מתמטיקה לחוגי העשרה

המחבר: אביגדור רוזנטולר

חוברת למורה

מס' 4

היחידה לפעולות נוער
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע - רחובות

כולנו מכירים את סימני ההתחלקות של מספרים ב-2, 3, 4, 5, 9 ו-10.
ישנם המכירים גם את סימני ההתחלקות ב- 6, 8, 11, 25 ו-50.
אך האם ישנם סימני התחלקות במספרים כמו 17? 83? או 1973?

בחוברת זו נפתח שיטות לבדיקת התחלקות של מספרים בכל המספרים הראשוניים.

כמובן, כוונתנו איננה להקל על חישובים גרידא, לשם כך נוכל להשתמש במחשבון (מחשב כיס), אלא להעשיר ולהעמיק את מבנה עולם המספרים שלנו, ולהבין טוב יותר את הקשרים בין המספרים השונים ותכונותיהם.

ב ב ר כ ה,

המחבר.

ניסן, תשמ"ג

המספרים הראשוניים (מלבד 2) מסתיימים בספרות: 1, 3, 7 או 9.
בהתאם לכך נחלק את הדיון בסימני ההתחלקות בהם.

<u>כלל א' - סימן התחלקות במספרים ראשוניים המסתיימים ב-1</u>

N מספר טבעי שספרת האחדות שלו היא n.
נוכל לכתוב את N בצורה הבאה: $N = 10m + n$.

P מספר ראשוני שספרת האחדות שלו היא 1. כלומר, $P = 10p + 1$

נגדיר מספר חדש: $N_1 = m - np$.

<u>טענה</u>: N מתחלק ב-P אם ורק אם N_1 מתחלק ב-P.

<u>הוכחה</u>:

N מתחלק ב-P אם ורק אם $N - Pn$ מתחלק ב-P.
(בחרנו ב-$N - Pn$ כיוון שהוא יביא אותנו לתוצאה המבוקשת, כפי שיתברר בהמשך).

$N = 10m + n$ $\quad$ $P = 10p + 1$ ולכן:

$$N - Pn = 10m+n-(10p+1)n = 10m+n-10pn-n = 10m-10pn = 10(m-pn) = 10N_1$$

אם N מתחלק ב-P, אזי $N - Pn$ מתחלק ב-P. ואז $10N_1$ מתחלק ב-P. P הוא מספר ראשוני (שונה מ-2 ו 5) לכן N_1 מתחלק ב-P.

אם N_1 מתחלק ב-P, אזי $10N_1$ מתחלק ב-P. ואז $N - Pn$ מתחלק ב-P, לכן N מתחלק ב-P.

כלומר, הראינו כי N מתחלק ב-P אם ורק אם N_1 מתחלק ב-P.

<u>דוגמא א'</u>

האם 176297 מתחלק ב-31 ?

31 הינו מספר ראשוני המסתיים ב-1. נשתמש בכלל א' כמה פעמים ונבדוק:

$$\begin{array}{ll} (i) & 17629 - 7\cdot 3 = 17608 \\ (ii) & 1760 - 8\cdot 3 = 1736 \\ (iii) & 173 - 6\cdot 3 = 155 \\ (iv) & 15 - 5\cdot 3 = 0 \end{array}$$

0 מתחלק ב-31, לכן 176297 מתחלק ב-31.

כלל ב' - סימן התחלקות במספרים ראשוניים המסתיימים ב-3

N מספר טבעי שספרת האחדות שלו היא n.

נוכל לכתוב את N בצורה הבאה: $N = 10m + n$.

P מספר ראשוני שספרת האחדות שלו היא 3. כלומר: $P = 10p + 3$

נגדיר מספר חדש: $N_1 = m + (3p + 1)n$.

<u>טענה</u>: N מתחלק ב-P אם ורק אם N_1 מתחלק ב-P.

