ג1

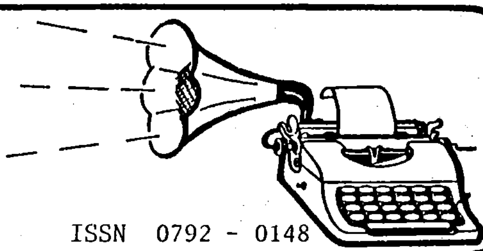
עלון למורי מתמטיקה

כרך ג, חוברת מספר 1, אייר תשמ"ט

מספרים

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות

מספרים



ISSN 0792 - 0148

תוכן העניינים

קורסים לשנת השתלמות והשתלמויות קיץ........................5

מאמרים:

חקירות גיאומטריות של הציקלואידה דרך תיכנות לוגו 11

עוזי ערמון , סמינר אורנים ומכון ויצמן למדע.

בעית הסולם 24

ברוך שוורץ ורחל בוהדנה, מכון ויצמן למדע.

קרוב... קרוב? 32

שגיא פלד , קיבוץ עין כרמל.

מהנעשה בארץ: 35

מתמטיקה בהתכתבות - מודל מכון ויצמן

נטע מעוז ויונתן דים, היחידה לפעולות נוער, מכון ויצמן למדע.

קוראים כותבים: 50

סימון המספרים המכוונים והילד הכותב וקורא עברית, הסרת מכשול

יקותיאל פקטה, המרכז לחינוך טכנולוגי, חולון.

הודעות 52

מערכת מספרים:

מקסים ברוקהיימר נורית זהבי רחל בוהדנה מיכאל קורן

הדפסה: אהובה אביבי

עיצוב גרפי: פולינה קרביץ רחל בוקשפן

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות

הודפס בישראל תשמ"ט, 1989

קוראים יקרים ,

לפניכם החוברת הראשונה של כרך ג'.

אנו מקווים שמצאתם עניין בעלוננו ומזמינים אתכם להציע רעיונות נוספים ולשלוח מפרי עטכם.

במרכז החוברת נמצא **דף לתלמיד** שנועד לגרות ולעורר מחשבה בכיתה.

הכתובת:
מספרים
מערכת *מספרים*
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע
רחובות 76100

ב ב ר כ ה ,

מספרים

מערכת *מספרים*

הצעה לשנת חופשה ...

קורסי השתלמות - תשי"ן

הקורסים מיועדים למורים בשנת שבתון ולמורים מעוניינים אחרים.

1. <u>קורס למורי המתמטיקה בכיתות ז', ח', ט'</u>

א. ביסוס והרחבה של הידע המתמטי.
ב. פעילויות להעשרת דרכי ההוראה.

הקורס מיועד למורים בעלי נסיון בהוראת מתמטיקה בכיתות ז' - ט'.

הקורס יתקיים בימי ג' בהיקף של 8 ש"ש (סה"כ 224 שעות).

2. <u>הכרת התכנית החדשה במתמטיקה בחטיבה העליונה</u>

הקורס מיועד למורים בעלי נסיון בהוראת מתמטיקה בכיתות י' - י"ב.

הקורס יתקיים בימי ג' בהיקף של 4 ש"ש (סה"כ 112 שעות).

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

שכר הלימוד כמקובל במוסדות להשכלה גבוהה.

שני הקורסים מוכרים במסגרת קרנות ההשתלמות ומקנים נקודות גמול והשתלמות.

פרטים והרשמה

צפורה מימון, קבוצת המתמטיקה, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות, 76100 - טל': 08-482152.

השתלמות למורי המתמטיקה ברמה ג'

לפניך הצעה להשתלמות למורי המתמטיקה ברמה ג' לשנת תש"ן.

ה ר ק ע :

בחטה"ב מוצעת תכנית מתמטיקה לשלוש רמות יכולת , והאוכלוסיה מתחלקת לרוב ל-3 הקבצות. רק כ 15% מאוכלוסית חטה"ב לומד מתמטיקה לפי הרמה הנמוכה (רמה ג').

בפיתוח החומר עבור הקבצה זו, נעשה מאמץ לשמור על הקבלה בתכנים בין רמה זו לרמות הגבוהות יותר. למרות המספר הקטן יחסית של תלמידים הלומד לפי רמה זו, מסתבר כי ההטרוגניות של התלמידים ברמה זו היא עצומה , ולימוד המתמטיקה כרוך בבעיות רבות ושונות.

נראה לנו כי הגיע הזמן למקד תשומת לב ומשאבים לשיפור ההוראה והלימוד של המתמטיקה בהקבצה זו. לצורך זה אנו מציעים סדנת עבודה למורים כדלהלן.

המסגרת הכללית :

השתלמות בצורת סדנא לקבוצת מורים קבועה אשר לכל אחד מהם מעורבות ועניין בהוראה ברמה ג'. רצוי שלמשתתפים יהיה נסיון הוראה של שנתיים לפחות בחומר של תוכנית רחובות לרמה ג'.

המסגרת הלימודית :

אחת לשבועיים פגישה של 4 שעות (בימי ג'). סה"כ 56 שעות. במחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן.

מ ט ר ו ת :

1. יצירת חוג מורים המתמחה בהוראת מתמטיקה ברמות ג'.
2. שיכתוב פרקים נבחרים מהחומר הקיים וכתיבת חומר חדש בנושאים מתוך האלגברה וההנדסה, בהסתמך על התנסות בשדה של צורת קבוצת המתמטיקה במכון ושל המשתלמים.

ת ו כ נ י ת :* דיון וליבון בעיות המתעוררות בהוראת פרקים מסויימים (בעיקר בהנדסה) על סמך הנסיון בכיתות.

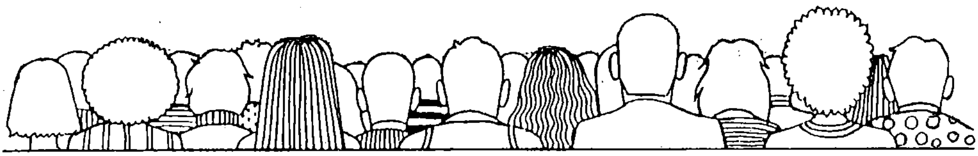
* דיון בחומר ניסוי משוכתב (למשל פתרון משוואות, פונקציות).
* עיבוד ותכנון נושאים, מערכי שעור ומבחנים.
* העברת שעורים פתוחים ע"י המנחים והמשתלמים.

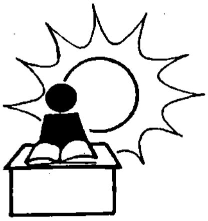
ה ע ר ה: יושם דגש על נסוי בכיתות במקביל לפעילויות בסדנא (נסוי דפים שיפותחו, מהלך נושא או שעור, שמוש באמצעי הוראה שונים כגון מחשב כיס, מחשב אישי, שקפים ועוד).

ההשתלמות תעניק נקודות לצורך גמול השתלמות.

פרטים והרשמה : תרצה הלוי
קבוצת המתמטיקה
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן, רחובות, 76100
טלפון 08-483156.

או אל רותי נודלמן
טלפון 08-482152





השתלמויות קיץ תשמ"ט

כמו בשנים עברו , אנו מתכננים השתלמות המשלבת את חומר ההוראה ודרכי ההוראה.

בהשתלמות יושם דגש על עבודה עצמית של המשתתפים.

נכלול בה פעילויות שונות במסגרת סדנאות שתתבססנה הן על ספרי הלימוד והן על חומר מיוחד שיחולק למשתתפים.

בהשתלמות יהיו 6 מסלולים שונים , כמפורט בהמשך , בתנאי שיהיו מספיק נרשמים לכל מסלול . במקרה של שינוי או ביטול תכנית , נודיע אישית לנרשמים המתאימים.

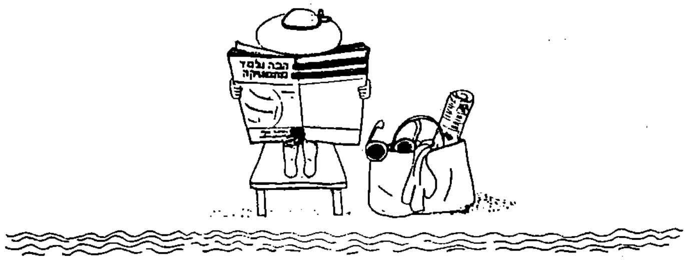
*** חובה להרשם מראש ***

ההשתלמות תתקיים במדרשת פיינברג , מכון ויצמן למדע , רחובות,
בימים א' - ה' , בין השעות 9:00 - 14:30.

אנא קרא בעיון את כל הפרטים !

שימו לב !

1. במהלך העבודה במסלולים השונים <u>לא</u> נעסוק בחומר המיוחד ובבעיות המיוחדות של רמה ג'.
   נקיים פגישות ייעוץ למעוניינים במועד שיפורט בהשתלמות.
2. למורים שילמדו בכיתות ט' , מומלצים מסלול ג' (פונקציות) ומסלול ד' (גיאומטריה) .



השתלמות קיץ תשמ"ס במכון ויצמן למדע

למורי מתמטיקה שילמדו בכיתות ז', ח', ט' לפי תכנית רחובות

מ ו ע ד	מסלול	מס' ימים	התכנית מתאימה	פרטים על התכנית במסלולים השונים
כ"ט בסיון – ג' בתמוז 2/7 – 6/7 ו' בתמוז – י' בתמוז 9/7 – 13/7	א	10	למורים* שילמדו בכיתות ז' (אשר לא השתתפו במסלול א' בשנתיים אחרונות).	נספל בנושאי לימוד מתוך תכנית כיתה ז' ברמה א' וברמה ב' ונתיחס לחומר הלימוד שיצא לאור בתשמ"ז (בחוברות א–ד וחוברת סטטיסטיקה ותיאור גרפי). *מרכזות: נלי ארגמן, רחל בוהדנה*
כ' בתמוז – כ"ד בתמוז 23/7 – 27/7 כ"ז בתמוז – ב' באב 30/7 – 3/8	ב	10	למורים* שילמדו בכיתות ח' (אשר לא השתתפו במסלול ב' בשנה שעברה).	נספל בנושאי לימוד מתוך תכנית כיתה ח' ברמה א' וברמה ב' ונתיחס לחומר הלימוד שיצא לאור בתשמ"ח (בחוברות ה–ח). *מרכזות: נעמי תעיד, נעמי רובינזון*
כ"ב בסיון – כ"ו בסיון 25/6 – 29/6	ג	5	למורים* שילמדו אלגברה בכיתות ט'	נספל בנושאים: מבוא לפונקציות ופונקציה קווית מתוך תכנית כיתה ט' ברמה א' וברמה ב'. נתיחס לספר "פונקציות". *מרכזים: אורלי מטליב, משה פינקלשטיין*
כ"ט בסיון – ג' בתמוז 2/7 – 6/7	ד	5	למורים שילמדו גיאומטריה בכיתות ח–ט' וטרם השתתפו במסלול זה.	נספל בהוראת גיאומטריה אוקלידית ברמה א' וברמה ב'. נעזר בספר גיאומטריה לרמה א', ובחוברות: פרקים בהנדסת המישור (I, II, III) לרמה ב'. *מרכזים: אלכס פרידלנדר, מרית הדס*
כ"ט בסיון – ג' בתמוז 2/7 – 6/7 ו' בתמוז – י' בתמוז 9/7 – 13/7	ה	10	למורים בעלי השכלה אקדמית במתמטיקה שילמדו בכיתות ז', ח', ט' (אשר לא לימדו לפי תכנית רחובות).	נספל בנושאי לימוד ודרכי עבודה מתאימות לכיתות ז', ח',ט'. נשתמש בכל ספרי הלימוד במהדורות החדשות. מתאים למורים שילמדו פעם ראשונה לפי התכנית. *מרכזות: מרית הדס, צפורה רזניק*
כ"ב בסיון – כ"ג בסיון 25/6 – 26/6	ו	2	למורים בעלי נסיון בהוראת תכנית רחובות.	נספל בכלים להוראת מתמטיקה, גיוונה והעשרתה. *מרכז: אלכס פרידלנדר*

* לא אקדמאים במתמטיקה

לכל המסלולים יש להביא מחשבון מדעי.

נקיים מסגרת של ייעוץ לרמה ג'. פרטים בהשתלמות.

<u>הערות כלליות</u>

<u>נקודות גמול השתלמות</u>

בכל אחד מהמסלולים בהם מספר השעות הוא 56 ומעלה, תינתן אפשרות למורים לקבל ציון על הקורס (ניתן לצרף מסלולים ג' ו- ד' ליחידה אחת) <u>וזאת בנוסף</u> למתן האישור על השתתפות בקורס.
לקורס בן 56 שעות עליו יש ציון, אפשר להוסיף 56 שעות השתלמות ללא ציון, וכך לזכות בנקודת השתלמות אחת.
עפ"י הנחיות המחלקה להשתלמות במשרד החינוך - יינתנו אישורים רק למורים שהשתתפו וחתמו לפחות על 80% מגליונות הנוכחות של מסלולם.

<u>התרשמה</u>: מורים המעוניינים להשתתף באחד המסלולים (או יותר), מתבקשים למלא את הספח שלהלן ולהחזירו בהקדם בצירוף דמי ההרשמה.

מספר המקומות בכל מסלול מוגבל !

חובה להרשם מראש !
הודעות על קבלה/אי-קבלה וכן הודעות
על שינויים ו/או ביטולים כלשהם,
תישלחנה <u>לנרשמים בלבד</u> ! ! ! !

אנא, הודיעו לנו מראש אם נבצר מכם להשתתף ! ! !

דמי ההרשמה להשתלמות:
לכל אחד מהמסלולים א, ב, ה - 30 ש"ח
לכל אחד מהמסלולים ג, ד, ו - 15 ש"ח

נעשים סידורים להחזר הוצאות נסיעה, הביאו כרטיסי אוטובוס או קבלות שירות.

★ <u>מידע חשוב נוסף</u>

במזנון יהיו כריכים ומשקה קר וחם - תמורת תשלום!
מיזוג אויר בחדרים!
אין כניסה לרכב לשטח המכון!

מאמרים

חקירות גאומטריות של הציקלואידה דרך תיכנות לוגו

מאת: עוזי ערמון

סמינר אורנים, מכון ויצמן למדע

תמצית.

הציקלואידה שייכת למשפחת עקומים המתקבלים ע"י גילגול מעגלים. המאמר מתייחס לשתי דרכים לתאור ציקלואידה: ע"י משוואות פרמטריות (תאור חיצוני - אקסטרינזי) וע"י הליכים בשפת הצב (תאור פנימי - אינטרינזי). באופן כללי נאמר שהתאור של עקום הינו חיצוני אם הוא תלוי במערכת ייחוס, כמו המערכת הקרטזית, המתייחסת גם לנקודות מחוץ לעקום. התאור נקרא פנימי אם הוא מבוסס על מערכת צירים המתייחסת רק לנקודות ש"בתוך" העקום. במקרה של הציקלואידה, המעבר בין הייצוג הפנימי לבין הייצוג החיצוני אפשרי באמצעים פשוטים (גאומטריים ברובם) של מתמטיקה תיכונית. ההגדרה של הליך לשירטוט עקום זה מבוססת על קישור בין מושגים של הגאומטריה האוקלידית לאלה של גאומטריית הצב (למשל, שזווית הפנייה הכוללת של הצב המשרטט ציקלואידה שווה למחצית הזווית המרכזית של המעגל המתגלגל ויוצר אותה). מנקודת מבט חינוכית יש בלמידת הקשר בין שני הייצוגים ע"י תיכנות לוגו, כדי לשפר את הבנתנו ולו של הציקלואידה בלבד.

הנושא המוצג כאן מדגים יישום של שני רעיונות כלליים בחינוך מתמטי. האחד הוא "עשייה מתמטית" למשל, באמצעות תיכנות בלוגו. השני הוא שילוב של הרבה תכנים מתמטיים הנלמדים בביה"ס התיכון.

הערות המחבר: נעזרתי כאן במאמר משותף עם אורי לירון (LERON & ARMON,1986) ובהרצאה שנתתי באותו נושא בכנס LOGO & MATH. EDUCATION (LME.2) בלונדון.

תודה שלוחה בזה לויקטור הרניק שהיה הראשון שהסב את תשומת לבי לכך ש"חצי האליפסה" המתקבלת ע"י תהליך CYCL (ראה בגוף המאמר) הינו למעשה ציקלואידה.

תודה נוספת לכל צוות מרכז לוגו על השתתפותם הפעילה בחשיבה ובהתלבטויות אודות המושגים המרכזיים המופיעים כאן.

(1). ייצוגים גאומטריים של עקומים.

גרפיקת הצב של לוגו מאפשרת לשרטט גרפים של פונקציות (עקומים) בשתי דרכים שונות במהותן: במערכת צירים ניידת - זו הצמודה לצב, ובמערכת צירים קבועה - הקרטזית. שירטוט גרפים במערכת הצמודה לצב נעשה באמצעות פקודות כמו FORWARD ו- RIGHT , הגורמות לתנועה "טבעית" של הצב על המסך ע"י הולכתו קדימה או סיבובו במקום ימינה (בהמשך, אקרא למערכת זו, החלקית לגרפיקת הצב, בשם **שפת הצב הטבעית** ובקיצור **שפת הצב**). הטיפול בחלק הקרטזי של לוגו יכול להתבצע בעזרת פקודות כמו SETXY ו- SETH (ההליכים המופיעים כאן נכתבו בלוגו בגירסת MIT). פקודות אלה יכולות להביא את הצב לנקודה (X,Y) או לסובב את ראשו ביחס לכיוון הקבוע של ציר הצפון.

