ב3

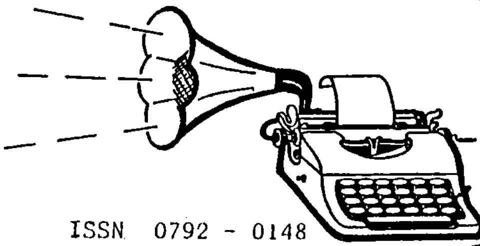
עלון למורי מתמטיקה

כרך ב, חוברת מספר 3, טבת תשמ"ט

מספרים

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות

מספרים



ISSN 0792 - 0148

תוכן העניינים

מאמרים:

זה רעיון:

קוראים יקרים,

לפניכם החוברת האחרונה של כרך ב'.

אנו מקווים שמצאתם ענין בעלוננו,
ומזמינים אתכם להציע רעיונות נוספים,
ולשלוח מפרי עטכם.

בעמוד 59 מצורף טופס מנוי לכרך ג'.

ב ב ר כ ה,

מספרים

מערכת מספרים

הכתובת:
מספרים
מערכת מספרים
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע
רחובות 76100

נדפס בישראל 1989 - תשמ"ט

חברנו , עמנואל קרמר איננו

כואבים את מותו חברי קבוצת המתמטיקה

ב-ד' כסלו תשמ"ט (13 בנובמבר 1988) נפטר עמנואל קרמר ז"ל בגיל 45 אחרי מחלה קצרה. עמנואל היה חבר בקבוצת המתמטיקה במחלקה להוראת המדעים כ-10 שנים וכיהן כמורה ומרכז מקצוע המתמטיקה בכפר הנוער בן שמן שנים רבות.

עמנואל היה מוכשר מאוד, מסור לעבודתו, איש צורת שאפשר להשען עליו ובעיקר יצירתי מאוד. הוא השאיר אחריו עבודות שהן מקוריות ויפות ביותר. הספר גיאומטריה לכיתה ט' שרבים מכם מכירים ומלמדים לפיו הוא אחד הספרים היפים והמקוריים. הספר מעיד על יוצרו. הרבה יצירתיות, שילוב של מחשבה חינוכית הוראתית בתוך פיתוח המהלך המתמטי, חידושים באסטרטגיות למידה וכן פניה אישית תומכת בתלמיד.
אלה מכם שהשתתפו בהשתלמויות וימי עיון בהדרכת עמנואל חשו הלכה למעשה בעוצמה של עמנואל כיוצר וכמורה מחנך.

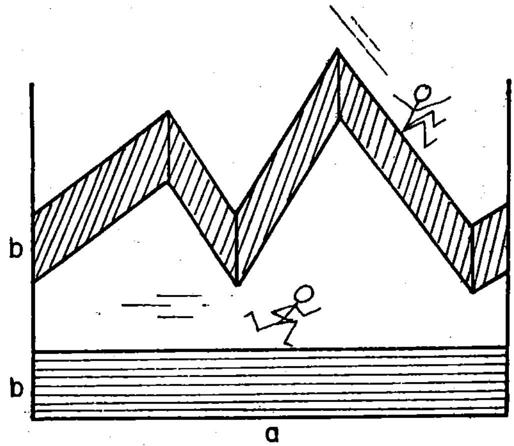
עמנואל תמיד מחייך, צחוקו וברכות השלום שלו מהדהדות עדיין במסדרונות, חבר טוב היית לנו.

בין עשן הסיגריות ואדי הקפה דיברנו על מתמטיקה ועל בכלל.

שתי הדוגמאות שהוצאנו מספרו מתארות יותר ממלים את עמנואל היוצר - המורה.

דוגמא א': בין שני קווים מקבילים שורטטו שתי צורות: מלבן שצלעותיו a ו b וצורה נוספת הבנויה ממקביליות שאורך אחת מצלעותיהן b.

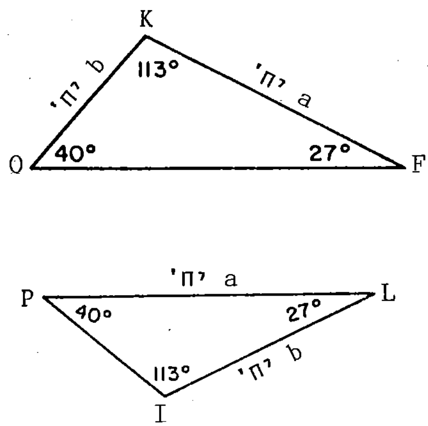
- מה תוכל לומר על שטח המלבן בהשוואה לשטח הצורה הנוספת?



דוגמא ב':

א) כמה נתונים שווים יש בשני המשולשים?

ב) האם המשולשים שבשרטוט חופפים?



עמנואל.
שֵׁם .
עמנואל .
"בוקר טוב לטובים".
עמנואל.
חזרה מהנסיעה לחו"ל.
קשרים חדשים לעזרת בועז.
עמנואל.
נגה.
נגה - ראשית כתה א'
התמודדות ראשונה
ועכשיו - לבד .
וסימי?
וכל האחרים?
ושני החיילים שבמשפחה.
חנה'לה
ומה חשבתָ?

בבקשה!
אני יודעת שזמן אין להשיב לאחור
אני יודעת שאת הנעשה אין להשיב.
אז בוא. תכנס, כך גבוה בינינו "הנמוכים",
ותמלא את החדר בחיוך.
סַפֵּר שזו מתיחה!
לא, לא יפה מצדך
אבל נסלח.
רק בוא.

עמנואל.
ואין עוד מי שיענה.
כבר אינך רוצה קפה.
מוזר.
חשבתי שאני יודעת הכל
הרי שנינו מאותו מקום,
וגם בזמן היינו מצויים קרוב
אז איך אתה רחוק?

רציתי לכעוס.
נטישה.
רציתי לזעוק.
לא כך עושים
ולא יכולתי.
לֹא יכולת,
בוודאי לא היית הולך.
נכון?
לא מרצון עזבת
אבל לנותרים קשה,
קשה להאמין
וקשה לסלוח
שברחת.

סליחה!
אני יודעת
בעל כורחו אדם נולד
ובעל כורחו הוא ...
ואף על פי כן
בבקשה ...
ושוב סליחה, אנא סלח.
סלח שאינני מאמינה
סלח שאני כועסת
סלח שאינני תופסת
ועודני מחפשת.

נעמי תעיזי
ד' כסלו תשמ"ט
13.11.88

מאמרים

סביבה ממוחשבת לייצוג פונקציות באמצעות מערכת צירים מקבילה

מאת: רפי נחמיאס
בית הספר לחינוך, אוניברסיטת תל-אביב
אברהם הרכבי
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

מ ב ו א

תאור מושגים ותהליכים בצורות ייצוג שונות מונח ביסוד החשיבה המתמטית אותה אנו רוצים ללמד בבתי ספר. לדוגמא, ניתן לייצג קשר בין שני משתנים בצורה מילולית, ניתן לנסחו כביטוי אלגברי, ואף לשרטטו כגרף על מישור קרטזי. כל אחד מייצוגים אלו מתאר את אותו קשר באופן שונה. הקניית היכולת לתאר קשרים בין משתנים בייצוגים השונים ומיומנות התרגום מייצוג אחד למשנהו (לדוגמא: תרגום תאור מילולי למשוואה אלגברית או פתרון מערכת משוואות בצורה גרפית), נמנים על המטרות המרכזיות של הוראת המתמטיקה. איזכורים רבים בספרות המחקרית של העת האחרונה מתייחסים לחשיבות ההצגה רבת הפנים בעת למידת המתמטיקה והמדעים. חוקרים טוענים כי במקרים רבים עשויים תלמידים, באמצעות הבחנה בין ייצוגים שונים וניתוח הדימיון ביניהם, להגיע להבנה טובה יותר של קשרים, מושגים ותהליכים מתמטיים ואולי אף לרמה גבוהה יותר של הפשטה. במאמר זה נדגים ונמחיש טענה זו בהקשר של מושג הפונקציה בכלל, והפונקציה הקווית בפרט.

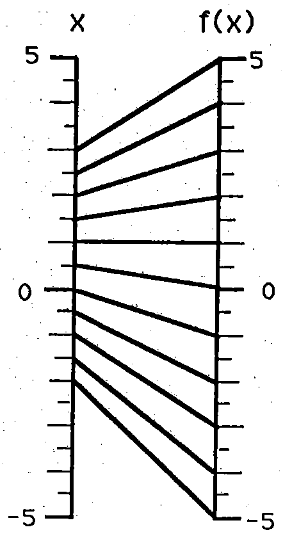
מושג הפונקציה, אחד מן המושגים המרכזיים במתמטיקה, הינו מושג מורכב ולפיכך נשוא לקשיים של תלמידים בעת הוראתו בחטיבת הביניים ובתיכון. בתוכניות הלימודים מתוארות פונקציות הן באמצעות ייצוגן האלגברי והן בצורתן הגרפית. אולי יותר מכל מושג אחר, מזוהה מושג הפונקציה בתודעתנו המתמטית עם ייצוגו הגרפי במערכת צירים קרטזית. מונחים כגון פונקציה קווית, שיפוע, נקודות חיתוך של שתי פונקציות ועוד, נגזרים מתוך הייצוג הקרטזי של פונקציות. במאמר זה נתרכז בייצוג נוסף לייצוג הקרטזי - ייצוג באמצעות מערכת צירים מקבילה.

הצגת פונקציות באמצעות מערכת צירים מקבילה בצד ייצוגן הקרטזי מומשה בסביבה ממוחשבת אותה פיתחנו במיוחד למטרה זו. בעבודתנו הנחתה אותנו התפישה כי לעוצמתם החישובית של המיקרו-מחשבים המצויים כיום בבתי ספר וליכולתם הגרפית, פוטנציאל רב להוראת המתמטיקה והמדעים.

בראשית המאמר נתאר את ייצוגן של פונקציות קוויות במערכת צירים מקבילה. לאחר מכן, נציג את הסביבה הממוחשבת המאפשרת הצגת פונקציות במערכת צירים מקבילה בצד ייצוגן האלגברי והקרטזי. ולבסוף נדון בפוטנציאל הדידקטי הטמון בשימוש בסביבה הממוחשבת להעמקת ההבנה של מושגים בסיסיים הקשורים בפונקציות.

ייצוג פונקציות באמצעות מערכת צירים מקבילה

ברוב תוכניות הלימוד במתמטיקה, פונקציה מוצגת כהתאמה שבה לכל איבר בתחום מותאם איבר יחיד בטווח. ייצוג פונקציה באמצעות מערכת צירים מקבילה, (אשר יכונה בהמשך **ייצוג מקביל**), קרוב במהותו להגדרה זו. הייצוג המקביל כולל שני צירי מספרים מקבילים, האחד מייצג את התחום והשני את הטווח. כל איבר בתחום מקושר לאיבר המתאים בטווח באמצעות קו ישר המחבר אותם. קו זה יכונה **קו מיפוי**. אלומת כל קווי המיפוי מייצגת את הפונקציה כמתואר בציור מס' 1, עבור הפונקציה **$f(x) = 2x - 1$**.



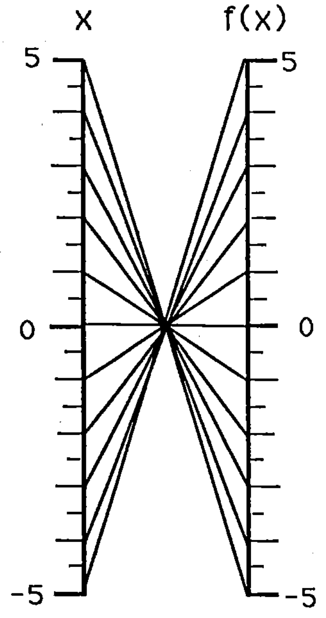
$f(x) = 2x - 1$

ציור 1 : יצוג מקביל של פונקציה קווית

הבה ונתודע לייצוג החדש באמצעות בחינה כיצד מספר מושגים מעולם הפונקציה הקווית משתקפים בו.

__שיפוע__

המקדם a בפונקציה קווית $f(x) = ax + b$ משתקף בייצוג הקרטזי כשיפוע הקו הישר ביחס לציר ה-x החיובי, ומכאן כינויו: "שיפוע הפונקציה". ניתן לחשב את גודלו של השיפוע באמצעות חישוב מנת ההפרשים של שיעורי שתי נקודות על הישר. בייצוג המקביל השיפוע משתקף בצורה הקרובה יותר להגדרתו האלגברית. **המקדם** a הינו הגורם הכפלי בו גדל או קטן קטע בתחום כאשר הוא מועתק אל תמונתו. לדוגמא: בפונקציה $f(x) = 2x - 1$ המתוארת בציור מס' 1, תמונתה של כל יחידה בתחום מוכפלת פי 2 באורכה בטווח. כאשר $a = 1/3$ אורך תמונתו של קטע בטווח יהיה שליש מאורכו של הקטע בתחום. כאשר a שלילי נשמרת תכונה זו, ובנוסף חלה "התהפכות" במעבר הקווים כפי שמתואר בפונקציה $f(x) = -x$ המופיעה בציור מס' 2.



ציור 2 : ייצוג מקביל של פונקציה קווית בעלת מקדם שיפוע שלילי.

נקודת שבת

נקודת השבת של פונקציה היא הנקודה (x,x). בייצוג האלגברי ניתן למצוא את שיעורי נקודת השבת על ידי פתרון המערכת $f(x) = ax + b$, $f(x) = x$.

בייצוג הקרטזי נקודת השבת היא נקודת החיתוך בין הקו החוצה את הרביע הראשון והשלישי ($f(x) = x$) לבין הקו המייצג את הפונקציה. בייצוג המקביל מיוצגת נקודת השבת על ידי קו המיפוי המאונך לצירים המקבילים (הקו היוצא מ-1 בציור מס' 1 ומ-0 בציור מס' 2).

פונקציה הפוכה

כיצד מיוצגת הפונקציה ההפוכה בייצוג המקביל? פשוט למדי, על ידי הפיכת תפקיד התחום והטווח. לחילופין, ניתן לסובב את אלומת הקווים כשציר ה-x משמש כציר סימטריה.

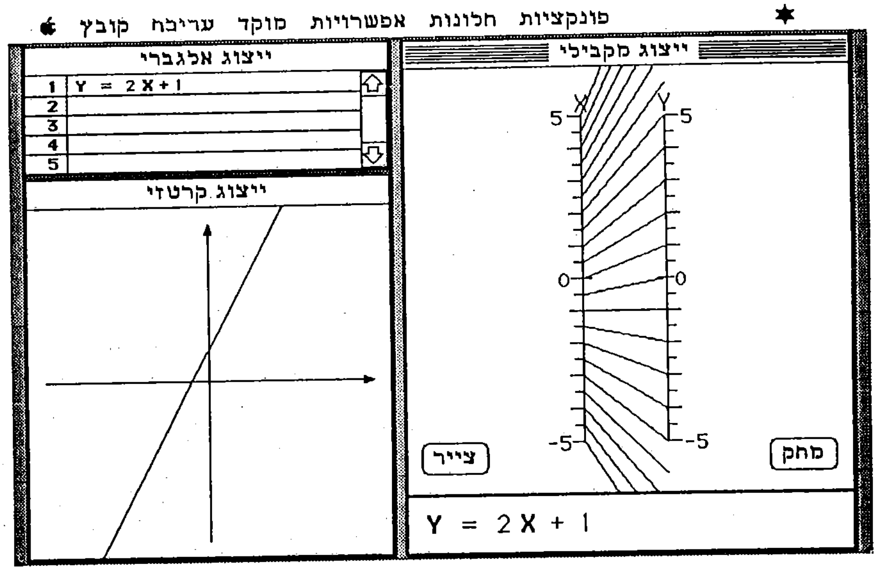
מוקד

בפונקציה $f(x) = -x$ אנו רואים כי כל קווי המיפוי עוברים דרך אותה נקודה הנמצאת בין הצירים. לא קשה להראות כי עבור כל פונקציה קווית, עוברים קווי המיפוי (או המשכם) דרך נקודה אחת ויחידה אותה נכנה בשם: **מ ו ק ד**, זאת מלבד המקרה בו קווי המיפוי מקבילים והפונקציה הינה חסרת מוקד. (אנחנו מזמינים את הקורא לגלות עבור אלו ערכים של a זה קורה). מעבר לכך, לכל פונקציה קווית יש מוקד אחד בלבד, וכל מוקד מגדיר חד ערכית פונקציה אחת בלבד. לפיכך ניתן לייצג כל פונקציה קווית באמצעות נקודה אחת בלבד. משמעות הדבר היא כי הייצוג המקביל של פונקציה אשר נראה בתחילה כעמוס בפרטים מרובים הופך להיות, לפחות במקרה של פונקציה קווית, פשוט עד כדי נקודה. על המשמעות הדידקטית של כך נדון בהמשך.

תאור הסביבה הממוחשבת

מאחר ונדרשת עבודה טכנית רבה בשרטוט הגרף בייצוג המקביל, הצגת פונקציות בייצוג זה לא היתה ישימה בכיתה ללא כלי עזר ממוחשב. לפיכך פיתחנו סביבה ממוחשבת המציגה פונקציות בייצוגן המקביל בצד ייצוגן האלגברי והקרטזי. הסביבה פותחה על מחשב מקינטוש בשפת LightSpeed PASCAL, אך בעיקרון ניתן ליישם את הרעיונות שבה בכל מחשב אחר בעל יכולת גרפית. בסוף פרק זה מובאת רשימת הפקודות של גרסא פשוטה של הסביבה אותה ניתן ליישם מיידית בכתה על ידי כל מורה המעוניין בכך.

