כב

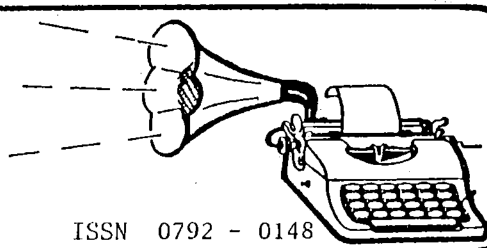
עלון למורי מתמטיקה

כרך ב, חוברת מספר 2, אלול תשמ"ח

מספרים

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות

מספרים



ISSN 0792 - 0148

תוכן העניינים

מאמרים:

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות

נדפס בישראל 1988 - תשמ"ח

מאמרים

קדימה אל האחוזים

מאת: רינה הרשקוביץ, תרצה הלוי
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

I. מבוא

מושג האחוז הנו אחד המושגים המתמטיים שהשימוש בהם בחיי היום יום נפוץ ביותר.

למרות זאת, להרבה תלמידים (ואף למבוגרים), חסרה אותה הבנה המאפשרת להם להשתמש במושג בצורה נכונה (Carpenter et al 1980, Hart 1981).

כדי לתרום לשיפור מצב זה, הצבנו לעצמנו שתי מטרות עיקריות:

א) איתור הקשיים ותהליכי החשיבה של תלמידים במטלות הקשורות במושג האחוז.

ב) בניית איסטרטגיות הוראה וכלים לטיפול בקשיים שאותרו.

המטלות הקשורות במושג האחוז נגזרות כולן מן הפרופורציה היסודית: $\frac{p}{100} = \frac{A}{B}$.

את המטלות השונות אפשר לחלק לפי מטרתן לשלושה סוגים:

1) מציאת הכמות A המהווה p% מהכמות B - ("תמורת האחוז").

2) מציאת האחוז p שמהווה הכמות A מתוך הכמות B ("האחוז").

3) מציאת הכמות B אם ידוע כי p% ממנה היא הכמות A ("הגודל היסודי").

לגבי מחקר עולות איפוא השאלות הבאות:

. כיצד ניגש הילד למטלות משלושת הסוגים הנ"ל?

. האם האסטרטגיה שלו משתנה מסוג מטלה אחד לשני?

. כיצד נבדל תלמיד אחד מחברו לגבי אותה מטלה?

. האם היחסים בין המספרים הנתונים במטלה, מעודדים אסטרטגיות מסוימות, ולא אחרות?

וכד' ...

להלן, נתאר שלבים אחדים במחקר שמטרתו היא מציאת תשובות לשאלות אלו.

II. שלב ראשון

בחקירה ראשונית העברנו שאלונים לתלמידים בכיתות ז'-ח' (70) לאחר שלמדו לימוד ראשון את נושא האחוזים. השאלונים הכילו פריטים הקשורים בשני סוגי המטלות הראשונים, וזאת בשני מישורים שונים: חישוב מדויק ואומדן .

על פי תוצאות השאלונים, נערכו ראיונות לא מובנים למספר תלמידים. הצלחת התלמידים לגבי מטלות מהסוג הראשון היתה רבה יותר מאשר הצלחתם במטלות מהסוג השני. הן לגבי חישוב מדויק והן לגבי אומדן.

	חישוב מדויק		אומדן			
	מצא 48% מתוך 150	איזה אחוז מהווה 12 מתוך 80?	העריך האם 53% של 900 הם		העריך איזה אחוז מהווה 60 מתוך 245	
נכון	61	26	יותר מ 450	80	יותר מ 25%	59
לא נכון אך בתחום ההגיון.	11	18	פחות מ 450	10	פחות מ 25%	29
לא נכון	20	22	450	9	25%	8
לא השיבו	8	34	לא השיבו	1	אין תגובה	4

טבלה 1: התפלגות תשובות התלמידים באחוזים לפריטים בחישוב מדויק ואומדן בשני סוגי המטלות הראשונים.

בחישוב המדויק, רוב התלמידים השתמשו באלגוריתם נכון עבור מטלות מהסוג הראשון. אך, עבור מטלות מהסוג השני לא נעשה בדרך כלל שימוש באלגוריתם, ואם נעשה, הוא היה לרוב לא נכון.

אצל רבים מבין התלמידים שכתבו את האלגוריתם הנכון במטלה הראשונה, לא מצאנו בהכרח הבנה של מושג האחוז. ולהיפך, תלמידים רבים שהראו הבנה גלובלית של המושג, לא השתמשו כלל באלגוריתם הסטנדרטי.

III. שלב שני

כדי להבין טוב יותר את דימויי המושג שיש לתלמידים לגבי מושג האחוז, החלטנו לחקור בעיקר את ההבנה האינטואיטיבית של מושג האחוז לגבי שלושת הסוגים השונים של מטלות באחוזים. העברנו שאלון שבו התבקשו התלמידים לתת הסבר לכל תשובה שהשיבו. כמו כן נערכו ראיונות אישיים, מובנים. ברוב המשימות נתבקשו התלמידים להעריך, ולא לחשב באופן מדויק.

אנחנו מאמינים שעל ידי אומדן והערכה ניתן לגלות הבנה אינטואיטיבית טוב יותר מאשר בחישוב מדוייק.

כדי להבטיח "אומדן ממש" (ללא חישוב), עשינו שימוש בסוגים שונים של חישובי אחוז:

1. חישובים בתוך מערכת מייצגת של שטח-נפח.
2. חישובים עם מספרים "לא יפים".
3. חישובים תוך הגבלת הזמן, כאשר ההגבלה נעשתה על ידי המראיין, או על ידי מיקרומחשב.

השאלונים הועברו בשתי כיתות ז' בראשית שנת הלמודים. התלמידים למדו את הנושא לימוד ראשון קצר בכיתה ו'. בעקבות ניתוח התשובות וההסברים של התלמידים נערכו ראיונות עם חלק מהתלמידים. הראיונות הוקלטו ברשם קול.

להלן נתאר ראשית איסטרטגיות אחדות שנמצאו אצל התלמידים, ואחר כך "התנהגות" כללית של תלמיד בודד במספר מטלות הקשורות באחוזים.

סוגי האיסטרטגיות שנמצאו

א) איסטרטגיות שאינן מעידות על הבנת המושג.

i. איסטרטגיות חיבוריות (אדיטיביות) - רמה 1

- התלמיד מחבר או מחסר את הכמויות המוצגות בפריט.

דוגמאות:

1. חגית (בראיון):

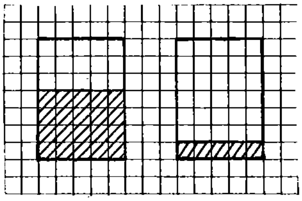
מראיין: היה לך אוסף של 140 קופסאות גפרורים ונתת לחברתך 72 קופסאות מתוך האוסף. איזה אחוז מהאוסף נתת לחברתך?

חגית: כ 60-70 אחוז.

מראיין: למה?

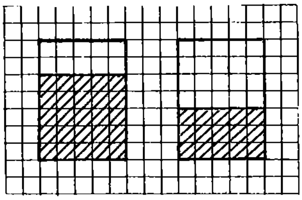
חגית: מפני ש 140 פחות 72 זה בערך 60.

2. חגית (בשאלון):



ב. א.