<u>הוכחה</u>:

N מתחלק ב-P אם ורק אם $N + P\cdot 3n$ מתחלק ב-P.

$$N + P\cdot 3n = 10m+n + (10p+3)3n = 10m+n + (10\cdot 3p+9)n = 10m + (10\cdot 3p+10)n$$
$$= 10[m + (3p+1)n] = 10N_1 .$$

P הוא מספר ראשוני, לכן N מתחלק ב-P אם ורק אם N_1 מתחלק ב-P.

<u>הערה</u>: הפעם קיצרנו בהסברים, ועל הקורא להשלים בעצמו.

<u>דוגמא ב'</u>

האם 177869 מתחלק ב-83 ?

83 הינו מספר ראשוני המסתיים ב-3. נשתמש בכלל ב' כמה פעמים ונבדוק:

(i) $17786 + 25\cdot 9 = 18011$

(ii) $1801 + 25\cdot 1 = 1826$

(iii) $182 + 25\cdot 6 = 332$

(iv) $33 + 25\cdot 2 = 83$

83 מתחלק, כמובן, ב-83. לכן 177869 מתחלק ב-83.

כלל ג' - סימן התחלקות במספרים ראשוניים המסתיימים ב-7

N מספר טבעי שספרת האחדות שלו היא n .

נוכל לכתוב את N בצורה הבאה: $N = 10m + n$.

P מספר ראשוני שספרת האחדות שלו היא 7, כלומר: $P = 10p + 7$.

נגדיר מספר חדש: $N_1 = m - (3p + 2)n$.

<u>טענה</u>: N מתחלק ב-P אם ורק אם N_1 מתחלק ב-P .

<u>הוכחה</u>:

N מתחלק ב-P אם ורק אם $N - P\cdot 3n$ מתחלק ב-P .

$$N - P\cdot 3n = 10m+n - (10p+7)3n = 10m+n - (10\cdot 3p+21)n = 10m - (10\cdot 3p+20)n$$
$$= 10[m - (3p+2)n] = 10N_1$$

P הוא מספר ראשוני, לכן N מתחלק ב-P אם ורק אם N_1 מתחלק ב-P .

<u>דוגמא ג'</u>

האם 28194 מתחלק ב-127 ?

127 הינו מספר ראשוני המסתיים ב-7, נשתמש בכלל ג' כמה פעמים ונבדוק:

$$\text{(i)}\quad 2819 - 38\cdot 4 = 2667$$
$$\text{(ii)}\quad 266 - 38\cdot 7 = 0$$

0 מתחלק ב-127, לכן 28194 מתחלק ב-127.

כלל ד' - סימן התחלקות במספרים ראשוניים המסתיימים ב-9

N מספר טבעי שספרת האחדות שלו היא n .

נוכל לכתוב את N בצורה: $N = 10m + n$.

P מספר ראשוני שספרת האחדות שלו היא 9, כלומר: $P = 10p + 9$.

נגדיר מספר חדש: $N_1 = m + (p + 1)n$.

<u>טענה</u>: N מתחלק ב-P אם ורק אם N_1 מתחלק ב-P .

הוכחה:

N מתחלק ב-P אם ורק אם $N + Pn$ מתחלק ב-P.

$$N + Pn = 10m+n + (10p+9)n = 10m + (10p+10)n = 10[m + (p+1)n] = 10N_1$$

P הוא מספר ראשוני, לכן N מתחלק ב-P אם ורק אם N_1 מתחלק ב-P.

דוגמא ד'

האם 279838 מתחלק ב-229?

229 הינו מספר ראשוני המסתיים ב-9. נשתמש בכלל ד' כמה פעמים ונבדוק:

$$\begin{array}{lll} i) & 27983 + 23.8 = 28167 \\ (ii) & 2816 + 23.7 = 2977 \\ (iii) & 297 + 23.7 = 458 \end{array}$$

458 מתחלק ב-229 $(458 = 2\cdot229)$, **לכן** 279838 מתחלק ב-229.