הסביבה כוללת שלושה חלונות עיקריים, בכל אחד מהם מוצג אחד מן הייצוגים של פונקציות; אלגברי, קרטזי או מקביל. בדרך כלל בוחר הלומד פונקצירת בייצוגן האלגברי , ואלו מתורגמות מיידית לשני הייצוגים הגרפיים.
בציור מס' 3 מתוארת הצגת פונקציה בשלושת הייצוגים בסביבה הממוחשבת.



ציור 3 : הצגת פונקציה בשלושה ייצוגים בסביבה הממוחשבת.

נתאר בקצרה מספר תכונות של הסביבה:

1. **ציור מספר גרפים באותה מערכת צירים:** ניתן לצייר מספר בלתי מוגבל של גרפים על אותה מערכת צירים. הגרפים בצורתם האלגברית מופיעים ברשימה בחלון האלגברי.

2. **ציור המוקד** : בכל עת ניתן לגרום לכך שהגרפים המקבילים יכללו את המוקד (באמצעות הארכת קווי המיפוי), יצוירו ללא המוקד, או יכללו את המוקד בלבד (הסתרת קווי המיפוי).

3. **הסמכת ייצוגים** : ניתן להציג כמתואר בציור מס' 3 את שלושת הייצוגים אחד בצד השני, כאשר ניתן לבחור איזה מן הייצוגים יהיה בחלון הראשי. לחילופין ניתן לראות כל ייצוג גרפי בנפרד על כל המסך. שינוי כלשהו באחד הייצוגים מתורגם מיידית לייצוגים אחרים. סימון פונקציה מסויימת בייצוג אחד, גורר סימונה בכל הייצוגים. בכל עת ניתן להוסיף או להשמיט פונקציות מן התצוגה בהתאם לרצון הלומד ולצרכיו.

4. **הכנסת פונקציות:** הלומד יכול להכניס פונקציות בכל אחד מן הייצוגים. התוכנית מתרגמת ייצוג זה לשני האחרים. אמצעי הקלט העיקרי בו משתמש הלומד הינו העכבר באמצעותו הוא מצביע על מיקום כלשהו על צג המחשב ומקיש לביצוע פעולה. בייצוג האלגברי משנה הלומד את מקדמי המשוואה על ידי הקשה בעכבר מעל ומתחת למקדם כדי להעלות ולהוריד את ערכו בהתאמה. בייצוג המקביל מוכנסת הפונקציה באמצעות בחירת המוקד שלה.

5. **בירורות גרף :** ניתן בקלות לשנות את הפרמטרים של הגרף כגון סקלת התחום והטווח או צפיפות קווי המיפוי. כמו כן ניתן לבחור את הדיוק הרצוי של מקדמי המשוואה, עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

6. **שליטה על מהירות הציור :** הגרפים יכולים להופיע על המסך מיידית או בצורה מבוקרת על ידי הלומד בכל מהירות הרצויה לו.

7. **ציור גרפים שונים :** סביבת תוכנה זו אינה מוגבלת לפונקציות לינאריות בלבד, וניתן באמצעותה לצייר פונקציות ריבועיות, רציונליות, טריגונומטריות ועוד.

בסביבה זו שמנו דגש רב על מימשק המשתמש, גמישות התוכנה וריבוי האפשרויות העומדות בפני הלומד. בנוסף, ברצוננו לתאר גרסא פשוטה הרבה יותר באמצעותה ניתן להציג פונקציות בייצוג המקביל. הגרסא הפשוטה מיועדת ליישום מיידי בכתה על ידי כל מורה המעוניין בכך. כל אשר עליו לעשות הינו לתרגם את תוכנית המחשב המופיעה בנספח למאמר זה, למחשב המצוי בכתתו. התוכנית המוצגת נכתבה בשפת ה- BASIC (אומנם עבור המקינטוש), אך בקלות יחסית ניתן לתרגמה לכל מחשב אחר בעל יכולת גרפית.

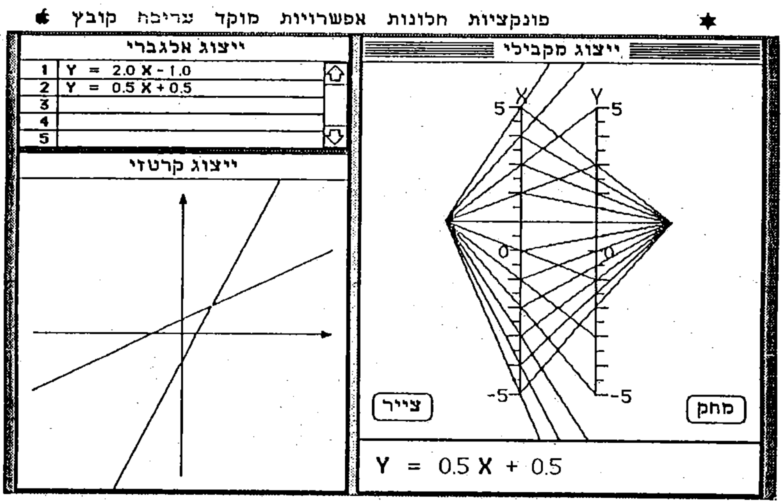
הגרסא הפשוטה אינה כוללת את כל האפשרויות המתוארות לעיל. אך בדומה לסביבה שתוארה, אף בגרסא זו משנה הלומד את מקדמי המשוואה על ידי הקשה בעכבר מעליהם ומתחתם. בכל עת ניתן לצייר את הגרף המקביל לפונקציה הנתונה. כמו כן, ניתן לבחור מראש בגרף הכולל את המוקד, גרף ללא המוקד, או ציור המוקד בלבד. גם בגרסא זו ניתן לצייר פונקציה על פונקציה ובמידת הצורך למחוק את הפונקציות הקודמות ולפנות את הצג להכנסת פונקציות חדשות. גרסא פשוטה זו מאפשרת לתלמידים, להם רקע מינימלי בתיכנות, לשנות את התוכנית על פי רצונם וצרכיהם בעת חקירת הייצוג המקביל (לדוגמא: שינוי מינימלי בתוכנית יאפשר ציור פונקציות לא לינאריות).

הפוטנציאל החינוכי

הייצוג המקבילי הוצע ככלי דידקטי להוראת מתמטיקה כבר לפני שנים רבות (למשל ראה מאמרם של פרידלנדר, רוזן וברוקהיימר, ב 99,1982 Mathematics Teaching). בפרק זה נתאר את הפוטנציאל החינוכי הטמון בהצגה המקבילה של פונקציות לינאריות באמצעות הסביבה הממוחשבת. פוטנציאל זה קשור בהעמקת מושגים בסיסיים מעולם הפונקציות, בחקירת ישויות מתמטיות חדשות, ובהוראת נושאים מתקדמים יותר.

ישנם מספר מושגים המשתקפים בצורה פשוטה ובהירה בייצוג המקביל. ייצוג נקודת השבת באמצעות קו מיפוי המאונך לצירים הינו דוגמא מובהקת לכך. גם שיפוע הפונקציה המיוצג ככיוון אלומת קווי המיפוי, עשוי להיות קל יותר להבנתם של תלמידים.

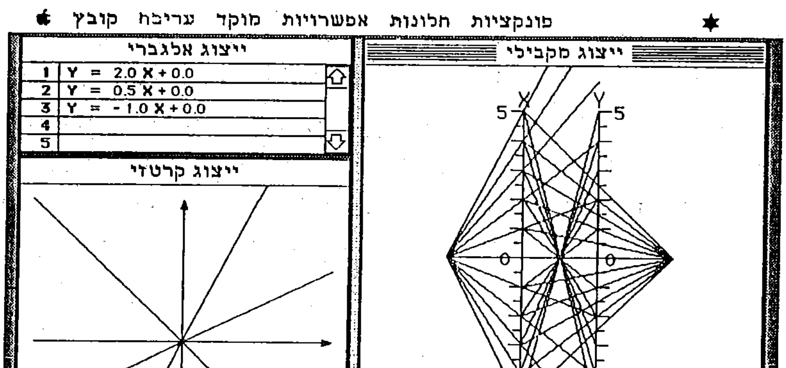
יתרון נוסף גלום בניתוח הדמיון והשוני בין הייצוגים. כאשר התלמיד משווה כיצד משתקף מושג מסוים בייצוג הקרטזי להשתקפותו בייצוג המקביל הוא עשוי לרדת לעומקן של שאלות מתמטיות אודות המושג הנלמד. נבחן לדוגמא כיצד פתרון זוג משוואות לינאריות משתקף בייצוגים השונים. פתרון המשוואות הינו הזוג הסדור אשר מקיים את תנאי כל אחת משתי הפונקציות. בייצוג המקביל, זוג סדור זה הינו קו מיפוי העובר דרך כל אחד ממוקדי הפונקציות. מאחר ודרך שני המוקדים עובר רק קו ישר אחד, פתרון שתי המשוואות הקוויות הינו יחיד ומיוצג על ידי קו מיפוי זה. כלומר, פתרון גרפי של שתי פונקציות קוויות נתונות (הניתנות לייצוג באמצעות המוקדים בלבד) הינו הקו הישר העובר דרך שני מוקדים אלו. בייצוג הקרטזי מיוצג הפתרון כנקודת חיתוך של שני הקווים, ובייצוג האלגברי נדרשת פרוצדורה חישובית למציאת הפתרון. בציור מס' 4 מודגם כיצד מוצג הפתרון בייצוגים הגרפיים בסביבה הממוחשבת. ניתוח הקשר בין פתרון משוואות בדרך אלגברית ובדרכים גרפיות, והצגת הפתרון כזוג מספרים סדור, כנקודה וכקו מיפוי, עשויה לעודד את הנסיון לתפוס את משמעות קבוצת האמת של משוואות מעבר לביטויה בייצוג מסויים.



ציור 4 : ייצוג פתרון משוואות בסביבה הממוחשבת.

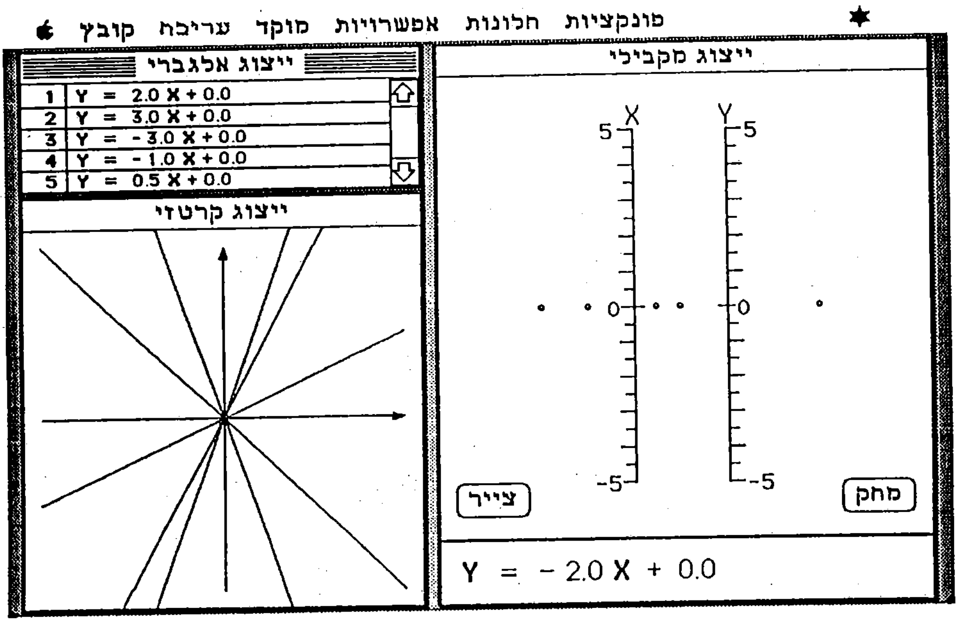
מוקד הפונקציה הקווית בייצוג המקביל הינו ישות מתמטית חדשה שאינה קיימת בייצוגים האחרים. פעילות לימודית מעניינת עשויה להיות חקירת מיקומו של המוקד כפונקציה של המקדמים האלגבריים של משוואה. איתור מיקומו של המוקד ביחס לצירים עשוי להיות דרך נוספת להעשרת התפישה של מושג השיפוע. לדוגמא, נתבונן במשפחת הפונקציות $f(x) = ax$ עבור $a > 1$, $0 < a < 1$, וכאשר a שלילי.

בייצוג המקביל, כאשר המקדם בתחום הראשון, המוקד נמצא משמאל לציר ה-x, בתחום השני נמצא המוקד מימין לציר ה-y, ועבור שיפוע שלילי נמצא המוקד בין הצירים. ראה ציור מס' 5.



ציור 5 : ייצוג פונקציות ממשפחת $f(x) = ax$ בסביבה הממוחשבת

מספר לומדים אשר התנסו בעבודה בסביבה הממוחשבת אותה פתחנו נטו לאחר זמן מה לבחור את הייצוג "מוקד בלבד" המשמיט את קווי המיפוי ומצייר את המוקד בלבד (כפי שנראה בציור מס' 6). לכאורה זהו פרט טכני, אך למעשה נעשה כאן צעד ראשון במעבר קוגניטיבי מהותי: היכולת להתעלם מפרטים והתיחסות ליישות מורכבת כמיוצגת בצורה מינימלית. ראוי לציין כי כאשר עוסקים בייצוג אלגברי או אף בייצוג קרטזי, מעבר זה דורש רמות הפשטה והכללה גבוהות. לעומת זאת, בייצוג המקביל הוא נעשה כפעולה אינטואיטיבית פשוטה. הייצוג של מספר פונקציות בצורה כה חסכונית, עשוי להוביל בצורה יפה לדיון במשפחות של פונקציות.



ציור 6 : הצגת מוקדים בלבד.

לייצוג המקביל והצגתו בסביבה הממוחשבת עשוי להיות שימוש מעניין בהצגת נושאים מתקדמים יותר, כגון הרכבת פונקציות. הרכבת פונקציות נעשית בייצוג המקביל באמצעות הוספת ציר נוסף שישמש כתמונת הפונקציה המורכבת.
הציר המרכזי משמש הן כטווח עבור הפונקציה הראשונה והן כציר התחום של הפונקציה המורכבת. השמטת הציר המרכזי וחיבור הנקודות נותן את הפונקציה החדשה.

סוף דבר

במאמר זה הדגמנו כמה אספקטים של הייצוג המקביל. כמו כן ניסינו להמחיש את עוצמת המדיום הממוחשב לתמיכה בהצגה רבת פנים של מושגים מתמטיים. אין כוונתנו לטעון שלייצוג זה יתרונות דידקטיים בלעדיים על פני ייצוגים אחרים. כמו כן אנו מודעים לכך שהוראת ייצוג זה עלולה להתקל בקשיים. בהמשך, אנו מתעתדים לפעול בשלושה כיוונים: הראשון, הינו פיתוח קוריקולרי של פעילויות לימודיות אשר באמצעותן עשויים להפיק תלמידים את המירב מן השימוש בסביבה הממוחשבת. הכיוון השני כולל ביצוע מחקרים אמפיריים להעשרת הידע המצוי בידינו אודות רובדי ההבנה וקשיי התלמידים ולבחינת התאמת ההוראה לקבוצות לומדים שונות. הכיוון השלישי הינו המשך החקירה המתמטית של הייצוג המקביל באמצעות כלים ממוחשבים. ננסה להרחיב את הבנתנו אודות ייצוג פונקציות לא לינאריות בייצוג המקביל. נחקור לדוגמא מה(ם) המוקד(ים) של פונקציות כאלו, וכיצד מושגים כגון גבול, מחזוריות, אסימפטוטה, ועוד , משתקפים בייצוג זה.

ניסינו להציג ראיה אחרת של תחום מוכר. אם ההשג היחידי של עבודתנו זו היה גרוי סקרנותך המתמטית, הרינו מסתפקים בכך. אם אף יתרום הדבר בדרך כלשהי להעשרת הוראת המתמטיקה בבתי הספר, הרי שמטרותינו הוגשמו במלואן.

