם, כך שהתחום הנ"ל "יסגר", ושרטטו בהתאם.

הערה: בשאלות הבאות (6, 7) ניתן להשתמש בגאוברה, או תוכנה גרפית אחרת, לצורך בקרה.

6. רשמו מערכות אי שוויונות, המתאימות לתחומים הפתוחים הבאים:

ב.

א.



7. רשמו מערכת של 3 אי שוויונות לפחות, כך שהתחום המשותף המתאים להם יהיה פתוח, וכולו מעל ציר ה- x . (תוכלו לשרטט תחילה תחום כזה).

8. מצאו את נקודות המקסימום והמינימום של פונקציית המטרה:

$$f(x, y) = 5 - 5x + 8y$$

$$\begin{cases} x \leq 8 \\ x \geq 2 \\ y \geq -3 \\ 3x + 4y \leq 24 \end{cases}$$

9. תזונאית מעוניינת שאדם הבא אליה להרכיב תפריט יקבל שני סוגי ויטמינים.

הכמות המינימלית ההכרחית היא 260 מ"ג מכל סוג ויטמינים לשבוע.

שני הסוגים נמצאים בתפוחי אדמה ובסלק בלבד.

סמנו ב- x את משקל תפוחי האדמה וב- y את משקל הסלק.

	1 ק"ג תפוחי אדמה	1 ק"ג סלק
כמות ויטמין סוג I	20 מ"ג	60 מ"ג
כמות ויטמין סוג II	50 מ"ג	20 מ"ג

א. רשמו אי שוויונות מתאימים ושרטטו את התחום האפשרי.

ב. ידוע, כי מחיר ק"ג תפוחי אדמה 20 ש"ח, ומחיר ק"ג סלק 15 ש"ח, רשמו פונקציית מטרה $f(x, y)$,

ומצאו כמה ק"ג מכל סוג יש לאכול לפי ההוראות, כדי שההוצאות יהיו מינימליות.

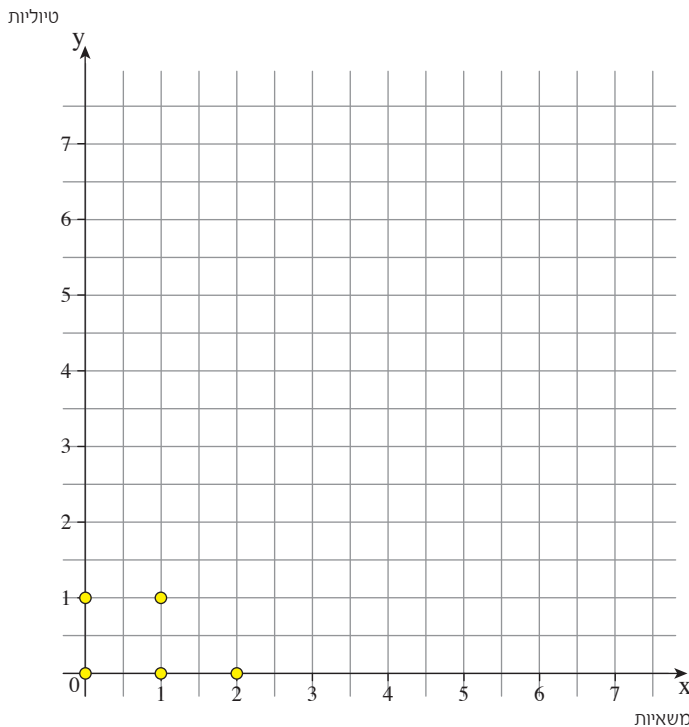
ג. מהן ההוצאות המינימליות?

ומה אם מתעניינים רק בנקודות שלמות?

1. באילו מהמקרים הבאים המשתנים x ו- y מקבלים ערכים טבעיים?
 - א. - רוצים למצוא מקסימום רווח ממכירת כמויות של עגבניות ושל מלפפונים.
 - ב. - תחום אפשרי מתאר אילוצים של מפעל המייצר שולחנות וכסאות.
 - ג. - פונקציית המטרה מתארת זמן פעולה.
 - ד. - פונקציית המטרה מתארת מספר נקודות המתקבל מ- x תשובות נכונות ו- y תשובות לא נכונות.

2. חברת "המטייל" משכירה מכוניות לטיולים. לחברה יש 5 משאיות ו- 7 טיולים. בית ספר שוכר x משאיות ו- y טיולים.

- א. רשמו אי שוויונות מתאימים.
ב. ברשטוט מסומנות 5 נקודות מהתחום האפשרי.