דוגמא ה'

האם 357492 מתחלק ב-29 ?

29 הינו מספר ראשוני המסתיים ב-9. נשתמש בכלל ד' כמה פעמים ונבדוק:

$$\begin{array}{lll} (i) & 35749 + 3.2 = 35755 \\ (ii) & 3575 + 3.5 = 3590 \\ (iii) & 359 + 3.0 = 359 \\ (iv) & 35 + 3.9 = 62 \\ (v) & 6 + 3.2 = 12 \end{array}$$

12 אינו מתחלק ב-29 ולכן גם 357492 אינו מתחלק ב-29.

לפניכם פתרונות של הבעיות שניתנו בחוברת לתלמיד:

בעיה 1:

N מספר טבעי שסיפרת האחדות שלו היא n. נסמן: $N = 10m + n$.
הוכח כי אם $20n - m$ מתחלק ב-67, אזי גם המספר הנתון מתחלק ב-67.

67 הינו מספר ראשוני, לכן נוכל להשתמש בכלל ג'. מכלל זה נובע מיידית שהמספר הנתון מתחלק ב-67.

בעיה 2:

N מספר טבעי שסיפרת האחדות שלו היא n. נסמן: $N = 10m + n$. הוכח כי אם $1381n - m$ מתחלק ב-1973 אזי גם המספר הנתון מתחלק ב-1973.

$1973n$ מתחלק, כמובן, ב-1973. לכן גם הסכום $1973n + (m - 1381n)$ מתחלק ב-1973. כלומר, $m + 592n$ מתחלק ב-1973.
1973 הוא מספר ראשוני, לכן נוכל להשתמש בכלל ב', ונקבל שגם המספר הנתון מתחלק ב-1973.

בעיה 3:

N מספר טבעי. נסמן ב-b את המספר המתקבל משתי הספרות האחרונות של N וב-a את המספר המתקבל משאר הספרות. כלומר $N = 100a + b$.
הוכח כי N מתחלק ב-7 אם ורק אם $2a + b$ מתחלק ב-7.

N מתחלק ב-7 אם ורק אם $N - 98a$ מתחלק ב-7.

$$N - 98a = 100a + b - 98a = 2a + b$$

מכאן, N מתחלק ב-7 אם ורק אם $2a + b$ מתחלק ב-7.

בעיה 4:

N מספר טבעי. נסמן $N = 100a + b$ כמו בשאלה הקודמת.
הוכח כי N מתחלק ב-7 אם ורק אם $5a - b$ מתחלק ב-7.

N מתחלק ב-7 אם ורק אם $N - 105a$ מתחלק ב-7.

$$N - 105a = 100a + b - 105a = -5a + b = -(5a - b)$$

מכאן, N מתחלק ב-7 אם ורק אם $5a - b$ מתחלק ב-7.

הבעיות הבאות עוסקות בחלוקת מספרים:

<u>בעיה 5</u>:

המספר $\overline{13ab45c}$ בן 7 הספרות הינו כפולה של 792.
מצא את ערכי הספרות a, b ו c.

$792 = 8 \cdot 9 \cdot 11$. מכאן $\overline{13ab45c}$ מתחלק ב-8, ב-9 וב-11.
מההתחלקות ב-8 נובע כי $\overline{45c}$ מתחלק ב-8. מכאן $c = 6$.
מההתחלקות ב-9 נובע כי $1 + 3 + a + b + 4 + 5 + 6 = 19 + a + b$ מתחלק ב-9. לכן $a + b = 8$ או $a + b = 17$.
מההתחלקות ב-11 נובע כי $(1 + a + 4 + 6) - (3 + b + 5) = 3 + a - b$ מתחלק ב-11. לכן $a - b = -3$ או $a - b = 8$.

ניתן לבנות ארבע מערכות של שתי משוואות עם שני משתנים.
רק למערכת הזאת: $\begin{cases} a + b = 8 \\ a - b = 8 \end{cases}$
ישנו פתרון: $a = 8$, $b = 0$
מכאן, המספר המבוקש הוא 1380456.