* * * * *

<u>ספרות</u>

Friedlander Alex , Guershon Rosen and Maxim Bruckheimer (1982) "Parallel Coordinate Axes" Mathematics Teaching , 99,44-48.

```
'***      Parallel Axes Representation of Linear Functions         ***
'***  By Rafi Nachmias & Avraham Arcavi- Copyright (C) 1987 ***
BUTTON  1,1,"Draw", (20,190)-(120,230)
MENU  6,0,1, " Focus "
MENU 6,1,1, " No Focus": MENU 6,2,1, " With Focus": MENU 6,3,1, "Focus Only"

100 ' *** Modification of the algebric function parameters   ***
WHILE DIALOG(0)<>1                           ' While the draw button wasn't clicked
  k=MOUSE(0)
  px=MOUSE(3) :  py=MOUSE (4)
  IF px>50   AND px<80   AND py<35 AND py<100 AND k<0  THEN m%=m%+ 1
  IF px>50   AND px<80   AND py>35 AND py<100 AND k<0  THEN m%=m%- 1
  IF px>130 AND px<160 AND py<35 AND py<100 AND k<0  THEN b%=b%+ 1
  IF px>130 AND px<160 AND py>35 AND py<100 AND k<0  THEN b%=b%-1

   ' ***   Printing the algebraic function     ***
  CALL TEXTSIZE(18)
  sign$="+": IF b%<0 THEN sign$="-"
  LOCATE 2,2 : PRINT "Y= "  m%/10 " X  "  sign$  ; ABS(b%/10) "   "
  IF MENU(0)=0 THEN m6= MENU(1)
WEND

' ***At this point, the Draw button or the Clear Screen button was clicked***
IF DIALOG(1)=1  THEN GOTO 200 ELSE  CLS : GOTO 100
200 ' ***   Drawing the mapping lines     ***
LINE  (200,10)-(200,210)
LINE  (250,10)-(250,210)
LINE  (195,110)-(205,110
LINE  (245,110)-(255,110)

' ***   Drawing PAR   (unit is 50 points)    ***
300 FOR X=-2 TO 2 STEP .2
   a=m%/10 : b=b%/10
   y=a*x+b
  IF m6=1 OR m6=2 THEN LINE  (200,-X*50+110)-(250,-Y*50+110)
  IF A=1 THEN GOTO 300
   mx=(1/(1-a)) *50+200                 ' The focus horizontal location
   my=-( b/(1-a)) *50+110               '  The focus vertical location
  IF m6=2  THEN LINE  (200,-X*50+110)-(mx, my)
  IF m6 =3 THEN CIRCLE  (mx,my),2
NEXT X
BUTTON  2,1,"clear screen", (20,240)-(120,280)
GOTO 100
```

"נחיתה רכה" של הפונקציה ממעלה שניה

מאת: נצה מובשוביץ-הדר
המחלקה להוראת המדעים והטכנולוגיה, הטכניון

מ ב ו א

התיאוריה הקונסטרוקטיביסטית הפכה בשנות השמונים לתפישה מקובלת במחקר בחינוך מתימטי, בהכשרת מורים, בפיתוח תוכניות לימודים וביישומן בכיתות. (KILPATRICK 1987 , SINCLAIR 1987 , VERGNAUD 1987 , WHEELER 1987). הקונסטרוקטיביסטים מאמינים שהלמידה היא תהליך פנימי שהתרחשותו גורמת לשינויים במסגרת המושגיות הקיימות אצל הלומד בהתחלת הלמידה, ובתוצאה מהם הלומד בונה לעצמו את הידע החדש שלו. לפיכך, ארגון הוראת המתמטיקה בפרקים נפרדים ומנותקים זה מזה ("במגירות") איננו הולם את התורה הקונסטרוקטיביסטית. כדי שהתלמיד ירכוש ידע חדש חשוב שלימוד המתמטיקה יביא ליצירת קשר בין הידע החדש הנרכש לבין הידע הקיים.

מאמר זה מציג גישה המאפשרת לבנות את הידע על פונקציות ריבועיות מתוך הידע שהצטבר על הפונקציות הליניאריות. בחלק הראשון של המאמר, נתבונן במכפלה של שתי פונקציות לינאריות. בחלקו השני נתייחס אל הפונקציה הריבועית: $F(X) = AX^2 + BX + C$ כאל סכום של שלושה מונומים. אחרי כל חלק מופיע דיון בתועלת הפוטנציאלית שלו, ולבסוף מוצעות שאלות אחדות למחקר.

על מנת לממש את הרעיונות האלה במסגרת של תוכנית הלימודים או למטרות מחקריות, הכרחי להיעזר בתוכנת מחשב לתיאור גרפי של פונקציות פולינומיאליות, כמו למשל התוכנה "אנליזה תאורית" (לוגל, 1988).

כל הפונקציות שאליהן נתייחס הן פונקציות ממשיות במשתנים ממשיים.

המחברת מודה לאמנון ארבל איש חברת "לוגל" על רעיונותיו המעוררים, ולעזריאל אביתר, למירי עמית, לאורי לירון ולפיטר מוסטובוי על הערותיהם.

מאמר זה, בגירסה קודמת, הוצג בכנס החמישי של מו"ח - מחשבים וחינוך, תל-אביב, אפריל 1988.

המכפלה של שתי פונקציות לינאריות

נניח שאנחנו יודעים כבר די הרבה על הפונקציה הלינארית, על אופני-ייצוגה (הגרפי והאלגברי), ועל הקשרים שביניהם, אבל איננו יודעים ולא כלום על הפונקציה הריבועית. למעשה, כפי שנראה, חלק גדול של הידע על פונקציות ריבועיות כבר קיים בכוח, ונותר רק להוציאו אל הפועל.

על פי ההנחה, בשלב זה אנחנו מצויידים בתמונה מנטלית של גרף הפונקציה הלינארית, כלומר יכולים ללא קושי לראות בדמיוננו את המקום במערכת הצירים של הקו הישר המתאים לכל פונקציה נתונה ממעלה ראשונה. ננסה לבנות לעצמנו את הגרף של פונקציה F שעדיין איננו מכירים, המתקבלת ע"י כפל של שתי פונקציות לינאריות G ו-T המוגדרות לכל X כך:

$$G(X) = AX + B \quad \text{ו-} \quad T(X) = CX + D$$

לפיכך, F מתאימה לכל ערך של X את המכפלה $G(X)T(X)$.

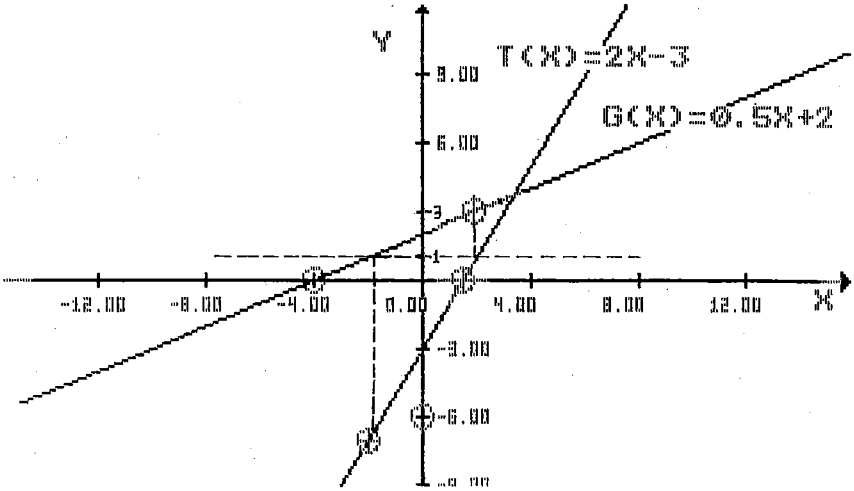
לדוגמא, נתבונן בפונקציה הבאה: $F(X) = (0.5X + 2)(2X - 3)$
כמכפלה של:

$$G(X) = 0.5X + 2$$

$$T(X) = 2X - 3$$

<u>חמש נקודות כמעט ברורות מאליהן</u>

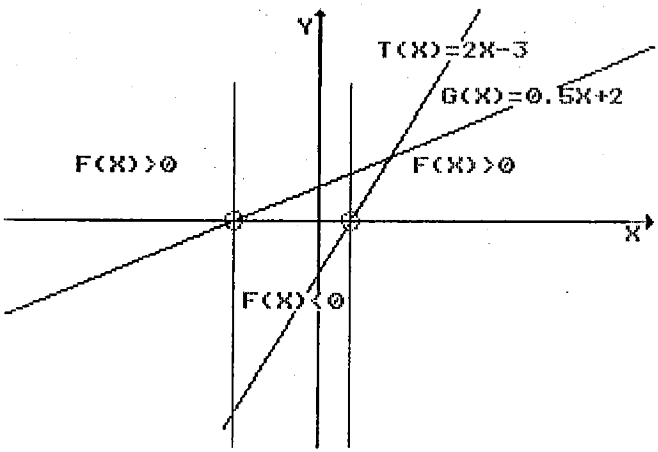
מתברר שבידינו אצור מידע רב על הפונקציה הבלתי מוכרת הזאת. לגרף שלה חייבות להיות <u>שתי</u> נקודות חיתוך עם ציר X, המתלכדות עם נקודות האפס של הגורמים הלינאריים. זה אומר שהפונקציה החדשה בודאי <u>איננה</u> פונקציה לינארית. בנוסף לכך, הפונקציה החדשה מתלכדת עם אחד מהקווים הישרים כאשר השני מקבל את הערך 1. כך יש לנו כבר ארבע נקודות של הגרף של הפונקציה החדשה. נקודה חמישית היא נקודת החיתוך של הפונקציה החדשה עם ציר Y. נקודה זו ממוקמת במכפלת נקודות החיתוך של הפונקציות הלינאריות עם ציר Y. בציור מס. 1 מסומנות חמש הנקודות בעיגול.



ציור 1

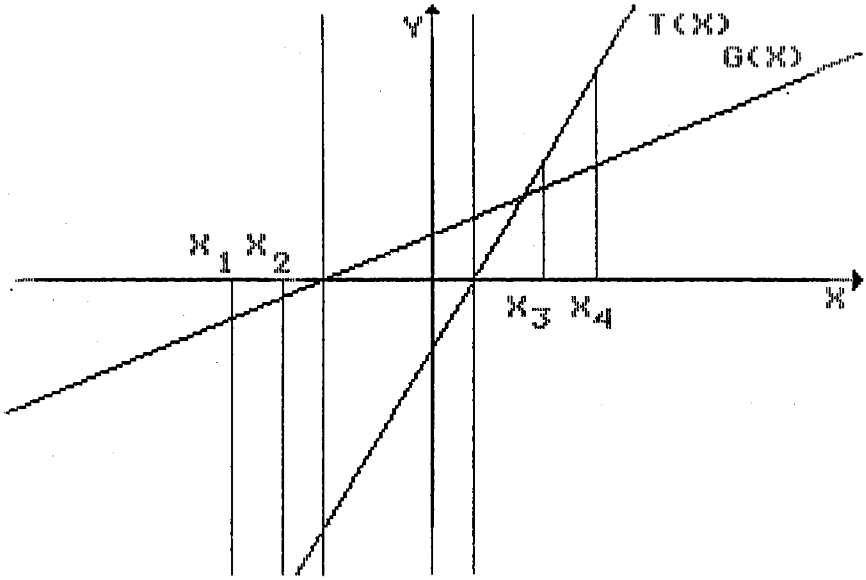
<u>ועוד כמה עובדות מעניינות</u>

נוכל להגיע למידע נוסף על הפונקציה הלא-לינארית על ידי זה שנחקור בקפידה את שני הגורמים הלינאריים. קודם כל ברור שהפונקציה החדשה מוגדרת לכל X. שנית, שתי הפונקציות הלינאריות רציפות בממשיים. כלומר, במונחים של ביה"ס העל-יסודי, ניתן לצייר את הגרפים שלהן "במשיכת קולמוס אחת", או ליתר דיוק, ניתן להשיג שני ערכים קרובים כרצוננו של הפונקציה על ידי בחירת שני ערכים מספיק קרובים של X. למי שהמושג הזה של רציפות של הפונקציה הליניארית אכן קיים אצלו, קל לראות שהמכפלה של שתי פונקציות רציפות אף היא רציפה. שלישית, מכפלה זו חיובית כאשר שני הגורמים הליניאריים הם בעלי אותו סימן, ושלילית כאשר הם בעלי סימנים שונים(ציור 2).



ציור 2

זאת ועוד, עבור ערכי X הנמצאים משמאל לנקודת-האפס הקטנה יותר (כמו למשל X_1 , X_2 בציור 3) הערכים שהפונקציה החדשה מקבלת מהווים מכפלות של שני גורמים שליליים (כמו למשל $T(X_1)$ ו- $G(X_1)$) שכל אחד מהם עולה (כפי שקל לראות מהשוואת הערכים שכל פונקציה מקבלת ב- X_1 וב - X_2). כל אחד מהגורמים, איפוא, יורד בערכו המוחלט, ולכן ככל ש-X גדל המכפלות (החיוביות) יותר קטנות. לפיכך, הפונקציה החדשה יורדת מ- ∞ - לפחות עד נקודת האפס הקטנה יותר. באופן אנלוגי, ימינה מנקודת האפס הגדולה יותר, שתי הפונקציות יחד חיוביות ועולות (כמו למשל עבור X_4 , X_3 (בציור 3) ולכן בתחום זה מכפלתן (החיובית) עולה אף היא.



ציור 3

עכשיו צריך להיות ברור שככל ש-X מתקרב ל- $-\infty$ או ל- $+\infty$ פונקצית המכפלה מתקרבת ל- $+\infty$. על כן, בגלל רציפות הפונקציה, לכל ערך ממשי חיובי מתאים לפחות ערך אחד של X. יתרה מזאת, מאחר שהפונקציה החדשה מונוטונית בחצי העליון של המישור, כל ערך ממשי מתאים בדיוק לשני ערכים שונים של X: האחד משמאל לנקודת-האפס הקטנה, והשני מימין לנקודת-האפס הגדולה.

נחזור עתה לחלק של התחום הנמצא בין שתי נקודות-האפס בחצי התחתון של המישור. בגלל רציפות הפונקציה, בין שתי נקודות האפס, הגרף חייב לעבור מגרף יורד לגרף עולה. וכתוצאה מזה, הטורח של הפונקציה החדשה לא יכול להשתרע עד ל- $-\infty$. חייב להיות לפונקציה ערך מינימלי סופי, ולכן כל ערך שלילי בטווח, פרט אולי למינימום, מתאים לפחות לשני ערכים שונים של X בין שתי נקודות האפס.

נסכם בקצרה את כל הממצאים

(1) התחום של הפונקציה $F(X) = (0.5X+2)(2X-3)$ הוא כל הישר הממשי.

(2) F היא פונקציה רציפה.

(3) ל-F יש שתי נקודות חיתוך עם ציר X, שכל אחת מהן מתלכדת עם אחת מנקודות האפס של הגורמים: $G(X) = 0.5X + 2$, $T(X) = 2X - 3$, דהיינו $(1.5, 0)$ ו - $(-4, 0)$.

(4) ל-F יש נקודת חיתוך אחת עם ציר Y והיא $(0, -6)$.

(5) F מתלכדת עם $G(X) = 0.5X + 2$ כאשר $T(X) = 1$ בנקודה $(2,3)$.

(6) F מתלכדת עם $T(X) = 2X - 3$ כאשר $G(X) = 1$ בנקודה $(-2, -7)$.

(7) F פונקציה חיובית בתחומים $-\infty < X < -4$, $1.5 < X < +\infty$

F פונקציה שלילית בתחום $-4 < X < 1.5$

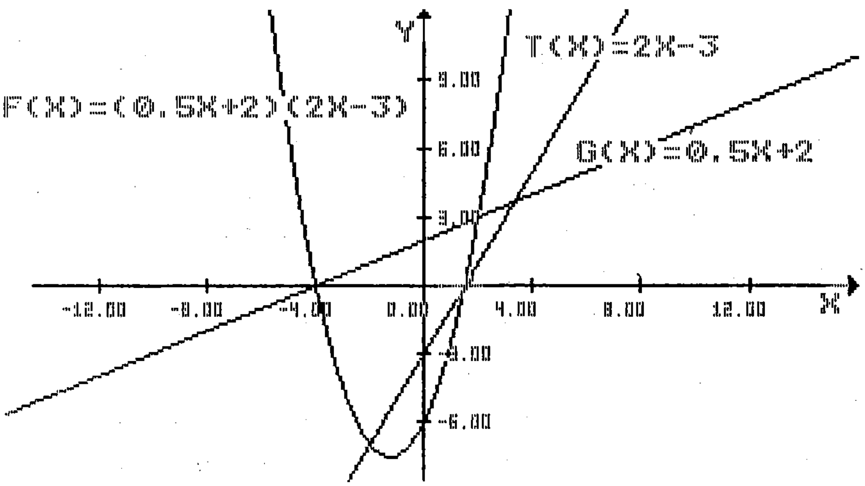
מ-(2) נובע שקיים ערך מינימלי ל-F עבור ערך מסויים של X בתחום $-4 < X < 1.5$.

(8) F פונקציה יורדת בתחום $-\infty < X < -4$

F פונקציה עולה בתחום $1.5 < X < +\infty$.

מ-(1) נובע ש-F מקבלת כל ערך חיובי בדיוק פעמיים, פעם בכל צד.

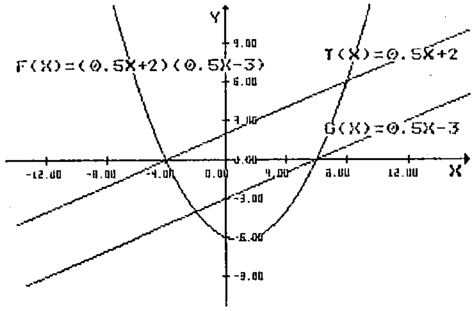
בעזרת מידע זה יש בידינו קירוב טוב למדי של צורת הגרף שחיפשנו. ציור 4 מראה את צורתו המדוייקת של הגרף של פונקצית המכפלה יחד עם הגרפים של גורמיה הליניאריים.



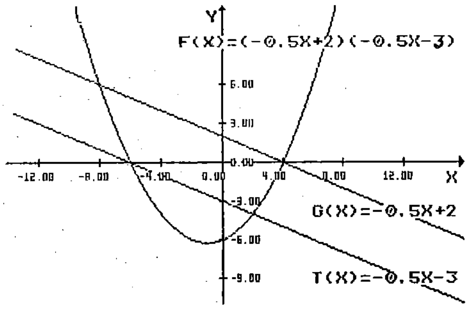
ציור 4

מרחב החקירה של פונקצית המכפלה

היקף החקירה באמצעים המתוארים לעיל הוא עשיר מאד. ניתן למשל להתבונן בתכונות של מכפלת שני קווים מקבילים ולבדוק את ההבדל בין תחומי העליה והירידה כמתואר בציורים 5 ו-6.