- ב. המשיכו בסימון נקודות התחום האפשרי. כמה נקודות בתחום האפשרי? הסבירו.
- ג. שכירת משאית ליום עולה 400 ש"ח ושכירת טיולית עולה 200 ש"ח. רשמו פונקציית מטרה למחיר שתגבה חברת "המטייל" $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$

ד. מצאו אפשרות של מספר משאיות ומספר טיוליות המתאים לרווח יומי של 3000 ש"ח.
כמה אפשרויות בתחום האפשרי מתאימות לרווח של 3000 ש"ח?
רשמו את כולן.

ה. סמנו את הנקודה המתאימה לרווח המקסימלי האפשרי (מסעיף א')

3. ב"ס "ארזים" רוצה לשכור משאיות וטיוליות מחברת ה"מטייל" ליום אחד, עבור 200 נוסעים לכל היותר.

משאית יכולה להכיל 50 נוסעים, וטיולית יכולה להכיל 20 נוסעים.
חברת ה"מטייל" יכולה לספק לבי"ס "ארזים" 3 משאיות לכל היותר ו- 7 טיוליות לכל היותר.
יחד עם זאת חברת ה"מטייל" מוכנה לשלוח כלי רכב רק אם מספר המקומות הכולל שבהם יהיה לפחות 100.

ביה"ס, לעומת זאת, מעוניין שלא יסעו יותר מ- 200 תלמידים.
 x מייצג את מספר המשאיות ו- y מייצג את מספר הטיוליות.

א. רשמו מערכת אי שוויונות לבעיה ושרטטו את התחום האפשרי.
שכירת משאית ליום עולה 400 ש"ח ושכירת טיולית ליום עולה 200 ש"ח.

ב. בתחום ששרטטתם, כולל הקויים שתוחמים אותו, נמצאות 17 נקודות ששיעוריהן מספרים שלמים.
בחרו 2 נקודות, ורשמו את כל המשתמע מהן: מספר המשאיות והטיוליות, מס' הנוסעים ועלות השכירה.
בסופו של דבר התברר, שיצאו לטיול 170 נוסעים.

ג. המטרה של חברת ה"מטייל" לגבות את התשלום המקסימלי. כמה כלי רכב מכל סוג כדאי לה לשלוח, ומהו המחיר שתגבה? (נסו למצוא יותר מאפשרות אחת).

ד. מטרת הנהלת בית הספר, לעומת זאת, לשלם מחיר מינימלי. כמה כלי רכב מכל סוג תבקש ההנהלה לשלוח, וכמה תשלם עבור שכירתם?

בעיות שלמות

עד כה פתרתם בעיות שלמות עם מספר אילוצים קטן, או בעיות אחרות, בהן היו נתונות טבלאות, ונתבקשת לבצע חלקים מפתרון הבעיה: שרטוט התחום האפשרי או רישום האי שוויונות, או מציאת הרווח המקסימלי. למשל, כשהתחום נתון וכו'.

מעתה נפתור בעיות, בהן נבצע את כל השלבים: רישום האי שוויונות. שרטוט התחום ומציאת המקסימם או המינימום.

1. יצרן מייצר שני סוגי ארונות, כמתואר בטבלה:

סוג ארונות	כמות העץ הדרושה לארון	מס' שעות עבודה לארון
מטבח	5 מ"ר לארון	10
בגדים	4 מ"ר לארון	20

כמות העץ שיש למפעל בסה"כ היא 120 מ"ר, ומספר שעות העבודה העומדות לרשותו הוא 450 לכל היותר.

- א. רשמו מערכת אילוצים, ושרטטו את התחום האפשרי.
- ב. הרווח הנקי לארון מטבח הוא 900 ש"ח, ולארון בגדים 600 ש"ח.
רשמו פונקציות מטרה לרווח המתקבל מייצור של x ארונות מטבח ו- y ארונות בגדים.
- ג. כמה ארונות מכל סוג על המפעל לייצר, כדי לקבל רווח מקסימלי, ומהו הרווח המקסימלי
2. האילוצים הם כמו בשאלה הקודמת, אבל הרווח הנקי לארון מטבח הוא 500 ש"ח, ולארון בגדים 1000 ש"ח. רשמו פונקציית מטרה מתאימה.
- א. רשמו פתרון מתאים.
- ב. רשמו את כל הפתרונות המתאימים.
- ג. מצאו שני זוגות (x, y) , שעבורם הרווח של שני המפעלים זהה.
- ד. האם תוכלו למצוא רווח זהה מקסימלי עבור שני המפעלים?