<u>בעיה 6</u>:

המספר $\overline{a29b83213c}$ הינו מכפלת שני המספרים 71394 ו-46178. <u>בלי</u> לבצע את פעולת הכפל, מצא את ערכי הספרות a, b ו c.

ממכפלת ספרות האחדות, נקבל $c = 2$.
ממכפלת ספרות העשרות אלפים, נקבל $a = 3$.
46178 מתחלק ב-11, לכן גם $\overline{329b832132}$ מתחלק ב-11.
כלומר, $(3 + 9 + 8 + 2 + 3) - (2 + b + 3 + 1 + 2) = 17 - b$ מתחלק ב-11. מכאן $b = 6$.

<u>בעיה 7</u>:

המספר 96514 מתחלק ב-41 (בדוק!). נעביר את הספרה הראשונה לסוף המספר ונקבל 65149. גם מספר זה מתחלק ב-41 (בדוק!). נמשיך באותו תהליך ונקבל את המספרים 51496, 14965 ו-49651. כל אחד מהם מתחלק גם הוא ב-41. הוכח שתכונה זו נכונה באופן כללי. כלומר, הוכח כי אם נתון מספר בן 5 ספרות המתחלק ב-41, אזי אם נעביר את ספרתו הראשונה לסוף המספר, נקבל מספר חדש המתחלק גם הוא ב-41.

נניח המספר $\overline{abcde}$ מתחלק ב-41. עלינו להוכיח כי גם המספר $\overline{bcdea}$ מתחלק ב-41.

$$10\cdot\overline{abcde} - \overline{bcdea} = 10(10^4a+10^3b+10^2c+10d+e) - (10^4b+10^3c+10^2d+10e+a)$$
$$= 99999a$$
$$= 41\cdot 2439a$$

קיבלנו שההפרש בין $10\cdot\overline{abcde}$ ו- $\overline{bcdea}$ מתחלק ב-41.

$\overline{abcde}$ מתחלק ב-41 (לפי ההנחה). לכן גם $10\cdot\overline{abcde}$ מתחלק ב-41.

מכאן, $\overline{bcdea}$ מתחלק גם הוא ב-41.

<u>בעיה 8</u>:

נתון מספר בן 6 ספרות המתחלק ב-143, ניתן ליצור ממספר זה חמישה מספרים חדשים, על-ידי העברת הספרה הראשונה לסוף המספר.
הוכח שהמספרים החדשים גם הם מתחלקים ב-143.

נפתור בעיה זו בדרך דומה לפתרון בעיה 7.
נניח $\overline{abcdef}$ מתחלק ב- 143.

$$10\cdot\overline{abcdef} - \overline{bcdefa} = 999999a$$
$$= 143\cdot 6993a$$

מכאן, $\overline{bcdefa}$ מתחלק גם הוא ב-143.

<u>בעיה 9</u>:

מספר מסוים N נכתב לפי בסיס 7 בעזרת שלוש ספרות. אם נהפוך את סדר הספרות, נקבל את N כתוב לפי בסיס 9.
מהו המספר?

נכתוב את המספר לפי בסיס 7 באופן הבא: $\overline{xyz}_7$.

אזי: $\overline{xyz}_7 = \overline{zyx}_9$

כלומר, $7^2x + 7y + z = 9^2z + 9y + x$

$$48x - 2y - 80z = 0$$
$$y = 8(3x - 5z)$$

y היא ספרה במספר הכתוב לפי בסיס 7, לכן $y < 7$.

מכאן $y = 0$, $3x - 5z = 0$.

x ו z הם מספרים טבעיים קטנים מ-7, ולכן $x = 5$, $z = 3$.

כלומר, המספר המבוקש הוא 503_7.