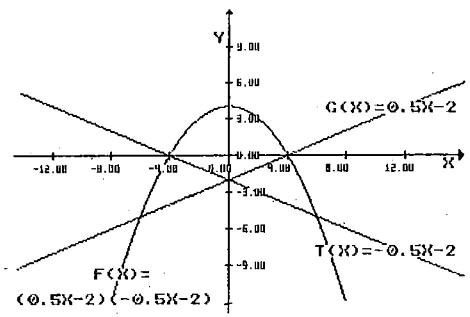


ציור 5

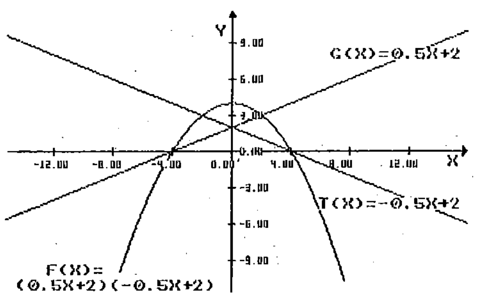


ציור 6

אפשר גם להתבונן במכפלת שני קווים ישרים ששיפועיהם בעלי סימנים הפוכים ולבדוק את ההבדלים בין זוגות קווים הנחתכים מעל ומתחת ציר ה-X, כמתואר בציורים 7 ו - 8.

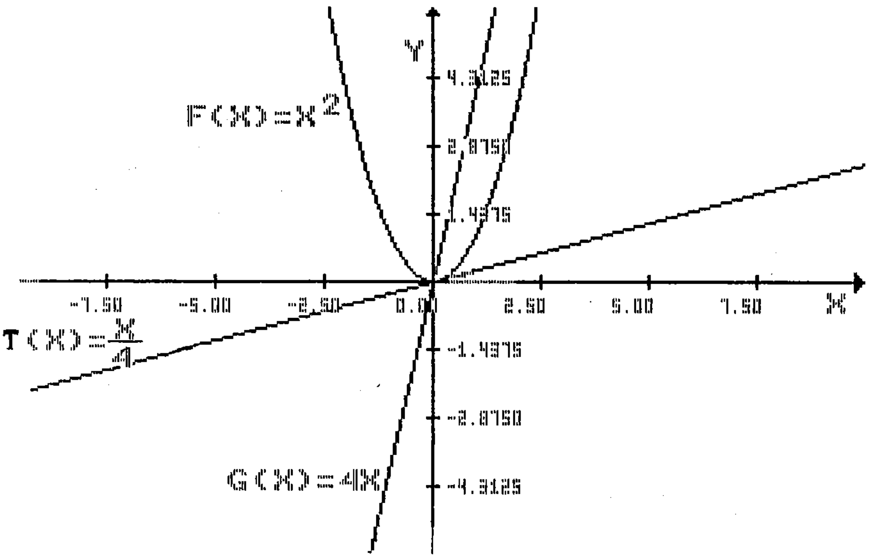


ציור 7



ציור 8

ראויה לחקירה מיוחדת היא המכפלה של שני קווים בעלי שיפועים הופכיים. ציור 9 מתאר זוג כזה. שני הישרים בציור 9 עוברים דרך הראשית ומכפלתם יוצרת את הפרבולה היסודית $F(X) = X^2$.בחלק השני של המאמר ניעזר בה להמשך הפיתוח.



צ י ו ר 9

<u>האם במכפלה ניתן למצות את כל האפשרויות</u> ?

קיימת מגבלה חשובה שאין להתעלם ממנה בהקשר זה. אף כי הצורה הכללית של המכפלה של שתי פונקציות לינאריות היא: $F(X) = AX^2 + BX + C$, **אין** פונקצית המכפלה נותנת תמונה שלמה של הפונקציה הריבועית מפני שלא כל פונקציה ריבועית ניתנת להצגה כמכפלה של שני גורמים לינאריים.
נשאלת השאלה: איך הגרפים של אותן פונקציות לא פריקות מתייחסים לגרפים של פונקציות ריבועיות שניתנות לפרוק ליניארי? נחזור לשאלה זאת וננתח אותה באופן איכותי אחרי דיון הביניים.

ד י ו ן   ב י נ י י ם

בדרך כלל הלימוד של הפונקציות הריבועיות בא אחרי הלימוד של הפונקציות הליניאריות. בסוף לימוד אינטנסיבי של הקו הישר, ייצוגו האלגברי והגרפי והקשרים בין תכונות הקווים לבין הפרמטרים, סוגרים את "המגירה" הזאת והניתוח של הפונקציות הריבועיות פותח אפיק חדש לגמרי שבו מתחיל ניתוח שיטתי של הקווים העקומים. ברוב הספרים (אפילו בספר כל כך טוב כמו הספר של LORCH 1987) הפונקציות הריבועיות "מוצנחות" בלי כל קשר לפונקציה הלינארית שלימודה אך זה הסתיים. אכן התכונות של הקווים העקומים שונות מאד מהתכונות של הקו הישר: שיפוע בלתי קבוע, נקודת אקסטרמום, סמטריה

לעיתים, אפשרות של זוגיות או אי-זוגיות וכו'. בנוסף לכך, הפיתוח המתימטי הטהור של הפונקציה הריבועית לא דורש ידע על הפונקציה הלינארית. נראה בבירור שיש הצדקה להפרדת שני הנושאים. למרות זאת, כפי שראינו, הפרדה זו לא רק שהיא מיותרת מבחינה מתימטית, אלא שמבחינה פדגוגית ופסיכולוגית יש לה מחיר. לימוד הצורה האלגברית של מכפלת שתי פונקציות לינאריות במקביל לחקירת ההצגה הגרפית של פונקציית המכפלה, יכול להוות מעבר טבעי מהפונקציות הלינאריות לפונקציות הריבועיות. חקירה נוספת של תכונות משותפות ושל הבדלים בין נציגים של תת-הקבוצות השונות של משפחת פונקציות-המכפלה, כפי שראינו לעיל, יכול להצעיד את התלמידים צעד משמעותי קדימה לקראת הבנה של הפונקציות הריבועיות במובן המלא של המילה, שעליה הרחיבו את הדיבור DAVIS ו - HENKIN במאמריהם המשותפים (1978).

הפונקציה הריבועית כסכום של שלושה מרכיבים

<u>חצפיות אחדות שמעוררות תמיהה</u>

היחסים בין התכונות הגיאומטריות של הגרף לבין הערכים של כל אחד מהפרמטרים במקרה של הפונקציה ממעלה שנייה הרבה יותר מעורפלים מאשר במקרה של הפונקציה הלינארית. הטיפול המקובל בגרף של הפונקציה ממעלה שניה $F(X) = AX^2 + BX + C$ בבית הספר העל-יסודי הוא על ידי ציור של גרף הפונקציה $F(X) = AX^2 + K$, כאשר $K = (4AC - B^2)/4A$, ועל ידי הזזת ציר Y ב $B/2A$- יחידות. טיפול זה מתבסס על הטיפול האלגברי הידוע בשם "השלמה לריבוע שלם" ונשען על חישוב הביטוי הידוע בשם "דיסקרימיננטה". תירגול טוב ומקובל בנושא זה הוא לתת ללומדים לערוך סקיצה של הגרף עבור פונקציות ממעלה שנייה בעלות ערכים שונים לאחד הפרמטרים, כאשר שאר הפרמטרים מקבלים ערכים קבועים. פעילות זאת כרוכה כידוע בהרבה חישובים. המיגבלות של שירטוט ידני של סקיצה של פרבולה תורמות קושי נוסף. כל זה יוצר בסופו של דבר לימוד אשר בעיקרו הוא אלגברי וטכני של הפונקציות הריבועיות. עד כאן חצפית אחת.

וחצפית אחרת. האם ניסית אי פעם לשאול באורח לא פורמלי סטודנטים באוניברסיטה או תלמידי תיכון איפוא בערך במערכת הצירים נמצאת הפרבולה המתאימה לפונקציה ריבועית מסויימת?

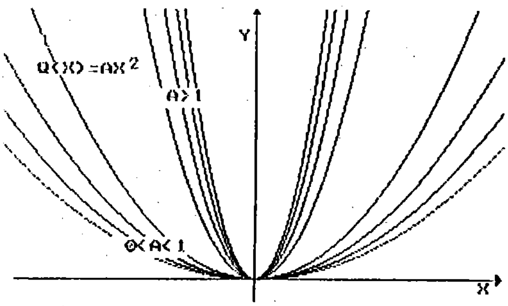
מעטים בלבד מהסטודנטים ועוד פחות מבין בוגרי בית-הספר התיכון מסוגלים לתת תשובה לכך. פעמים רבות בקשתי מסטודנטים שאך זה סיימו לימוד אינטנסיבי של הנגזרת לצייר סקיצה של פרבולה המתבססת על הערכים של C , B , A.

רובם ככולם יודעים להגיד אם הפרבולה "ישרה" או "הפוכה" לפי סימנו של A. השפעתו של C על הזזה מעלה או מטה מוכרת לחלק. אבל מעטים יודעים את ההבדל בין $|A| > 1$ לבין $0 < |A| < 1$ ומעטים מאד "רואים" את המשמעות הגרפית של העובדה ש - $B = F'(0)$, כלומר B הוא השיפוע של המשיק לפרבולה בנקודה $X = 0$.

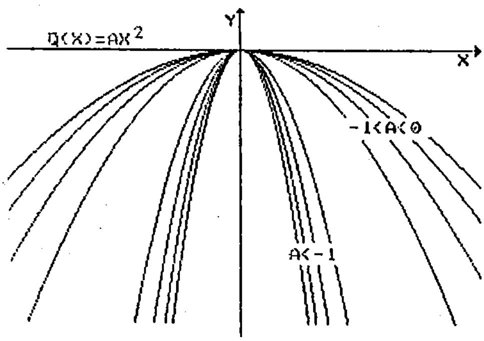
תצפיות אלו הובילו אותי לפיתוח של גישה אלטרנטיבית, שתלמיד בית-ספר תיכון יכול בלי ספק להבין.

<u>הנחות לגבי הידע ההתחלתי</u>

בשלב זה נניח שליטה טובה בפונקציה הלינארית, כמו מקודם, ובנוסף לכך גם היכרות טובה עם פונקציות ריבועיות מן הסוג $P(X) = AX^2$. במלים אחרות, אנו מניחים כעת יכולת ליצור תמונה מנטלית של הגרף של כל פונקציה מהצורה $L(X) = AX$ כולל קשריה עם הפונקציה מהצורה $T(X) = AX + B$, וכמו כן גישה מנטלית ישירה לצורה ולמיקום היחסי במערכת הצירים של משפחת הפרבולות הסימטריות ביחס לציר Y, כל אחת עם קודקודה בראשית (ציורים 10 ו-11).
כפי שראינו לעיל ניתן לעשות זאת באמצעות המכפלה של שתי פונקציות ליניאריות שבהן ערכי A הופכיים ו-B מקבל את הערך 0.



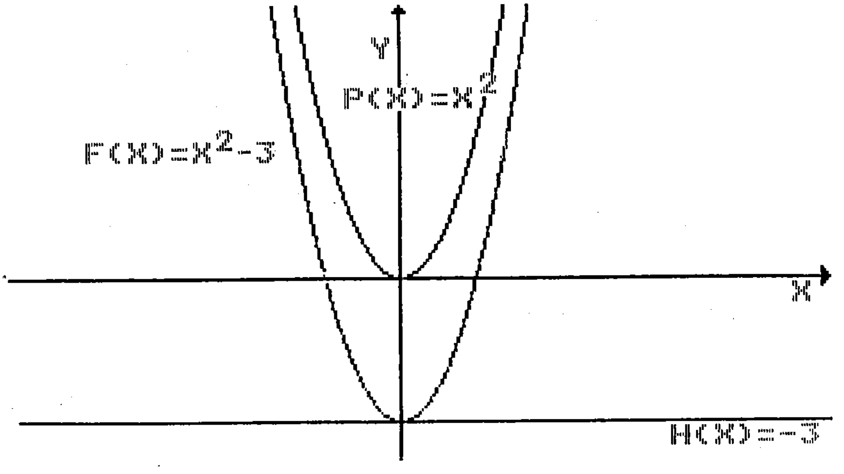
ציור 10



ציור 11

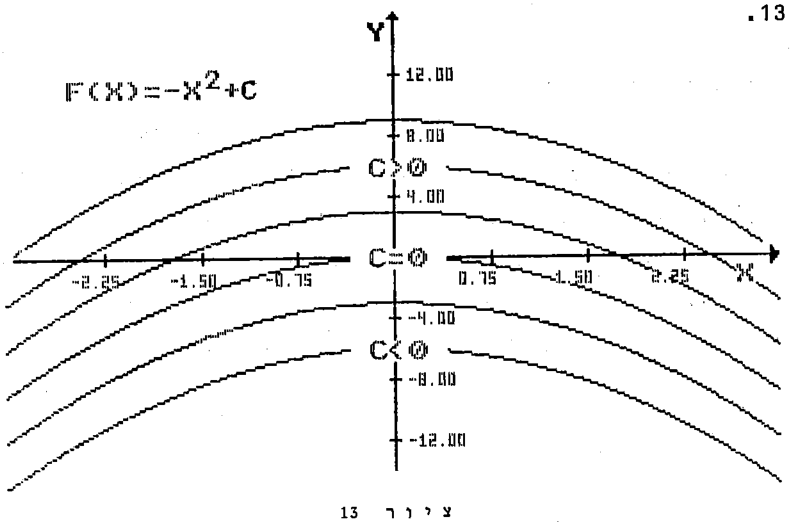
הפונקציה $F(X) = AX^2 + C$ כסכום

כדי להתחיל מהמקרה הפשוט ביותר, נניח ש $F(X) = AX^2 + C$ כסכום של פונקציה קבועה $H(X) = C$ ופונקציה ריבועית מונומיאלית $P(X) = AX^2$. די בולטת לעין האנאלוגיה של מקרה זה למקרה של הוספת קבוע לקו ישר העובר בראשית. הקו האופקי "מזיז" את הפרבולה כמו שהיא, כלפי מטה או מעלה, בהתאם לסימנו של C. (ציור 12).



ציור 12

בגלל המימדים הסופיים של הנייר, הלוח או המסך, הגרפים של שתי הפונקציות לא תמיד נראים חופפים. על כן מראה העיניים עלול במקרים רבים להטעות. על מנת להתגבר על הבעייה הזו, מומלץ לשרטט את שני הגרפים במסגרת שחותכת את שתי הפונקציות עבור אותו ערך של X, ולא עבור אותו ערך של Y, כמתואר בציור 13.



ציור 13

אפילו בשלב ראשוני זה של טיפול בפונקציות, קל לשער שההכללה תופסת, היינו, שתוספת של פונקציה קבועה לגרף של פונקציה כלשהי מסתכמת בהזזה קשיחה של גרף הפונקציה למטה או למעלה בהתאם לסימנו של הקבוע C.

הפונקציה $F(X) = AX^2 + BX + C$ כהזזה של מכפלת קווים ישרים

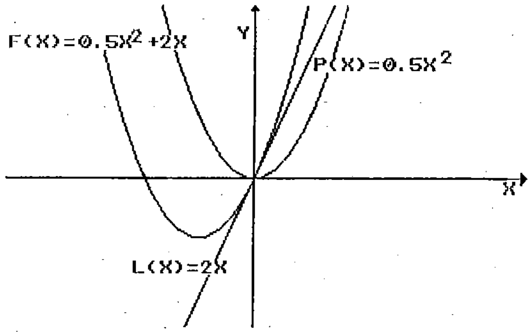
לעיל הזכרנו שההסתכלות על המכפלה של שתי פונקציות ליניאריות איננה מקיפה במלואה את משפחת הפונקציות הריבועיות, שכן לא כל טרינום הוא פריק. אפשר לסלק את המגבלה הזאת באופן הבא. כיוון שכל טרינום ראשוני מהצורה $AX^2 + BX + C$ אפשר לשנות לטרינום פריק על ידי שינוי של הקבוע C, נוכל להתייחס לכל פונקציה ריבועית כאל מכפלה של שתי פונקציות לינארית המוזזת כלפי מטה או מעלה, בהתאם לסימן של המספר שמוסיפים ל-C, כדי להפוך את הטרינום לפריק. למשל, אם נוסיף לפולינום $X^2 + 2X + 3$ את הקבוע 2- נקבל פולינום פריק $(X + 1)(X + 1)$. לפיכך, הפונקציה הריבועית $F(X) = X^2 + 2X + 3$ היא בעלת גרף חופף לזה של הפונקציה $F(X) = (X + 1)^2$ אבל זה האחרון מוזז כלפי מטה ב-2 ביחס לרצוי. נקודה זו סוגרת את ההסתייגות שהועלתה בסוף החלק הראשון לגבי כלליות הטיפול בפונקציות הריבועיות כמכפלות של פונקציות ליניאריות.