פתרתם בעיות שלמות, אולם עדיין בצעתם את העבודה ב- 3 שלבים:

- רישום אי שוויונות לצורך התחום האפשרי
- רישום פונקציית המטרה
- מציאת האופטימום, כלומר: מציאת מקסימום או מינימום.

בהמשך הסעיף תלמדו לפתור בעיות ללא פרוט השלבים האלה.
תוכלו לפתור כעת את שאלות 6, 7 שבתרגילים.

3. מפעל מייצר שני סוגי סלטים: סלט ירקות וסלטי חצילים.
בתהליך הייצור שני שלבים: ערבוב ובישול.
פרטי הייצור מרוכזים בטבלה הבאה:

בישול	ערבוב	
4 דקות לק"ג	2 דקות לק"ג	סלט ירקות
3 דקות לק"ג	3 דקות לק"ג	סלט חצילים

במחזור ייצור אחד ניתן להפעיל את ציוד הערבוב למשך שעתיים (120 דקות), ואת ציוד הבישול למשך 3 שעות (180 דקות).

הרווח הנקי של המפעל לק"ג סלט ירקות הוא 8 ש"ח, ולק"ג סלט חצילים - 10 ש"ח.
סמנו את הנתונים הקשורים באילוצים, ובסימון אחר הדגישו נתונים הקשורים בפונקציית המטרה.
רשמו אי שוויונות, ושרטטו את התחום האפשרי.
כמה ק"ג מכל סוג סלט כדאי למפעל לייצר, כדי לקבל רווח מקסימלי?

4. בנגריה מייצרים שולחנות וכיסאות, פרטי הייצור רשומים בטבלה:

שעות עבודה ליחידה	כמות עץ ליחידה	
4 ש'	0.2 מ"ק	כסא
3 ש'	0.5 מ"ק	שולחן

לרשות הנגריה עומדים 4 מ"ק עץ ו- 38 שעות ביום עבודה אחד.
מספר הכיסאות שמייצרים הוא לכל היותר פי 4 ממספר השולחנות.
הנגריה מרוויחה 100 ש"ח לכיסא, ומפסידה 300 ש"ח לשולחן.
כמה שולחנות וכמה כיסאות יש לייצר, כדי שהרווח הכללי יהיה מקסימלי? מהו הרווח המקסימלי?

זכרו, שלבי הפתרון הם:

הפרידו בין הנתונים.

רשמו אילוצים, שרטטו תחום אפשרי, רשמו פונקציית מטרה וענו על השאלה.

זכרו שלבים אלה גם בבואכם לפתור את הבעיות השלמות הבאות.

5. מפעל מייצר גלית וניל וגלית שוקולד.
 תהליך הייצור מתחלק לשני שלבים: בישול וקירור.
 לייצור ק"ג גלית וניל זקוקים ל- 10 דקות בישול ו- 20 דקות קירור, ולייצור ק"ג גלית שוקולד זקוקים ל- 5 דקות בישול ו- 30 דקות קירור.
 אפשר להפעיל את מכונת הבישול לכל היותר במשך 40 דקות, ואת מכונת הקירור - לכל היותר במשך 180 דקות.
 מק"ג גלית וניל מרוויחים 80 ש"ח, ומק"ג גלית שוקולד - 40 ש"ח.
 רשמו את הנתונים בטבלה.

	זמן בישול לק"ג	זמן קירור לק"ג	רווח לק"ג
גלית וניל			
גלית שוקולד			

- א. מהו הרווח המקסימלי, שיוכל המפעל להרוויח?
 ב. אם מרוויחים 50 ש"ח על כל ק"ג מכל סוג, מהו הרווח המקסימלי במקרה זה?
6. במפעל מייצרים שני סוגים של לחמניות: עם שומשום ובלי שומשום. ידוע כי לכל לחמניה עם שומשום דרושים 40 גר' בצק ו- 2 גר' שומשום. לכל לחמניה בלי שומשום דרושים 50 גר' בצק.

א. סדרו את הנתונים בטבלה הבאה:

	כמות הבצק הדרושה ללחמניה	כמות השומשום הדרושה ללחמניה
לחמניה עם שומשום		
לחמניה בלי שומשום		

- ב. בכל מחזור ייצור עומדים לרשות המפעל 5 ק"ג בצק ו- 160 גר' שומשום.
 רשמו מערכת אילוצים מתאימה לבעיה, ושרטטו את התחום האפשרי.
 הרווח הנקי של המפעל ללחמניה עם שומשום הוא 20 אג', וללחמניה בלי שומשום 10 אג'.
 x מייצג את מספר הלחמניות עם שומשום שמייצרים.
 y מייצג את מספר הלחמניות בלי שומשום שמייצרים.
 ג. רשמו פונקציות מטרה לרווח הנקי המתקבל $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$
 ד. כמה לחמניות מכל סוג צריך המפעל לייצר במחזור ייצור, כדי לקבל רווח מקסימלי, מהו הרווח המקסימלי?