בעיה 10:

המשפט הקטן של פרמה (נקרא על שמו של Pierre de Fermat מתמטיקאי צרפתי שחי במאה ה-17) קובע כי אם P מספר ראשוני ו-a מספר שלם שאיננו מתחלק ב-P, אזי $a^{P-1} - 1$ מתחלק ב-P.

הוכח, בעזרת המשפט הקטן של פרמה, כי המספר $\underbrace{888...88}_{\text{3944 פעמים}}$ מתחלק ב-15784.

ברור שהמספר $\underbrace{888...88}_{\text{3944 פעמים}}$ מתחלק ב-8. $15784:8 = 1973$.

לכן מספיק להראות כי $\underbrace{888...88}_{\text{3944 פעמים}}$ מתחלק ב-1973.

$$\underbrace{888...88}_{\text{3944 פעמים}} = 8\cdot\underbrace{111...11}_{\text{3944 פעמים}}$$

$$= 8\cdot\frac{\overbrace{999...99}^{\text{3944 פעמים}}}{9}$$

$$= 8\cdot\frac{10^{3944} - 1}{9}$$

$$= 8\cdot\frac{100^{1972} - 1}{9}$$

לפי המשפט הקטן של פרמה $100^{1972} - 1$ מתחלק ב-1973 (ראשוני!).

מכאן: $\underbrace{888...88}_{\text{3944 פעמים}}$ מתחלק ב-1973, ולכן גם ב-15784.

בעיה 11:

הוכח כי אם $a^2 + b^2$ מתחלק ב-7 (a ו b מספרים שלמים), אזי a ו b שניהם מתחלקים ב-7.

נסמן $a = 7n + x$, $b = 7m + y$ (x - השארית של חילוק a ב-7

y - השארית של חילוק b ב-7).

אזי: $a^2 + b^2 = (7n)^2 + 2\cdot7nx + x^2 + (7m)^2 + 2\cdot7my + y^2$

$$= 7\cdot k + x^2 + y^2$$

k מספר שלם.

x ו y הם מספרים מבין 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

אזי x^2 ו-y^2 הם מספרים מבין 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36.
השאריות של x^2 ו y^2 בחילוק ב-7 הם מספרים מבין 0, 1, 4, 2.

נתון כי $a^2 + b^2$ מתחלק ב-7. לכן גם $x^2 + y^2$ צריך להתחלק ב-7. סכום שתי שאריות אפשריות ייתן מספר המתחלק ב-7 אם ורק אם שתיהן שוות ל-0.
מכאן $x = y = 0$. כלומר גם a וגם b מתחלקים ב-7.

<u>בעיה 12</u>:

המורה רשם על הלוח תרגיל של כפל שני מספרים בני 3 ספרות וחלוקת המכפלה במספר נוסף. דן לא ראה את סימן הכפל וחשב שלפניו תרגיל חילוק כשהמחולק הינו המספר בן 6 ספרות המורכב משני המספרים המקוריים. התוצאה שקיבל דן היתה גדולה פי 3 מהתוצאה הנכונה.
מצא את שני המספרים בני ה-3 ספרות.

נסמן את שני המספרים במכפלה ב-x וב-y, ואת המספר המחלק ב-z.
דן היה צריך לחשב $\frac{xy}{z}$, אבל חישב $\frac{1000x + y}{z}$.

מהנתונים נקבל: $$\frac{1000x + y}{z} = \frac{3xy}{z}$$

או: $$3y = 1000 + \frac{y}{x}$$

מכך נקבל כי $1000 + \frac{y}{x}$ מתחלק ב-3.

x ו y שניהם מספרים תלת-ספרתיים ולכן $0 < \frac{y}{x} < 10$. מכאן $\frac{y}{x}$ הוא אחד מבין המספרים: 2, 5 או 8.