הפונקציה $F(X) = AX^2 + BX$ כסכום

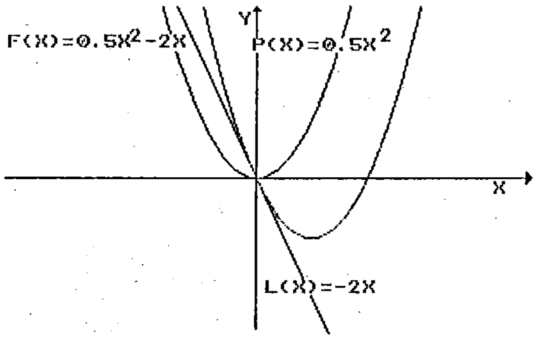
נחזור שוב אל הרעיון של חיבור פונקציות מונומיאליות, ונחבר את שתי הפונקציות הבאות:

$$P(X) = AX^2$$
$$L(X) = BX$$

הואיל והפרבולה P היא ישרה או הפוכה וקודקודה בראשית, והואיל והקו הישר L עולה או יורד דרך הראשית, לכן, איכותית, קיימים ארבעה צירופים עבור הסכום $F = P + L$ (ציורים 17, 16, 15, 14). הציורים מראים שקו ישר העובר דרך הראשית, כאשר מוסיפים לו פרבולה סימטרית יחסית לציר Y עם קודקוד בראשית, מהווה לפרבולה מעין "נווט" המעביר אותה למיקום חדש במערכת הצירים. שתי הזרועות האינסופיות של הפרבולה נמשכות כביכול, האחת כלפי מעלה והשנייה כלפה מטה, והקודקוד "גולש" כלפי מעלה או מטה מהראשית בכיוון המותווה על ידי הקו הישר. הגרף החדש עובר דרך הראשית ומונח כולו בצד אחד של הקו הישר.



ציור 14



ציור 15

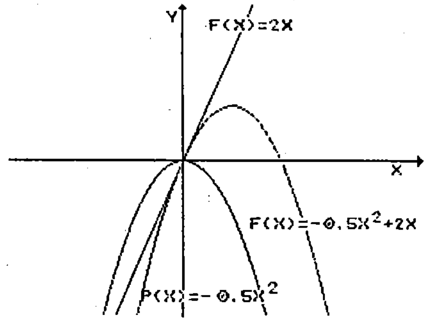
ביתר דיוק, ציורים 14 ו-15 מדגימים את העובדה שעבור כל פרבולה "ישרה" ברביע שבו הקו הישר L מקבל ערכים חיוביים, הסכום של השניים נראה כאילו הוא תוצאה של כך שהקו הישר "מותח" את הפרבולה כלפי מעלה נקודה נקודה, וכל נקודה בשיעור שונה. הפונקציה החדשה F חייבת לקבל ברביע זה ערכים חיוביים, והגרף שלה עובר מעל שני המחוברים. ברביע שבו הקו הישר מקבל ערכים שליליים, הוא כביכול מותח כלפי מטה את הפרבולה נקודה נקודה. ולכן גרף פונקצית-הסכום החדשה עובר בין שני המחוברים.

באופן דומה, ציורים 16 ו-17 מראים שעבור כל פרבולה "הפוכה" P, ברביע בו הקו הישר L מקבל ערכים שליליים זרוע אחת של P "נמתחת" כלפי מעלה וגרף פונקצית-הסכום עובר מתחת לשני המחוברים. ברביע בו הקו הישר מקבל ערכים חיוביים הוא "מותח" כלפי מטה את הפרבולה כמו חבל אינסופי גמיש, וגרף פונקצית-הסכום עובר בין שני המחוברים.

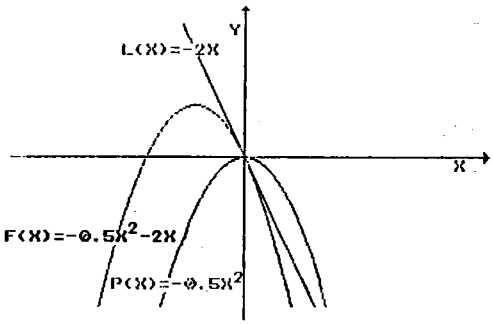
חפיפת הפרבולות

לפני שנוסיף לשני המחוברים לעיל, מחובר שלישי מהצורה $H(X) = C$, נשים לב שהפרבולה $F(X) = AX^2 + BX$ והפרבולה $P(X) = AX^2$ חופפות. לתלמידים, כמובן, הסתכלות זו דורשת בדיקה אלגברית קפדנית של הקשר הכמותי בין

$F(X) = AX^2 + BX$ ו- $F(X) = A(X + R)^2 + S$ עבור ערכים של R ו-S שאותם הם צריכים לאתר. (במקרה זה $S = -B^2/4A$; $R = B/2A$). הואיל ו-$F(X)$ הנ"ל היא מהצורה $F(X) = AX^2 + C$, חפיפתה ל- $P(X)$ מספקת את הנימוק הדרוש.



ציור 16



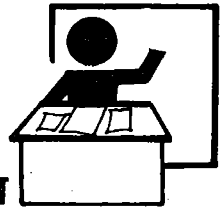
ציור 17

<u>הפונקציה $F(X) = AX^2 + BX + C$ כסכום</u>

להשלמת התמונה, נוסיף עתה לסכום של $P(X) = AX^2$ ו- $L(X) = BX$ מחובר שלישי מהצורה $H(X) = C$. כתוצאה מכך נקבל הזזה של גרף פונקצית-הסכום $P + L$ כלפי מעלה או מטה, ולתוצאה יהיו אפס, אחת או שתי נקודות חיתוך עם ציר X.

נתייחס למקרה הכללי של הפונקציה הריבועית מהצורה $F(X) = AX^2 + BX + C$, המוגדרת לכל X. אם נסתכל עליה כסכום של שלוש פונקציות מונומיאליות: פרבולה מהצורה $P(X) = AX^2$, קו ישר מהצורה $L(X) = BX$, קו אופקי מהצורה $H(X) = C$, נוכל למקם במערכת הצירים את גרף פונקצית-הסכום במהירות ובקלות בעזרת הסימנים של C, B, A, ועל פי הערך המוחלט של A ו- C יחסית ל-1.

לדוגמא, כדי לתאר את גרף הפונקציה $F(X) = 0.2X^2 -0.6X - 3$ נצייר בדמיוננו פרבולה $P(X) = 0.2X^2$ ישרה (כי $A > 0$) ורחבה (כי $|A| < 1$) "נמשכת" כלפי מטה לצד ימין על ידי הקו הישר $L(X) = -0.6X$ שהוא קו יורד ($B < 0$) לאט ($|B| < 1$) (ציור 18). כתוצאה מכך מתקבלת פרבולה ישרה העוברת דרך הראשית ויש לה נקודת חיתוך נוספת עם ציר X עבור ערך חיובי של X. לפיכך יש לה מינימום המתקבל עבור ערך חיובי של X (ציור 19). המחובר השלישי $H(X) = -3$ "מזיז" את הגרף כלפי מטה במקביל לציר Y. לכן הפרבולה המבוקשת פתוחה כלפי מעלה, חותכת את ציר Y מתחת לאפס, בעלת ערך שלילי מינימלי המתקבל עבור ערך חיובי של X, ושתי נקודות אפס: אחת חיובית והשנייה שלילית (ציור 20)



דף לתלמיד

בסדנאות המתקיימות במכון ויצמן, הציעה קבוצת מורים בשיעור "פעילות יוצרת" את המבוך המופיע בעמוד הבא.

מבוכים רבים נמצאים בספרי הלימוד השונים, בעיקר ברמות ג' (ראה מראה מקומות).

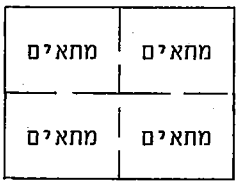
במרבית המבוכים קיים מסלול יחיד או כמה, כאשר נקודת הכניסה אחת והיציאה מאחד הפתחים (או יותר).

חשוב לבדוק מראש את המסלול. נוח לעבוד בכיתה עם מסלול יציאה יחיד.

שים לב! קיום משבצות המקיימות את תנאי המבוך אך נמצאות לא על המסלול, אפשרי ואינו שולל יחידות המסלול.

לשם בניית המבוך, כדאי לשרטט לפני הכתיבה במשבצות המבוך, את המסלול הרצוי.

שים לב! רצוי לא ליצור מצבים של לולאה במסלול כמו בשרטוט הבא:



במבוך שבעמוד הבא ישנו צירוף של בדיקה עצמית של התלמיד.
הליכה לאורך המסלול תתן את התשובה : "הלכתי נכון".

(העובדה ש-ד' א' ש' , הופיעו בנוסף מחוץ למסלול אינה מפריעה).

לנוחיות המורים צרפנו גם מבוך ריק.

מראה מקומות מתוך הספרים לרמה ג':

ספר ב' - עמ' 73 (2 יציאות) ספר ג' חוברת א' עמ' 25
המדריך לספר ב' - עמודים 121, 179. הנדסה III - עמ' 16.
ספר ג' חוברת ב' עמודים 27, 46, 58, 73.

<u>דף חזרה לכתה ז' בנושא: משברים עשרוניים לשברים פשוטים</u>

שרטט שביל יציאה מן המבוך. מותר לעבור רק דרך פתח המוביל למשבצת אשר בה התרגיל נכון

צרף את כל האותיות במשבצות שעברת ותקבל תשובה לעבודתך

כ נ י ס ה	ה $0.1 \neq \frac{1}{100}$	ש $0.5 = \frac{1}{5}$	ד $\frac{1}{8} = 0.125$
ס $0.01 = \frac{1}{10}$	ל $0.5 > \frac{1}{5}$	ב $0.875 = \frac{5}{8}$	ט $0.32 = \frac{32}{10}$
ץ $0.8 = \frac{1}{8}$	כ $0.25 = \frac{1}{4}$	ג $0.075 \neq \frac{15}{200}$	מ $1.4 = 1\frac{1}{4}$
פ $0.4 = \frac{1}{4}$	ת $0.2 = \frac{1}{5}$	י $0.08 = \frac{80}{1000}$	נ $1.05 = 1\frac{5}{100}$
ר $0.25 = 2\frac{1}{2}$	א $0.6 = \frac{3}{5}$	ק $0.375 = \frac{375}{10}$	כ $1.7 = \frac{17}{10}$
ש $0.037 = \frac{37}{1000}$	צ $0.3 \neq \frac{30}{100}$	נ $0.625 < \frac{6}{8}$	ו $0.101 = \frac{1}{10} + \frac{1}{1000}$

<u>דף חזרה לכתה ז' בנושא: משברים עשרוניים לשברים פשוטים</u>

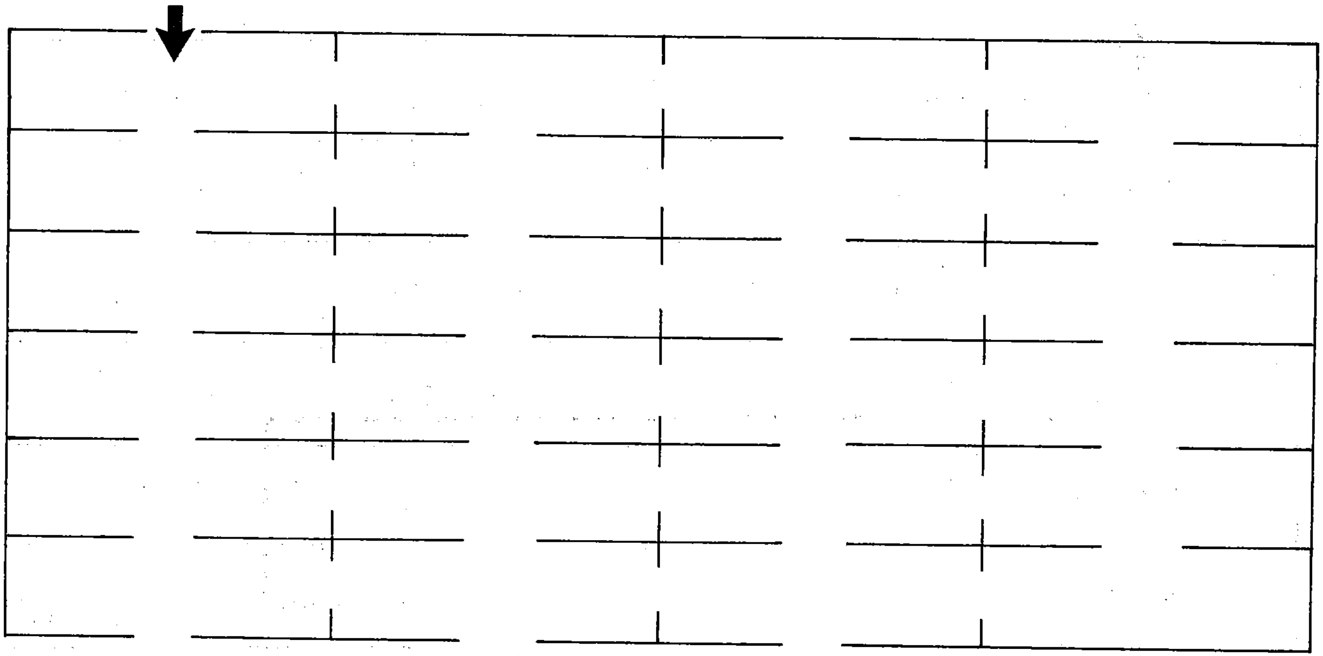
שרטט שביל יציאה מן המבוך. מותר לעבור רק דרך פתח המוביל
למשבצת אשר בה התרגיל נכון

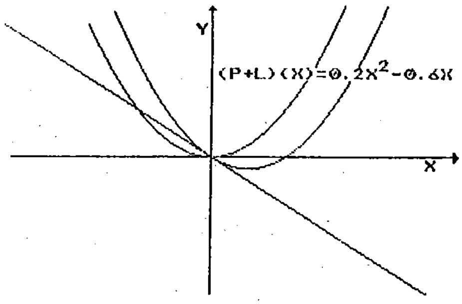
צרף את כל האותיות במשבצות שעברת ותקבל תשובה לעבודתך

כניסה	ה $0.1 \neq \frac{1}{100}$	ש $0.5 = \frac{1}{5}$	ד $\frac{1}{8} = 0.125$
ס $0.01 = \frac{1}{10}$	ל $0.5 > \frac{1}{5}$	ב $0.875 = \frac{5}{8}$	ט $0.32 = \frac{32}{10}$
ץ $0.8 = \frac{1}{8}$	כ $0.25 = \frac{1}{4}$	ג $0.075 \neq \frac{15}{200}$	מ $1.4 = 1\frac{1}{4}$
פ $0.4 = \frac{1}{4}$	ת $0.2 = \frac{1}{5}$	י $0.08 = \frac{80}{1000}$	נ $1.05 = 1\frac{5}{100}$
ר $0.25 = 2\frac{1}{2}$	א $0.6 = \frac{3}{5}$	ק $0.375 = \frac{375}{10}$	כ $1.7 = \frac{17}{10}$
ש $0.037 = \frac{37}{1000}$	צ $0.3 \neq \frac{30}{100}$	נ $0.625 < \frac{6}{8}$	ו $0.101 = \frac{1}{10}+\frac{1}{1000}$

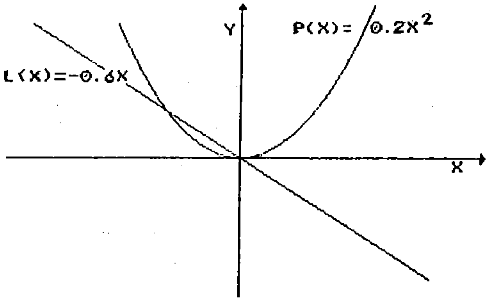
שרטט שביל יציאה מן המבוך. מותר לעבור רק דרך פתח המוביל
למשבצת אשר בה התרגיל נכון

צרף את כל האותיות במשבצות שעברת ותקבל תשובה לעבודתך

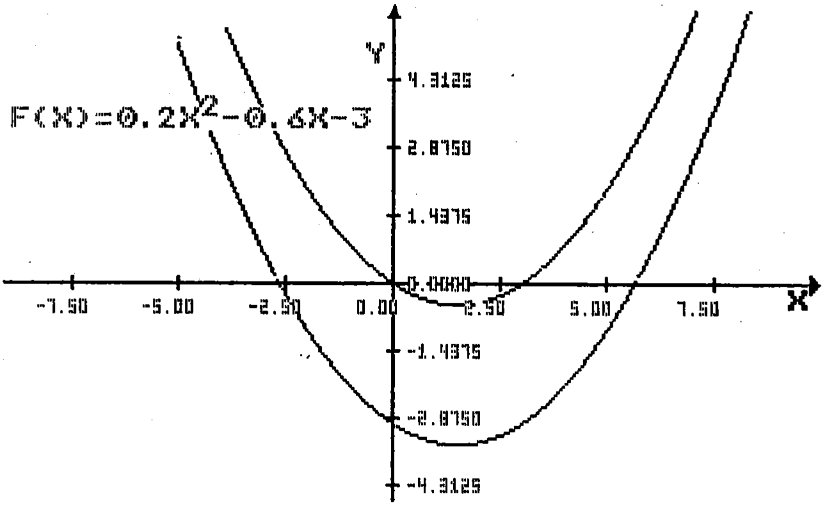




ציור 19



ציור 18



ציור 20

<u>הקשר בין גישתנו לבין "השלמה לריבוע שלם"</u>

קל לראות ששלוש הפרבולות $F(X) = AX^2 + BX + C$, $(P + L)(X) = AX^2 + BX$, $P(X) = AX^2$ הן פרבולות חופפות. לשם כך מספיק להתבונן בווקטור (R, S) המחבר את הקודקודים של $P(X) = AX^2$, ושל $F(X) = AX^2 + BX + C$. וקטור זה, מציין את הכיוון והגודל של ההעתקה המעתיקה את $P(X)$ ל - $F(X)$. הוא גם מחזיר אותנו לגישה המסורתית של "השלמה לריבוע שלם" מאחר ש —

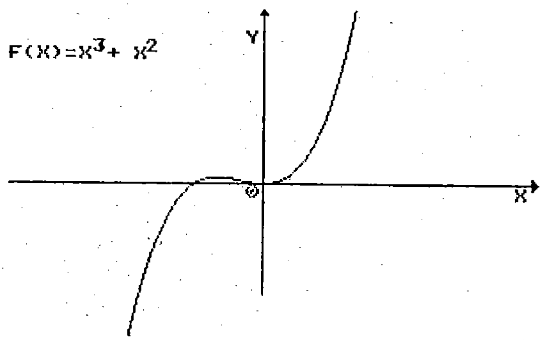
$S = (4AC - B^2)/4A$; $R = - B/2A$

ד י ו ן

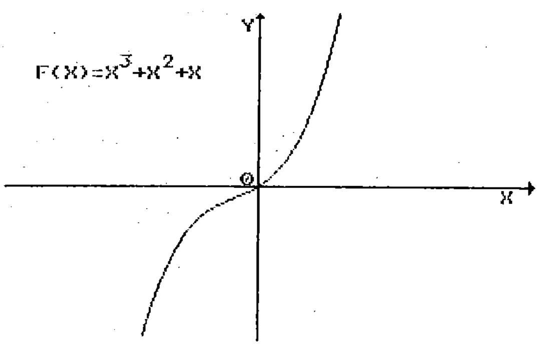
מאמר זה בא להציע שלא לשמור בבידוד הדדי את שני המקרים הראשונים של הפונקציות הפולינומיאליות. יתר על כן, הוא מצביע על כך שהפרדת שני הנושאים כרוכה בהפסד הן מהיבט המתימטי והן מההיבט הדידקטי.