7. ועד עובדים במפעל מעוניין להזמין לעובדיו חבילות שי, המכילות שקיות עם פירות יבשים וחפיסות שוקולד.

הוחלט כי כל חבילת שי תכיל לכל היותר 8 פריטים, משקלה יהיה לפחות 1000 גר', ונפחה לפחות 2000 סמ"ק.

המשקל והנפח של שקית פירות יבשים ושל חפיסת שוקולד רשומים בטבלה הבאה:

נפח	משקל	
500 סמ"ק	100 גר'	שקית פירות יבשים
100 סמ"ק	200 גר'	חפיסת שוקולד

מחיר שקית עם פירות יבשים 4 ש"ח, ומחיר חפיסת שוקולד 2 ש"ח.

א. כמה שקיות של פירות יבשים וכמה חפיסות שוקולד כדאי למוכר לשים בכל חבילת שי כדי לגבות מחיר מקסימלי?

ב. המטרה של ועד העובדים לשלם מחיר מינימלי.

כמה שקיות פירות יבשים וכמה חפיסות שוקולד כדאי לו להזמין בכל חבילת שי?

שאלות נוספות לתרגול וחזרה.

8. לרשותו של חקלאי עומדים מקסימום 80 דונם, המתחלקים על פני שני סוגי גידולים (x דונם גידולי עגבניות ו- y דונם פלפלים).

א. רשמו אי שוויון מתאים.

גידול עגבניות דורש 4 ימי עבודה לדונם, וגידול פלפלים - יומיים לדונם.

ב. רשמו פונקציית מטרה למספר הימים הנדרשים ל- x דונם גידולי עגבניות ו- y דונם גידולי פלפלים. ידוע שסך-הכל ימי העבודה לחודש, שניתן להשקיע בגידולים אלה, הוא מקסימום 200 ימים.

ההכנסה לדונם גידולי עגבניות היא 1000 ש"ח, ולדונם גידולי פלפל 2000 ש"ח. שרטטו קו גובה מתאים להכנסה של 4000 ש"ח.

ג. כמה דונם כדאי לחקלאי להקצות לכל סוג גידול, כדי שהכנסתו תהיה מקסימלית? נמקו.

ד. אם ידוע שההכנסה לדונם עגבניות היא 1000 ש"ח, ולדונם פלפל 500 ש"ח, כיצד ישתנה הרווח המקסימלי? כמה פתרונות לבעיה? נמקו.

9. בתהליך כימי מפיקים מק"ג חומר גלם 3 חומרים שונים, בשני מפעלים שונים. להלן נתוני ההפקה.

חומר C	חומר B	חומר A	
2 מ"ג	3 מ"ג	4 מ"ג	מפעל א'
5 מ"ג	2 מ"ג	1 מ"ג	מפעל ב'

מסיבות שונות, מפיקים לפחות 140 מ"ג מחומר A, לפחות 180 מ"ג מחומר B, ולפחות 230 מ"ג מחומר C.

סמנו ב- x את משקל חומר הגלם במפעל א', וב- y את משקל חומר הגלם ממפעל ב'.

הוצאות ההפקה הן 300 ש"ח לק"ג במפעל א' ו- 200 ש"ח לק"ג במפעל ב'.

- כמה ק"ג חומר גלם כדאי לרכוש מכל מפעל, כדי שיהיו הוצאות מינימליות?
- מהן ההוצאות המינימליות?

10. מבחן אמריקאי בנוי משלושה חלקים.

על הנבחן לענות לכל היותר על 10 שאלות מחלק א', 8 שאלות מחלק ב',

ולפחות על 5 שאלות מחלק ג'.

בסה"כ צריך הנבחן לענות על 15 שאלות

לרשות הנבחן לכל היותר 44 דקות לפתרון 15 השאלות, כאשר יש להקדיש 3 דקות לכל שאלה בחלק

א', 4 דקות לשאלה בחלק ב', ו- 2 דקות לשאלה בחלק ג'.

א. סמנו ב- x את מספר השאלות שפתר התלמיד בחלק א', ב- y את מספר השאלות שפתר בחלק ב'.

רשמו אי שוויונות מתאימים.

לכל שאלה מחלק א' מעניקים 6 נקודות, לכל שאלה מחלק ב' מעניקים 5 נקודות, ולכל שאלה מחלק

ג' מעניקים 4 נקודות.