פריט א': "שים בכלי ב' 25% מהכמות שבכלי א'" (מטלה מסוג ראשון).
חגית צבעה את הכמות הנכונה ו"הסבירה": "בכלי א' יש 20%, אז הוספתי בכלי ב' 5%".



ב. א.

פריט ב': "הכמות בכלי ב' ____% מהכמות בכלי א'" (מטלה מסוג שני).

חגית כתבה 40% ו"הסבירה": "יש לנו בכלי א' 25%, ובכלי ב' יש לנו 15%. חיברתי את שני המספרים וקיבלתי את המשפר 40%".

חגית חיברה את הכמויות הנתונות, ונתנה להן את השם - אחוזים. כאשר הכמות הודגמה על ידי משבצות, היא פשוט ספרה אותן; כאשר הכמות לא הודגמה במשבצות, כמו בפריטים נוספים בשאלון, היא פשוט דמיינה אותן לעצמה והשתמשה באותה איסטרטגיה של חיבור או חיסור.

ii. איסטרטגיה של חילוק - רמה 1

- התלמיד מחלק את הכמויות הנתונות. גם כאן אין להבחין כלל בהבנה של מושג האחוז.

דוגמא:

עדי (בשאלון):

- כמה הם 48% של 150 (מטלה מסוג ראשון)"

עדי משיב: בערך 3% של 150 כי 48 נכנס ב 150 שלוש פעמים בערך...

ב) איסטרטגיות המשקפות הבנה כלשהי של המושג .

i. איסטרטגיות חיבוריות (אדיטיביות) - רמה 2

- התלמיד מבצע איזושהי מניפולציה אדיטיבית עם הכמויות הנתונות ומייחס אותן אדיטיבית למערכת שונה, האמורה להעביר באופן כלשהו את התוצאה לאחוזים.

דוגמא:

מיכל (בראיון):

מראיין: "יש לך אוסף של 140 בולים ונתת לאחותך 120 מהם. איזה אחוז מהבולים נתת לה?" (סוג שני).

מיכל: 80%.

מראיין: הכיצד?

מיכל: 140 פחות 120 ויוצא 20, והורדתי מ-100 והגעתי ל 80.

הפתרונות שיתקבלו בעקבות איסטרטגיה זו עשויים להיות הגיוניים עבור אינטרולים מסויימים של מספרים. לדוגמא, כאשר B קרוב ל 100, ו $A < B$, (כאשר $B = 100$ נקבל בדיוק את התשובה הנכונה).
במקרים מסויימים, כאשר התלמיד נתן תשובה הגיונית, התרשמנו כי לתלמיד יש הבנה אינטואיטיבית גלובלית, אך כשהוא נלחץ לתת הסבר, הוא יוצר אלגוריתם.

ii. איסטרטגיות של חילוק - רמה 2

איסטרטגיות אלו מצאנו בדרך כלל בביצוע מטלות מהסוג השני:
באסטרטגיה הראשונה התלמיד בודק כמה פעמים הכמות הקטנה יותר מוכלת בכמות הגדולה יותר (B:A).

דוגמא:

נעמה (בראיון):

מראיין: מ-140 שקל שילמת 72 שקל עבור נעליים, איזה אחוז מכספך שילמת?

נעמה: שני אחוז וקצת. 140 מחולק ב-72 ... אז בערך נכנס שתי פעמים.

מראיין: ואם שילמת 35 שקל, איזה אחוז מ-140 שילמת?

נעמה: 9% בערך.

מראיין: מתי שילמת יותר, במקרה הראשון או בשני?

נעמה: בראשון, כי 72 זה יותר מ 35.

מראיין: מתי שילמת יותר אחוזים מהכסף שלך?

נעמה:(לאחר הסוס). כאשר שילמתי 35 שקל ... אני חושבת ...

נעמה לא חשה בקונפליקט הנוצר משימוש באיסטרטגיה זו, (B:A).
תלמידים אחרים השתמשו באיסטרטגיה זו כשלב ראשון לקראת תשובה נכונה.

דוגמא:

דן (בראיון): 35 מתוך 140? ... 140 לחלק ל-35 זה 4 אני חושב.....
כך שזה 25%.

באיסטרטגיה השניה התלמיד מבצע את החילוק ההפוך (A:B).

דוגמא:

מירי (בראיון):

מראיין: כמה אחוזים בערך הם 72 שקל מתוך 140?

מירי: 1/2%.

מראיין: למה?

מירי: כי 72 זה בערך חצי של 140.

מראיין: 1/2 זה 1/2%?

מירי: ... כן ...

מירי מבינה אחוזים כ-"חלק של", אך אינה יודעת לבטא זאת כחלק של 100.

ג. <u>איסטרטגיות המובילות לתשובה הגיונית</u>

i. <u>שיפוט כמותי גלובלי</u>

כאן מצאנו שהתלמיד נעזר בשיפוט גלובלי כדי להעריך את הגדלים
היחסיים של הכמויות הנתונות בתרגיל.

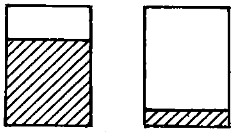
ייתכן כי תלמידים אחדים עשו שימוש באיסטרטגיה זו כדי לבדוק את

התוצאה שהתקבלה על ידי שימוש באסטרטגיות אחרות. אך, חלק מהם, כמו עדית בדוגמא שלהלן,השתמשו רק באיסטרטגיה הזו.

עדית (בשאלון):

הכמות ב-ב' היא בערך 25% מהכמות ב-א'.

מפני שב-ב' אין כמעט כלום וב-א' יש כמעט הכל.



ii. שימוש בחצי (או כפל בשניים) וברבע (או כפל בארבע)

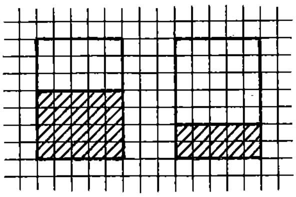
(ראה Hart 1981)

דוגמאות:

1. גאי (בראיון):

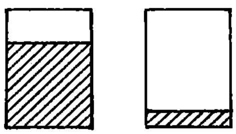
"260 מתוך 367 הם בערך 65%, כי ההפרש בין 367 ל 260 זה בערך 100, כך ש 260 זה יותר מחצי, לכן זה בערך 65%".

2. אורלי (בשאלון):



הפריט: שים בכלי ב' 25% מהכמות בכלי א'. אורלי צבעה שטח בכלי ב' והסבירה" "בכלי א' יש לי 50% (היא התייחסה לשטח הצבוע בכלי כחלק מהכלי כולו), כך שאנחנו צריכים לצבוע חצי ממנו כדי לקבל 25%".

3. ורד (בשאלון):



הפריט: השלם, הכמות בכלי ב' היא בערך___ מהכמות שבכלי א'.

ורד כתבה 25% והסבירה: $4 \times 25 = 100\%$

Hart (1981) טוענת ש"חציה והכפלה הם האספקטים הקלים ביותר של של היחס, כאשר הוא מוצג בבעיה או בשרטוט" . ברור כי איסטרטגיות אלו מתאימות רק למספר מוגבל של מקרים מספריים. מצאנו כי במקרים כאלו תלמידים רבים אכן מאמצים איסטרטגיה זו.