בהמשך לימוד האלגברה כאשר דנים בתכונות של הפונקציות הריבועיות, עוסקים בפתרון משוואות ריבועיות, מערכות של משוואות, או אי-שיוויונים ריבועיים, אפשר להפיק תועלת רבה מהיכולת לתאר בקלות ובמהירות את הגרף בכל רגע שהוא רצוי ונחוץ. גם שיטת פירוק הפולינום הריבועי למכפלה של שתי פונקציות לינאריות, במקרה הצורך עם תוספת של קבוע שמזיז את הגרף הפריק אל הגרף הרצוי, וגם שיטת פיצול הפולינום הריבועי לסכום של שלושה מונומים, מתאימות ליצירה של תמונה מנטלית של גרף הפונקציה.

את שני התהליכים שתוארו במאמר ניתן להתאים לפולינומים ממעלה גבוהה יותר. הם מספקים דוגמאות של תהליכים בני הכללה. כך לדוגמא אפשר לשאול: איזה מידע נוכל להסיק מהגרפים של שלוש פונקציות לינאריות עבור הגרף של מכפלתן? איך זה שהגרף של $F(X) = X^3$ נראה כפי שהוא נראה ואיך בהשוואה אליו ניראים הגרף של הפונקציה $F(X) = X^3 + X^2$ (ציור 21) והגרף של הפונקציה $F(X) = X^3 + X^2 + X$ (ציור 22)?



ציור 21



ציור 22

הפרק על פולינומים מדרגות גבוהות יותר, שכרגע נמצא מחוץ לתוכנית הלימודים של בית-ספר תיכון, יכול להפוך לנושא מרתק בתוכנית הלימודים בעידן שבו זמינותם של הגרפים איננה מהווה בעיה הודות לתוכנה הקיימת למחשבים. אפשר לשלבם ולהשתמש בהם על מנת לפתח תמונה מנטלית של הפונקציות השונות, כאמצעי-עזר לאינטואיציה מתימטית הדרושה לטיפול בפונקציות. כיוון ש"ראיית" האלגברה נעשתה בימינו אפשרית הודות למחשבים, ניתן להיעזר בהם לתיפקוד אלגברי משמעותי ולא רק טכני.

הכלי החזותי לא מהווה רק כלי עזר להדגמה סטטית. הוא יכול גם לשמש גם כסביבה שמעוררת בעיות. סביבה כזאת מוליכה ללמידה המדורבנת על ידי חיפוש תשובות לשאלות המתעוררות. דרך למידה זאת אופיינית לאדם משחר ילדותו. יתר על כן, השימוש בגרפיקת מחשב לגילוי תכונות של פונקציות שונות טומן בחובו הרבה מאוד הפתעות מתימטיות. (דיון יותר רחב על ערכה של הלמידה לקראת תשובה לשאלה שמתעוררת בלומד ועל ערכה של ההפתעה בלימוד מתימטיקה מופיע ב- MOVSHOVITZ-HADAR 1988-A 1988-B).

הפונקציות הפולינומינאליות הן הפונקציות הפשוטות ביותר שאפשר לבנות, אך למרות פשטותן ואולי בשל פשטותן הן בעלות תפקיד מרכזי מאד במתמטיקה. חלקים אחדים באלגברה של תורת הפולינומים הם מאד עמוקים. המשפט היסודי של האלגברה מהווה דוגמא לכך. לפונקציות פולינומיאליות יש חשיבות גדולה גם באנליזה שהרי בעזרתן ניתן להגיע לקירובים של פונקציות מסובכות ביותר במגוון של דרכים. זאת הסיבה לכך שלימוד פונקציות פולינומינאליות משחק תפקיד כה מרכזי בתוכנית הלימודים במתמטיקה, ולכן גם לימוד הפונקציות הלינאריות והריבועיות הוא כל כך בסיסי. ללמד אותן כשני נושאים נפרדים אשר אין ביניהם לבין עצמם קשר ואין הם מובילים לפיתוח רעיונות מתקדמים על פולינומים בכלל, זוהי על כן החמצה של ממש.

קשה להפריז בהדגשת החשיבות של ההצגה החזותית לפיתוח האינטואיציה המתמטית. הניתוח האיכותי המתאפשר על ידי הייצוגים החזותיים הוא שעושה את כל ההבדל בין הגישה המסורתית להוראת הפונקציה ממעלה שנייה לבין הגישה שמוצעת במאמר הנוכחי. בדרך כלל שולטים בהוראת המתמטיקה ובפרסומים מתמטיים בכתב השיקולים הכמותיים. שיקולים איכותיים הם נדירים מאוד. באופן פרדוקסלי, דווקא התמקדות בחלק האיכותי של הארגומנטים הכמותיים הופכת אותם בדרך כלל למובנים יותר עבור קהל יותר רחב.

הדיון האיכותי בפולינומים ממעלה ראשונה ושנייה, כפי שהוצג במאמר זה, אמור להוכיח את עצמו כהשקעה שתניב פירות בבוא העת כאשר יתחיל לימוד החשבון הדיפרנציאלי, גיאומטריה אנליטית, ואלגברה מודרנית.

ל"תחושה בקצות האצבעות" של הפולינומים ממעלות נמוכות יכולות להיות השלכות משמעותיות לגבי המשך לימוד המתמטיקה. היכולת להעלות בדמיון את המראה של גרף הפונקציה היא משענת חשובה כאשר יש לבצע משימות מתמטיות יותר מתקדמות.

מחשבות אחדות בכיוון מחקר

תוך כדי עבודה על מאמר זה, התעוררו בי שאלות רבות שראויות להיחקר:

- מהם התהליכים הקוגניטיביים והמטקוגניטיביים (GAROFALO AND LESTER 1985) הכרוכים בטיפול האיכותי בפולינומים לפי המתואר לעיל?
- ZASLAVSKY (1987) מצאה דפוסים של תפיסות מוטעות הקשורות למעבר הדו-צדדי בין הייצוג האלגברי לבין הייצוג הגרפי של הפונקציות הריבועיות? האם המאמר הנוכחי מסייע להתגבר עליהן או למנוע אותן?
- JANVIER (1987) מציע אנלוגיה בין ייצוג פונקציה כמושג מתמטי בתפיסת התלמידים לבין קרחון דמוי כוכב מחומש שרק אחת מפינותיו נראית מעל למים ברגע מסויים. הכוכב שלו הוא בעל חמש זרועות המכילות את הסכימות הבאות כרכיבים של ייצוג הפונקציה: עצם, טבלה, גרף, תיאור מילולי ונוסחה. בכל פעם, ועל פי רצוננו, רכיב אחד ניגלה וארבעת האחרים נסתרים. במובן זה, מה מוסיפים הרעיונות המוצגים במאמר זה לייצוג של פונקציות ריבועיות בתפיסת התלמידים? האם הם עוזרים להחליק את המעבר בין סכימות שונות? האם הם עוזרים לסובב את הקרחון המחומש של JANVIER ביתר קלות?
- איזה סוג של פיתוח תוכנית לימודים יכול להגשים את הרעיונות שלעיל ולהביאם לכיתה? באיזו מידה הערכה של ניסוי כזה תעשה צדק לפוטנציאל התיאורטי שיש לרעיונות אלה להתפתחות המתמטית של הלומד? איך ניתן להשוות את הגישה המוצעת לגישה המסורתית? איזה כמות של למידה אוטונומית ניתנת לביצוע בגישתנו תלוית-המחשב? באיזו מידה, הגישה המקשרת בין הפולינומים ממעלה ראשונה ושנייה תביא את התלמידים להתיחס למתמטיקה כאל דיסציפלינה שניתנת לבנייה ויצירה ו"שייכת להם", ולא כאל דבר מוגמר שמישהו אחר הכין? מהי הפרדיגמה המתאימה למחקר חינוכי מסוג זה (HOWE 1985)?
- לאיזה סוג של מורים (למשל, לפי האיפיונים של THOMPSON 1984) יש היכולת ליצור לעצמם תמונה מנטלית של הפולינומים הריבועיים? מהי ההשפעה של יכולתם זאת על תפישתם הם של האלגברה הכרוכה בכך? ועל תפישתם של תלמידיהם ?

- במקום אחר (MOVSHOVITZ-HADAR 1988A) , תיארתי אנלוגיה בין מלחין ומבצע בהתאם לתפקידם במוסיקה לבין מתימטיקאי ומורה למתימטיקה בהתאם לתפקידם במתמטיקה. מורים מומחים הם היום מוקד למחקר (BERLINER 1986, BROPHY 1986 , LEINHARDT AND PUTNAM 1986 , BOURKE 1985)

במיוחד מעניינות דרכיהם של המומחים "לנגן" את "המוסיקה המתימטית" , כך שהיא תסבר את אוזנו של התלמיד. בהשתמש בסביבה לימודית פתוחה תלוית-מחשב כפי שמוצע במאמר זה, מורים מומחים עושים יותר מ"נגינה לפי התווים". הם "מאלתרים" בהתאם לתגובת הקהל ובהתאם לטעמם המתימטי. הם מאפשרים לתלמידים לנסות רעיונות משלהם תוך לקיחת סיכון קטן של היווצרות תפיסות מוטעות. איך פועלים המורים המתחילים? מה הם יכולים ללמוד מהמומחים?

- אחרון אחרון חביב, מה צריכות להכיל תוכניות לימוד להכשרת פרחי-הוראה על מנת לשפר את כישרון האילתור? מה משמעות הדבר: לעודד את הקונסטרוקטיביזם אצל המורה העתידי? UNDERHILL (1986) פרש יריעה רחבה בענין, ומאמר זה מציע רעיונות אחדים הראויים ליישום, אך נחוץ מחקר קפדני בשאלות אלו ואחרות, אם ברצוננו לראות השפעה של המחקר על החינוך המתמטי בהתקרבנו אל העשור האחרון של המאה.

Arbel, Amnon and Movshovitz-Hadar Nitsa, (1988): Discriptive Analysis - IBM-PC Software and Learning Materials , Logal, Kiryat Shmona 10200, Israel.

Berliner, David C. (1986): In Pursuit of the Expert Pedagogue, Educational Researcher , August/September issue pp. 5-13.

Bourke, S.F. (1985): The Study of Classroom Contexts and Practices. Teaching and Teacher Education , Vol. 1, No. 1, pp. 33-50.

Brophy, Jere (1986): Teaching and Learning Mathematics: Where Research should be going, Journal for Research in Mathematics Education , Vol. 17, No. 5, pp. 323-346.

Davis, Robert b. and Henkin Leon (1978): Aspects of Mathematics Learning That Should Be the Subject of Testing, In Testing, Teaching and Learning a Report of a Conference on Reasearch on Testing, NIE pp. 26-48

Garofalo, Joe and Lester, Jr., Frank K. (1985): Metacognition, Cognitive Monitoring, and Mathematical Performance, Journal for Research in Mathematics Education , Vol. 16, No. 3, pp. 163-176.

Henkin Leon and Davis, Robert b. (1978): Inadequately Tested Aspects of Mathematics Learning, in Testing, Teaching and Learning a Report of a Conference on Reasearch on Testing, NIE. pp.49-63

Howe, Kenneth, R. (1985): Two Dogmas of Educational Research, Educational Researcher , October 1985, pp. 10-18.

Janvier Claude (1987): Representation and Understanding: The Notion of Function as an Example, in Janvier C. (Ed.): Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hilsdale N.J., pp.67-71

Kilpatric Jermey (1987): What Constructivism Might Be In Mathematics Education, in Bergeron J. Herscovics N. & Kieran C. (Eds.) Proceedings of the 11th International Conference PME-XI, Montreal, pp. 3-27.

Leinhardt Gaea and Putnam, Ralph R. (1986): Profile of Expertise in Elementary School Mathematics Teaching, a Research Report, Arithmetic Teacher , December 1986 pp. 28-29.

Lorch Edgar L. (1973): Precalculus - Fundamentals of Mathematical Analsis W. W. Norton and Compan, Inc., New-York. (pp.70-82)

Movshovitz-Hadar Nitsa, (1988a): Stimulating Presentations of Theorems Followed by Responsive Proofs, For the Learning of Mathematics, Vol 8, No. 2 PP.12-30

Movshovitz-Hadar Nitsa, (1988b):School Mathematics Theorems - An

Endless Source of Surprise *For The Learning of Mathematics*, Vol. 8 No. 3

Sinclair Hermine (1987): Constructivism and the Psychology of Mathematics, in Bergeron J. Herscovics N. & Kieran C. (Eds.) *Proceedings of the 11th International Conference PME-XI*, Montreal, pp. 28-41.

Thompson, Alba Gonzalez, (1984): *The Relationship of Teachers' conceptions of Mathematics and Mathematics Teaching to Instructional Practice*, Educational Studies in Mathematics 15, pp. 105-127

Underhill, Robert G., (1986): *Mathematics Teacher Education: A Constructivist Perspective*, Paper presented to the Discussion Group on The Psychology of Training Practicing Teachers of Mathematics, PME 10, London 1986. 20 pages.

Vergnaud Gerard (1987): About Constructivism, in Bergeron J. Herscovics N. & Kieran C. (Eds.) *Proceedings of the 11th International Conference PME-XI*, Montreal, pp. 42-54.

Wheeler David (1987): The World of Mathematics, in Bergeron J. Herscovics N. & Kieran C. (Eds.) *Proceedings of the 11th International Conference PME-XI*, Montreal, pp. 55-70.

Zaslavsky Orit, (1987): *Conceptual Obstacles in the Learning of Quadratic Functions*, Unpublished doctoral dissertation, Technion, the department of education in science and technology.

כסיסים - גישה אחרת

מאת: עמוס ארליך
בית הספר לחינוך, אוניברסיטת תל-אביב

הנושא "כתיבת מספרים בשיטת הפוזיציה עם בסיס שונה מעשר" חוזר, ככל הנראה, להלמד בפועל בכתה ז'. ברשימה זאת אבקש להציע בשביל נושא זה תוכן ודרכי הצגה השונים הן מגישתה של קבוצת רחובות והן מגישתו של פרופ' מ. משלר. מקורה של הצעתי היא בגישתו של SERVAIS מבלגיה, על פי הרצאתו ששמעתיה לפני שנים, אך זהו מקור התחלתי בלבד ואין ללמוד מהמאמר הנוכחי על גישתו של SERVAIS.

מסיבות שונות נראה לי לפתוח בענין טכני, והוא דרך המעבר מהצגה עשרונית של מספר להצגתו בבסיס אחר, ודרך המעבר בכיוון ההפוך.

<u>גלגול לפנים</u>

להלן דוגמה לשיטת הגלגול לפנים, המוצעת בזה במקום שיטת הסידרה היסודית שבספרים של משלר ושל רחובות.

בעיה: כתוב את המספר 237 בבסיס 4.

פתרון: נפתח בחילוק 237 ב-4 (ולא ב-64!)

```
237:4 = 59
20
---
 37
 36
---
  1
```

לכן 237 מורכב מ-1 ומ-59 ארבעות. נכתוב זאת כך:

```
59 | ~~237~~
-----------
      1
```

ובעת נראה איך בנוי 59 :

```
59:4 = 14
4
-
19
16
-
 3
```

לכן 59 בנוי מ-3 ומ-14 ארבעות (אם תרצה תוכל לומר "59 ארבעות הם 3 ארבעות ועוד 14 ארבעות של ארבעות"), לכן נמשיך את הטבלה כך:

	14	~~59~~	~~237~~
		3	1

תרגיל חילוק נוסף יהיה

$$\begin{array}{l} 14:4 = 3 \\ \underline{12} \\ \;\;2 \end{array}$$

השארית 2 תכתב כמובן מתחת ל-14 ומכיוון שהמנה 3 קטנה מ-4 נכתוב אותה ישירות בשורה התחתונה של הטבלה:

	~~14~~	~~59~~	~~237~~
3	2	3	1

<u>גלגול לאחור</u>

את פתרון הבעיה "כתוב את 3231_4 בבסיס עשר" נדגים ע"י כתיבת שרשרת פעולות החשבון ומימינה שרשרת המצבים של הטבלה.