רשמו פונקציית מטרה לסך כל הנקודות שמקבל תלמיד.

ב. כמה שאלות מכל פרק על התלמיד לפתור, כדי לקבל מספר נקודות מקסימלי, ומהו מספר הנקודות

המקסימלי?

ג. אם מעניקים 5 נקודות לשאלה מחלק א', 5 נקודות לכל שאלה מחלק ב' ו- 4 נקודות לכל שאלה

מחלק ג', כמה שאלות כדאי לפתור מכל פרק, כדי לקבל ניקוד מקסימלי? כמה פתרונות לשאלה?

רשמו אותם והסבירו.

הרווח המקסימלי בנקודה (40, 0)	עמ' 123 - תרגיל 1:
משלוחים אפשריים: (2, 3), (1, 2), (1.5, 2.1)	עמ' 132 תרגיל 11:
$x + y \leq 150$	עמ' 135 תרגיל 6:
$y \leq x + 2$	עמ' 146 תרגיל 5:
$2x + y \leq 5$	
תשובה אפשרית: $y = 2$	עמ' 147 תרגיל 6:
$y \leq 3$	עמ' 148 תרגיל 8:
$y \geq -3x$	
$y \geq 3x$	
הנקודות המתארות משלוח של 20 טון ברזל נמצאות צלע המחברת את הקדקוד (20, 0) עם הקדקוד (10, 10)	עמ' 150 תרגיל 13:
(-3, 3), (0, 2), (0, -3). נקודת החיתוך: (-3, 3)	עמ' 154 תרגיל 5ב':
$5x + 5y \leq 1000$	עמ' 156 תרגיל 1ב':
$x + y \leq 30$	עמ' 157 תרגיל 2ד':
$x \leq 20$	
$f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$	עמ' 160 תרגיל 2א':
(100, 40), (40, 160)	תרגיל 2ה':
לדוגמה: $x = 9, y = 0$	עמ' 161 תרגיל 4ג':
1300 לא מתקבל.	עמ' 162 תרגיל 2ז':
הערך הגבוה ביותר מתקבל ב-A	עמ' 163 תרגיל 2ד':
$6x + 3y = 15$	עמ' 168 תרגיל 1ב':
390	עמ' 169 תרגיל 2ג':
390, מתקבל בנקודה A	עמ' 169 תרגיל 3ג':
150	עמ' 171 תרגיל 2ד':
מקסימום בנקודה (200, 100)	עמ' 174 תרגיל 2:
104 ש"ח	עמ' 176 תרגיל 1:
1150 ש"ח	עמ' 177 תרגיל 4:
מקסימום בנקודה (1400, 0)	עמ' 178 תרגיל 6ב':
$(6\frac{6}{11}, 7\frac{5}{13})$	עמ' 182 תרגיל 3:
מינימום בנקודה (50, 0). אין מקסימום	עמ' 186 תרגיל 1:

מינימום בנקודה $(0, 0)$. אין מקסימום	תרגיל 2:	עמ' 186
$5x + 7y$, מינימום בנקודה $(4, 5)$.	תרגיל ג4:	עמ' 187
א. $x + y \geq 5$ ב. $y \leq -x - 1$	תרגיל 6:	עמ' 187
$y \geq \frac{1}{2}x - 2$ $y \leq 2x + 2$		
מינימום בנקודה $(6, -3)$, מקסימום בנקודה $(2, 4\frac{1}{2})$	תרגיל 8:	עמ' 188
$(5, 7)$	תרגיל 2:	עמ' 189
$50x + 20y \leq 200$	תרגיל 3:	עמ' 190
$0 \leq x \leq 3$		
$0 \leq y \leq 7$		
$50x + 20y \geq 100$		
מקסימום בנקודה $(24, 0)$.	עמ' 191 - 195 תרגיל 1:	
בנקודה $(30, 20)$ - רווח מקסימלי של 440 ש"ח.	תרגיל 3:	
ב- $(0, 160)$ רווח של 600 ש"ח.	תרגיל ג3':	
200 ש"ח	תרגיל 4:	
א.: $(0, 6)$ ב.: $(1\frac{1}{2}, 5)$	תרגיל 5:	
$(18, 10)$	תרגיל 6:	
מקסימום $(6, 2)$, מינימום $(4, 0)$.	תרגיל 8:	
מקסימום בנקודה $(0, 80)$ והוא 160,000 ש"ח.	תרגיל 9:	
במקרה השני קו הגובה מתלכד עם צלע של התחום.		
מינימום 18,000 ש"ח.	תרגיל 10:	