נתבונן בייצוגים של צורה גאומטרית, למשל של המעגל, במערכות השונות. הייצוג הקרטזי שלו הוא משוואת המעגל: $(X - A)^2 + (Y - B)^2 = R^2$.
הצגה זו מדגישה את העובדה שהשירטוט של נקודות המעגל תלוי במערכת חיצונית וקבועה - מערכת הצירים הקרטזית (ייצוג חיצוני). לעומת זאת, תאור המעגל ע"י הוראה בשפת הצב: REPEAT 360 [RIGHT 1 FORWARD 1] אינו תלוי במערכת חיצונית וקבועה כלשהי, אלא רק במצבו ההתחלתי של הצב (ייצוג פנימי). מכאן, שקיום שתי מערכות הייצוג הגרפיות מאפשר לקשר ידע אודות גאומטריית הצב עם ידע בגאומטריה(אנליטית)באמצעות תיכנות לוגו. דוגמא לקישור כזה היא חקירת הפרמטרים A ו-B של משוואת המעגל המתוארת למעלה וגם המתאימה למעגל הנוצר ע"י הוראת החזרה בשפת הצב.

שירטוט המעגל בשפת הצב - קל להבנה אינטואיטיבית, כי הוא דומה להליכה אנושית במעגל. פקודות הצב קשורות להתמצאות המרחבית של הילד, ולכן הן עשויות להקל עליו את הניסוח הפורמלי של מושגים גאומטריים (כמו המעגל). מצד שני, ישנן צורות גאומטריות אחרות שפשוט יותר לשרטט אותן, למשל במערכת הקרטזית, כאשר מתקיימים שני תנאים: האחד - שקיים להן ייצוג מוכר ע"י משוואה, והשני - שיודעים "לתרגם" אותה לייצוג גרפי כלשהו. כך למשל, קל לשרטט במערכת קרטזית את גרף הסינוס Y = SIN (X) בעזרת חזרה על הפקודה הקרטזית מהסוג SETXY :X SIN :X (בפועל, יש להשתמש בהוראה כמו: REPEAT 12 [SETXY (XCOR + 10) (20 * SIN 3 * (XCOR + 10)],שבה הפרמטרים מתאימים למחשב APPLE). ואכן, במתמטיקה הסטנדרטית תאור פורמלי של פונקציות נעשה בד"כ באמצעות משוואות (קרטזיות, קוטביות, פרמטריות ואחרות).

בלוגו (כמו בשפות תיכנות נוספות) אפשר לתאר פונקציות בעזרת הליכים במקום ע"י משוואות. בכך התיכנות מוסיף נקודת-מבט חדשה למושגים הקשורים לפונקציות. בנוסף לכך, גרפיקת הצב עשויה לספק לפונקציות גם הצגות פנימיות, שיש בהם ענין מתמטי, חינוכי ותיכנותי.
ננסה עתה להבין מהו ייצוג פנימי לעומת ייצוג חיצוני.

(2) . ייצוגים פנימיים וחיצוניים .

ניתן להגדיר את המושג **ייצוג פנימי** כייצוג השומר על התכונות הפנימיות של צורות גאומטריות. לכן, ננסה תחילה להבחין בין תכונות פנימיות לתכונות חיצוניות של אותה צורה גאומטרית. נתייחס לשתי דוגמאות של צורות גאומטריות. נתחיל במקבילית ונתבונן בשתי תכונות העשויות לאפיין אותה:

(1) קיום זוג צלעות שוות ומקבילות;

(2) קיום זוג צלעות שוות המקבילות לאחד הצירים (הקרטזיים).

גם בדוגמא השניה, של מעגל, נתבונן בשתי תכונות מאפיינות:

(1) כל נקודותיו נמצאות במרחק שוה מנקודה קבועה כלשהי;

(2) כל נקודותיו נמצאות במרחק שוה מהראשית.

כל התכונות הנ"ל מנוסחות בעזרת **יחסים פנימיים** של הצורות הנידונות, כמו שוויון קטעים (מרחקים בין נקודות) והקבלת ישרים. אולם ראינו שיש תכונות הנעזרות גם במערכת צירים קבועה, החיצונית לצורות הנידונות ולכן הן נקראות **תכונות חיצוניות**. אותן תכונות של צורות גאומטריות, המוגדרות רק ע"י יחסים פנימיים, נקראות **תכונות פנימיות**, ואכן הן תלויות אך ורק באופי הצורה הגאומטרית.

התכונה החיצונית בדוגמא הראשונה (של המקבילית), בדבר קיום צלעות מקבילות לצירים, אינה נשמרת ע"י סיבוב של מערכת הצירים. גם התכונה החיצונית בדוגמא השניה (של המעגל, שמרכזו בראשית) אינה נשמרת ע"י הזזה.
בניגוד למצב של תכונות אלה, התכונות הפנימיות הטהורות (שוויון צלעות, הקבלת צלעות וקיום נקודת מרכז) אינן מושפעות מהזזה או סיבוב. ואכן ידוע בגאומטריה הדיפרנציאלית (העוסקת בחקירת תכונות של עקומים), שתכונות פנימיות של עקומים הן אלה הנשמרות ע"י פעולות ההזזה והסיבוב של המישור. מכאן קל לראות את התלכדות המושג האינטואיטיבי של ייצוג פנימי (שמירה על תכונות פנימיות) עם ההגדרה המתמטית המקובלת, שזהו ייצוג שאינו תלוי בסיבובים והזזות של מערכת הייחוס.

הצורות הגאומטריות הנוצרות ע"י הליכים בשפת הצב הטבעית אינן תלויות במצב ההתחלתי של הצב. בין אם נזיז אותו או נסובבו - תתקבל אותה צורה. מכאן, שכל ההליכים המוגדרים בשפת הצב, מהווים ייצוגים פנימיים של הצורות הגאומטריות הנוצרות על ידם.

נשאלת השאלה: לאילו עקומים מתמטיים קיימים "ייצוגי צב"? תשובה מסויימת ניתנה ע"י JOHN LASKI ב-1985. הוא העלה את ההשערה, שהעקומים הניתנים להצגה בשפת הצב הינם רק: מצולעים (כולל כוכבים), ספירלות ועקומים ממלאי-שטח (ניתן לראותם, למשל ב"גאומטריית הצב" של ABELSON & DISESSA). כיום ידוע כי יכולתה של שפת הצב גדולה הרבה יותר. הדוגמא של הציקלואידה, המובאת במאמר כאן, תמחיש זאת.

לשאלה בדבר קיום ייצוגי צב, ישנה חשיבות גדולה ביחס להבנת המושג **עקום**, אך גם ביחס להבנת המושג המופשט יותר של ייצוג פנימי. הבנה עמוקה של מושג מושגת:1) כאשר אנו מכירים מספר ייצוגים שלו, 2) כאשר יש לנו די נסיון כדי לבחור את המתאים ביותר למצב מסויים וגם, 3) כאשר לומדים את הקשרים ביניהם ויש באפשרותנו לעבור מהאחד לשני. המעבר בין ייצוגים פנימיים וחיצוניים של עקומים, מבוסס בד"כ על טכניקות דיפרנציאליות של גזירה ואינטגרציה. במאמר זה נראה שניתן לפשט את המעבר ביניהם במקרה של הציקלואידה, ולבסס על רעיונות גאומטריים.

(3). הציקלואידה.

המטרה המרכזית תהיה לנסות לחקות את הליך המעגל (מימין) כדי לבנות את ההליך (משמאל) שיגרום לשירטוט הציקלואידה:

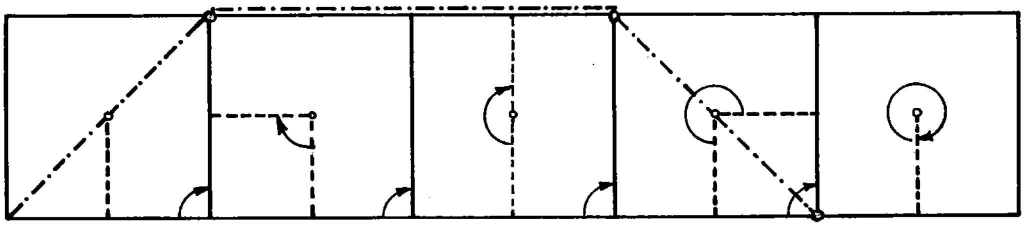
```
TO CIRC : TOTAL
   IF (:TOTAL > 360) STOP
   RIGHT 1  FORWARD 1
   CIRC ( :TOTAL + 1)
END
```

```
TO CYCL : TOTAL
   IF (:TOTAL > 180) STOP
   RIGHT 1 FORWARD SIN  :TOTAL
   CYCL (:TOTAL + 1)
END
```

ציקלואידה נוצרת ע"י גילגול של מעגל ללא החלקה על ישר. בכך היא שייכת למשפחה רחבה של עקומים - קוי גילגול (רולטות) הנוצרים ע"י גילגול של עקום אחד ביחס לעקום שני. מתוך ההגדרה הפיזיקלית באמצעות גילגול, קשה לדמות את צורתם של עקומים אלה בכלל ושל הציקלואידה בפרט. כדי להשיג תחושה אינטואיטיבית טובה יותר של צורת הציקלואידה נסתכל על בעיה דומה,

אך פשוטה יותר, שבה הוחלף המעגל בריבוע "מתגלגל" על ישר. בכך ניישם רעיון של פאפרט (PAPERT , P.147 , P.150) ביחס לשיפור אינטואיציות אודות מעגלים.

נבחר נקודה קבועה כלשהי של צלע הריבוע המונחת על הישר, למשל - הקודקוד השמאלי. נסובב את הריבוע על הישר, למשל ימינה, וכל פעם נסמן את המקום החדש של הקודקוד שבחרנו. לאחר ארבעה גילגולים של הריבוע, הנקודה תחזור למצבה הראשון (ביחס לריבוע). אם נתבונן במיקומים של הנקודה בכל אחד מהמצבים של הריבוע, נקבל 4 נקודות היוצרות טרפז שורה-שוקיים (ציור 1).

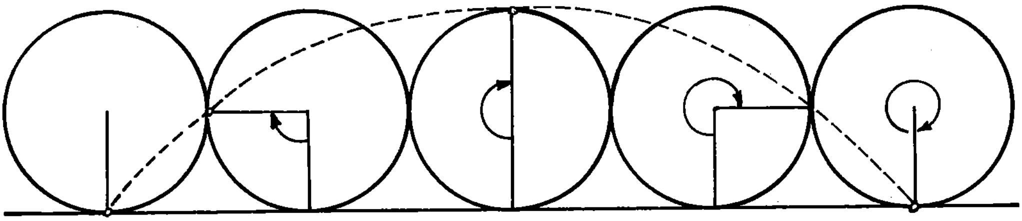


ציור 1: הטרפז הנוצר ע"י גילגול ריבוע על ישר

ננסה לקבל תחושה של הצורה הגאומטרית הנוצרת ע"י החלפת הריבוע במצולע משוכלל בעל N צלעות. בכך ניישם בעזרת המחשב את הרעיון המתמטי שהמעגל הוא גבול של מצולעים משוכללים. לשם כך נשתמש בהכללה CYCLOID של ההליך CYCL (שהוצג קודם לכן וטרם הוסבר), ונוסיף מעליו הליך עם משתנה פנימי N שייצג את מספר הצעדים עד להשלמת (ענף של) העקום. ההליך המתקבל N.CYCLOID מייצג, למעשה, את העקום הנוצר ע"י קודקוד של מצולע משוכלל עם N צלעות המתגלגל על ישר:

```
TO N.CYCLOID  :N
  CYCLOID  (180/:N)  (180/:N)  (180/:N)
END

TO CYCLOID  :TOTAL  :ANGLE  :SIDE
  IF  (:TOTAL > 180)  STOP
  RIGHT  :ANGLE
  FORWARD  :SIDE * (SIN :TOTAL)
  CYCLOID  (:TOTAL + :ANGLE)  :ANGLE  :SIDE
END
```

קל להיווכח שככל ש- N גדל (ואז המצולע מתקרב למעגל), העקום הנוצר על המסך הולך ומתקרב לציקלואידה (ציור 2). ההליך CYCL , שהוצג בתחילה, מתקבל מההליך CYCLOID ע"י קביעת משתניו הפנימיים SIDE = 1 ו- ANGLE = 1. לכן, נרצה בהמשך לקבל הוכחה לכך שההליך הכללי CYCLOID אכן מייצג את הציקלואידה.



ציור 2: הציקלואידה

ההגדרה הפורמלית של ציקלואידה היא שעקום זה הוא המסלול הנוצר ע"י נקודה קבועה של מעגל המתגלגל ללא החלקה על ישר. אפשר לראות את הנקודה, כאילו יושב בה צב עם עפרון, וכשהמעגל מתגלגל, הצב משרטט את העקום המתקבל.

ענף שלם של הציקלואידה מתקבל לאחר **גילגול** שלם של המעגל, כאשר המקום ההתחלתי של הנקודה המשרטטת הוא נקודת ההשקה של המעגל עם הישר.

המשמעות של גילגול ללא החלקה היא שבזמן מסוים הנקודה המתגלגלת (עם הצב) ונקודת ההשקה (או נקודת מרכז המעגל) עוברים דרכים שוות, גם אם הדרך של הצב היא קשת של מעגל, בעוד השניה - קטע של הישר. לכן, למשל, המרחק של נקודת סיום ענף הציקלואידה מנקודת ההתחלה שווה בדיוק להיקף המעגל ($2\pi R$).

(4). המשוואות הפרמטריות של הציקלואידה.

הייצוג המתמטי המקובל של הציקלואידה הוא באמצעות המשוואות הפרמטריות שלה (אין לה משוואה קרטזית פשוטה): $X = T\cdot R - R\cdot \sin T$

$Y = R - R\cdot \cos T$

כאשר X ו- Y הן הקואורדינטות של נקודת העקום במערכת קרטזית, R הוא רדיוס המעגל היוצר את הציקלואידה ו - T היא זווית הסיבוב המרכזית של המעגל.

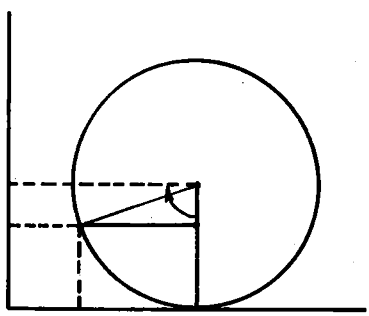
יתרונן של משוואות פרמטריות כלשהן הוא בכך שהן מאפשרות טיפול נפרד בפרמטרים הקרטזיים X ו - Y . ליתרון זה יש חשיבות מיוחדת בשירטוט קרטזי של עקומים בעזרת המחשב. למשל, ניתן ל"תרגם" את המשוואות למעלה לפקודה הבאה: SETXY (:T * :R - :R * SIN :T) (:R - :R * COS :T)
כך שביצוע חוזר שלה, כאשר T "רץ" מ - 0 עד 360 , יגרום לשרטוט הציקלואידה. משוואות פרמטריות אלה ניתנות לגזירה מתוך ההגדרה הפיזיקלית של הציקלואידה בשתי דרכים (לפחות): וקטורית וטריגונומטרית.

התנועה הציקלואידית של הצב ניתנת **לפרוק וקטורי** של שתי תנועות שוות-מהירות (הודות לגילגול ללא החלקה). האחת - תנועה מעגלית פשוטה של הצב עם כיוון השעון, יחסית למרכז המעגל; והשניה - תנועה קווית של מרכז המעגל לאורך הישר בכיוון התקדמות המעגל, יחסית למערכת הצירים הקרטזית. התנועה הראשונה ניתנת לתאור ע"י <-R•SIN T , R•COS T> והשניה - ע"י <T•R , R> . לכן, התנועה השקולה הינה סכום וקטורי שלהן, ולכן היא ניתנת לתאור ע"י: <T•R - R•SIN T , R - R•COS T> וזהו הייצוג הוקטורי של הציקלואידה.

גם **ההסבר הטריגונומטרי** משתמש בכך ששתי התנועות, המרכיבות את תנועת הנקודה (המשרטטת את הציקלואידה), שוות-מהירות. נסמן את הנקודה (X,Y) של הציקלואידה ברגע מסויים ע"י P. היות והתנועות שוות מהירות נקבל: $\widehat{PS} = \overline{OS}$ (בציור 3) . האורך של קשת המעגל PS שווה ל- T•R כאשר T נמדדת ברדיאנים. מהיחסים הטריגונומטריים (בציור 3) נקבל שוויונות עבור קטעים לאורך ציר X ועבור קטעים לאורך ציר Y :

$$T \cdot R = X + R \cdot SIN\ T$$
$$R = Y + R \cdot COS\ T$$

וע"י סידור נקבל את המשוואות הפרמטריות.



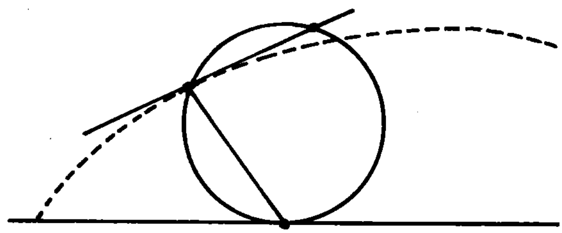
<u>ציור 3: הסבר טריגונומטרי למשוואות הפרמטריות</u>

(5). הסבר לתהליך הציקלואידה.