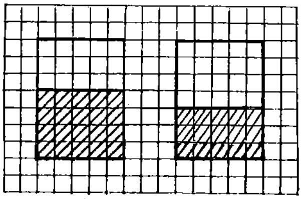
iii. **איסטרטגיות המתבססות על פרופורציה**

דוגמאות:

מיכל (בשאלון):

פריט 1: "שים 75% מהכמות שבכלי א' בכלי ב'".

מיכל סימנה את השטח הנכון והסבירה:



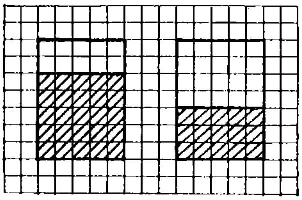
ב. א.

$$1\% = \frac{1}{100}$$

$$75\% = \frac{75}{100}$$

$$\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

פריט 2: "השלם, הכמות בכלי ב' היא ____ מהכמות בכלי א'".



ב. א.

מיכל כתבה 60% והסבירה:

בכלי א' יש 5 משבצות (אורך) על 5 משבצות (רוחב).

בכלי ב' יש 3 משבצות (אורך) על 5 משבצות (רוחב).

$$\frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\%$$

בפרק זה ניסינו למיין את האיסטרטגיות של התלמיד שנמצאו במטלות מהסוג הראשון, והשני לקטגוריות בתקוה שכך נוכל להבין טוב יותר את דימויי המושג של האחוז הנמצא אצל התלמידים.

התנהגות תלמידים בודדים במכלול מטלות הקשורות במושג האחוז

כמו Hart (1981) במחקר על שברים ופרופורציה, מצאנו גם אנו כי למרות שיש תלמידים שהינם מאוד שיטתיים, רוב הילדים בראיון (ובשאלון) שינו ברציפות את השיטה בה השתמשו. השינוי בהתנהגות נראה כקשור בסוג המטלה, ובמספרים המעורבים במטלה. לאיסטרטגיות מסוימות בהן משתמשים התלמידים יש כפי שראינו "מגבלות מספריות", המובילות, או עשויות להוביל לשינוי באיסטרטגיה של התלמיד, עם שינוי המספרים שבמטלה.

דוגמאות:

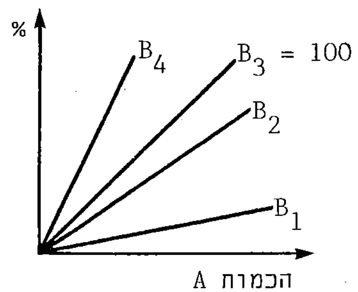
1) גיא, במציאת איזה אחוז מהווה A מתוך B, כאשר A קרוב לרבע או חצי, משתמש בחצי או ברבע וכאשר היחס בין המספרים יותר מסובך הוא משתמש ב"אלגוריתם של הפרש" ובשיפוט כמותי גלובלי.

2) מירי, בדרך כלל מאוד שיטתית. במציאת איזה אחוז מהווה A מתוך B, היא מחלקת A ל B. כאשר התוצאה היא שבר יחידה או קרוב לזה, היא עונה למשל: 10 מתוך 100 הם 1/10%. 51 מתוך 100 בערך 1/2%, 35 מתוך 140 הם בערך 1/4% וכד'.
כאשר התוצאה אינה שבר יחידה היא נבוכה למשל לגבי 98 מתוך 100 בטענה שאינה יודעת.

כדי לקבל תמונה כוללת על דפוסי התנהגותו של תלמיד לגבי מכלול בעיות הקשורות במושג האחוז, עשינו שימוש באנליזה גרפית של התנהגות היחיד במטלות מהסוג השני, כלומר איזה אחוז מהווה הכמות A מן הכמות B.

כאשר מסמנים את תשובות התלמיד לגבי האחוז כפונקציה של הכמות A, אפשר לקבל לכל כמות B קבועה גרף מסויים. אסטרטגיות תשובה שונות נותנות מודלים שונים של גרפים:

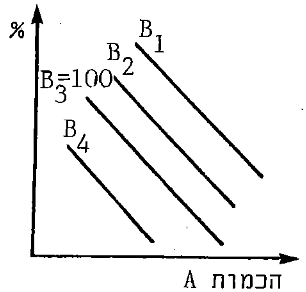
1) <u>המודל הפרופורציוני</u> -
אם התלמיד נותן תשובות נכונות (מתבססות על אסטרטגיה של פרופורציה), יוצרים הקוים מניפה של קוים ישרים שמקורם בראשית (ראה שרטוט 1).
השיפוע של כל הוא $100/B_i$, ואכן ל $B_i = 100$ השיפוע הוא 1.



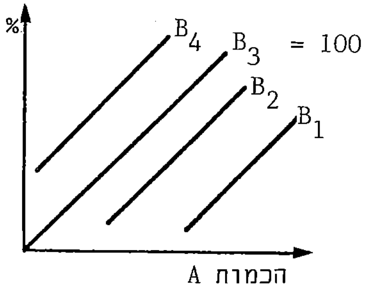
שרטוט 1: גרפים לתשובות המתבססות על פרופורציה.

2) המודל האדיטיבי -

אם התלמיד נוהג לפי אסטרטגיה אדיטיבית, נקבל אלומה של גרפים מקבילים. ראה שרטוטים 2 ו 3.



שרטוט 2: גרפים לתשובות המתבססות על האיסטרטגיה האדיטיבית B–A.



שרטוט 3: גרפים לתשובות המתבססות על האיסטרטגיה האדיטיבית 100 - (B–A).

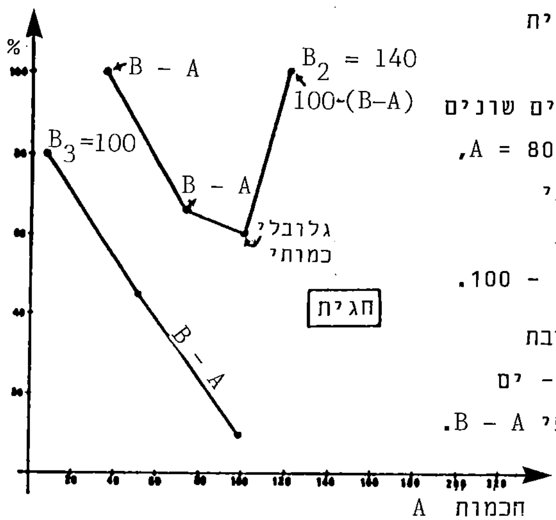
כיון שתשובות נכונות נותנות את המודל הגרפי הפרופורציוני, נוכל להגיע אליו גם דרך האיסטרטגיות של שימוש ב 1/2 או ב 1/4 (כפל ב 2 או ב 4), או בשיפוט כמותי גלובלי המתקרב לנכון.

להלן נראה מספר דוגמאות בהן נשתמש במודלים אלו כדי לנתח את התנהגותו של התלמיד היחיד במכלול מטלות מהסוג השני.