אם $\frac{y}{x} = 2$ אזי $3y = 1002$. $y = 334$ ו $x = 167$.
אם $\frac{y}{x} = 5$ אזי $3y = 1005$. $y = 335$ ו $x = 67$.
קיבלנו ש-x מספר דו-ספרתי בסתירה לנתונים.
אם $\frac{y}{x} = 8$ אזי $3y = 1008$. $y = 336$ ו $x = 42$.
שוב קיבלנו ש-x מספר דו-ספרתי בסתירה לנתונים.
מכאן נקבל כי $x = 167$ ו- $y = 334$.

בעיה 13:

הוכח כי $18! + 1$ מתחלק ב-19, מבלי לחשב את $18!$.

$(18! = 1\cdot2\cdot3\ldots17\cdot18)$

$$18! + 1 = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot16\cdot17\cdot18 + 1$$

$$= (1\cdot18)\underbrace{(2\cdot10)(3\cdot13)(4\cdot5)(6\cdot16)(7\cdot11)(8\cdot12)(9\cdot17)(14\cdot15)}_{A} + 1 =$$

המכפלה בתוך כל סוגריים ב-A נותנת מספר המשאיר שארית 1 בחילוק ל-19,
לכן A משאיר שארית של 1 בחילוק ל-19. מכאן:

$$18! + 1 = 18\cdot(19n + 1) + 1$$
$$= 18\cdot19n + 18 + 1$$
$$= 19(18n + 1)$$

כלומר, $18! + 1$ מתחלק ב-19.

בעיה 14:

מצא את המספר הטבעי הקטן ביותר המקיים:
אם נחלקו ב- 2 נקבל ריבוע שלם,
אם נחלקו ב- 3 נקבל חזקה שלישית של מספר שלם,
אם נחלקו ב- 5 נקבל חזקה חמישית של מספר שלם,
אם נחלקו ב- 7 נקבל חזקה שביעית של מספר שלם.

מהנתונים ברור כי המספר מתחלק ב-2, ב-3, ב-5 וב-7.
כלומר הוא מהצורה: $2^a\cdot3^b\cdot5^c\cdot7^d$.
a צריך להתחלק ב-3, ב-5, וב-7, ו $a - 1$ צריך להתחלק ב-2.
המספר הטבעי הקטן ביותר המקיים זאת הוא $a = 105$.
b צריך להתחלק ב-2, ב-5 וב-7 ו- $b - 1$ צריך להתחלק ב-3.
המספר הטבעי הקטן ביותר המקיים זאת הוא $b = 70$.

באופן דומה נקבל כי $c = 126$ ו $d = 120$.

מכאן, המספר המבוקש הוא $2^{105}\cdot3^{70}\cdot5^{126}\cdot7^{120}$.

בעיה 15:

הוכח כי $n^7 - n$ מתחלק ב-42, לכל n טבעי.

נפרק את $n^7 - n$ למכפלה:

$$n^7-n = n(n^6-1) = n(n^3-1)(n^3+1) = n(n-1)(n^2+n+1)(n+1)(n^2-n+1)$$

$$(n-1)n(n+1)(n^2+n+1)(n^2-n+1)$$

נפרק $n^2 + n + 1$ ו $n^2 - n + 1$:

$$= (n-1)n(n+1)[(n+3)(n-2)+7][(n-3)(n+2)+7]$$

נפתח סוגריים מרובעים:

$$= (n-1)n(n+1)(n+3)(n-2)(n-3)(n+2) + 7(n-1)n(n+1)(n-3)(n+2)$$
$$+ 7(n-1)n(n+1)(n+3)(n-2) + 49(n-1)n(n+1)$$

קיבלנו ארבעה מחוברים. ברור כי שלושת האחרונים מתחלקים ב-7. המחובר הראשון מתחלק גם הוא ב-7, שכן הוא מכפלה של שבעה מספרים שלמים עוקבים וברור שאחד מהם מתחלק ב-7.

כל ארבעת המחוברים מתחלקים ב-6, שכן בכולם מופיעה מכפלה של שלושה מספרים עוקבים.

מכאן, $n^7 - n$ מתחלק ב- $6\cdot 7 = 42$.