נראה עתה שמתוך ההגדרה הפיזיקלית ניתן גם לבנות הליך המנחה את הצב לשרטט ציקלואידה. הליך זה יתבסס על **צעד פשוט** בשפת הצב מהצורה:

RIGHT <זווית> FORWARD <אורך>

אלא שבניגוד למעגל, המבוסס גם הוא על צעד פשוט, הפרמטרים כאן אינם נשארים קבועים בזמן הביצוע. לכן, אם נקבע את הזווית (למשל, מעלה אחת), יוותר לנו עוד לחשב את אורך הצעד בכל שלב ואת מספר השלבים. נראה שאורך הצעד הוא כפולה כלשהי של SIN (TOTAL), כאשר TOTAL - הפנייה הכוללת עד לשלב זה. ונראה שעבור פנייה קבועה של מעלה אחת מספר השלבים הוא 180. החישובים יתבססו על תכונות גאומטריות פשוטות של הציקלואידה.

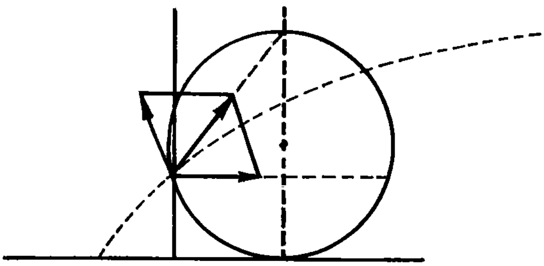


ציור 4: תכונת המשיק והנורמל לציקלואידה

כאמור, תנועת הצב המשרטט את הציקלואידה מורכבת משתי תנועות שוות-מהירות שסכומן - התנועה הציקלואידית: תנועה מעגלית לאורך משיק למעגל ותנועה בקו ישר בכיוון התקדמות המעגל. בתחילה נסיק מעובדה זו שהצב מסתכל תמיד לאורך הקו המחברו עם ה"קוטב הצפוני" של המעגל היוצר את הציקלואידה. אם נתרגם משפט זה משפת הצב לשפה מתמטית, זוהי תכונתו של המשיק לציקלואידה לעבור תמיד דרך נקודת קצה הקוטר המאונך לישר הגילגול. מכאן קל להסיק את תכונת הנורמל לציקלואידה, לעבור תמיד דרך נקודת ההשקה (ה"קוטב הדרומי") של המעגל היוצר עם ישר הגילגול (ציור 4).

נראה ששני קטעים שונים חוצים את הזווית KPL (בציור 5) שבין שני המרכיבים של תנועת הצב בנקודה P. נסיק מכך שהם מתלכדים, ולכן כיוונו של הצב יהיה לפי PJ בכיוון ה"קוטב הצפוני". נסמן את המהירויות השוות של מרכיבי תנועת הצב ע"י PK ו- PL בהתאמה , לכן PK = PL, ולכן המרובע PKJL הוא

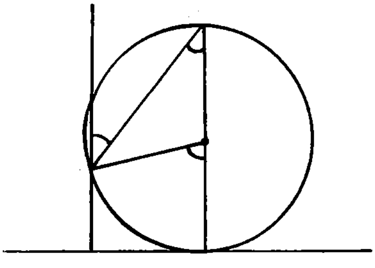
מעוייין. בהתאם לתכונת האלכסונים במעויין, האלכסון PJ , המייצג את כיוון ראשו של הצב, חוצה את הזווית KPL. בנוסף, נקודת ה"קוטב" N חוצה את הקשת PNQ , ולכן המיתר PN חוצה את הזווית KPQ (שבין המיתר PQ למשיק PK למעגל) המונחת מול קשת זו. כך קיבלנו ששני הקטעים: האלכסון PJ והמיתר PN, חוצים את הזווית KPL, ולכן הם מתלכדים. מכאן שכיוון ראשו של הצב הוא בכיוון ה"קוטב הצפוני". באופן סימטרי, ניתן להראות שכאשר הצב מגיע לנקודה זו הוא מפנה לה את גבו. בכך הוכחנו שכיוון תנועת הצב בכל רגע ורגע הוא לאורך הישר המחברו עם ה"קוטב הצפוני". כל זאת בתנאי שהגילגול הינו ללא החלקה, כלומר בתנאי ש- PL = PK.



ציור 5: הוכחת תכונת המשיק

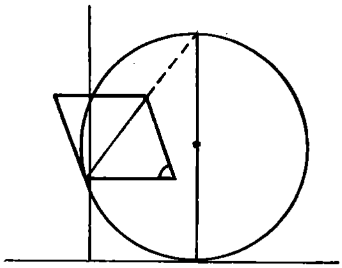
נסיק עתה מתכונה זו שהזווית של כיוון ראש הצב H (קיצור של HEADING) שווה למחצית זווית הסיבוב T של המעגל היוצר (כלומר T = 2H).

מצד אחד, זווית היקפית במעגל שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת (ציור 6), לכן הזווית PNS שווה למחצית זווית הסיבוב T הנשענת על הקשת PS. מצד שני, הזווית PNS מתחלפת (בין מקבילים) עם הזווית H של כיוון ראש הצב, לכן הן שוות, ומכאן ש- H שווה למחצית T. לכן, כאשר המעגל משלים גילגול מלא של 360 מעלות (והציקלואידה - ענף שלם) H "רץ" מ - 0 עד 180 מעלות. מכאן נוכל להסיק את תנאי העצירה של ההליך CYCLOID.



ציור 6: חישוב כיוון הראש

נראה לבסוף שגודל הצעד של הצב המשרטט את הציקלואידה נמצא ביחס ישר עם SIN H. ווקטורי המהירות PL ו- PK מייצגים את מרכיבי גודל הצעד של הצב לכל כיוון ביחידת זמן. נסמן את הגודל של כל מרכיב ע"י D (ציור 7). היות ו- PKJL הוא מעויין, לכן LJP הינו משולש שווה-שוקיים שראשו ב- L, בסיסו הוא JP ושוקיו שוות ל- D. הזווית JPL משלימה את H ל- 90 מעלות, לכן, זווית הראש בת 2H מעלות. מכאן, ע"י הורדת גובה לבסיס ולפי הגדרת הסינוס נקבל PJ = 2D•SIN H . האלכסון PJ מייצג את אורך הצעד בהליך הציקלואידה ביחידת זמן, כאשר D מספיק קטן. לכן, אם נסמן את 2D ע"י המשתנה SIDE , נקבל שגודל הצעד צריך להיות SIDE•SIN H. בכך סיימנו הבנייה.



ציור 7 : חישוב אורך הצעד

כדי להראות שהגרף הדיסקרטי, המתקבל על המסך, מייצג עקום רציף, נחליף את זווית הפנייה של מעלה אחת בכל שלב **במשתנה רציף** ANGLE, היכול לקבל כל ערך. לסיום, נחליף את **המשתנה החיצוני** H, התלוי בכיוון הצפון, **במשתנה הפנימי** TOTAL , המייצג את הפנייה הכוללת של הצב ביחס לכיוון התחלתי כלשהו. כך קיבלנו את הליך הציקלואידה בשפת הצב:

```
TO CYCLOID  :TOTAL  :ANGLE  :SIDE
   IF  (:TOTAL > 180)  STOP
   RIGHT  :ANGLE
   FORWARD  :SIDE *  SIN :TOTAL
   CYCLOID  (:TOTAL + :ANGLE)  :ANGLE  :SIDE
END
```

הליך זה מבוסס על הצעד הפשוט:

RIGHT :ANGLE FORWARD :SIDE * SIN :TOTAL

שבו זווית הפנייה היא קבועה בכל שלב (ANGLE). גודל הצעד הוא מכפלת

גודל קבוע (קנה המידה - SIDE) בפונקציית הסינוס. הקלט של SIN הוא זווית הפנייה המצטברת (TOTAL), הגדלה ב- ANGLE בכל שלב.

(6). חישוב רדיוס המעגל היוצר את הציקלואידה.

נרצה להמשיך באנלוגיה שבין הליך הציקלואידה לבין הליך המעגל, לבחינת תכונותיהם המיידיות. במתמטיקה הקלסית הגודל היסודי לתאור מעגל הוא רדיוסו. הגדלים היסודיים לתאור מעגל בלוגו הינם: הפנייה הכוללת של 360 מעלות והיקף המעגל שהוא הסכום הכולל של צעדי הצבה. כדי לקשר את המתמטיקה הקלסית עם מתמטיקת הצב, נבטא בשניהם את היקף המעגל ונשווה את הביטויים. התאור המתמטי הקלסי של היקף המעגל הוא $2\pi R$. היקף המעגל:

REPEAT 360 [RIGHT 1 FORWARD :SIDE]

הוא $360 \cdot SIDE$ "צעדי צב". לכן, נקבל עבור המעגל $2\pi R = 360 \cdot SIDE$.
מכאן נקבל את הביטוי $SIDE = (\pi/180) \cdot R$ המקשר את רדיוס המעגל, ממתמטיקה קלסית (גאומטריה אוקלידית) ללוגו (גאומטריית הצב), למשל, באמצעות הגדרת הליך עם קלט R לשירטוט מעגל ברדיוס R .

באופן דומה לחישוב היקף מעגל, ננסה לתאר את אורך ענף הציקלואידה הן במתמטיקה הקלסית והן במתמטיקת הצב ולהשוותם.הגדלים האנלוגים לציקלואידה הם רדיוס המעגל היוצר ואורך ענף של הציקלואידה. נוסחת אורך-קשת של עקום, המוגדר ע"י משוואותיו הפרמטריות היא:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(\dot{X})^2 + (\dot{Y})^2}\ dT$$

ממנה נובע שאורך ענף אחד של הציקלואידה הוא 8R (לדיז'נסקי, עמ' 177), כאשר R - רדיוס המעגל היוצר, והנקודה מעל X ו - Y מסמנת את נגזרותיהם לפי הפרמטר T. מצד שני , אורך-קשת העקום הנוצר ע"י חזרה על ההוראה הבאה:

FORWARD :SIDE * SIN :TOTAL

כאשר TOTAL רץ מ-0 עד 180 , הוא מכפלת הקבוע SIDE בסכום טור טריגונומטרי של סינוסים. אפשר לחשב סכום של טור זה בעזרת משפט מואבר למספרים מרוכבים (שמיר, עמ' 239 , תרגיל 30) ולקבל:

$$\sum_{K=0}^{N} \text{SIN } K*A = \text{SIN } \frac{N*A}{2} * \text{SIN } \frac{N*A+A}{2} \;/\; \text{SIN } \frac{A}{2}$$

ניתן גם להוכיח את נכונות הטור באינדוקציה על N (שמיר, עמ' 88, תר' 55).

מתוך שוויון כללי זה נקבל עבור הציקלואידה (N = 180 , A = 1) :

$$\sum_{TOTAL=0}^{180} SIN\ TOTAL = SIN\ \frac{180*1}{2} * SIN\ \frac{180+1}{2} \bigg/ SIN\ \frac{1}{2} = \frac{SIN\ (90+1/2)}{SIN\ 1/2} = COT\ 1/2$$

עבור זוויות מספיק קטנות הנמדדות ברדיאנים קיים בערך TAN A = A.
היות ו-1/2 מעלה היא כזו, נקבל COT 1/2 = 1/(TAN 1/2) = 360/π .
מכך נובע השוויון עבור אורך ענף אחד של הציקלואידה SIDE•(360/π) = 8R.
לכן, נקבל את הביטוי SIDE = (π/45)•R המאפשר להגדיר את הליך הציקלואידה CYC עם המשתנה (הפנימי) R של רדיוס המעגל היוצר:

```
TO CYC   :R
  CYCLOID  1  1  (PI / 45) * :R
END
```

```
TO PI
  OUTPUT  3.14159
END
```

ס י כ ו ם .

ישנה כאן התיחסות לשלושה תאורים של הציקלואידה: הפיזיקלי, המתמטי והתיכנותי (בגרפיקת הצב של לוגו). הייצוג הפיזיקלי הוא ע"י גילגול מעגל על ישר. הייצוג המתמטי-קרטזי (ייצוג חיצוני) - ע"י המשוואות הפרמטריות של הציקלואידה. והייצוג הפרוצדורלי-פנימי הוא ע"י ההליך CYCLOID בשפת הצב. כדי להעמיק את ההבנה של עקום זה מובאים הסברים גאומטריים פשוטים לקשרים בין שלושת הייצוגים שלו. למעשה, מודגמים כאן גם מעבר בין המתמטיקה הקלסית לבין המתמטיקה של לוגו, וגם האבחנה בין תכונות פנימיות וחיצוניות של עקומים בכלל וצורות גאומטריות בפרט.

ייצוגים פנימיים באמצעות שפת הצב עשויים להיות קלים יותר להבנה אינטואיטיבית. במקרים מסויימים הם גם פשוטים לתאור פורמלי, כמו במקרה של הציקלואידה, שעבורה אין משוואה קרטזית פשוטה. לדוגמא, הקישור עם האינטואיציה מומחש עבור התכונה הגאומטרית של המשיק, הניתנת לניסוח בגאומטריית הצב עי"כ שהצב פונה תמיד לכיוון הקוטב הצפוני של המעגל המתגלגל. אולם מעבר ליתרונות של ייצוג זה או אחר, מנקודת מבט חינוכית מודגמת כאן החשיבות בהכרת מספר ייצוגים של הציקלואידה וחקירת הקשרים ביניהם, כדי שנדע לבחור לנו את המתאים ביותר בשעת צורך.

הכללה של הליך הציקלואידה CYCL אפשרית בשני כיוונים. האחד, הודגם במאמר, במעבר מהצעד הפשוט FORWARD SIN :TOTAL RIGHT 1 אל הצעד:

RIGHT :ANGLE FORWARD :SIDE * SIN :TOTAL

כלומר, ע"י הוספת 2 משתני חקירה נוספים. השני, ע"י החלפת גודל הצעד FORWARD SIN :TOTAL באחד הצעדים כמו: FORWARD SIN (:TOTAL * 2) (לקבלת אסטרואידה) או: FORWARD SIN (:TOTAL / 3) (לקבלת קרדיואידה), וחקירת ווריאציות נוספות מסוג זה והמסקנות המתמטיות הנובעות מכך.

רשימת מקורות .

לדז'ינסקי י. חשבון דיפרנציאלי וחשבון אינטגרלי , 1971 , הוצאת "עמיחי".

שמיר ד. אלגברה לשנת הלימודים הי"א במגמות הריאליות , 1975 , הוצאת "חידוש".

ABELSON H. & DISESSA A. TURTLE GEOMETRY, 1981, MIT PRESS.

LERON U. & ARMON U. HOW TO EXPLAIN A CYCLOID TO A TURTLE? HOYLES ET AL. (EDS.), PROCEEDINGS OF THE LME.2, LONDON UNIVERSITY, JULY 1986, PP. 72-77.

LASKI J. TURTLE VERSUS CARTESIAN, MICROMATH , WINTER 1985,PP. 18-20.

PAPERT S. MINDSTORMS , 1980, BASIC BOOKS.

ה ע ר ה:

ניתן למצוא חומר נוסף אודות הציקלואידה, למשל, בספרים הבאים:

LAWRENCE D.J. A CATALOG OF SPECIAL PLANE CURVES , 1972 , DOVER PUB.

LOCKWOOD E.H. A BOOK OF CURVES , 1961 , CAMBRIDGE PRESS.

YATES R.C. CURVES AND THEIR PROPERTIES , (1952) 1974, NCTM PRESS.

וכן במאמרים:

גבעולי נ. בעיית שלושת הגופים, מדע, י"ז, ספט' 1972, עמ' 189-191.

PORKESS R.J.E.THE CYCLOID AND RELATED CURVES , MATH. IN SCHOOL , V.9

NO.1 , JAN. 1980 , PP. 18-20.

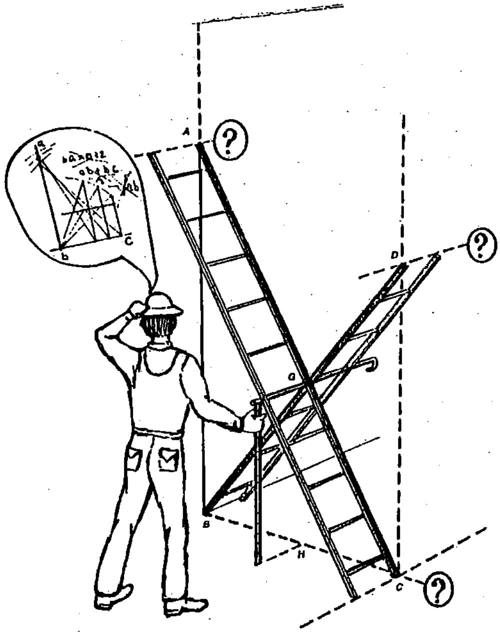
NO.2 , MAR. 1980 , PP. 16-18.

בעיית הסולם

מאת: ברוך שוורץ ורחל בוהדנה
מכון ויצמן למדע

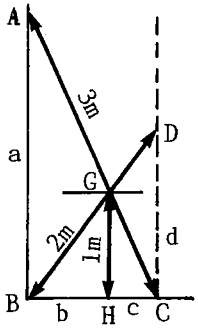
"בתוך פרוזדור צר התקין צבעי סולם כפול כך ששתי זרועותיו מצטלבות. מימדי הזרועות הם: 3 מ' ו 2 מ' ומקום הצטלבותם נמצא בגובה של מטר אחד מהרצפה.

מה רוחב הפרוזדור?"



השאלה נראית פשוטה למדי אך פתרונה טומן בתוכו הפתעות רבות, במיוחד כשמבקשים לא להשתמש בטריגונומטריה.