דוגמא 1 - חגית (ראה שרטוט 4)

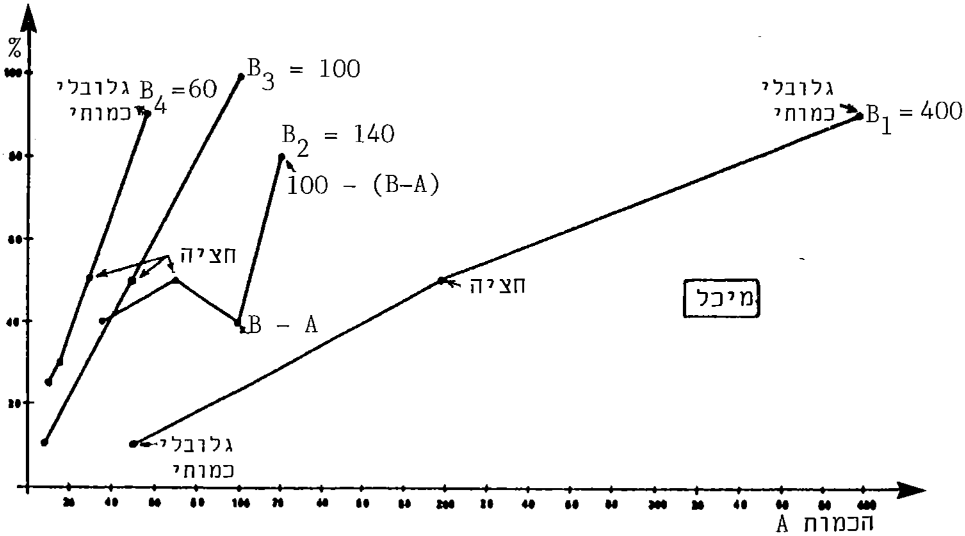
עבור B = 140, משנה חגית את האסטרטגיה בה היא משתמשת ובתחומים מספריים שונים של A: כאשר A = 35 או A = 80, היא מפעילה שיפוט כמותי גלובלי, וכאשר A = 120 היא מחשבת לפי (B – A) - 100.

עבור B = 100, היא מחשבת את האחוזים שמהורים A - ים שונים, באופן שיטתי לפי B – A.



שרטוט 4

דוגמא 2 - מיכל (ראה שרטוט 5).



שרטוט 5

מיכל משתמשת באסטרטגיות המובילות פחות או יותר לתשובה הנכונה (מודל גרפי פרופורציוני), עבור B = 60,100,400. עבור B = 140 (על זאת נשאלה בראשונה), היא משתמשת באסטרטגיות שונות שהן בדרך כלל לא נכונות. כאשר A מהווה 50% מ B, היא באופן מאוד שיטתי משתמשת תמיד בחצי.

תיארנו לעיל צעדים אחדים לקראת הבנת התנהגות התלמיד היחיד במטלות באחוזים. יש להמשיך ולהעמיק יותר בחקר התנהגות הפרט, וכן התנהגות קבוצות של תלמידים.

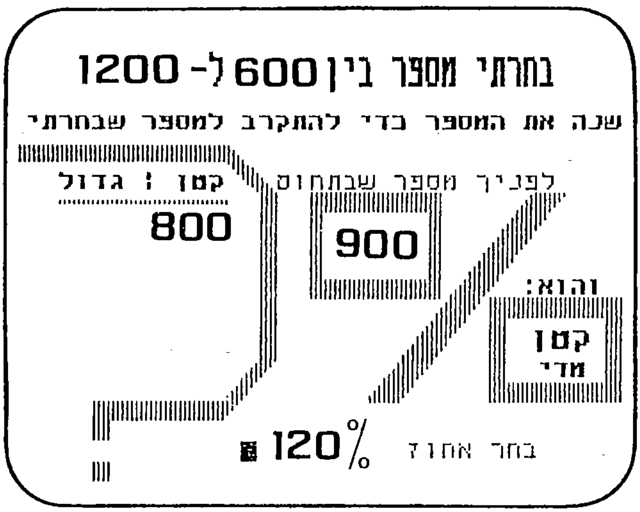
על הלומדה קדימה אל האחוזים - פעילויות אומדן במחשב

כדי לשפר ולבסס את ההבנה האינטואיטיבית לגבי מושג האחוז, החלטנו לפתח פעילויות במיקרומחשב לאומדן באחוזים. יתרונו הגדול של המחשב, הוא ביכולתו להגיב במהירות ולתת משוב מיידי לאומדן של התלמיד. כמו כן אפשר בעזרת המחשב לקבוע את הזמן הקצוב לביצוע כל מטלה. כך נאלץ התלמיד לבצע אומדן, ולא לערוך חישובים מדוייקים.

הפעילויות בלומדה "קדימה אל האחוזים" פותחו כמשחקים ליחיד ולזוג ברמות קושי שונות ובסוגי מטלה שונים.

בפעילות הראשונה, "מצא את התמורה", על התלמיד להעריך את תמורת האחוז (מטלה מסוג ראשון). הזמן בכל שלב מוגבל, וכל תשובה נכונה מזכה בנקודות המצטברות לציון סופי, "טוב" או "טוב מאוד". בפעילות השניה "התקרב לאחוז", על התלמיד להעריך איזה אחוז מהווה מספר אחד מתוך מספר אחר (מטלה מסוג שני). בכל שלב התלמיד זוכה בניקוד יחסי למידת הקרבה לתשובה המדויקת, והמחשב מציג בנוסף, גם את התשובה המדויקת. כאן אין הגבלת זמן.

בפעילות השלישית "בול אחוז", המחשב "מחביא" מספר באינטרול נתון, ועל התלמיד להתקרב אל המספר בעזרת חישובי אחוזים.



תלמידים בכיתה ז' ו ח' קיבלו שאלונים לפני הפעילויות בלומדה, ואחרי הפעילויות, ובמקביל העברנו שאלונים לפני ואחרי לקבוצת בקורת. בנוסף לכך נערכו תצפיות בתלמידים בודדים וכן בכיתה כולה בזמן הפעילויות במחשב.

ההשוואה בין השאלונים לפני ואחרי הפעילויות בלומדה מראה שתלמידים הפיקו יותר מהמחשב במטלה מהסוג השני הן בחישוב מדויק והן בחישובי אומדן.

בקבוצת הניסוי (N = 76) במטלה זו, עלה הממוצע מ 48% בשאלון המוקדם ל 73% בשאלון שאחרי.

בקבוצת הבקורת (N = 27), השינוי בממוצע הוא מ 65% ל 69%.

אחת השאלות בהן תלמידים התקשו היתה:

הערך האם 60 מתוך 245 הם:
יותר מ 25%, פחות מ 25%, 25%.

אחוז המשיבים נכון עלה מ 29% (בשאלון המוקדם) ל 70% (בשאלון שאחרי), ואחוז השוגים (שבחרו ב"יותר מ 25%") ירד מ 59% (בשאלון המוקדם) ל 24% (בשאלון אחרי).

בעקבות התצפיות בכיתה מצאנו:

א. בפעילות הראשונה תלמידים עברו מ 5 תשובות נכונות (מתוך 10) ל 8-10 תשובות נכונות תוך שיעור אחד.

ב. בפעילות השניה, התלמידים זכו בתחילה בערך ב-12 נקודות מתוך 36, אך מאזן הנקודות השתפר ועלה בערך ל 24 נקודות תוך שיעור אחד.

ג. בפעילות השלישית, תהליך ההתכנסות שלווה ע"י משוב המחשב הנחה תלמידים להשתמש בפחות או יותר מ100% של מספר בצורה נכונה.

ד. תלמידים לרב, אינם מתלהבים מלמוד נושא האחוזים. בפעילויות הנ"ל, המוטיבציה ואוירת העבודה היו גבוהים.

אכן, מתוך ניתוח השאלונים והתצפיות בכיתה ניתן לומר שפעילויות אומדן באחוזים בעזרת לומדת המחשב, תורמות לביצוע מטלות באחוזים.