$3*4+2 = 12+2 = 14$

	14		
~~3~~	~~2~~	3	1

$14*4+3 = 56+3 = 59$

	~~14~~	59	
~~3~~	~~2~~	~~3~~	1

$59*4+1 =236+1 = 237$

	~~14~~	~~59~~	237
~~3~~	~~2~~	~~3~~	~~1~~

<u>דיון</u>

לשיטת הגלגול לפנים ולאחור שני יתרונות על פני שיטת הסידרה היסודית. האחד: כאן איננו צריכים לחשב את הסידרה היסודית. השני: בכל תרגילי החילוק שבגלגול לפנים, המחלק הוא מספר קטן והוא תמיד אותו מספר.

לקורא הרגיל לשיטת הסידרה היסודית עשויים יתרונות אלה להיראות בלתי משמעותיים. כדי להעמיד עצמו במצב קרוב למצבו של תלמיד, מוצע לקורא לנסות את הדברים בבסיס 16. למשל, לעבור מ - 23714_{10} אל $5CA2_{16}$ וחזרה, פעם בשיטה אחת ופעם בשיטה האחרת. ("הספרות"עבור 10 עד 15 הן A עד F).

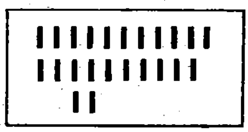
יתרון שלישי של שיטת הגלגול יהיה תקף אם נפתח את הצגת ענין הבסיסים בדרך שתוצע להלן. שיטת הגלגול היא תוצאה טבעית של דרך זאת. הבה נפרט אותה.

הפתיחה

את הצעתנו לדרך פתיחת הנושא נכתוב כאן בסגנון מעורב. חלקה יכתב בלשון הפונה אל תלמידים וחלקה בלשון הפונה אל מורים, ולא נתעכב להכריז על מעבר מלשון ללשון.

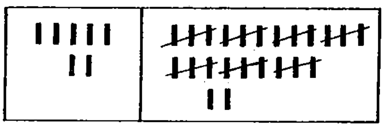
נושא הלימוד שלנו הוא שיטות שונות לכתיבת מספרים. כדי לבנות את הנושא מראשיתו נתאר דרך שבה עשויה היתה כתיבת המספרים להתפתח אצל שבט פרימיטיבי מבודד.

באוצר המלים של השבט הדמיוני שלנו יש מלים בשביל המספרים 0, 1, 2 ו-3, אך לא בשביל מספרים גדולים מ-3. כאשר צריכים בני השבט לכתוב מספר יותר גדול הם משרטטים מלבן ובתוכו קווים במספר המתאים. לדוגמא, המספר 23 נכתב אצלם כך:



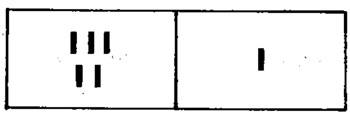
אחרי דיון באופן שבו יכול רועה להשתמש ברישום כזה כדי לבדוק אם כל העיזים שהוציא בבוקר למרעה אמנם חזרו אתו בערב אל הדיר, ואחרי שנדון בקושי לזכור מספר הכתוב בדרך זאת אם אין לנו ביטוי מילולי בשביל המספר, נעבור לשלב ההתפתחות הבא:

הוצע שמשמאל למלבן המספר יתווסף מלבן נוסף, ובמקום שלושה קוים שבמלבן המקורי יסומן קו אחד במלבן הנוסף:



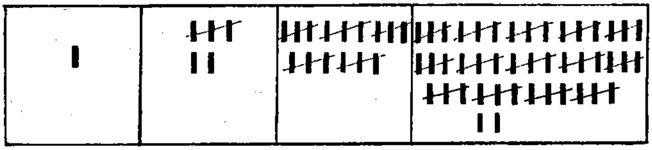
בשעת הצורך (למשל- כדי לבדוק אם כל העיזים חזרו לדיר) נוכל לשחזר את מלבן הקווים המקורי ע"י תהליך הפוך.

תרגיל: החזר לצורה המקורית את



בהמשך הוחלט שמה שטוב בשביל המלבן המקורי טוב גם בשביל כל מלבן שנוסף משמאלו. כל שלושה קווים במלבן כלשהו יהיו ניתנים להחלפה בקו אחד במלבן שמשמאל לו, ובשום מלבן אין צורך להשאיר יותר משני קווים.

להלן דוגמא לתהליך ההצגה החדשה של 47.



המוצר שהתקבל הוא  כך כותבים כעת בני השבט את 47.

אנחנו נכתוב את סימנו של השבט בצורה 1202_3. המספר 3 שלרגלי צד ימין נקרא "הבסיס".

<u>דיון</u>

א. נהגתי לקרוא את הביטוי האחרון בצורה "אלף מאתיים ושתיים של בסיס שלוש". יתר על כן, כשעסקנו בחישובים בבסיס מסויים כתבתי אותו בראש הלוח וחדלתי להזכירו. אך איני רואה בזאת ענין עקרוני ואיני שולל דרכי קריאה אחרות.

ב. הצעתי מתייחסת אל המספר 0 כאל משהו מוכר ולא כאל משהו שהומצא לצורך שיטת הפוזיציה. נכון, אמנם, ששיטת הפוזיציה תרמה להרגשה ש-0 דומה למספרים אחרים, וודאי שהיא הביאה לכך שתוקצה לו סיפרה, אך איני סבור שראוי לדבר כאן על המצאת המספר אפס.

ג. הגישה המוצעת כאן אינה משתמשת באנאלוגיה לשיטה העשרונית אלא בבניה מן היסוד. אדרבא, אם לא יגלו זאת התלמידים בעצמם נוכל לומר להם ששיטתנו העשרונית שונה משיטת "השבט" רק בזה שאצלנו מחליף עשר את שלוש ויש לנו ספרות עד 9.

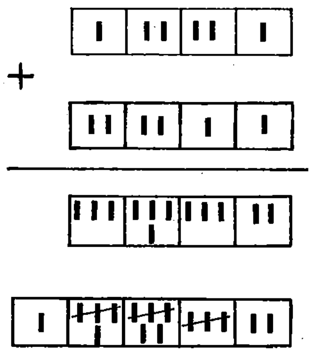
לרוב אין התלמידים אומרים זאת בעצמם, אך כשאומרים זאת להם - אומרים להם משהו שכבר חשבו עליו.

ד. עניין המעבר מבסיס לבסיס יכול לבוא מיד אחרי שיטת הכתיבה "של השבט". כל החידוש שבו הוא רק זה שבמקום לסמן קוים אנו כותבים את מספריהם בכתיב עשרוני.

<u>חיבור וחיסור</u>

במקביל לכתיב "ספרות ובסיס" עומד לרשותנו גם כתיב "מלבנים וקווים" (הכתיב "של השבט"). בכתיב זה נשתמש להצגה ראשונה של דרך החיבור (ושל דרך החיסור).

בדוגמא הראשונה נפריד בין שלב החיבור ושלב הגלגול לפנים:



נחבר

נגלגל לפנים וקבלנו 11202_3.

בדוגמא השניה יבוצע הגלגול לפנים אחרי כל חיבור שני "מלבנים". אח"כ נכתוב את תרגילינו ישירות בכתיב ספרות ובסיס, כולל תרגילים בבסיס שונה מ-3.

סיפורו של החיסור יהיה דומה. נפתח בכתיב מלבנים וקווים בדוגמא שאינה מחייבת "פריטה", נעבור לדוגמא עם פריטה (שאינה אלא גלגול חלקי לאחור), ומכאן לכתיב ספרות ובסיס.

הערה: בכל מקרה בו יתקשה תלמיד זה או אחר במשהו, נוכל לחזור למלבנים וקווים. חזרה זאת אל היסודות באה במקום השימוש באנאלוגיה לטכניקה העשרונית המוכרת. השימוש באנאלוג העשרוני מראה "איך עושים" אך לא "למה עושים כך".

בדוגמא הבאה אעשה משהו שבגישות האחרות חושבים אותו לפשע:

$$\begin{array}{r} {}^{1\,4} \\ \cancel{2}\cancel{1}1_3 \\ -\quad 120_3 \\ \hline 21_3 \end{array}$$

למרות שאנו בבסיס 3 , השתמשתי, זמנית, בסיפרה "4" כאשר גלגלתי לאחור 1 מתוך ה-2 שבמחוסר.

בגישה הנוכחית אין בכך כל רע. הדבר אינו שונה מכתיבה זמנית של יותר משני קוים במלבן אחד. אילו כתבתי "11" במקום ה-"4" היה הדבר גורם לעיכוב מיותר. לאחר מעשה, בשלב הדיון הנינוח שבא אחרי הצגת הרעיון העיקרי, נוכל לומר לתלמידים שמי שרגיל לעבוד בבסיס 3 יותר מאשר בבסיס 10, לא היה כותב "4" אלא "11".

<u>כפל</u>

הבחירה בבסיס 3 מאפשרת שימוש חפשי בכל הספרות עד 9 (וגם במלים עד "תשע") גם כשנעסוק בכפל. מכיוון שלוח הכפל של בסיס 3 אינו מגיע למספר גדול מ-9 לא נגיע לבלבול האפשרי שבין 10-של-בסיס-3 ובין 10-של-בסיס-10.

כל סיפרון דו סיפרתי שייכתב להלן, עד להודעה חדשה, יקרא בבסיס 3.

דוגמאות ראשונות לכפל ב-2 ולכפל ב-10 יחושבו לאור השוויונות

$$A*3 = A + A + A \quad , \quad A*2 = A + A$$

$$\begin{array}{r} 2102 \\ * \quad\;\; \\ 10 \\ \hline 2102 \\ 2102 \\ + \;\; 2102 \\ \hline 21020 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1021 \\ * \quad\;\; \\ 2 \\ \hline 1021 \\ + \;\; 1021 \\ \hline 2112 \end{array}$$

בהמשך נדלג על שלב הבינים בכפל ב-2. ובאשר לכפל ב-3, מעיון בדוגמא יעלה הכלל: כדי לכפול מספר ב-10 נכתוב 0 בקצה הימני ונזיז את כל סיפרותיו של המספר צעד אחד שמאלה.

כפל ב-11 וכפל ב-12 יעשו בעזרת השוויונות

$A*5 = A*2+A*3$, $A*4 = A*1+A*3$

הנכתבים בבסיס שלנו $A*(2+10) = A*2+A*10$, $A*(1+10) = A*1+A*10$

לדוגמא:

$$\begin{array}{r} 211 \\ * \\ \underline{12} \\ 1122 \\ + \\ \underline{2110} \\ 11002 \end{array}$$

כפל ב-20 וכפל ב-100 יעשו בעזרת השוויונות

$A*9 = (A*3)*3$, $A*6 = (A*3)*2$

הנכתבים אצלנו $A*(10*10) = (A*10)*10$, $A*(10*2) = (A*10)*2$

דוגמאות ראשונות (שבעקבותיהן תבוא, כמובן, גם כתיבה קצרה ללא שלב הביניים):

$$\begin{array}{r} 121 \\ * \\ \underline{20} \\ 1210 \\ * \\ \underline{2} \\ 10120 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 121 \\ * \\ \underline{100} \\ 1210 \\ * \\ \underline{10} \\ 12100 \end{array}$$

כעת נוכל לעבור לפעולות כפל כאשר הכופל הוא 102,21, 211 וכן הלאה.
במקום המתאים נשלב ניסוח כללי של החוקים עליהם מבוססת דרך החישוב שלנו:

חוק הפילוג: לכל שלשה מספרים A, B ו- C , $A*(B+C) = A*B+A*C$

חוק הקיבוץ: לכל שלשה מספרים A, B ו- C , $A*(B*C) = (A*B)*C$

דיון מסכם

א. לדעת כותב שורות אלה חשיבותו העיקרית של נושא הבסיסים היא בזה שהוא מאפשר לנו בחינה מחדש של יסודות האריתמטיקה. מצב חדש מצריך הבנה חדשה. אצל הבסיס 10 התלמידים "יודעים את הכל" ואינם רואים צורך בהתבוננות חדשה. מטרתו העיקרית של הפרק הנוכחי היא להביא את התלמידים להבנת אלגוריתמוס הכפל. המטרה "שידעו לכפול בעוד בסיס" או "שידעו שאפשר לכפול בכל בסיס" היא, לדעתי, פחות חשובה.

ב. ענין חוקי הפילוג והקיבוץ מופיע כאן במטרה משנית אך לא זניחה. ניסוחו הכללי של חוק הפילוג מופיע, על פי תכנית הלימודים, כבר בכיתה ד'. שימוש משמעותי בחוק זה נעשה קודם לכן, וכנראה רק קודם לכן, כאשר תלמיד מחשב 5*7 ע"י חישוב 5*4, חישוב 5*3 וחיבור התוצאות. אך בשלבי הלימוד ההם עדיין אין התלמידים מסוגלים לקשר בין נוסח החוק ובין הפעלתו.

גישה זהירה אל קשר זה דרושה גם בכיתה ז'. הקדמנו איפוא מקרים פרטיים - למחצה של החוקים, דאגנו לכך שנכונותם והצורך בהם יהיו שקופים, ורק אחרי שהצורך בחוקים עולה פעם נוספת נציע להם נוסח כללי.

ג. להערכתי, החומר המוצע עד כאן מהווה יחידה משמעותית מינימלית בנושא בסיסי ספירה. בכוונתי להקדיש מאמר נפרד להרחבות שונות של הנושא, כגון "כיצד מחשב המחשב בבסיס 2" ו-"שימוש בבסיס 1000 או 10000 לחישוב במספרים גדולים".

זה רעיון

דרכים בהפעלת תלמידים לחיזוק רקע מתמטי

רעיונות מתוך מאמר של ססיליה הרשקוביץ שהתפרסם ב 1972 ברומניה בצירוף הדגמות.

ססיליה הרשקוביץ לימדה במשך שנים רבות מתמטיקה ברומניה, כאשר עבודתה מלווה בעזרי לימוד ובעיקר כרטיסיות עבודה לסכומי פרקים.

לאחרונה עלתה לארץ והביאה לידיעתנו את פרי עבודתה.

חשבנו שראוי להציג עבודה זו בקווים כלליים למורי המתמטיקה בארץ תוך הצגת שני כרטיסי עבודה משלה.

ססיליה מציינת במאמרה כי ניתן להכין כרטיסיות עבודה לכל פרק, ולכל נושא.

כל כרטיס רצוי להכין במספר עותקים, בהתאם לגודל הכיתה.

לכל כרטיס עבודה יש להכין כרטיס בדיקה מתאים בו תנתן התשובה, אם היא יחידה, או מספר תשובות והערות במקרה שיש יותר מאפשרות אחת.

להלן שתי דוגמאות וכרטיסי עבודה , האחד בתחום המספרים והשני במושגים מן הגאומטריה.

דוגמא I : כרטיס לחזרה על סימני התחלקות.

בגוף הכרטיס רשומים מספרים בהם חסרה ספרה אחת ומימינם רשום המספר המחלק ללא שארית.

בנוסף נתונים כרטיסי ספרות.

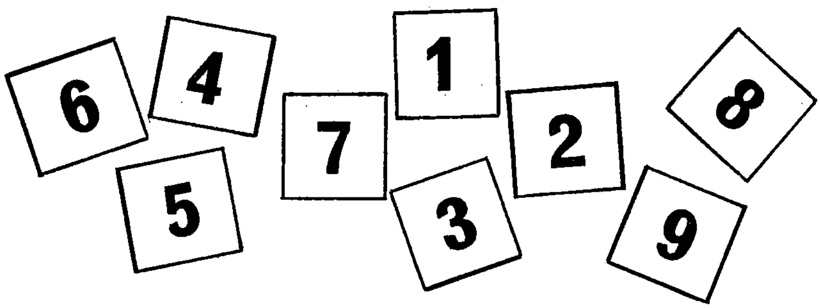
צריך להניח את הכרטיסים במקום הספרות החסרות, כך שבכל השורות המספר משמאל יהיה כפולה שלמה של המספר מימין.

שים לב!

מותר להשתמש בכל ספרה פעם אחת בלבד!

יש יותר מפתרון אחד.

6	5	3	7	?	2
7	3	?	1	8	3
5	2	9	3	?	4
9	3	7	6	?	5
5	?	6	2	1	9
9	3	2	?	5	25



פתרון אפשרי (בשלושת המספרים הראשונים ניתן להחליף את הספרות המושלמות).