אם כן, נשתמש בגיאומטריה. האם נצליח לפתור את הבעיה?



לפי התרשים הנוכחי, נסמן ב x את רוחב הפרוזדור ונקבל:

$AB = a$

$BH = b$

$HC = c$

$CD = d$

$X = b + c$

ה ע ר ה: השאלה לקוחה מתוך העתון הצרפתי "SCIENCE & VIE"

לפי משפט פיתגורס מתקבל:

$$x^2 + d^2 = 4$$
$$x^2 + a^2 = 9$$

לפי משפט חלס מתקבל:

$$\frac{BH}{BC} = \frac{GH}{CD} \quad \text{ו} \quad \frac{GH}{AB} = \frac{HC}{BC}$$

ומכאן נקבל כי: $x = a \cdot c$ ו $x = b \cdot c$

בסה"כ יש לנו , אם כן , חמש משוואות עם חמישה משתנים:

(1) $x = b + c$

(2) $x^2 + d^2 = 4$

(3) $x^2 + a^2 = 9$

(4) $x = ac$

(5) $x = bd$

נפתור אותן.

ממשוואה (2) מקבלים: $d = \sqrt{4 - x^2}$; ממשוואה (3) מקבלים $a = \sqrt{9 - x^2}$

נובע אז ממשוואה (4) כי: $c = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$; וממשוואה (5) $d = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

נציב במשוואה (1) ונקבל:

$$x = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

ומכאן:

$$1 = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$$

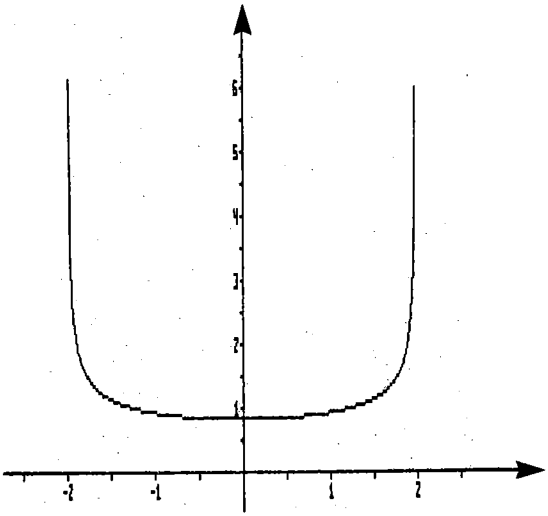
בעידן המחשב. אין יותר קל מלשרטט את גרף הפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$$

ולחשב עבור איזה מקור התמונה היא 1.

לשרטוט גרף הפונקציה השתמשנו בתוכנה T.R.M. שפותחה במכון ויצמן.

התקבל הגרף הבא:



ציור 1.

לפי הגרף, פתרון המשוואה יתקבל עבור $x \simeq 1.2$.

כדי לקבל פתרון מדויק יותר, אפשר להגדיל את הגרף, או לעשות חקירה נומרית בעזרת התוכנה. הרבה אלגברה אין פה.

אם כן, ננסה לפתור בדרך אלגברית את המשוואה:

$$1 = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$$

מכאן:

$$1 = \frac{\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{4 - x^2} \bullet \sqrt{9 - x^2}}$$

לכן:

$$\sqrt{4 - x^2} \bullet \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{9 - x^2}$$

נעלה בריבוע ונקבל: $(4 - x^2)(9 - x^2) = (\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{9 - x^2})^2$

$$36 - 13x^2 + x^4 = 13 - 2x^2 + 2\sqrt{9 - x^2} \bullet \sqrt{4 - x^2}$$

$$23 - 11x^2 + x^4 = 2\sqrt{9 - x^2} \bullet \sqrt{4 - x^2}$$

נעלה שוב בריבוע ונקבל:

$$(23 - 11x^2 + x^4)^2 = 4(9 - x^2)(4 - x^2)$$

לאחר פישוט:

$$x^8 - 22x^6 + 163x^4 - 454x^2 + 385 = 0$$

נו, לא נורא בכלל ... , נציב $t = x^2$ ונקבל משוואה ממעלה רביעית,
עם מקדמים 454, 385 ועוד ...

בימי הביניים ובתקופת הרנסנס, המתמטיקאים האיטלקיים כמו פיבונצ'י, קרדן, טרטגליה ופררי מצאו נוסחאות כלליות למציאת פתרונות למשוואות מהמעלה השניה, השלישית והרביעית, אבל הנוסחאות למשוואות מהמעלה השלישית והרביעית הן כל כך מסובכות שאף אחד לא משתמש בהן הצורה מעשית.

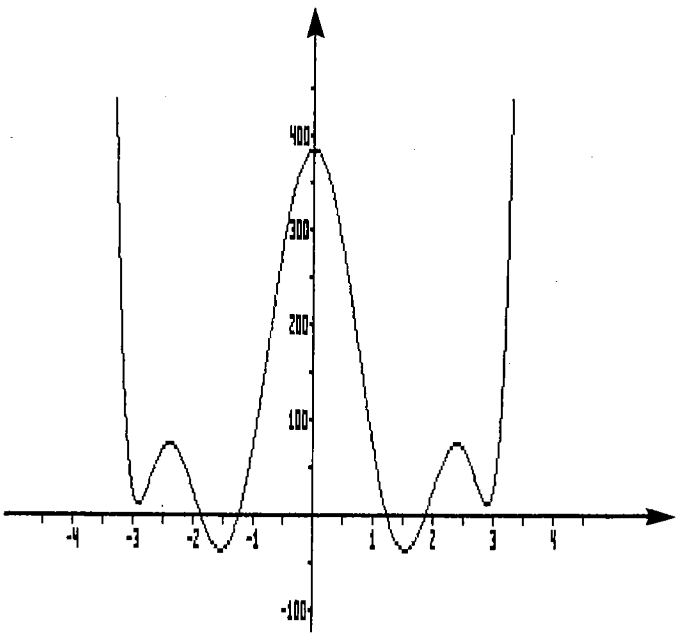
ה א ם   נ ו ו ת ר ???

מתוך סקרנות, נבדוק בעזרת המחשב (בתוכנה .T.R.M) שהפתרון זהה לזה שמצאנו קודם.

נשרטט את גרף הפונקציה: $g(x) = x^8 - 22x^6 + 163x^4 - 454x^2 + 385$

כאשר $-4 < x < - 4$ ו $-100 < y < 100$

ונקבל:



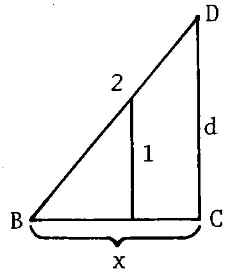
מתוך הגרף אנו רואים כי יש שני פתרונות בין 1 ו 2.

ה י י ת כ ן ???

אחד הפתרונות הוא ~ 1.23 והשני ~ 1.87 .

את הפתרון 1.23 מצאנו כבר קודם, אך מה עם הפתרון השני? האם גם הוא אפשרי?

נעיין שוב בציור מספר 1.



ברור כי $1 < d < 2$.

במשולש BCD סכום שתי צלעות במשולש גדול מן הצלע השלישית.

לפיכך $x + d > 2$ ומכאן: $1 < x < 2$.

אך זה מה שהתקבל קודם. אם כן עדיין לא נפתרה הבעיה.

נבדוק משוואה אחרת: $x^2 + d^2 = 4$

$$x = \sqrt{4 - d^2}$$

אם $d > 1$ אז $x < \sqrt{3} \simeq 1.732$

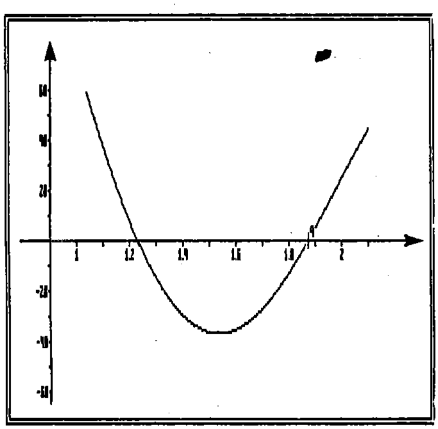
מכאן, יש רק פתרון אחד והוא $x \simeq 1.23$.

עד היכן נוכל לדייק בפתרון?

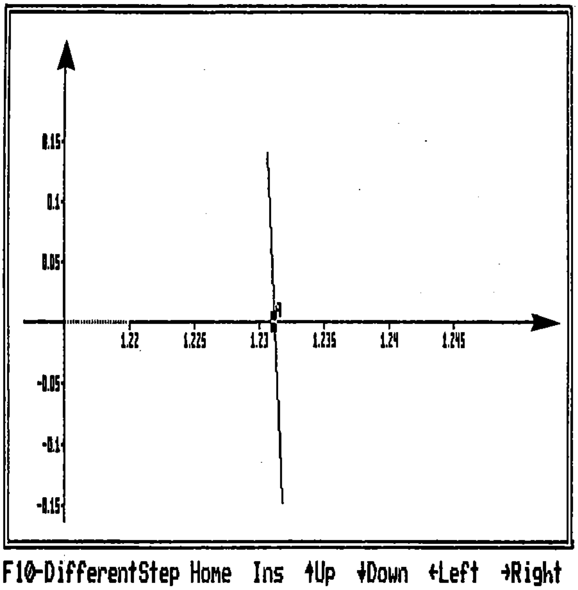
הדיוק הגרפי אינו גדול (בערך 2.10^{-4}) והדיוק האלגברי 10^{-5}.

בעזרת T.R.M. נוכל להגיע לדיוק של 2.10^{-7} בצורה הבאה:

נגדיל את השרטוט באופן מירבי ונקבל:



F10-DifferentStep Home Ins ↑Up ↓Down ←Left →Right



נקבל כי x נמצא בין 1.2310 ו 1.2312

נעבור לחקירה אלגברית.

נחשב מהו x המקיים: $g(x) = 0$ ו $1.2310 < x < 1.2312$

קיימת פה בעיה טכנית "קטנה": הפונקציה $g(x)$ בעלת "נוסחה ארוכה מדי" ואי אפשר לכתוב בצורה ישירה במחשב:

$$x^8 - 22x^6 + 163x^4 - 454x^2 + 385 = 0$$

לפיכך נסמן: $f(x) = x^8 - 22x^6 + 163x^4 + 385$

$$h(x) = 454x^2$$

ונבדוק מהו x המקיים $f(x) = h(x)$?

כדי שנוכל לקבל דיוק של 10^{-5} נשאל:

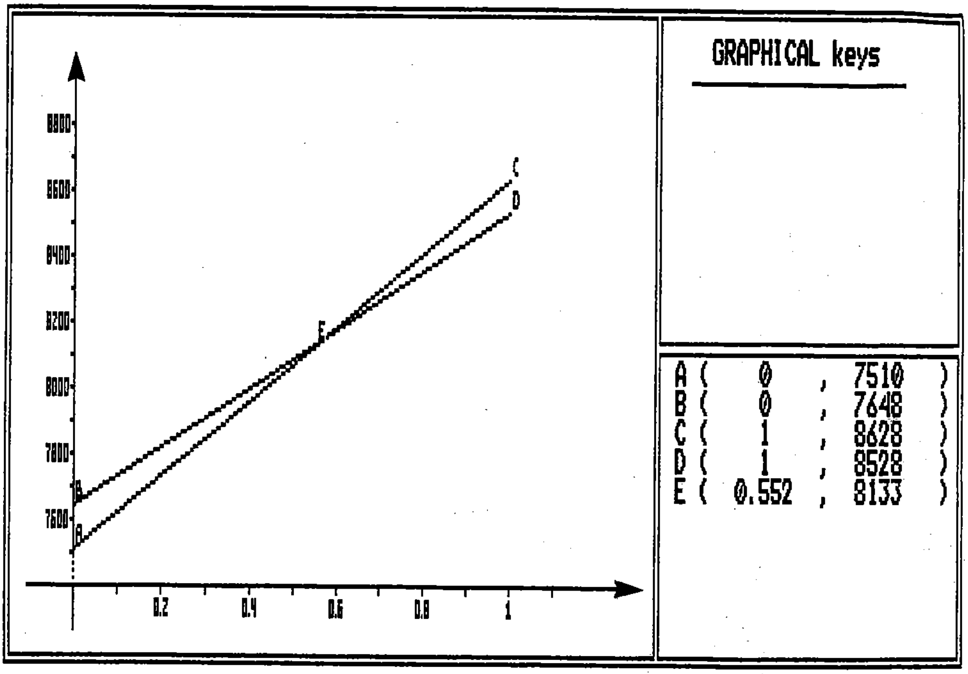
```
FROM    1.2310    TO   1.2312    STEP   0.00001

IF f(X)   < 454X^2

X = 1.23119

X=1.23119              f(X)=688.18526
         GOAL=688.18628
```

התנאי מתקיים עבור $x = 1.13119$ ו $x = 1.23120$. לכן פתרון המשוואה צריך להמצא בין 1.23118 ו 1.23119.

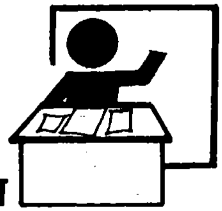
נמשיך: עבור $x = 1.23118$ נקבל: $f(x) = 688.17648$ ו- $h(x) = 688.17510$

עבור $x = 1.23119$ נקבל: $f(x) = 688.18526$ ו- $h(x) = 688.1628$

בין שני הערכים הנ"ל של x, שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)$ נראות לבטח כמו קו ישר ולכן נעשה לינאריזציה בין הספרות האחרונות שהתקבלו עבור $f(x)$ ו- $h(x)$ וזאת בצורה גרפית:



F1-Pl F2-Po F3-Scale F4-Line F5-Seg F6-Paging F7-ReadT F8-ReadA F9-Draw F10-End



דף לתלמיד

פעילויות באחוזים ובשטחים

הדפים שלהלן ניתנים לשילוב בכיתות ז'-ח' במהלך הוראת הנושאים או בחזרה.

פעילויות אלו עשויות לתרום לגיוון התירגול והטיפול בנושאים הנ"ל.

העבודה בדפים אלו מחייבת יותר הבנה וחשיבה ופחות חישובים טכניים.

כאן ניתנת לתלמיד ההזדמנות לציין שטח של צורה מסויימת , לאו דווקא ביחידות השטח המקובלות (מ"ר , סמ"ר וכו') וכמו כן לחוש בצורה יותר מוחשית את משמעות מושג האחוז.

מאחר וחלק ניכר מהעבודה מלווה בצביעה, הבדיקה ע"י המורה היא קלה ומהירה.

<u>תשובות נבחרות</u>

משושים: 2ב' - הצלע גדלה פי 2
2ד' - 25%
2ו' - ב - 300%
3ב' - פי 3
3ג' - ב - 800%

<u>אחוזים ושטח</u>

משושים

היעזר בדף המרוצף בפתרון הדף.

1. א. צבע משושה משוכלל קטן ביותר. ציין את השטח ביחידות של

2. א. צבע משושה משוכלל אחר שבו אורך כל צלע גדול ב 100% מהקודמת.

ב. פי כמה גדלה כל צלע?

ג. מה שטח המשושה החדש?

ד. איזה אחוז מהווה המשושה הקטן מהמשושה הגדול?

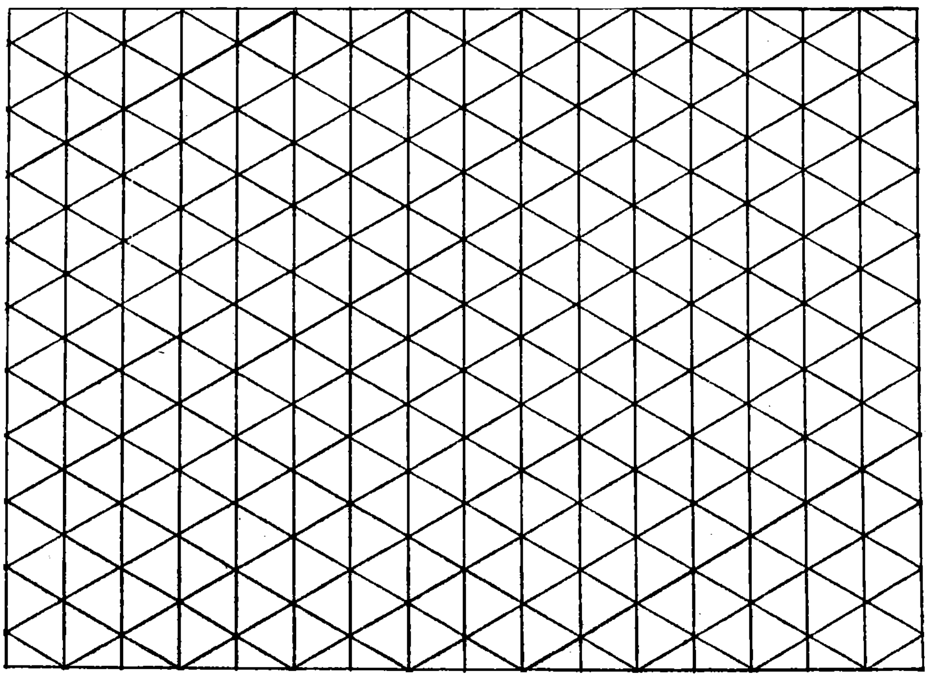
ה. פי כמה גדול המשושה החדש מן המשושה הקטן?

ו. בכמה אחוזים גדול המשושה החדש מן המשושה הקטן?

3. א. צבע משושה משוכלל אשר שטחו פי 9 משטח המשושה הקטן ביותר שצבעת ב 1א'.