שימוש במודלים גיאומטריים ללימוד ההסתברות

מאת: ארזה זליג
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

1. מבוא

ההסתברות לגשם במקום מסויים היא: 1/7 בערב חנוכה, 1/6 בערב פורים, ו - 1/15 בערב פסח.

א. מהי ההסתברות שירד גשם בערב חנוכה ובערב פורים, אבל לא ירד גשם בערב פסח?

ב. מהי ההסתברות שלפחות אחד מערבי החג הללו יהיה "ללא גשם"?

הצגנו את הבעיה בפני מורים שהשתתפו בקורס השתלמות למורי מתמטיקה, שטיפל בנושאים מתוכנית המתמטיקה ברמה של 4-5 יחידות לימוד.
בקשנו שיפרטו איך הם מציגים את הבעיה ופיתרונה בכיתה. חלקם אמרו שהם מסתפקים בניתוח מרחב המדגם, אך התלמידים מתקשים בניתוח מרחב המדגם ובהבנתו, ואחרים ציינו שבפתרון בעיות כאלה הם משתמשים בדיאגרמת עץ, אבל גם כך יש לתלמידים קשיים.

המורים ציינו עוד כי בשאלות מסוג זה, הם עצמם מתקשים להסביר מתי יש לכפול את ההסתברויות ומתי עליהם לחבר אותן. מדוע "ענף בעץ" הוא למעשה כפל של הסתברויות? וכו'. ידוע להם כי תלמידים רבים אינם מבינים שחיתוך של מאורעות בלתי תלויים (וגם) משמעותו כפל הסתברויות של המאורעות הפשוטים.

אחת המורות אמרה שכאשר היא מסבירה לתלמידיה פתרון בעזרת דיאגרמת עץ, הם בדרך כלל מבינים אותו בעת הצגת הפתרון בכיתה. נמצא שבאותה העת, חלקם אפילו יודעים "טכנית" מה לעשות בעץ, אולם איך הם מבינים את המושגים במידה כזו שיוכלו לפתור באופן עצמאי שאלה דומה.
כלומר, כאשר הם מתבקשים לפתור בעצמם בעיה שונה, בעלת אופי דומה, אין הם מצליחים לבנות את העץ.

תוך כדי חיפוש דרכים דידקטיות להצגת הנושא במסגרת הקורס למורים, נתקלנו במאמרים של Lappan ואחרים (ראה רשימת מקורות), ובהם תיאור פעילויות המשלבות שימוש במודל השטח לצורך הוראת ההסתברות.
בין השאר הם ממליצים: "מודל השטח מאפשר לקרב מצבים הסתברותיים לתלמיד עוד לפני שניתן להציג בפניו מודל פורמלי יותר. מודל השטח משפר אף את יכולתו של התלמיד להבין מושגים הסתברותיים המחייבים עיסוק בשברים".

גם פרופ' מ. משלר מהאוניברסיטה העברית בירושלים, ממליץ זה מספר שנים, להשתמש במודל השטח להוראת מושגים בהסתברות.

בהמשך נדגים את פתרון הבעיה שהובאה לעיל ובעיות אחרות בעזרת מודלים גאומטריים בתקווה שיעזרו למורים ולתלמידים.

2. __מודלים גיאומטריים__

מודלים אלו הבנויים מקו, ריבוע או קוביה שאורך צלעם 1 יחידה, מייצגים את מרחב המדגם בצורה גיאומטרית. נדגים את שני הראשונים בעזרת "שאלת הגשם". (מודל הנפח יודגם מאוחר יותר, אף הוא בעזרת אותה השאלה).

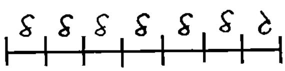
ניתן להשתמש במודל גאומטרי ככלי לפתרון בעיות בהסתברות.
אלו הרגילים להשתמש במודל העץ יוכלו גם להציג את הפתרון "במקביל" על ידי המודל הגיאומטרי.

נחזור לפתרון הבעיה שלעיל.

את המאורעות הכרוכים בירידת הגשם בערב חנוכה אפשר לתאר כך:

"גשם" , "לא גשם" , "לא גשם" , "לא גשם" , "לא גשם" , "לא גשם" , "לא גשם". כלומר, פעם אחת "גשם" ושש פעמים "לא גשם".

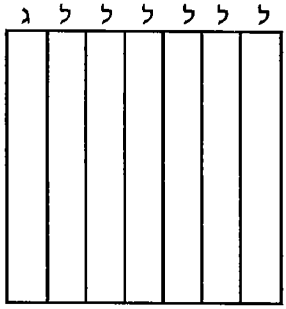
נמחיש זאת על קו:



בתיאור זה ייצגנו את שני המאורעות: "ירד גשם" (ג) ו "לא ירד גשם" (ל) בערב חנוכה, על קטע באורך יחידה, המורכב משני קטעים. קטע אחד מייצג את המאורע "ירד גשם", ואילו הקטע השני מייצג את המאורע "לא ירד גשם". אורכיהם של הקטעים (1/7 ו 6/7 בהתאמה), מייצגים את ההסתברות של התרחשות אותם שני המאורעות.

מודל גיאומטרי נוסף ויותר שימושי הוא ריבוע שאורך צלעו 1 יחידה. במקרה זה נחלק הריבוע לשבעה מלבנים, שווי שטח. אחד מהם ייצג את המאורע "ירד גשם" ואילו ששת האחרים ייצגו את המאורע - "לא ירד גשם". היחס בין מספר (שטח) המלבנים המייצגים מאורע למספר (שטח) המלבנים הכולל יתאר את הסתברות ההתרחשות של אותו המאורע.

ערב חנוכה



אנחנו יכולים להמשיך ולתאר כך מאורעות מורכבים. לדוגמא את המאורעות "גשם" / "לא גשם" בערב חנוכה ובערב פורים יכולנו לתאר כך:

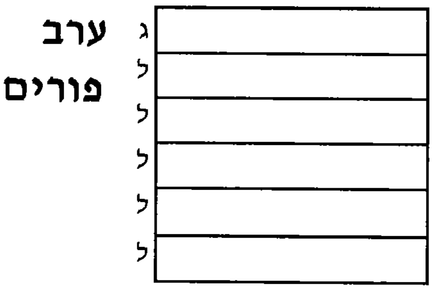
ערב חנוכה

	ל	ג	ג	ג	ג	ג	ג	
ע	(ל,ל)	(ג,ל)	(ג,ל)	(ג,ל)	(ג,ל)	(ג,ל)	(ג,ל)	ל
ר	(ל,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	ג
ב								
פ	(ל,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	ג
ו	(ל,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	ג
ר								
י	(ל,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	ג
ם	(ל,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	(ג,ג)	ג

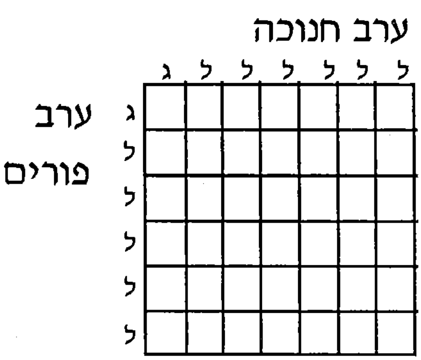
בערב פורים, בלי תלות עם מה שקורה בערב חנוכה, יש הסתברות של 1/6 ל"גשם" ו 5/6 ל "לא גשם".