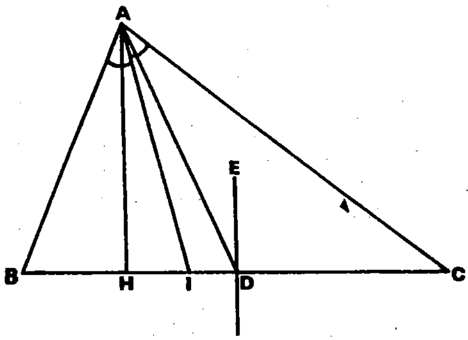
6	5	3	7	$\boxed{8}$	2
7	3	$\boxed{2}$	1	8	3
5	2	9	3	$\boxed{6}$	4
9	3	7	6	$\boxed{5}$	5
5	$\boxed{4}$	6	2	1	9
9	3	2	$\boxed{7}$	5	25

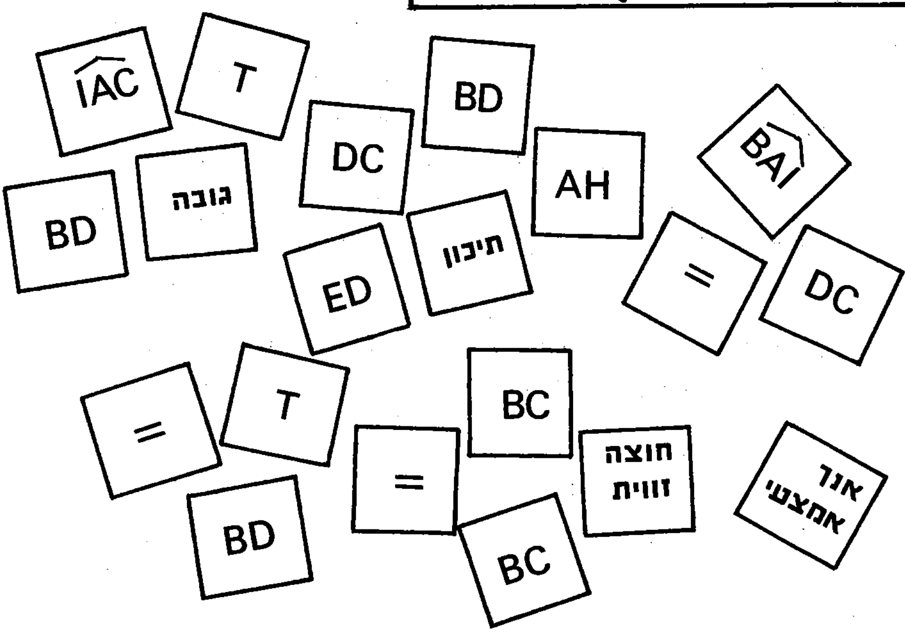
דוגמא II

בדוגמא זו חוזרים על מושגי הגובה , התיכון, חוצה הזוית והאנך האמצעי במשולש. התלמיד צריך לזהות ולהניח בטור המרכזי כרטיס עם שם הקטע או הישר הנדרש ובטור הימני לבנות בעזרת כרטיסים סימון מתמטי מתאים.

לדף זה פתרון יחיד.

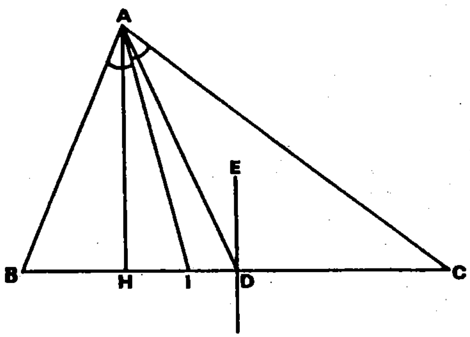
הגדרה			שם
?	?	?	AH ?
?	?	?	AI ?
?	?	?	AD ?
?	?	?	ED ?
?	?	?	





ה פ ת ר ו ן

הגדרה	שם
$AH \perp BC$	גובה AH
$\widehat{BAI} = \widehat{IAC}$	חוצה זווית AI
$BD = DC$	תיכון AD
$BD = DC$ $ED \perp BC$	אנך אמצעי ED



הנסוי שערכה ססיליה בחומר מעין זה ארך 4 שנים ובמהלכו גילו התלמידים התעניינות מעבר למצופה. לדעתה, החומר כפי שהוא מוגש, מאפשר לכל תלמיד לעבוד בקצב שלו, לבדוק את עבודתו מיד עם סיומה, ועל ידי כך להגביר את בטחונו העצמי. העבודה בכרטיסיות לדעתי מטפחת את הסדר בעבודת התלמיד, מגבירה את השימוש בסימנים מתמטיים ומעלה את מידת העצמאות של התלמיד בעבודתו.

נמצא גם כי השימוש בכרטיסים בחלק משעורי המתמטיקה יצר אוירה טובה ופתיחות ללימוד המתמטיקה גם בשעורים בהם נערכה ההוראה בדרך אחרת.

כתב חידה

מאת: נעמי רובינזון, נעמי תעיזי
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

מטרת כתב החידה שבעמודים הבאים ליצור מסגרת בה ניתן לעסוק בנוסחאות הכפל באוירה נעימה.
מסגרת כזו חשובה במיוחד אם התרגול נערך זמן רב או בשעת חזרה על הנושא.
מסגרת כתב החידה מאפשרת גם שילוב של עיסוק בנושא זה עם נושאים אחרים הנלמדים בתקופה הקרובה, כמו קבוצות אמת.

כתב החידה מיועד להעברה כעבודת סיכום, רצוי בקבוצות (של 3 עד 6 תלמידים) כתחרות ביניהן, כאשר הקבוצה הראשונה ש"מפצחת" את כתב החידה זוכה בפרס.

אפשר לראות בכתב חידה זה דגם לחיקוי ולהכנת עבודות סיכום לנושאים הקשורים בתרגול רב.

כתב החידה ניתן בהשתלמות קיץ ובעקבותיו נכתבו בידי המורים כתבי חידה נוספים ברוח זו.

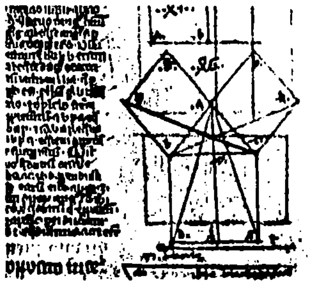
נשתדל לפרסם עבודות אלו במשך הזמן.

נשמח לשמוע הערות לגבי העברת כתב החידה בכיתות והצעות לכתבי חידה נוספים.

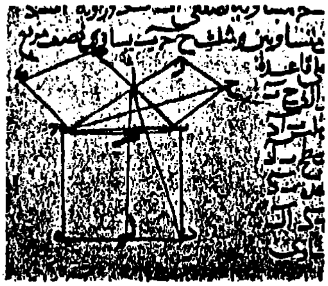
היוונים עסקו רבות במתמטיקה ובחישובים מסוגים שונים. הידע בתקופתם הגיע לממדים גדולים שנוצר צורך בכתיבת ספרים מתמטיים.

אף על פי שבמשך השנים שלאחר מכן אבד חלק גדול מאוצר ידע זה, עדיין נותר בסוף ימי הביניים ידע מספיק שאיפשר חידוש המחקר בשדה המתמטיקה.
יצירות קלסיות של היוונים תורגמו לשפות רבות והאיצו את לימוד המתמטיקה.

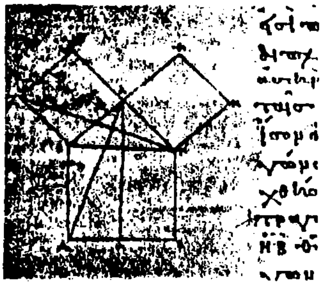
לפניך תרגומים לשפות שונות של המשפט המתמטי הידוע בשם משפט פיתגורס:



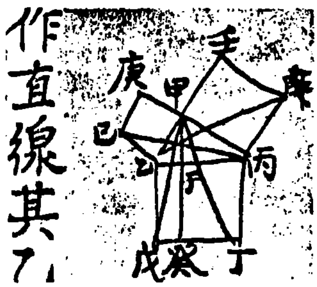
לאטינית,



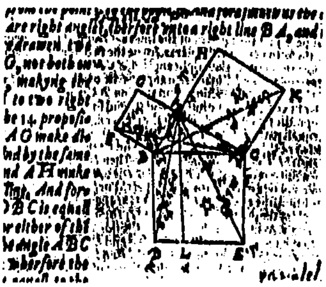
ערבית,



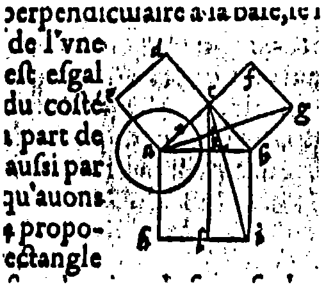
יוונית,



סינית,



אנגלית,



צרפתית,

עליך לגלות בעזרת הרמזים הבאים את התאריכים בהם תורגמו ההוכחות המצולמות לשפות השונות.

בחלק א' עליך לגלות את התאריכים מתוך ביטויים לפישוט והצבה.
בחלק ב' עליך לגלות את התאריכים להוכחות בשפות השונות על-ידי פתרון משוואות ואי-שוויונים.

חלק א'

1) $$\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$$

א. פשט.

ב. הצב $x = 3142$, $y = -3138$

2) פשט: $40^2 + x(x + 6) + 16 - (x + 3)^2 =$

3) $$1606c + \frac{1 - 16c^2}{1 - 8c + 16c^2}$$

פשט והצב $c = \frac{1}{2}$

4) $(x + 1)(x + 2) - (2x + 1)^2 + 3x^2$

פשט והצב $x = -1119$

5) $$\frac{16}{2x+6} + \frac{6}{3x+9} + \frac{6 + 2x}{(x+3)^2}$$

א. פשט והצב $x = -2$.

ב. מצא מספר תלת-ספרתי שספרת היחידות שלו 5, והמספר הדו-ספרתי המתקבל ממנו על-ידי מחיקת ספרת היחידות הוא התוצאה שקבלת בסעיף א'.

ג. כפול את המספר שקבלת בסעיף ב' ב 10.

6) א. פתור: $(x + 3)^2 = 108 - (3 + x)(3 - x)$

ב. $(x + 5)^2 - (x + 2)(x - 2) = 5(x + 10) - 1$

ג. בנה מספר ארבע-ספרתי בו שתי הספרות מימין הן התוצאה של העלאה בחזקת 3 של פתרון אחת המשוואות, ושתי הספרות משמאל, פתרון המשוואה האחרת.

חלק ב'

רמזים לגבי סדר כתבי היד שבצילום.

א) ציין את תאריך המקור.

ב) ספרת העשרות של שנת התרגום הלטיני היא כספרת המאות של שנת התרגום הערבי.

ג) נסדר את התרגום לסינית, אנגלית וצרפתית לפי הרמז הבא:

נתונה המשוואה $(x + 5)^2 = 10(x + 3)$.

- אם קבוצת האמת היא הקבוצה הריקה, התרגום לסינית קודם לשני האחרים.
- אם בקבוצת האמת איבר אחד, אז התרגום לצרפתית מאוחר מהתרגום לאנגלית, אך קודם לתרגום לסינית.
- אם בקבוצת האמת שני איברים, אז התרגום לאנגלית מאוחר מהתרגום לצרפתית, אך קודם לסינית.
- אם קבוצת האמת היא {כל המספרים}, אז התרגום לצרפתית קודם לסינית, והתרגום לסינית קודם לאנגלית.

ד) נתונה המשוואה $(x + 2)(x + 3)(x - 5) = 0$.

- אם 2 שייך לקבוצת האמת, אז התרגומים לערבית ואנגלית נעשו באותה מאה.
- אם 3 שייך לקבוצת האמת, אז התרגומים לערבית וצרפתית נעשו באותה מאה.
- אם 5 שייך לקבוצת האמת, אז התרגומים לאנגלית וצרפתית נעשו באותה מאה.

פתרון כתב החידה:

לאטינית	1120	ערבית	1250	יורנית	800
סינית	1607	אנגלית	1570	צרפתית	1564

ה ע ר ה :

כדי להיות נאמנים להסטוריה של המתמטיקה עלינו לציין שהתאריכים הרשומים למעלה הם תאריכי התרגומים בכתב של משפט פיתגורס, בעוד שהמשפט עצמו היה מוכר לעיתים גם לפני כן.

לדוגמא: העם הסיני הכיר את המשפט, כבר בתקופתו של פיתגורס, אך הנוסח הידוע בסינית מצוי רק בשנת 1607.

הערות לפתרון כתב החידה:

אפשר ורצוי לכוון, גם תוך כדי הפתרון בקבוצות, לפתרון יעיל תוך שימוש בנוסחאות הכפל.

למשל מורה המבחין שבתרגיל 1 התלמידים הציבו וחישבו, ללא פישוט, יוכל להדגים להם כמה זמן יכלו לחסוך לו פישטו תחילה והציבו ב $\frac{x+y}{x-y}$.

בתרגיל 3, הצבה ב $1606c + \frac{1+4c}{1-4c}$ קלה לאין ערוך מהצבה בתבנית הנתונה.

בתרגיל 5 צמצום כל שבר בנפרד יתן:

$$\frac{8}{x+3} + \frac{2}{x+3} + \frac{2}{x+3} = \frac{12}{x+3}$$

ביטוי זה נוח יותר להצבה.

בחלק ב' דנו במספר הפתרונות של קבוצת אמת שאיבריה הם מספרים אי רציונליים. המטרה לחדד את הנקודה שמספרים אי רציונליים אף הם פתרונות חוקיים של משוואה, ולכן בקבוצת האמת שבסעיף ג' שני איברים והם $\sqrt{5}$ ו- $-\sqrt{5}$.

יצאו לאור משחקים

חסימות

זהו משחק קלפים המאפשר לסכם בצורה מגוונת ומעניינת את הקשרים בין פונקציות שונות ובין תכונות כגון: עליה/ירידה, ערכים חיוביים/שליליים/אפס, קוית/לא קוית.

במסגרת המשחק, התלמיד חייב לחקור מספר פונקציות וליצור התאמות בין פונקציות המוצגות באופן אלגברי או גרפי ובין מספר תכונות נתונות.

* המשחק יצא גם בגירסה אנגלית.

המשחק ניתן לרכישה במחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן למדע רחובות.

מחיר המשחק: 7.5 ש"ח.

הודעות

★★

מכון ויצמן למדע
המחלקה להוראת המדעים
קבוצת המתמטיקה
המרכז הישראלי להוראת המדעים
ע"ש עמוס דה-שליט

מספר משחקים וחומרים להכנת משחקים שאזלו מן המלאי חודשו ונמצאים לרכישה.

להלן רשימתם:

<u>חומרים</u> :

עיגולים דו גורניים (16 באריזה) .... 1 ש"ח

התאמה ריקה (לוח למשחק יחיד מורכב מ 24 חלקים
המהורים 6 ריבועים)....................... 1.5 ש"ח

<u>משחקים</u>

התאמה (שם מספר - עוסק בשברים עשרוניים ואחוזים
שטח - השוואת חלקי מעגל וחלקי ריבוע) .... 7.5 ש"ח

חשבונבו - מחיר טרם נקבע.

★★

מכון ויצמן למדע
THE WEIZMANN INSTITUTE OF SCIENCE

REHOVOT 76100, ISRAEL

רחובות 76100, ישראל

YOUTH ACTIVITIES SECTION

היחידה לפעולות נוער

סדרת הרצאות ע"ש עמוס דה-שליט תשמ"ט

אולם ויקס, מכון ויצמן למדע, רחובות

הרצאה שלישית:

יום א', י"ט באדר ב' תשמ"ט (26.3.89), בשעה 4:15 אחה"צ

זיהוי ממוחשב - בעיות ופתרונות

פרופ' עדי שמיר

המחלקה למתמטיקה שימושית, הפקולטה למתמטיקה

<u>**תקציר ההרצאה**</u>

מהפכת המיחשוב והתקשורת מאפשרת לאנשים ולמחשבים לשוחח זה עם זה, להעביר טלפונית מידע רב ערך, ולהורות ממרחק על ביצוע פעולות שונות. כדי למנוע ניצול לרעה של אפשרויות חדשות אלו, יש לאפשר למחשבים לזהות אוטומטית את האנשים שמשתמשים בהם או מתקשרים אליהם.

בהרצאה זו אסקור את שיטות הזיהוי המקובלות (המבוססות על מדידות ביומטריות או סיסמאות גישה), ואתאר את הדור החדש של שיטות זיהוי המבוססות על "הוכחות מתימטיות חסרות מידע".

ההרצאה הבאה בסדרה: "תהודה מגנטית גרעינית בחקר חומרים ומערכות ביולוגיות" תנתן ע"י פרופ' שמעון וגה ביום ד' 5.4.89.

לכבוד
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע
רחובות 76100

<u>מנוי</u>

ברצוני להיות מנוי על מסרים כרך ג', (שלוש חוברות)

המחיר למנוי עבור כרך ג' - 24 ש"ח

מחיר חוברת מס' 3 בכרך ב' - 10 ש"ח

רצ"ב המחאה על סך ________ ש"ח לפקודת מכון ויצמן למדע.

עבור: ☐ מנוי לכרך ג'

☐ חוברת ב'-3. כמות ________

שם המזמין: ______________________________

כתובת: ______________________________

ת.ז.: ______________ טלפון: ______________

שם המוסד וכתובתו: ______________________________

לכבוד
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע
רחובות 76100

<u>מנוי</u>

ברצוני להיות מנוי על מסרים כרך ג'. (שלוש חוברות)

המחיר למנוי עבור כרך ג' - 24 ש"ח

מחיר חוברת מס' 3 בכרך ב' -10 ש"ח

רצ"ב המחאה על סך ________ ש"ח לפקודת מכון ויצמן למדע.

עבור: ☐ מנוי לכרך ג'

☐ חוברת ב'-3, כמות ______

שם המזמין: ______________________________

כתובת: ______________________________

ת.ז.: ______________ טלפון: ______________

שם המוסד וכתובתו: ______________________________