ב. פי כמה הגדלת כל צלע?

ג. בכמה אחוזים גדל שטח המשושה החדש?



משושים ומלבנים

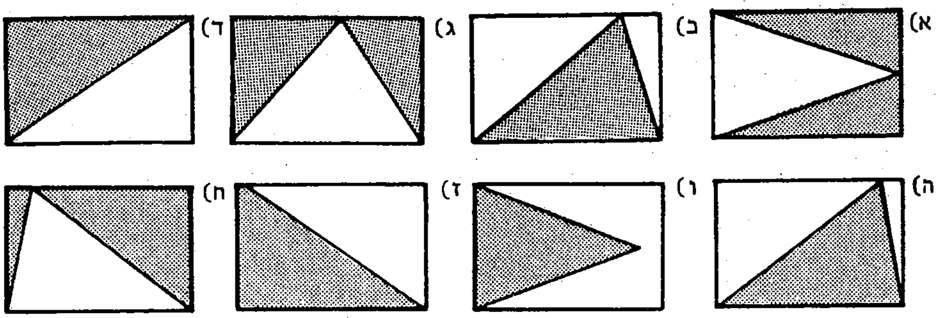
שטח כל אחד מהמלבנים 6 סמ"ר

1.א) מצא באיזה מלבן השטח הלבן גדול ביותר?

קטן ביותר?

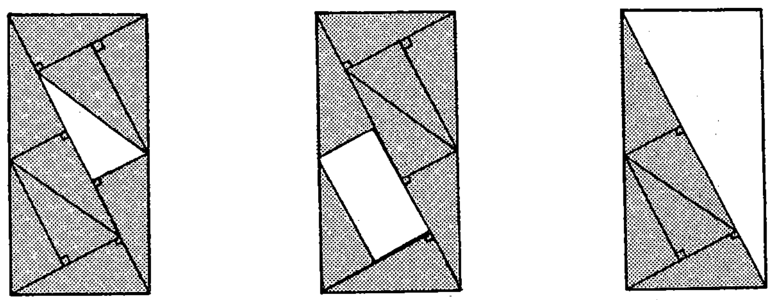
ב) מצא שטח החלק הלבן במקרים בהם ניתן לחשב במדריק.

איזה אחוז מהווה החלק הלבן במקרים אלו?

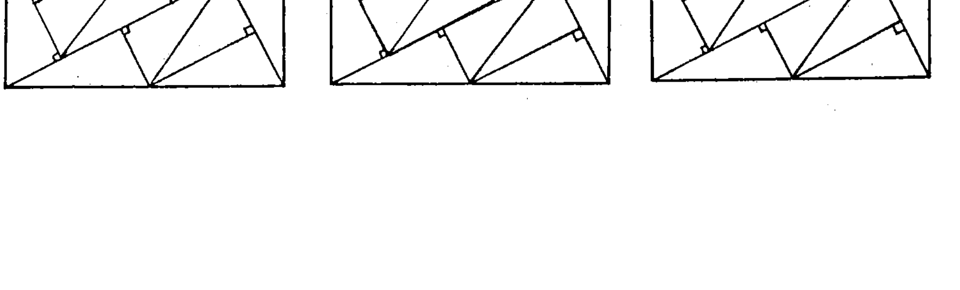


2. מצא בכל אחד מהמלבנים שלמטה איזה אחוז מהווה החלק הלבן משטח המלבן?

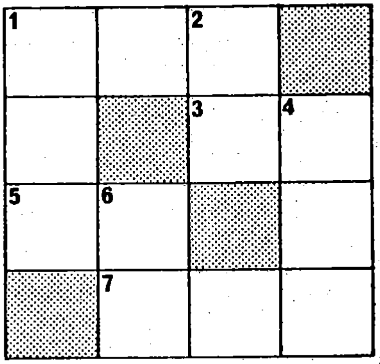
א) % ______   ב) % ______   ג) % ______



3. צבע בכל אחד מהמלבנים חלק מהמשולשים, כך שחלק המלבן הצבוע יהווה את האחוז הרשום לידו.



ת ש ב ץ



מאוזן

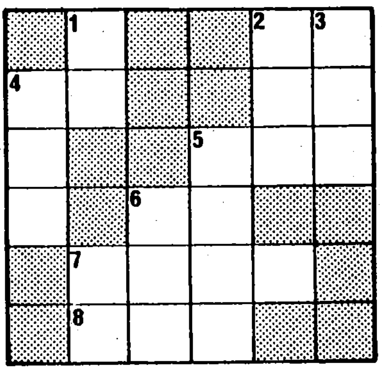
1. 64% של 350
3. 28% של 200
5. 92% של 100
7. 50% של 206

מאונך

1. 25% של 876
2. 20% של 225
4. 33% של 2100
6. 20% של 105

לפניך הצעה לתשבץ העשוי להתאים לתלמידים מתקדמים.

ת ש ב ץ



מאוזן

1. 5% של 20
2. מספר ש 50% שלו הם 21
4. איזה אחוז הם 3 מתוך 12?
5. 120% של 100
6. 20% של 135
7. 10% של 15,550
8. 200% של 250

מאונך

1. איזה אחוז הם 45 מתוך 300
2. 20% של 2110
3. מספר ש 25% שלו הם 55
4. איזה אחוז של 50 הם 125
5. 175% של 1000
6. איזה אחוז הם 40 מתוך 16
7. 25% של 60

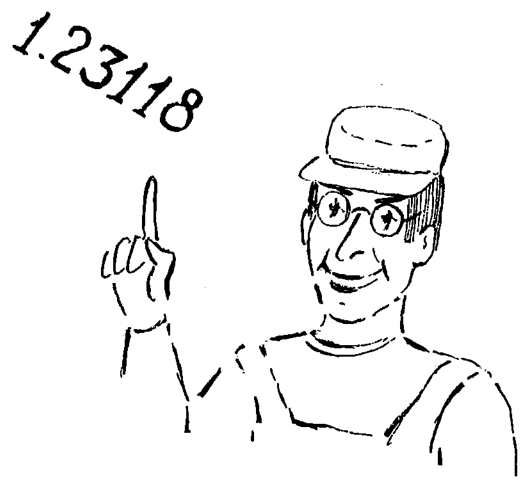
לפי הלינאריזציה הפתרון הוא בערך 1.2311856 ובוודאי שהוא בין 1.2311855 ו 1.2311857 . אם כן, דיוק של $2\cdot10^{-7}$.

אם נוסחאות קרדן ופררי לא מאפשרות טיפול נומרי במשוואות באופן מעשי, הטיפול בתוכנה פשוטה מאפשר להגיע לדיוק גדול.

ברור אמנם כי לצבע מומחה ודקדקן ככל שיהיה , לא תהיה משמעות מיוחדת לרוחב של 1.23118 לעומת 1.23119.

* נשמח לקבל מן הקוראים תשובה לשאלה הבאה ונשתדל לפרסמה באחת החוברות הבאות:

האם המספר המציין את רוחב המסדרון הינו רציונלי? הוכח.



קרוב... קרוב?

מאת: שגיא פלד
קבוץ עין-כרמל

במהלך חקירת בעיה מתמטית, שמתי לב לקשר בין x^x ו $(x + 1)^{x+1}$ והגעתי לביטוי:

$$\frac{(x + 1)^{x+1}}{x^x} - \frac{x^x}{(x - 1)^{x-1}}$$

"הרגשתי" כי הביטוי שואף לקבוע e כאשר x שואף לאינסוף.

בדקתי זאת בעזרת מחשב אישי והתברר לי כי קצב השאיפה ל-e גדול למדי: עבור x = 10 התקבל הערך 2.7194191, בעוד שעל ידי הנוסחה הידועה לחישוב קירובים של e, $(1 + \frac{1}{x})^e$, מקבלים עבור x = 10 את הערך 2.5937425 (ערכו של הקבוע e בדיוק של שבע ספרות אחרי הנקודה הוא 2.7182818).

כאשר מציבים בנוסחה שלי x = 100 התוצאה היא 2.7182932 והיא קרובה יותר לקבוע e מאשר תוצאת ההצבה של 100000 בנוסחה הרגילה (ראה טבלות ערכים בהמשך).

מאחר והשתמשתי במחשב המוגבל ל 640K, המספר המקסימלי שיכולתי לבדוק בנוסחה שלי היה 142, והנחתי שהנוסחה ממשיכה לשאוף לקבוע e גם במספרים גדולים יותר. בשלב זה "הופיעו" שתי בעיות:

(א) מציאת הוכחה לנוסחה.

(ב) בדיקת טיב השאיפה לקבוע e עבור מספרים גדולים.

2.718281828459045235

(א) <u>הוכחת הנוסחה</u> *

בהוכחה נסתמך על הפיתוחים לטורי חזקות של e^x ו $\ell n(1 + x)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\ell n(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{עבור } |x|<|$$

נסמן
$$U = \frac{(x + 1)^{x+1}}{x^x} \qquad V = \frac{x^x}{(x - 1)^{x-1}}$$

$$\ell nU = (x+1)\ell n(x+1) - x\ell nx$$

$$= (x+1)[\ell nx + \ell n(1 + \frac{1}{x})] - x\ell nx$$

$$= \ell nx + (x+1)[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + 0(x^{-4})]$$

$$= \ell nx + 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{6x^2} + 0(x^{-3})$$

ולכן
$$U = ex \cdot e^{\frac{1}{2x} - \frac{1}{6x^2} + 0(x^{-3})}$$

$$= ex[1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2x} - \frac{1}{6x^2})^2 + 0(x^{-3})]$$

$$= ex[1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{8x^2} + 0(x^{-3})]$$

$$= ex + \frac{e}{2} + 0(\frac{1}{x})$$

V מתקבל מ - U אם כותבים $(x - 1)$ במקום x,

ולכן
$$V = e(x - 1) + \frac{e}{2} + 0(\frac{1}{x - 1})$$

$$= ex - \frac{e}{2} + 0(\frac{1}{x})$$

ואם כך ,
$$U - V = e + 0(\frac{1}{x}) \longrightarrow e$$

כאשר
$$x \longrightarrow \infty$$

---

* תודתי נתונה לפרופ' י. גיליס ממכון ויצמן על עזרתו במציאת ההוכחה.

(ב) השוואת השאיפה ל-e של שתי הנוסחאות באמצעות המחשב המרכזי במכון מראה כי עבור ערכי x בסביבות 10000 הנוסחה שלי נותנת תוצאות קרובות מאוד ל-e. ועבור ערכים גדולים הרבה יותר, קיימת התרחקות ממש, בניגוד לנוסחה הידועה לחישוב המספר e.

ההסבר לתופעה מתברר אם מתבוננים באופיה של הנוסחה שמצאתי. הביטויים U ו V שניהם שואפים לאינסוף עם x, בעוד שההפרש U − V נשאר סופי. השגיאות בחישוב של U או V הולכות וגדלות ונותנות שגיאה אפשרית כפולה בחישוב ההפרש ביניהם.

X	(1+1/X)**X	U-V
2	2.250000000000000	2.750000000000000
3	2.370370370370370	2.731481481481480
4	2.441406250000000	2.725549768518521
5	2.488319999999999	2.722888749999997
6	2.521626371742110	2.721464602194775
7	2.546499697040711	2.720612974130923
8	2.565784513950348	2.720063049227441
9	2.581174791713192	2.719687291573797
10	2.593742460099995	2.719419143968032
91	2.703495102855831	2.718295506442985
92	2.703654243800325	2.718295210694048
93	2.703809995722071	2.718294924444479
94	2.703962465738350	2.718294647268511
95	2.704111756499506	2.718294378809333
96	2.704257966419054	2.718294118695781
97	2.704401189890143	2.718293866585839
98	2.704541517488708	2.718293622148337
99	2.704679036164674	2.718293385085360
100	2.704813829421451	2.718293155098934
141	2.708704776679119	2.718287525557400
142	2.708771788349937	2.718287445606336
143	2.708837868759362	2.718287367306743
144	2.708903037186233	2.718287290655724
145	2.708967312380557	2.718287215557665
146	2.709030712582212	2.718287142023428
147	2.709093255537554	2.718287069973314
148	2.709154958516382	2.718286999382940
149	2.709215838327658	2.718286930207512
150	2.709275911334823	2.718286862409911
1000	2.716923932235401	2.718281941783630
10000	2.718145926823017	2.718281849178311
100000	2.718268237112842	2.718278606349486
1000000	2.718280468905000	2.718646754045039
10000000	2.718281686188357	2.720455698668957

מהנעשה בארץ

מתמטיקה בהתכתבות - מודל מכון ויצמן

מאת: נטע מעוז ויונתן דים
היחידה לפעולות נוער, מכון ויצמן למדע

היחידה לפעולות נוער במכון ויצמן מפעילה מזה מספר שנים מודל ללימוד מתמטיקה לכל המעונין: חוג ארצי במתמטיקה בהתכתבות.

מטרות החוג הן:

1. לאפשר לכל ילד המתעניין במתמטיקה לעסוק בכך גם אם הוא גר ביישובים קטנים ורחוקים מהמרכזים להשכלה גבוהה.
2. לפתח מיומנויות של פתרון בעיות.
3. לפתח חשיבה מתמטית באמצעות פתרון בעיות.
4. להעמיק ולהרחיב את הידע המתמטי של ילדים המעוניינים בכך.
5. לאתר ילדים מחוננים או מצטיינים מאוד במתמטיקה ולעודד אותם לעסוק במתמטיקה.

<u>אופן ביצוע הפעילות</u>

דבר החוג מתפרסם בראשית שנת הלימודים בעתונות הילדים. בתגובה פונים ילדים מכיתות ד'-ט' ליחידה לפעולות נוער במכון ויצמן. הילדים מקבלים לביתם דפי עבודה לפי כתתם. עליהם לפתור את הבעיות, עם הסברים, ולהחזירם למרכז. קבוצה של מתמטיקאים בודקת את דפי העבודה , אשר מתוקנים ומוחזרים לילדים בצירוף דף תשובות נכונות ושאלון חדש.

דפי העבודה מוכנים על ידי מרכז החוג שהוא סטודנט לתואר גבוה במתמטיקה או איש חינוך מתמטי מהמחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן.

עם סיום סבב של 4 מחזורים של 2 דפי עבודה מוזמנים הילדים המצטיינים למכון וייצמן לפרוייקט סיום שהוא אולימפיאדה במתמטיקה או פעילות המשלבת מתמטיקה ופיסיקה תוך כדי התנסות אישית. בשנת הלימודים תשמ"ט מתקיימות גם סדנאות ביניים למשתתפי החוג בחופשות בתי הספר.

מבנה דפי העבודה

דפי העבודה משקפים את מטרות הקורס והם באים ללמד את הילדים גם נושאים חדשים שאינם נלמדים בבית הספר וגם להעמיק בנושאים הנלמדים בבית הספר. מבנה הדפים משתנה משנה לשנה. בשנתיים האחרונות עוסק רובו של דף העבודה בפיתוח נושא אחד. דוגמאות לנושאים שפותחו בשאלונים: תורת הגרפים, הסתברות, טופולוגיה, תורת החבורות.

החומר מוכן בשלוש רמות שונות המיועדות לתלמידי כיתות ד'-ה' , ו'-ז', ח'-ט'. ילדים יכולים לשנות את רמת דפי העבודה שלהם לפי בקשתם.
נושא הדף משותף לכל הרמות, אך אופן פיתוחו והיקף החומר משתנה בהתאם לרמה. דף העבודה מאפשר פיתוח עצמי של הנושא על ידי התלמיד , באמצעות שאלות מנחות ודוגמאות. בחרנו להביא כאן לדוגמא את דף העבודה ופתרונו לכיתות ו'-ז', מחזור ב' בתשמ"ט. הדף כולל חלק עיקרי העוסק בהסתברות, חידה מתמטית שאינה קשורה לנושא - מורשת לאופי דפי העבודה בחוג בשנים קודמות, ובסופו "בלש מתמטי" שהוא סיפור פשע עלילתי אשר בו הרמזים לגילוי הפושע הם מתמטיים וקשורים (בחלקם, לפחות) לנושא העיקרי. ה"בלש" חובר על ידי אמנון ז'קוב.

השפעת החוג

מנסיוננו למדנו שהעיסוק במתמטיקה עקב חוג זה מקיף מספר רב יותר של בני נוער מאשר אלו הרשומים בחוגים במכון ויצמן. ילדים נוטים לערב בפתרון הבעיות הורים, חברים ומורים ומשקיעים בעצמם זמן רב בדפי העבודה. מורים ומורות, בעיקר מאזורים רחוקים מנויים על דפי העבודה ומשתמשים בהם לפעילויות נוספות עם תלמידים מצטיינים בכיתותיהם.

מורים המעוניינים לקבל את דפי העבודה ופתרונותיהם מוזמנים לפנות אל

ד"ר נטע מעוז
היחידה לפעולות נוער
מכון ויצמן למדע
רחובות 76100

החוג הארצי למתמטיקה בהתכתבות, של מכון ויצמן - תשמ"ט
בעריכת יונתן דים - כתות ו-ז, מחזור ב

שם: ____________ ת.ז. ____________

כתובת: ____________

ישוב: ________ מיקוד: ________

אל תצרף דפים, ענה בגוף השאלון והחזר תוך שבועיים, כתוב את שמך וכתובתך בכתב ברור בעט.