בטבלה לכל "ג" ו "ל" בשורה העליונה יש הסתברות של 1/7, ולכל "ג" ו "ל" בטור השמאלי יש הסתברות של 1/6. הזוגות מבטאים את האפשרויות המורכבות מהמצבים בערב פורים וערב חנוכה. לכל זוג יש אותה הסתברות ויש בסך הכל 42 זוגות: ז.א. לכל זוג יש הסתברות של 1/42, ומכך אנחנו יכולים לחשב, לדוגמא, את ההסתברות של "גשם בערב חנוכה ולא גשם בערב פורים". מאחר ויש 5 זוגות (ג,ל) הרי שההסתברות למאורע מורכב זה היא 5/42.

הטבלה הזאת מקרבת אותנו למודל גיאומטרי.
נצייר ריבוע, הדומה לריבוע שתאר את המאורעות בערב החנוכה, שיהיה מורכב מ 6 מלבנים, האחד מייצג את המאורע "גשם", ואילו חמשת האחרים את המאורע "לא גשם". ריבוע זה יתאר את המצב בערב פורים.

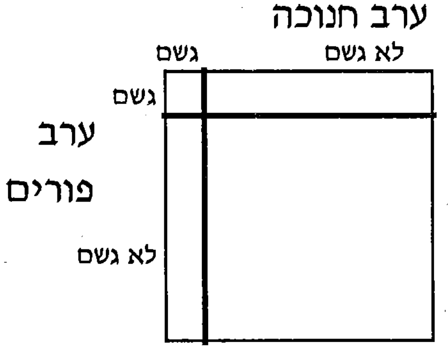


אם "נלביש" את שני הריבועים לעיל אחד על השני, נקבל את הריבוע המצוייר להלן, והמייצג את חיתוך המאורעות של ירידת גשם ואי ירידתו בערבי חנוכה ופורים.



42 המלבנים הקטנים מחליפים עכשיו את 42 הזוגות הסדורים שבטבלה. הסתברות ההתרחשות של כל אחד מהזוגות (מלבנים) היא 1/42 וההסתברות של כולם ביחד היא 1. גם כאן, היחס של המלבנים (שטח או מספר), המתארים אירוע מסויים לסה"כ המלבנים (שטח או מספר)- מתאר את הסתברות ההתרחשות של אותו מאורע.

לאחר שצוברים קצת נסיון, ניתן לפשט את המודל כמו בציור הבא, אבל לא כדאי למהר, התלמידים יעשו זאת בעצמם בזמן שיהיו מוכנים.

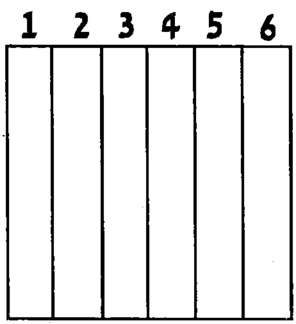


נחזור לבעיית הגשם בהמשך, ועתה נשתמש במודל הגיאומטרי לפתרון שאלה נוספת כדוגמא.

זורקים שתי קוביות רגילות ותקינות.

א. מה ההסתברות שסכום התוצאות יהיה 12?
ב. מה ההסתברות שסכום התוצאות יהיה גדול מ 7?
ג. מה ההסתברות שסכום התוצאות יהיה קטן מ 7?
ד. מה ההסתברות שסכום התוצאות יהיה בדיוק 7?

במודל יהיו 6 עמודות שוות, כך ששטחה של כל אחת 1/6 משטח הריבוע השלם. הריבוע מייצג את מרחב המדגם של זריקה אחת וכל עמודה מייצגת את המאורע של קבלת אחד המספרים שעל הקוביה, ואת העובדה שההסתברויות של תוצאות הזריקה הן שוות (כל אחת - 1/6).



השורות תתארנה את ההסתברות של קבלת התוצאות השונות בזריקה השניה:

1	
2	
3	
4	
5	
6	

בריבוע, הנמצא בהצטלבות העמודה והשורה, אפשר לרשום את סכום התוצאות של שתי הזריקות.

קוביה I

קוביה II	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

במודל יהיו, אם כן, 36 ריבועים, שכל אחד מהם מייצג 1/36 משטחו של הריבוע השלם. מספר הריבועים בעלי תוצאה שווה מחולק ב 36 מתאר את ההסתברות להתרחשות המאורע המתואר על ידי הריבועים.

לדוגמא, אם נסמן כמקובל את ההסתברות של "קבלת סכום 2" ב P(2) (P היא האות הראשונה של המלה הסתברות באנגלית Probability),

נקבל P(2) = 1/36, כי רק ריבוע אחד מתוך 36 מייצג את "סכום 2".

בדומה לכך, P(3) = 2/36, כי שני ריבועים מתוך 36 מייצגים סכום של 3.

פתרון הבעיה:

א. מאחר ורק ריבוע אחד מקיים תכונה זו, הרי ש P(12) = 1/36.

ב. נסמן את המאורע "סכום התוצאות גדול מ 7" על ידי האות A.
15 ריבועים מתוך 36 מייצגים מאורע זה,
לכן: P(A) = 15/36

ג. המאורע "סכום התוצאות קטן מ 7" יסומן על ידי B. 15 ריבועים מתוך 36 מייצגים מאורע זה.

לכן $P(B) = 15/36$

ד. 6 ריבועים מתוך 36 מייצגים את המאורע "סכום התוצאות 7".

לכן $P(7) = 6/36$

הערה: סכום ההסתברויות בסעיפים ב', ג', ד', הוא כמובן 1.

הדגמנו, אם כן, פתרון שאלות בעזרת מודל שטח שהוא ריבוע ששטחו יחידה. הריבוע יחולק בהתאם להסתברות ההתרחשות של ארועים שונים לעמודות או שורות ששטחן היחסי יהיה שווה להסתברות ההתרחשות של מאורעות זרים וממצים. שטחם היחסי של המלבנים הנוצרים מחיתוך העמודות והשורות מתאר את ההסתברות של התרחשות משותפת (חיתוך) של המאורעות המתוארים ע"י העמודה והשורה.

כמו בכל תהליך לימוד ניתן יהיה, אחרי צבירת נסיון והבנה עמוקה יותר של הנושא בעזרת המודל הגיאומטרי, לעבור לפתרון הבעיה בלי לצייר את המודל.

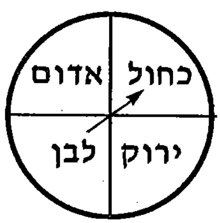
3. <u>פעילות עם תלמידים</u>

בטרם הצגת המהלך הדידקטי לפני המורים בקורס, רציתי לבדוק אותו בעצמי עם תלמידים. לפיכך, ניסיתי ליישם את מודל השטח בעבודה עם תלמידי כיתה י"ב העומדים לפני בחינת הבגרות במתמטיקה ברמת 3 יחידות. התלמידים למדו כבר הסתברות, ובשיחה עם המורה הובהר שהם למדו זאת בדרך של ניתוח המאורעות בלבד, ולא נעזרו בשום מודל, גם לא בדיאגרמות עץ.

בתחילת השיעור הצגתי בפני התלמידים את השאלה הבאה:

<u>שאלה 1:</u>

לפניך שעון שבמרכזו סיכה.