...האקדחים רעמו בבר הקטן בעיירת המערב הפרוע, והאקדוחן הזר נפל, תופס בידו המדממת. השריף ביל עמד מעליו ואמר: "לפי מנהגי המערב דינך תליה על שהפרת את הסדר הציבורי. ואולם, עקב עומס העבודה הגדול על התליין שלנו, אני מוכן להעניק לך חנינה אם תצליח לנחש - האם מבין כל האנשים הנמצאים כאן בבר יש לשניים (לפחות) יום הולדת משותף (הכוונה לחודש ויום, לא כולל שנה). האקדוחן המדמם הביט סביבו וספר 34 אנשים. החלטה גורלית! אך מה כדאי לנחש? למזלו, הוא היה מתמטיקאי בשעות הפנאי, וידע לענות. גם אתם תוכלו לענות, לאחר מילוי השאלון, העוסק בתורת ההסתברות.

מהו הסתברות

נניח שאנו עומדים לבצע פעולה מסוימת (הטלת קוביה, לדוגמא). נגדיר את ההסתברות למאורע מסוים כיחס בין מספר תוצאות הפעולה בהם המאורע מתקיים לבין מספר התוצאות הכללי. ההגדרה, וכן ההבדל בין "מאורע" ל-"תוצאה" יהיו ברורים יותר לאחר מספר דוגמאות.

הפעולה: הטלת קוביה

התוצאות האפשריות: 6,5,4,3,2,1 (שש תוצאות).
מאורעות: א. המספר על הקוביה הוא 1.

$$\text{הסתברות המאורע} = \frac{\text{מספר התוצאות בהם המספר הוא 1}}{\text{מספר התוצאות הכללי}} = \frac{1}{6}$$

ב. מאורע: המספר על הקוביה גדול מ-3
תוצאות בהם המאורע מתקיים: 6,5,4.

$$\text{הסתברות המאורע:} \ \frac{\text{מספר התוצאות בהם המספר גדול מ-3}}{\text{מספר התוצאות הכללי}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

הפעולה: הטלת מטבע פעמיים. התוצאות האפשריות:

א. "עץ" בהטלה ראשונה, "עץ" בשניה,
ב. "עץ" בראשונה, "פלי" בשניה,
ג. "פלי", "עץ"
ד. "פלי", "פלי".

שאלה 1: א. חשב את ההסתברות של המאורע "התקבל עץ לפחות פעם אחת".

באילו תוצאות מתקיים מאורע זה? ____________

ב. חשב את ההסתברות של המאורע "התקבל עץ בדיוק פעם אחת" ____________

באלו תוצאות מתקיים ארוע זה? ____________

שאלה 2: מטילים שתי קוביות.
א. כמה תוצאות יש? ____________

ב. כמה סכומים שונים ניתן לקבל? (שים לב להבדל בין תוצאות לסכומים)

ג. מה ההסתברות למאורעות:

סכום הקוביות הוא 2: ________

סכום הקוביות הוא 3: ________

סכום הקוביות הוא 4: ________

ד. מכל הסכומים האפשריים, איזה סכום הוא בעל ההסתברות הגבוהה ביותר,

ומהי? __________

שאלה 3: מה ההסתברות הגבוהה ביותר שיכולה להיות למאורע? __________

מה הנמוכה ביותר? __________

הסבר ____

____

מאורע משלים

לפעמים נוח לחשב את ההסתברות שמאורע מסוים לא יקרה. ניתן גם להגדיר זאת כמאורע בפני עצמו - המאורע "מאורע A לא יקרה" נקרא המאורע המשלים למאורע A.

שאלה 4: מטילים קוביה אחת.

א. מה ההסתברות למאורע "המספר יהיה 5"? ________

מה ההסתברות למאורע "המספר לא יהיה 5"? ________

מה סכום שתי ההסתברויות? ________

ב. מה ההסתברות למאורע "המספר גדול מ-2"? ________

מה ההסתברות למאורע "המספר אינו גדול מ-2"? ________

מה סכום שתי ההסתברויות? ______________________

שאלה 5: נסח כלל לגבי חבור ההסתברות של מאורע ושל המשלים שלו. הסבר!

____

____

שמוש במשלים

נניח שאנו רוצים לחשב מה ההסתברות שבהטלת שלוש קוביות יצאו לפחות שני מספרים זהים (מתוך השלושה). ניתן אמנם לספור את כל התוצאות בהם המאורע מתקיים, אך יותר פשוט לחשב את ההסתברות שהמאורע לא יתקיים, כלומר שכל המספרים יהיו שונים.

א. ההסתברות של קוביה מס' 2 להיות שונה מקוביה מס' 1 היא 5/6. (לא חשוב איזה מספר עלה בקוביה מס' 1, ב-1/6 מהמקרים יעלה אותו מספר גם בקוביה מס' 2).

ב. אם ידוע שקוביות 1 ו-2 נפלו על מספרים שונים, ההסתברות של קוביה 3 להיות שונה היא 4/6 (קוביות 1 ו-2 "תפסו" שני מספרים, נשארו ארבעה פנויים מתוך ששה).

ג. אנו רוצים לחשב את ההסתברות של המאורע "קוביה 1 שונה מקוביה 2 וגם קוביה 3 שונים מקוביות 1 ו-2". הסתברות זו מתקבלת אם מכפילים את התוצאה של סעיף א' (5/6) בתוצאה

של סעיף ב' (4/6) - בסעיף א' קיבלנו את חלק התוצאות שבהם שתי הקוביות הראשונות שונות זו מזו. בסעיף ב' קיבלנו את חלק התוצאות מתוך התוצאות שקיבלנו בסעיף א' בהם הקוביה השלישית שונה משתי קודמותיה. כדי לקבל את חלק התוצאות בהם כל הקוביות שונות מתוך כל התוצאות, יש להכפיל את השבר הראשון בשני, ומתקבל:

$$\frac{5}{6} * \frac{4}{6} = \frac{5}{9}$$

זוהי ההסתברות ששלושת הקוביות שונות זו מזו.

שאלה 6: מה ההסתברות שבהטלת שלוש קוביות יתקבלו לפחות שתי קוביות עם אותו מספר? הסבר את תשובתך! (רמז: ניתן להשתמש בכלל שמצאת בשאלה 5).

____

____

שאלה 7: ניתן להמשיך ולחשב את ההסתדרות שבארבע הטלות קוביה יתקבלו לפחות שני מספרים זהים. חשב הסתברות זו:

הדרכה: יש לחשב תחילה את ההסתברות למאורע המשלים, כלומר ההסתברות שארבעת התוצאות תהיינה שונות.

א. מה ההסתברות שקוביות מספר 1 ו-2 יקבלו תוצאות שונות?

ב. אם שתי קוביות קיבלו תוצאות שונות, מה ההסתברות שהקוביה השלישית תהיה שונה מהם?

ג. אם שלוש קוביות קיבלו תוצאות שונות, מה ההסתברות שהקוביה הרביעית תהיה שונה מהם?

ד. ההסתברות שארבעת המספרים שונים הוא מכפלת המספרים שקיבלת בסעיפים א,ב,ג

חשב: ______________________

ה. מה ההסתברות שבארבע הטלות יש לפחות מספר אחד זהה?

...ובחזרה למערב

שאלה 8: כעת תוכל לעזור לאקדוחן המדמם על רצפת הבר במערב הפרוע. כאמור, האקדוחן יוכל לצאת לחופש אם ידע לנחש האם מבין 34 האנשים בבר יש שנים עם יום הולדת משותף. (חודש ויום).

א. כמה תאריכים יתכנו? (הנח כי אף אחד לא נולד ב-29/2).

ב. איך תחשב את ההסתברות שיש יום הולדת משותף ללפחות שני אנשים? (תאור במילים).

____

ג. חשב הסתברות זו! (אם אין בידך מחשב כיס, אין הכרח שתעשה את כל החישוב רק

ציין נוסחא).____

ד. מה צריך האקדוחן לנחש? (אם לא חישבת עד הסוף בשאלה הקודמת, אין צורך לענות

על שאלה זו).

ניסוי (רשות)

כמה ילדים בכתה שלך ________
האם יש בכתה שני ילדים עם אותו יום הולדת? ________

* * *

חידת השלמה

שאלה: השלם את המשפט הבא, באופן שיהיה נכון אחרי שתגמור להשלים אותו. (יש שתי פתרונות אפשריים), בכל "______" יש לרשום מספר.

במשפט זה, מספר הפעמים בו מופיעה הסיפרה 0 הוא ________ ,

מספר הפעמים בו מופיעה הסיפרה 1 הוא ________,

מספר הפעמים בו מופיעה הסיפרה 2 הוא ________,

מספר הפעמים בו מופיעה הסיפרה 3 הוא ________,

מספר הפעמים בו מופיעה הסיפרה 4 הוא ________,

מספר הפעמים בו מופיעה הסיפרה 5 הוא ________,

מספר הפעמים בו מופיעה הסיפרה 6 הוא ________,

מספר הפעמים בו מופיעה הסיפרה 7 הוא ________,

מספר הפעמים בו מופיעה הסיפרה 8 הוא ________,

ומספר הפעמים בו מופיעה הסיפרה 9 הוא ________.

הסכוי בעתוי

מאת אמנון ז'קוב

מתי מתוק ופקד אלברט כהן נפגשו ברחוב דיזנגוף וסרו לבית קפה סמוך לשתות קפה של אחר-צהריים, כמנהגם מידי יום. מתי העיף מבט בחברו שבחש בכוס מהורהר: "יש בעיות?", "תמיד" השיב הפקד "אבל הפעם-שתיים: האחת פלילית מסובכת וכבדה השניה סתם תמיהה קלילה משועשעת".

- "נתחיל מן הקל אל הכבד!" הציע מתי, לוגם בהנאה מהקפה המהביל.
- "ובכן, מתי, אנו נוהגים להפגש זה שנים "ללגימת אחר-צהריים" זו. עתים אצלך, עתים אצלי ולרוב ברחוב. בשיחותנו אלה אני לומד המון ולכן אני רושם ביומני תקצירים ומסכמם והנה לאחרונה עברתי על הרשימות וסתם, כסקרנות, סכמתי היכן נערכו פגישותינו
- וקבלתי תוצאות שנתיות אלה: (1)*

	אצלי	אצלך	ברחוב
לפני שלוש שנים	41	43	165
לפני שנתיים	44	42	168
בשנה בעברה	40	41	160

- "ומה התמיה אותך בתוצאות אלה?"
- "אינך רואה, מתי? התבנית כמעט קבועה! כששית מהפגישות אצלי, כששית אצלך, וברחוב שני שליש - אף שאנו נפגשים בלא החלטה מראש היכן נשתה כלומר מאחורי המקוריות הזו - ישנה תבנית קבועה!"
"אין ספק" הסכים מתי
"ממש מסתורין" התלהב אלברט
"ספק", חייך מתי "אך ענין מחכים ומענג בודאי יש כאן, מתאים לקפה של אחה"צ. אולי נחפש את התבנית הקבועה - בהרגלינו?"
אלברט הרהר קצרות ואחר שאג: "אתה צודק! הלא אני נוהג כמו שעון! יום יום, בדיוק ב-4:15, אם אינך מקדים ובא למשרדי, אני הולך לקראתך ומתאם קצב הליכתי עם הרמזורים כך שהדרך לביתך נמשכת בדיוק 10 דקות, מגיע, עולה ושותה קפה אצלך - כמובן אם לא הקדמת ויצאת ואנו נפגשים ברחוב ושותים שם. זהו!!... רגע... זה... לא בדיוק מסביר מדוע ששית אצלי, ששית אצלך, ושני שליש ברחוב... כנראה שהרעיון שלי שטותי!"
- "להיפך". אמר מתי "הוא נכון - אך מתבסס על מידע חלקי שיש להשלימו בתבנית התנהגותי שלי. גם לי יש תבנית התנהגות - אך שונה מעט... שכן אני טפוס שונה".
"ועוד איך" הסכים אלברט
"אני, למשל, לא יוצא ברגע קבוע, אלא אי-שם בין 4:00 ל-4:30 כל יום באופן מקרי לחלוטין".
"מה פירוש - באופן מקרי לחלוטין?"
- "פרושו שאין לי שום העדפות, והסכוי שאצא אי שם, בתוך עשר הדקות שבין 4:00 ל-4:10, שווה בדיוק לסכוי שאצא בתוך עשר הדקות שבין 4:17 ל-4:27".
- "אה!" אמר אלברט, "כלומר שהסכוי שתצא, נניח בין 4:10 ל-4:20, כפול מהסכוי שתצא בין 4:25 ל-4:30".
- "בהחלט, כי סכוי לצאת ב-10 דקות כלשהן גדולים כפליים מסכוי לצאת בחמש דקות כלשהן. וכיון שגם אני הולך בקצב הרמזורים, כלומר ב-10 דקות, יש לפנינו כל הנתונים לפענח את התעלומה:

1. בדוק בין איזו שעה לאיזו שעה עלי לצאת כדי להגיע למשרדך לפני יציאתך - ולשתות אצלך קפה.
2. בדוק מאיזו שעה לאיזו שעה - אתה כבר תהיה בדירתי ולכן אם לא אצא לפני כן - נשתה אצלי קפה.
3. בדוק בין איזו שעה לאיזו שעה עלי לצאת כדי שאפגש איתך ברחוב. (2)*

הפקד חישב במהירות והכריז בשמחה: "בול! באמת הסיכויים הם ששית ששית ושני שליש!" הוא הרהר רגע ואחר שאל: "אבל - המציאות הרי שונה מהסכויים, לפעמים אנו נפגשים במשך שבועיים רק ברחוב, ולפעמים כמה ימים אצלך - איך זה שבסיכום שנתי המספרים כמו מתאימים לסכויים, להסתברות?"

"זהו חוק המספרים הגדולים" השיב מתי "חוק שאנו מכירים מנסיוננו. ככל שמספר הפגישות בינינו גדל - מספר המאורעות השונים מתחלק, או כמו שנהוג לומר: מתפלג, לפי תורת ההסתברות. למשל אם תטיל מטבע "עץ או פלי" 4 פעמים אין סכויים רבים שיצאו דוקא פעמיים "עץ", פעמים "פלי" אך אם תטיל 400 תגלה בדרך כלל שהתוצאות מתקרבות מאד לחצי חצי - וכך גם בפגישותינו - מתוך 5 פגישות שבועיות - קשה לקבל יחס של 1/3 1/6 1/6 -

אך מתוך כ-250 פגישות שנתיות - הסכוי רב ביותר! אגב, אם תרצה - אציע לך בעיה דומה בגוון קל. לו במקום ללכת הייתי נוהג לרוץ ריצה קלה ולעבור את המרחק ב-5 דקות - מה היו אז ההסתברויות לפגישות אצלי אצלך וברחוב? (3)*
"אחשב זאת בשמחה אח"כ" אמר אלברט "כי הייתי רוצה להספיק ולספר לך על הבעיה הפלילית הכבדה שלי. היא אמנם לא קשורה לשיחתנו הקודמת - אולי תהיה בפיך עצה מחכימה לפקד נואש!
לפני שנים אחדות החלה מכת גנבות תכשיטים בשלושה פרברים בעירנו. יום יום נגרמו נזקים אדירים, בשיטות-בצוע מתוחכמות ביותר, שהצביעו על "פושע אמן" יחיד. כל נסיונותינו לתפסו עלו בתוהו. ראשית - אלה פרברים ענקיים ואין לדעת היכן יפעל. שנית - אין לדעת באיזה יום יפעל באיזה פרבר ובאילו שעות שכן בחירותיו נראות מקריות לחלוטין: עתים לסרוגין עתים ימים רצופים באותו פרבר עתים בשחר עתים בלילה - איננו יכולים להטיל הסגר על עשרות אלפי איש כדי למצאו!" "מדוע אתה פונה אלי?" תמה מתי.
"כי אותו ברנש הנו שחצן מתגרה ושלח לי אמש פתק זה" הוא גולל פיסת נייר וקרא:

אני הגנב המוכשר
הפורץ מפרבר לפרבר
לכאורה במקרה
אך השכל יורח
כי אם תחרשו בשיטתי
תמצאו חידתי
אך חריש הן מתיש
כל שכל ביש
ולכן, עת אחפוץ, תסיעוני בדרך
למחוזות חפצי וחפצי הערך
כאשר ייקרו בלי הפליות אלה מאלה
ואתם תשתאו: הפלא ופלא

"מה דעתך, מתי - יש פה שיטה או שהוא משטה בנו?"
מתי הרהר, חייך ואמר: "מדוע כל הפושעים חפצים גם בכתר משוררים? נראה שגאוותם ושחצנותם אין לה גבול, ומדעת או שלא מדעת הם מפזרים רמזים - בטוחים שאנו, בישי השכל, לא נוכל לעקוב אחריהם. ובכן, יש לי הפתעה בשבילך, אלברט: יתכן מאד כי שתי "בעיותיך" קשורות, ואף קשר אמיץ. האם ברשותך רישום פעילויותיו הפליליות של "משוררנו"?"
"ודאי!" ענה אלברט "רשום יומיומי ואף סכומים חדשיים! הנה!" מתי הביט בנתונים, חשב במהירות ואמר: "צדקתי! הסכומים החודשיים מטעים אך סכומים שנתיים מראים תבנית ברורה בכל שנות פעילותו - בדומה לפגישותינו:

כששית מן הגנבות - ב"קרית שאננים"
כמחצית הגנבות - ב"רמת מפתחים"
וכשליש הגנבות - ב"גני הנדיבים" "

אלברט נדהם, הרהר אך נותר במבוכתו: "א...אבל אצלנו התבנית נבעה מהרגלינו הקבועים. אלו הרגלים קבועים יש לפורץ מקפץ זה, הגונב פעם פה פעם שם פעם בבוקר ופעם בלילה?" מתי חזר ועיין ב"שיר" ואחר אמר: "אני רוצה להניח הנחה מעניינת לגבי הרגליו - לפי רמזים שונים השיר. גנב זה קם יום יום, מתי שמתחשק לו, ואז הולך לתחנת אוטובוסים ועולה על האוטובוס הראשון המזדמן לו הנוסע לאחד הפרברים. אם בא קודם "קרית שאננים" הוא נוסע ופורץ שם, אם "גני נדיבים" אין הוא מפלה אותה לרעה ועושה בה את מעשיו וכו'" (4)*

- "אבל לפרברים האלה ניתן לנסוע בכל אחת משלוש התחנות המרכזיות בעירנו" אמר הפקד
- "האם יש לך לוחות זמנים של האוטובוסים?"
- "ודאי. זה ציוד סטנדרטי לצורך מידע" ענה אלברט ושלף את חוברת המידע. השניים עיינו ורשמו במהירות:
מכל תחנה יוצא אוטובוס אחת לשעה לפי לוח הזמנים הבא (לדוגמא בין 8:00 ל-9:00).