נסובב את הסיכה -

מה ההסתברות שהסיכה תעצור באזור הצבוע בכחול?

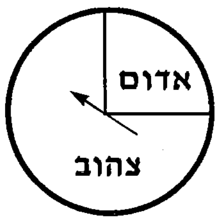
אחת התלמידים התפרצה: "1/4, כי זה 1/4 מהשטח".

תלמידה אחרת לא היתה משוכנעת שהיא מבינה מה זאת הסתברות:
"הסתברות זה סיכוי? נכון?"

שוחחנו קצת על זה ושאלתי עוד שאלה.

<u>שאלה 2</u>:

עליך לסובב את הסיכה שנמצאת במרכז השעון שלפניך. במידה והסיכה תעצור בשטח המסומן באדום תקבל 5 נקודות, אחרת לא תקבל נקודות.



א. *מסובבים את הסיכה פעם אחת. מה ההסתברות לזכות ב 5 נקודות?*

לא היתה שום בעיה, כולם ענו על כך במהירות ונכון: 1/4.

ב. *מסובבים את הסיכה פעמיים. מה ההסתברות לזכות ב 10 נקודות?*

התשובות היו: 1/4, 1/8, 2/4.

<u>אף אחד</u> מהתלמידים לא ענה את התשובה הנכונה שהיא 1/16. תשובות התלמידים היו ספונטניות בלי שהיתה להם דרך כלשהיא לפתרון. זה היה השלב הטבעי להכנסת המודל הגיאומטרי.

הדגמתי את הפתרון בעזרת **מודל השטח** ע"י ציור ריבוע ששטחו 1, וחלוקתו ל 4 עמודות שוות שטח.

נקצר כאן את מהלך ההוראה והדיון בכיתה: אחת העמודות מייצגת את המאורע "עצירה בשטח האדום וקבלת 5 נקודות", ואילו שלושת האחרות, את המאורע "עצירה בשטח הצהוב וקבלת 0 נקודות". (ראה ציור).

אדום	צהוב	צהוב	צהוב
5	0	0	0
נקי	נקי	נקי	נקי

גם את הסיבוב השני נייצג על ידי ריבוע, שיחולק ל 4 שורות שורות שטח המייצגות את אותם המאורעות.

5 נקי	אדום
0 נקי	צהוב
0 נקי	צהוב
0 נקי	צהוב

על ידי "הלבשת" שני הריבועים זה על זה נקבל 16 משבצות שורות שטח. ההסתברות של קיום מאורע מסויים המורכב משני הסיבובים תהיה מספר המשבצות המיצגות מאורע זה מחולק במספר המשבצות הכללי.

בציור אפשר לרשום את הנקודות המתאימות למאורעות השונים המתקבלים משני סיבובי סיכה.

		סיבוב I			
		5	0	0	0
סיבוב II	5	10	5	5	5
	0	5	0	0	0
	0	5	0	0	0
	0	5	0	0	0

לאחר שהתלמידים ציירו, הם ענו בקלות רבה: "ההסתברות לזכות ב 10 נקודות היא 1/16", והסבירו שההסתברות 1/16 נובעת מכך שמשבצת אחת מתוך 16 מייצגת את המאורע: "קבלת 10 נקודות".

הסברתי כי 1/16 מתקבל גם על ידי יחסי השטחים. הריבוע המייצג מאורע זה נוצר מחיתוך שורה אחת ועמודה אחת.

המשכנו לפתור שאלות נוספות.

<u>שאלה 3</u>:

לשחקן כדורסל יש סיכוי של 75% לפגוע בסל, ו 25% להחטיא.
השחקן ניסה לקלוע לסל פעמיים. על כל קליעה לסל הוא מקבל נקודה אחת.
מה ההסתברות שהוא לא יקבל כלל נקודות?

הפעם נטר כבר כמה מהתלמידים לפיתרון עצמאי באמצעות מודל שטח דומה.

ריבוע חולק על ידם ל 4 עמודות שורות שטח שייצגו את ההסתברויות של השחקן בקליעה הראשונה. 25% מהשטח (עמודה אחת) ייצגו את ההסתברות להחטאה, ו 75% (שלוש עמודות) לפגיעה.

באופן דומה הם חילקו את הריבוע לארבע שורות המתארות את ההסתברויות של השחקן בקליעה השניה.

הריבועים שנוצרו מחיתוך העמודות והשורות, מייצגים את ההסתברויות של קבלת נקודות בשתי הקליעות.

קליעה I

קליעה II		0	I	I	I
	0	0	I	I	I
	I	I	2	2	2
	I	I	2	2	2
	I	I	2	2	2

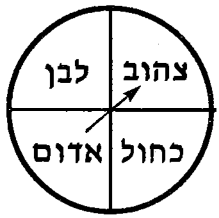
מהציור קל להסיק כי P('נק 0) = 1/16

אחת התלמידות קראה: "עכשיו אני מבינה את הכללים שהמורה לימד אותנו".
(הערה: במתכונן בחרתי בשאלה כזו שהמודל שלה זהה לגמרי לזה שצוייר
בשאלה הקודמת).

מכאן יכולנו להתקדם לבעיות קשות יותר.

<u>שאלה 4</u>:

לפניך שני שעונים.



שעון א'

שעון ב'

לכל משתתף מותר לסובב פעמיים את מחוג השעון לפי בחירתו. משתתף מקבל פרס אם המחוג עצר פעם בצהוב ופעם בכחול (הסדר לא משנה).

לימור בחרה לסובב פעמיים את שעון א'.

מיכל בחרה לסובב פעמיים את שעון ב'.

זיו בחר לסובב פעם ראשונה את שעון א' ופעם שניה את שעון ב'.

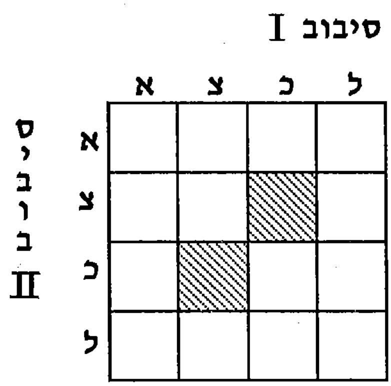
למי ההסתברות הגדולה ביותר לקבל פרס?

התלמידים ציירו שלושה מודלים של שטח המייצגים את פעילותם של לימור, מיכל וזיו. המודלים צויירו על ידם ללא בעיות, ובעקבותיהם הגיעו לפתרון נכון.

נסמן ב A את המאורע המזכה בפרס:

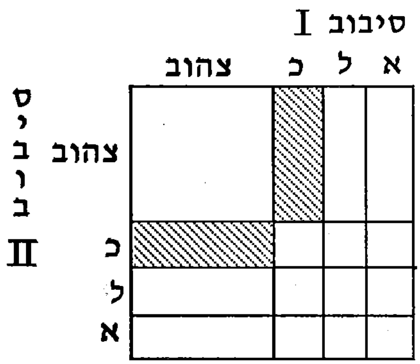
"המחוג עצר פעם בצהוב ופעם בכחול".