תחנה צפונית	תחנה מרכזית	תחנה דרומית
8:00 לקרית שאננים	8:00 לרמת מפתחים	8:00 לרמת מפתחים
8:25 לרמת מפתחים	8:20 לגני נדיבים	8:10 לקרית שאננים
8:40 לגני נדיבים	8:40 לקרית שאננים	8:30 לגני נדיבים
9:00 לקרית שאננים	9:00 לרמת מפתחים	9:00 לרמת מפתחים
וכו'	וכו'	וכו'

אלברט ערך חישוב מהיר ואמר: "אם הנחתך נכונה, מתי, אין ספק מאיזו תחנה הוא נוהג לצאת מדי יום לפשעיו!" (5)*
עוד באותו ליל זמנו השניים את מנהל התחנה ופרשו לפניו את תכנית המלכודת. זו היתה תכנית פשוטה ומבריקה כאחת. עוד בטרם עלה השחר - התפרשו בלשים מוסווים כנוסעים עוברי אורח בתחנה. והחל מ-5:00, מועד תחילת התנועה, בקע קולו של מנהל התחנה ברמקול, בכל פעם שהגיע מועדו הקבוע של האוטובוס לאחד משלושה הפרברים: "נוסעים יקרים; בגלל סבות שאינן תלויות בנו אנו נאלצים לדחות את מועד יציאת האוטובוס בכך וכך דקות" הנוסעים התמרמרו אך חכו בלית ברירה. השעה היתה כבר 12:00 ומאום לא ארע

ופקד אלברט נתקף יאוש ולחש למתי: חוששני שהנחתך לא עמדה במבחן - אלא שאז נשמעה הכרזתו של מנהל התחנה וקול הרוגז של המחכים בתור - אך אדם אחד לבוש בהידור, נושא תיק עסקים לא מחה אלא פרש ועבר לתור לפרבר אחר. הוא לא הספיק להתייצב והבלשים עטו עליו וכפתוהו.

- "מה החוצפה הזו?" מחה האיש
- "ומה החוצפה הזו?" השיב בניחותא אלברט בפתחו את תיק העסקים כאשר עשרות מכשירי פריצה מתוחכמים מתגלים בו. "כיצד...מצאתם..."גמגם האיש.
  "בבעיה זו" השיב מתי "תוכל לחרוש רבות במחרשת שכלך, בעת מאסרך"...

****

מאחר ואתם, משתתפי החוג הארצי, אינכם מיועדים למאסר, נסו לענות, בזמנכם החופשי על השאלות הבאות.

(1) איזה חלק מהפגישות נערך בכל אחת מן השנים בכל אחד משלושת המקומות (לדוגמא: איזה חלק מכל הפגישות נערך בשנה השניה ברחוב) חשב זאת כשבר עשרוני עד שתי ספרות אחרי הנקודה והשווה זאת לשני-שליש, שהם בקרוב 0.66. (הערה: החלק - הנו מספר הפגישות במקום מסוים - מחולק למספר הפגישות <u>הכללי</u> באותה שנה). מהם ההבדלים??

(2) בין איזו שעה לאיזו שעה צריך מתי לצאת (או להתכוון לצאת) על מנת שהמפגש יערך:

א. אצל אלברט? ____________

ב. ברחוב? ______________

ג. אצל מתי? ______________

מה ההסתברות שהוא יצא בכל אחד מפרקי זמן אלו:

א. ________

ב. ________

ג. ________

(3) חשב את הסתברויות הפגישות - כאשר מתי עובר את המרחק בריצה של 5 דקות ולא בהליכה של 10 דקות. מהם עכשיו שעות היציאה של מתי בהם המפגש יערך:

א. אצל אלברט? ________

ב. ברחוב? __________

ג. אצל מתי? _________

מה ההסתברות שמתי יצא בכל אחד מפרקי זמן אלו:

א. ________

ב. ________

ג. ________

(4) באיזו תחנה בחרו מתי ואלברט? פרט את החישובים והסבר מדוע. (מלא את הטבלה, והסבר בקצרה).

רמז: הגנב היה נוהג לבוא בשעה מקרית ולעלות על האוטו הראשון המזדמן. לוא למשל, היו רק שני אוטובוסים לשני יעדים, ב-8:00 וב-8:30 וכן הלאה 9:00, 9:30 וכו' היו סיכוייהם שווים כי הסכוי להגיע במחצית שעה ראשונה שווה לסכוי להגיע במחצית שעה שניה. חפשו בין שלושת לוחות הזמנים של התחנות, אותו לוח המחלק את הזמנים כך שהסיכויים הם: 1/6, 1/2, 1/3.

	צפון	מרכז	דרום
ההסתברות לנסוע ל"רמת מפתחים"			
ההסתברות לנסוע ל"קרית שאננים"			
ההסתברות לנסוע ל"גני נדיבים"			

(5) התוכלו לסכם במשפטים אחדים על מה היה מבוסס רעיון המלכודת? ________________

____

____

(6) אם מנהל התחנה החליט לדחות את יציאות האוטובוסים רק במידה הנחוצה למלכודת ולא יותר בכמה דקות הוא דחה את האוטובוס "לרמת מפתחים"? ________________

" " " " " " לקרית שאננים"? ________________

" " " " " " לגני נדיבים"? ________________

(רמז: יש לחשב דחיה מינימלית המאלצת לעלות על אוטובוס אחר).

דעתי על השאלון:

מעניין מאד   די מעניין   די משעמם   משעמם מאד

קשה מדי   קשה   קל   קל מדי

נעזרתי באחרים: הרבה   מעט   כלל לא

החוג הארצי למתמטיקה בהתכתבות של מכון ויצמן למדע
מחזור ב' - בעריכת יונתן דים
<u>פתרונות - כתות ו-ז</u>

1. א. המאורע התקבל עץ <u>לפחות</u> פעם אחת מתקיים בשלוש תוצאות: (עץ,עץ), (עץ,פלי) ו-(פלי,עץ) (או, א', ב' ו-ג' לפי הרשום בשאלון). הסתברות המאורע מתקבלת מחלוקת מספר התוצאות בהם מתקיים המאורע במספר התוצאות הכללי (4), והיא 3/4.

ב. עץ מתקבל <u>בדיוק</u> פעם אחת רק בשתי תוצאות [(עץ,פלי) ו-(פלי,עץ)]. הסתברות המאורע היא, לכן, 2/4, או 1/2 (50%).

מעל 90% ענו נכון.

2. א. בכל קוביה יתכנו שש תוצאות. כל תוצאה מקוביה א' יכולה להופיע עם כל תוצאה מקוביה ב', ולכן יש 36 תוצאות אפשריות (שים לב - קיים הבדל בין התוצאה "2 בקוביה א', 3 בקוביה ב'" לבין התוצאה "3 בקוביה א', 2 בקוביה ב'". מי שהתיחס לתוצאות אלו כזהות קיבל תשובה שגויה - 21).

ב. סכום הקוביות יכול להיות כל מספר שבין 2 ל-12, כלומר, 11 סכומים שונים.

ג. קיימת תוצאה <u>אחת</u> בה סכום הקוביות הוא 2: (1,1). הסתברות המאורע היא, לכן, 1/36. קיימות שתי תוצאות בהן הסכום 3: (1,2) ו-(2,1). הסתברות המאורע היא, לכן, 2/36, או 1/18. קיימת שלוש תוצאות בהן הסכום 4 וההסתברות היא 3/36, או 1/12.

ד. הסכום עבורו יש את מספר התוצאות הגדול ביותר הוא 7, עבורו יש שש תוצאות. ההסתברות שהסכום יהיה 7 היא, לכן 6/36, או 1/6.

כמחצית ענו תשובה מלאה, ועוד כשליש תשובה חלקית.

3. שאלה זו לא התיחסה לשאלה הקודמת כפי שענו חלק מהפותרים, אך בהחלט ניתן להביא דוגמאות גם מהטלות זוג קוביות.
ההסתברות הגבוהה ביותר שיכולה להיות למאורע היא 1. הסתברות זו מתקבלת עבור מאורע שמתקיימת עבור <u>כל</u> התוצאות (ולא רק במקרה שבו יש רק תוצאה אפשרית אחת כפי שחלק כתבו).
דוגמאות למאורעות בעלות הסתברות 1:
א. בהטלת שתי קוביות, סכום הקוביות קטן מ-13.
ב. בהטלת מטבע יצא עץ <u>או</u> פלי (בהנחה, כמובן, שהמטבע לא נופל על הצד...).

ההסתברות הנמוכה ביותר, מצד שני, היא 0. הסתברות זו מתקבלת כאשר המאורע אינו מתקיים <u>באף</u> מקרה, לדוגמה:

א. בהטלת שתי קוביות, סכום הקוביות גדול מ-13.
ב. בהטלת מטבע (אחד) יצא פעמיים פלי.

כ-55% ענו תשובה מלאה, ועוד כ-15% תשובה חלקית.

4. א. ההסתברות למאורע "המספר יהיה 5" היא 1/6.
ההסתברות למאורע "המספר לא יהיה 5" היא 5/6.
סכום ההסתברויות - 1.

ב. ההסתברות למאורע "המספר גדול מ-2" 4/6, (2/3).
ההסתברות למאורע "המספר אינו גדול מ-2" 2/6, (1/3).
סכום ההסתברות - 1.

כ-95% פתרו נכון.

5. מספר התוצאות בהם מאורע (כלשהו) מתקיים ועוד מספר התוצאות בהם המאורע לא מתקיים הינו מספר התוצאות הכללי - עבור כל תוצאה שהיא, או שהמאורע מתקיים, או שאינו מתקיים. לכן, חיבור ההסתברויות של מאורע והמשלים שלו נותן:

$$\frac{\text{מספר תוצאות בהם המאורע מתקיים}}{\text{מספר התוצאות הכללי}} + \frac{\text{מספר תוצאות בהם המאורע לא מתקיים}}{\text{מספר התוצאות הכללי}}$$

$$= \frac{\text{מספר התוצאות הכללי}}{\text{מספר התוצאות הכללי}} = 1$$

כמעט כל הפותרים ידעו שחיבור ההסתברויות נותן 1, אך לא כולם הסבירו זאת בצורה משכנעת.

6. לפי הכלל של שאלה 5, ניתן לחשב הסתברות של מאורע על ידי חישוב הסתברות המאורע המשלים, והחסרת מספר זה מ-1. כך, על מנת לחשב את ההסתברות שיתקבלו לפחות שתי קוביות עם אותו מספר, נחשב את ההסתברות שכל הקוביות שונות, ונחסיר מ-1. ההסתברות שכל הקוביות שונות חושבה בשאלון (בעמוד הקודם), ושווה ל-5/9. ההסתברות לקבלת לפחות שתי קוביות עם אותו מספר היא, אם כן, $1 - 5/9 = 4/9$.

כ-80% ענו נכון...

7. בדיוק באותה שיטה שחישבנו עבור שלוש קוביות, נחשב עבור ארבע.

א. ההסתברות שהקוביה השניה שונה מהראשונה היא 5/6.

ב. אם השתיים הראשונות שונות, נשארו לקוביה השלישית ארבע אפשרויות להיות שונה מקודמותיה, וההסתברות לכך - $4/6 = 2/3$.

ג. אם השלוש הראשונות שונות נשארו לקוביה הרביעית שלוש אפשרויות להיות שונה מקודמותיה, וההסתברות לכך - $3/6 = 1/2$.

ד. ההסתברות שכל הקוביות שונות מתקבלת ממכפלת תשובות א-ג,

$$\frac{5*4*3}{6*6*6} = \frac{5}{18}$$

ה. ההסתברות שיש לפחות מספר אחד שהופיע יותר מפעם אחת שווה ל-1 פחות הסתברות המאורע המשלים, כלומר

$$1 - 15/18 = 13/18$$

כ-75% פתרו מלא, ועוד כ-20% חלקי.

8. אם מעיינים היטב בבעיה זו, מגלים שהיא דומה מאד לבעיה הקודמת. כפי שניסח זאת אחד הפותרים "הבעיה דומה לבעית הטלת 34 "קוביות" כאשר לכל "קוביה" 365 פנים". בשיטת השאלה הקודמת, יש לחשב את הסתברות המאורע המשלים - שלכל האנשים כבר יש יום הולדת שונה - ולהחסיר מספר זה מ-1 על מנת לקבל את התשובה הרצויה.

א. בשנה יש 365 יום, וזהו מספר התוצאות האפשריות. (יותר מדי ענו 364, כנראה בגלל שנכתב כי ב-29/2 לא נולד אף אחד - אבל 29/2 הוא היום ה-366 בשנה המעוברת, ותאריך זה איננו קיים בכל שנה).

ב. כאמור לעיל, הפתרון יבוסס על חישוב הסתברות המאורע המשלים וחיסורה מ-1.

ג. הנוסחה לחישוב הסתברות המאורע המשלים היא:

$$\frac{365 \times 364 \times 363 \times \ldots\ldots \times 332}{365^{34}} = 0.205$$

הסתברות המאורע היא, לכן,

$$1 - 0.205 = 0.795,$$

או, כמעט 80% שאכן יש לפחות זוג אחד של אנשים בעלי תאריך לידה זהה, לכן,

ד. האקדוחן צריך לנחש שיש לפחות זוג בעלי תאריך זהה, וכך הוא אמנם ניחש. המציאות היא אכזרית, ובקהל לא היה אפילו זוג אחד כזה, והאקדוחן מפר הסדר הוצא להורג עם שחר.

מוסר השכל:

א. לא תמיד מתקיימת האפשרות בעלת ההסתברות הגבוהה ביותר.
ב. אם אינך יכול לנצח את השריף בקרב אקדחים - שב בשקט ואל תפריע.

רק כ-40% ענו פתרון מלא. פתרון חלקי ענו עוד כ-20%.

<u>תוצאות הניסוי</u>

התוצאה העיקרית של הניסוי היא שיש ילדים ששולחים תשובות בלי לברר קודם אם הם נכונות או לא. מדובר בעיקר בילדים להם מספר רב של תלמידים בכתה, שענו שאין תלמידים עם יום הולדת משותף. חלק מהעונים בוודאי בדק את כל התלמידים בכתה, אך כמעט וודאי שחלק ענו "לא" ללא בדיקה. כך, מתוך 45 תשובות ראשונות על כתות בהן יותר מ-35 תלמידים, רק 23 כתבו שיש בעלי יום הולדת זהה - כ-50%, במקום 80-90% שצפוי.

בשאלון הבא תנתן הזדמנות חוזרת, ונקווה לטוב...

9. המטרה היתה להשלים את המשפט המלא, החל מ-"במשפט זה" ועד השורה האחרונה באופן שהוא יהיה נכון לאחר המילוי. יש שני פתרונות "חוקיים", והם:

	פתרון א'	פתרון ב'
במשפט זה, מספר הפעמים בו מופיעה הספרה 0 הוא	1,	1,
מספר הפעמים בו מופיעה הספרה 1 "	7,	11,
מספר הפעמים בו מופיעה הספרה 2 "	3,	2,
מספר הפעמים בו מופיעה הספרה 3 "	2,	1,
מספר הפעמים בו מופיעה הספרה 4 "	1,	1,
מספר הפעמים בו מופיעה הספרה 5 "	1,	1,
מספר הפעמים בו מופיעה הספרה 6 "	1,	1,
מספר הפעמים בו מופיעה הספרה 7 "	2,	1,
מספר הפעמים בו מופיעה הספרה 8 "	1,	1,
ומספר הפעמים בו מופיעה הספרה 9 "	1,	1.

ניתן לספור ולראות שהמשפט נכון עבור כל אחד מהפתרונות. מצד שני, לא כתוב בשום מקום איך לכתוב את המספרים, או אפילו אם המספרים צריכים להיות כתובים בספרות (למרות שזו היתה הכוונה, כמובן). מובאות כאן שלושה פתרונות "רמאות", השניים האחרונים פרי מחשבה מקורית של פותרת חיפנית.

	פתרון א'	פתרון ב'	פתרון ג'
במשפט זה, מספר הפעמים בו מופיעה הספרה 0 הוא	אחד,	04,	2/1,
מספר הפעמים בו מופיעה הספרה 1	אחד,	05,	10/1,
מספר הפעמים בו מופיעה הספרה 2	אחד,	03,	3,
מספר הפעמים בו מופיעה הספרה 3	אחד,	3,	2,
מספר הפעמים בו מופיעה הספרה 4	אחד,	2,	1,
מספר הפעמים בו מופיעה הספרה 5	אחד,	2,	1,
מספר הפעמים בו מופיעה הספרה 6	אחד,	1,	1,
מספר הפעמים בו מופיעה הספרה 7	אחד,	1,	1,
מספר הפעמים בו מופיעה הספרה 8	אחד,	1,	1,
ומספר הפעמים בו מופיעה הספרה 9	אחד;	1,	1.

כמקודם, ניתן לספור ולהראות שעבור כל פתרון המשפט אכן נכון. כ-45% ענו, רובם את פתרון א' ה"חוקית".

תשובות ל-"הסכוי בעתוי"

1. חלוקת הפגישות היא כדלקמן:

	אצלי (מתי)	אצלך (אלברט)	ברחוב
לפני 3 שנים	0.16	0.17	0.66
לפני שנתיים	0.17	0.17	0.66
בשנה שעברה	0.17	0.17	0.66

כפי שאתם רואים הרי שבקרוב של שתי ספרות אחר הפסיק - כל הפגישות ברחוב הן 0.66 מסך הפגישות הכללי וההבדלים לגבי הפגישות אצל שני החברים קטנים ביותר: לפי

החישוב התיאורטי 1/6=0.166666 ואצלנו בקרוב של שתי ספרות אחר הפסיק 0.16 ו-0.17.

2. כדי להפגש אצל אלברט על מתי לצאת בין השעות 4:00 ל-4:05.
" " ברחוב " " " " 4:05 ל-4:25.
" " אצל מתי " " להתכונן לצאת" 4:25 ל-4:30.

הערה: הרבה פותרים התחבטו בשאלה: אם מתי היה צריך לצאת בין 4:05-4:00 בשביל להפגש אצל אלברט, האם לא היה צריך לצאת החל מ-4:06 על מנת להפגש ברחוב?
התשובה היא כי פרק הזמן 4:05-4:00 מציין את כל הזמן עד 4:05 (4:00:01.......4:04:59,4:05:00).
פרק הזמן 4:25-4:05 מציין את הזמן החל מ 4:05 עד 4:25 (4:05:01.......4:24:59 ,4:25:00).

ההסתברות הראשונה היא 1/6 = 5/30

" השניה " 2/3 = 20/30

" השלישית " 1/6 = 5/30

3. א. המפגש יערך אצל אלברט כאשר מתי יצא בין 4:00 ל-4:10.
ב. " " ברחוב " " " 4:10 ל-4:25.
ג. " " אצל מתי " מתי יתכוון לצאת 4:25 ל-4:30.

והסתברויות למאורעות אלה הן:

א. 1/3 = 10/30

ב. 1/2 = 15/30

ג. 1/6 = 5/30

שימו לב: רק מתי רץ, ולכן משתנה רק הזמן בו מתי מגיע למשרד של אלברט. אלברט ממשיך ללכת, כך שעל מנת שהפגישה תתקיים אצל מתי, עדיין צריך מתי להתכוון לצאת ב-4:25 או לאחר מכן.

4.

	צפון	מרכז	דרום
הסתברות לנסוע לרמת מפתחים	(בין 8:00-8:25) $\frac{25}{60} = \frac{5}{12}$	(בין 8:40-9:00) $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$	(בין 8:30-9:00) $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$
הסתברות לנסוע לקרית שאננים	(בין 8:40-9:00) $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$	(בין 8:20-8:40) $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$	(בין 8:00-8:10) $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$
הסתברות לנסוע לגני נדיבים	(בין 8:25-8:40) $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$	(בין 8:00-8:20) $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$	(בין 8:10-8:30) $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$

ולכן ברור כי התחנה המבוקשת היא תחנת דרום.

5. רעיון המלכודת מבוסס על ההבחנה בין נוסע רגיל לפושע שלנו. נוסע רגיל - נוסע למקום מסוים ואם האוטובוס מתאחר, הוא מחכה. ואילו הפושע שלנו שעקרון הנסיעה שלו הוא: "עליה לאוטובוס הראשון הנוסע לאחד מ-3 הפרברים" יעבור לאוטובוס בעל יעד שונה.

6. עקרון הדחיה המינימלית אומר שיש לדחות כל אוטובוס כך שיצא מעט לאחר המועד הקבוע לאוטובוס שאחריו לכן-

האוטובוס לרמת מפתחים נדחה עד לאחר האוטובוס לקרית שאננים ב-10 דקות וקצת.
" לקרית שאננים " " " " לגני נדיבים ב-20 דקות וקצת.

" לגני נדיבים " " " " לרמת מפתחים ב-30 דקות וקצת.

קוראים כותבים

סימון המספרים המכוונים והילד הכותב וקורא עברית, הסרת מכשול

מאת: יקותיאל פקטה
המרכז לחינוך טכנולוגי, חולון

ברישום מספרים חיוביים ושליליים הסימנים "+" ו- "-" נכתבים כמקובל לפני המספרים אליהם שייכים הסימנים.

מה פירוש "כמקובל לפני" ?

בשפות אירופיות מגמת הכתיבה היא משמאל לימין ולכן אין מקום לאי בהירות. הסימנים שנכתבים לפני המספרים אליהם הם שייכים מופיעים משמאל להם, לפניהם, לפי סדר הקריאה המקובל בשפה וגם בביטויים מתמטיים.

שונה הדבר עבור ילד הקורא וכותב עברית. מגמת הקריאה והכתיבה היא מימין לשמאל ומלה הנכתבת לפני מילה אחרת מופיעה מימין למילה. עבור תלמיד זה הקביעה, כי הסימן הבא לפני מספר מופיע משמאלו זקוקה להבהרה מיוחדת והפניית תשומת הלב לשוני בין מגמת הקריאה והכתיבה של ביטויים בשפה הרגילה לבין מגמת הכתיבה של ביטויים מתמטיים. מתעורר הצורך להדגיש שוב ושוב בפני התלמידים , כי ביטויים אלגבריים כותבים וקוראים משמאל לימין.

עיינתי במספר ספרי לימוד.

בספר הבה נלמד מתמטיקה, ספר א', (1), ע' 70 נאמר: "מספר הזזה שסימן (+) לפניו נקרא חיובי. מספר הזזה שסימן (-) לפניו נקרא שלילי." לא פורש מה זה לפניו. ספרי לימוד אחרים מדברים בסיגנון דומה.
עמוס ארליך בספרו מתמטיקה לכתה ט', (2), בעמוד 116 אומר: "הוספת הסימן "-" לפני מספר חיובי הופכת את כיוונו ומתקבל מספר שלילי.

בספרם של ד"ר עזריאל אביתר ובנימין מאיר, אלגברה ספר ראשון, (3), ע' 33 אינם מציינים אפילו היכן מצוי הסימן: "למספרים המסומנים בסימן "+" נקרא מספרים חיוביים ולאלה המסומנים בסימן "-" נקרא מספרים שליליים."

בספרו של זכריה נצר, עקרונות האלגברה , חלק ראשון, עמ' 90 נאמר: "מקובל הקיצור הבא: במקום לכתוב מספר נגדי ל - , כותבים "-" לפני המספר כגון (1-), (2-) וכו' קרא מינוס אחד, מינוס שניים וכו'."

אף אחד מבין ספרים אלה איננו מציין כי המונח 'לפני' שמובנו מצד שמאל של מספר עבור כל קורא שפה אירופית איננו בעל אותו מובן עבור קורא, הרגיל לכתוב מימין לשמאל.

מתוך נסיוני בהוראת ראשית האלגברה לפני שנים, מצאתי, כי רבים התלמידים השוגים והמשייכים למספר את הסימן הרשום 'לפניו', את הסימן העומד מימינו. בראשית הלימוד, כל עוד כותבים בסוגריים את המספר יחד עם הסימן השייך אליו, אין כל בעיה. לדוגמא :

$$(-5) + (+3) = (-2)$$

או

$$(+7) - (-2) = (+7) + (+2) = (+9)$$

אך כאשר עוברים לצורת כתיבה חסכונית וכותבים

$$7 - (-2)$$

תלמידים באים לידי מבוכה ובטעות מייחסים את הסימן מינוס שבא מימין (<u>לפני</u> - לדעתם) למספר 7, למספר זה וחושבים כי מדובר במינוס שבע.

כדאי ביותר, כי מורים המלמדים ראשית פעולות האלגברה ידגישו כי מקום הסימן חיובי או שלילי הוא משמאל למספר וזאת על מנת להסיר אבן נגף. ובכלל כדאי מאד להדגיש כי <u>ביטויים מתמטיים נכתבים ונקראים משמאל לימין</u>.

<u>מראי מקום</u> :

(1) הבה נלמד מתמטיקה , ספר א', בעולם המספרים. המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע , רחובות , 1969/70.

(2) עמוס ארליך: מתמטיקה לכתה ט'. יצא ביוזמתה ובפיקוחה של הועדה לניסויים בהוראת המתמטיקה , 1962, 1963.

(3) ד"ר עזריאל אביתר - בנימין מאיר : אלגברה, ספר ראשון. הוצאת קרני ת"א 1964.

(4) זכריה נצר: עקרונות האלגברה - חלק ראשון, מהדורה שניה. הוצאת הקיבוץ המאוחד, תש"ל.

מכון ויצמן למדע · היחידה לפעולות נוער

סדנת המדע לנוער ע"ש עמוס דה-שליט
במכון ויצמן למדע
26.8.89 - 13.8.89

הסדנה מיועדת לבוגרי כתות י"א.
החניכים בסדנה יבצעו עבודות מחקר בהנחית
חוקרים בכירים ממכון ויצמן למדע,
בפיסיקה, כימיה, ביולוגיה,
מתמטיקה ומדעי המחשב.

מועד אחרון להרשמה 19.5.89.

לשם קבלת שאלון הרשמה יש לפנות ל-
יחידה לפעולות נוער,
מכון ויצמן למדע, ת.ד. 26
רחובות 76100

הטכניון, המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

קשר - ח"ם

סדנא למרכזי המקצוע מתימטיקה

לקידום שיפור וריענון החינוך המתימטי

מזה שלוש שנים מופעלות סדנאות "קשר ח"ם". הסדנאות תפעלנה גם בשנה"ל תש"ן. הסדנאות מתקיימות בשעות הבוקר במשך שנת הלימודים, תוך תאום עם המנהלים לשחרור המרכז/ת לצורך זה. מרכזי מקצוע המתימטיקה בבתי הספר העל יסודיים ברחבי הארץ, שישמשו בתפקיד זה בתש"ן, המעונינים להשתתף בסדנאות, מתבקשים לפנות בכתב לקבלת פרטים נוספים אל:

פרופ' נצה מובשוביץ-הדר

המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

קרית הטכניון 32000

טל: 04-293104

* ההשתתפות בסדנאות מקנה זכות לגמול השתלמות.

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

הטכניון, המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

כשיתוף עם

משרד החינוך והתרבות   האגף לתוכניות לימודים

מסמ"טיקה

תוכניות לימוד במתימטיקה למסלולים המקצועיים

במסגרת השתלמויות קיץ תשמ"ט מוזמנים מורים שעתידים ללמד בתש"ן מתימטיקה במסמ"מ, להשתלם בהוראת היחידות הבאות:

א. ראייה מרחבית	ו. גיאומטריה - שטח ושטח פנים
ב. תיאורים גרפיים	ז. פתרון בעיות - יחס ופרופורציה
ג. טריגונומטריה - הטנגנס	ח. יישומי מתימטיקה לחיי יום-יום - כספומטיקה.
ד. טריגונומטריה - סינוס וקוסינוס	ט. פתרון בעיות לוגיות.
ה. חישובים מקורבים	י. חישובים בעל-פה.

ההשתלמות תיערך בתאריכים הבאים:

5.7.89 - 3.7.89 בתנאי פנימיה.

המעונינים להשתתף בהשתלמות מתבקשים להתקשר לקבלת פרטים נוספים בימים א - ה בין השעות 13:30 - 8:30 בטלפון: 04-293104 אל:

גב' רבקה בשן מזכירת פרויקט "מסמ"טיקה".

או אל:
פרופ' נצה מובשוביץ-הדר, ראש הצוות.

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

מכון ויצמן למדע
המחלקה להוראת המדעים

חומר חדש

ספרים

לקראת תחילת שנת הלימודים תשי״ן יצאו לאור הספרים הבאים:

מדריך למורה לספר גיאומטריה ברמה א׳.

מדריך למורה לספר פונקציות ברמה ב׳.

בתחילת שנת הלימודים יצאו לאור הספרים הבאים:

ספר א׳ לרמה א׳

למחצית הראשונה של כיתה ז׳

ספר א׳ לרמה ב׳

לקראת חודש נובמבר תצא לאור חוברת בהסתברות לכיתה ח׳ רמה א׳ וכן מדריך למורה לחוברת זו. לאחר צאת החוברת מתוכנן יום עיון בנושא זה.

הזמנות **לרכישות מרוכזות** יש להפנות אל:

גסטליט, חברה לשיווק והפצה בע״מ, ת.ד. 2088, חיפה 31020 טל׳: 04-729353

הכתובת: רח׳ היוצק 4, מפרץ חיפה.

כמו כן ניתן לרכוש את הספרים במרכזי המכירות של החברה:

בתל-אביב, רח׳ השרון 12, (טל׳ 03-373921)

ובחיפה, רח׳ העצמאות 41, (טל׳ 04-673378)

בכל אחד ממקומות אלה הספרים נמכרים במחיר המופיע במחירון שלנו, ללא כל שינוי.
ספרים שיוזמנו על-ידי מוסדות בקניה מרוכזת, יישלחו אליהם ביום קבלת ההזמנה (דמי המשלוח יחולו על הנמען).

בנוסף לכך, יהיה ניתן לרכוש את הספרים בחנויות ספרים המוכרות ספרי לימוד, בכל רחבי הארץ.

הודעות מתמטיקה

מתמטיקה - במהדורות עיצוב

בסדרות "פרקי מתמטיקה" (רמה א') ו"פרקים נבחרים במתמטיקה" (רמה ב') קיימת מהדורת עיצוב ובה 8 חלקים בכל סדרה, (חלקים א'-ח').

חוברות אלה והחוברת "סטטיקה ותיאור גרפי", כוללות את כל החומר אותו יש ללמד בכיתות ז' ו-ח' בשתי הרמות.

חוברות אלו מעוצבות בהדרגה לספרים - שני ספרים לכיתה ז' ושני ספרים לכיתה ח'.

בתחילת שנת הלימודים תש"ן יצא לאור ספר א', המחליף את החוברות - חלק א' וחלק ב' בשתי הרמות, והמיועד לחצי הראשון של כיתה ז'.
במשך שנת הלימודים תש"ן ייצא לאור ספר ב', המיועד לחצי השני של כיתה ז' אשר יחליף את החוברות "סטטיסטיקה ותיאור גרפי", חלק ג' וחלק ד'.
בכיתות ח' יש איפוא להמשיך וללמד בשנת תש"ן לפי החוברות שבמהדורת העיצוב (חלקים ה'-ח').

בסדרה "הבה נלמד מתמטיקה" (רמה ג') קיימים שני חלקים במהדורת העיצוב (חלק א' וחלק ב') המיועדת לחצי הראשון של כיתה ז'.

מאי, 1989

מס' קטלוגי	שם הספר	מיועד לכיתות	מחיר בש"ח	כמות
	פרקי מתמטיקה - רמה א'			
1001	חלק א'	ז'	3.90	......
1002	חלק ב'	ז'	4.00	......
1003	חלק ג'	ז'	3.45	......
1004	חלק ד'	ז'	2.65	......
1005	חלק ה'	ח'	3.70	......
1006	חלק ו'	ח'	4.60	......
1007	חלק ז'	ח'	4.15	......
1008	חלק ח'	ח'	5.60	......
	פרקים נבחרים במתמטיקה - רמה ב'			
1014	חלק א'	ז'	3.90	......
1015	חלק ב'	ז'	4.15	......
1016	חלק ג'	ז'	3.80	......
1017	חלק ד'	ז'	4.00	......
1018	חלק ה'	ח'	4.60	......
1019	חלק ו'	ח'	3.10	......
1020	חלק ז'	ח'	4.00	......
1021	חלק ח'	ח'	3.90	......
	הבה נלמד מתמטיקה - רמה ג'			
1031	חלק א'		7.30	......
1032	חלק ב'		2.40	......

לרכישת ספרים וחומרי למידה נא לפנות אל:
גסטליט, חברה לשיווק והפצה בע"מ, רח' היוצק 4, מפרץ חיפה.
ת.ד. 2088, חיפה 31020.
טלפון: 04-729353.

התשלום ייעשה בגוביינא ודמי המשלוח יחולו על הנמען.

כמו כן ניתן לרכוש את הספרים במרכזי ההפצה הבאים:
- רח' השרון 12 תל-אביב: טלפון 03-373921.
- רח' העצמאות 41, חיפה: טלפון 04-673378.
ובחנויות לספרי לימוד בכל רחבי הארץ.

★★

לכבוד

המחלקה להוראת המדעים **השתלמויות**

מכון ויצמן למדע

רחובות 76100

אני מעוניין להשתתף בהשתלמות למורי מתמטיקה בקיץ תשמ"ט במסלולים הבאים. (סמן x במסלולים המבוקשים).

א ☐ ב ☐ ג ☐ ד ☐ ה ☐ ו ☐

שם: ____________________

כתובת פרטית : ____________________ טל': ______

שם ביה"ס וכתובתו: ____________________ טל': ______

מס' ת.ז. : ____________________

רצ"ב המחאה מספר ____________ של בנק ____________

על סך ____________ ש"ח לפקודת מכון ויצמן למדע.