עבור לימור:



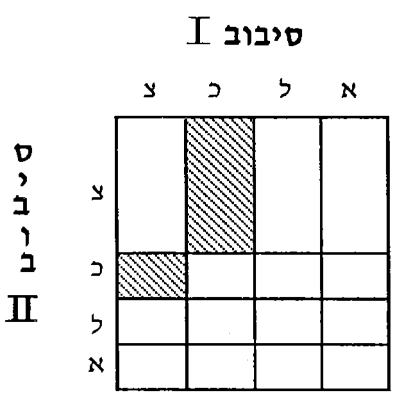
במודל זה ההסתברות לקבלת כל צבע היא שווה: P(A) = 2/16 = 1/8

עבור מיכל:



במודל זה ההסתברות לקבלת "צהוב" שונה מההסתברות לקבלת "כחול": P(A) = 6/36 = 1/6.

עבור זיו:



P(A) = 4/24 = 1/6

שאלה 5:

כד מכיל 10 כדורים: 7 אדומים ו 3 כחולים.

גד מוציא כדור ומחזירו, ומוציא כדור שני.

מה ההסתברות שיוציא:

א. שני כדורים אדומים?

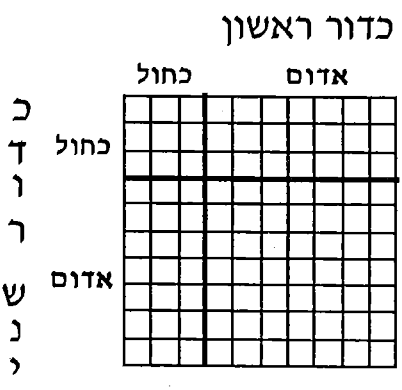
ב. שני כדורים כחולים?

ג. כדור אחד כחול וכדור אחד אדום (הסדר אינו חשוב)?

בשלב זה, חלק מהתלמידים פתרו זאת יפה ללא שימוש במודל השטח.
אחד התלמידים אף נימק זאת: "אני כבר לא צריך לצייר את המודל כי הבנתי את הרעיון."

אחת התלמידות שפתרה נכון את סעיפים א' , ו ב' , בעזרת מודל השטח, אמרה: "בעצם את סעיף ג' אני לא חייבת לחשב, אקבל זאת מסכום התוצאות של א' ו ב' והשלמתו ל 1.

תלמידים אחרים עדיין הזדקקו לציור מודל השטח בכל סעיפי השאלה, ופתרו נכון ובאופן עצמאי.



P(א,א) = 7•7/100 = 49/100

P(כ,כ) = 3•3/100 = 9/100

P(צבעים שונים) = 3•7/100 + 7•3/100 = 42/100

49/100 + 9/100 + 42/100 = 1

שאלה 6:

הסתברות לגשם בערב פורים היא 1/6 וההסתברות לגשם בערב פסח היא 1/15.

א. מה ההסתברות שירד גשם בערב פורים ולא בערב פסח?

ב. מה ההסתברות שירד גשם בשניהם?

ג. מה ההסתברות שלא ירד גשם בשניהם?

השימוש במודל השטח פה, הקל מאד על התלמידים את פיתרון הבעיה, בלי שהסתבכו בקושי הנפוץ של התלבטות בין חיבור ההסתברויות ובין הכפלתן.

הפתרון:

א. את מאורע זה מתארות 14 משבצות מתוך 90, לכן ההסתברות היא 14/90.

ב. את מאורע זה מתארת משבצת אחת מתוך 90, לכן ההסתברות היא 1/90.

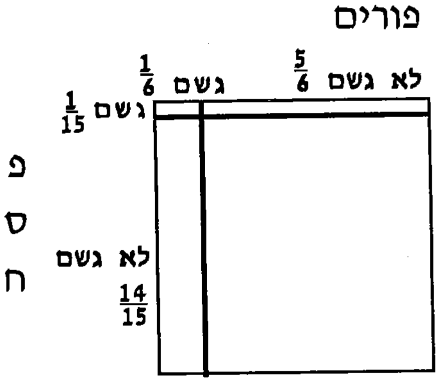
ג. את מאורע זה מתארות 70 משבצות מתוך 90, לכן ההסתברות היא 70/90.

תלמיד אשר ענה את התשובות במהירות, הראה לי שהוסיף שאלה נוספת:

"מה ההסתברות שלא ירד גשם בערב פורים וירד בערב פסח?", ולאחר שהוסיף אותה קיבל בסכום של ארבעת המאורעות הסתברות 1.

היו תלמידים שתהו בטרם ניגשו לציור מודל השטח: "עכשיו נצטרך לחלק את הריבוע ל 15 חלקים!?".

עניתי: "לא חייבים". אחרי שהבינו את העקרון, ניתן לצייר זאת בצורה הבאה:



ואז אחת התלמידות התפרצה:"התשובה ל א' - 14/15 של 1/6 כלומר:
"14/15•1/6 = 14/90

בסיכום, כולם פתרו בקלות את השאלה.

נראה לי שהמעבר בין שני הציורים שנעשה בשלב זה הקל עליהם מאוד, ונתן להם לראות את מבנה המודל בצורה ברורה יותר. ציור כל המשבצות הסיח, אצל חלק מהתלמידים, את הדעת מהבנת המבנה הכללי.

לתלמידים שפתרו במהירות, הוספתי את השאלה מבחינת הבגרות שהופיעה במבוא. לשמחתי, גם שאלה זו נפתרה על ידם.

א. 1/7•1/6•14/15 = 14/630

ב. תלמידים רבים פתרו את סעיף ב' בעזרת המשלים "שלושת ערבי החג גשומים": 1/630 = 1/7•1/6•1/15 = (שלושת ערבי החגים גשומים)P
ולכן ההסתברות המבוקשת היא: 629/630 = 1/630 - 1

<u>הערה מתודית:</u>

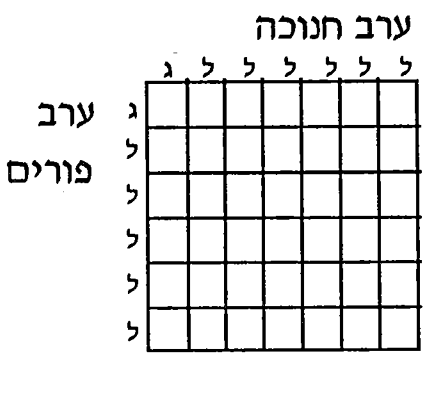
במקומות רבים בשימוש מודל השטח השתמשתי במילה "נלביש" ריבוע על ריבוע. כדי להמחיש זאת השתמשתי בשקפים: בשקף אחד שרטטתי ריבוע המחולק למלבנים עבור המאורעות והסתברותם בשלב הראשון, ובשקף שני שרטטתי ריבוע דומה עבור השלב השני. כאשר הנחתי שקף על שקף (ריבוע על ריבוע) קבלתי את המשבצות שורת השטח המתאימות.

4. <u>בעיות המכילות שלושה שלבים או יותר</u>

"שאלת הגשם" מכילה שלושה שלבים.

<u>פתרון בשני שלבים</u>

א. בשלב הראשון נפתור את הבעיה לגבי ערב חנוכה וערב פורים בלבד.

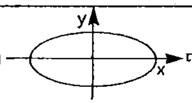
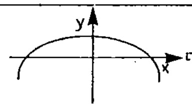
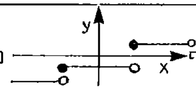
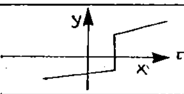
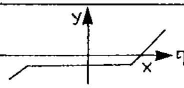
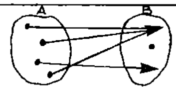
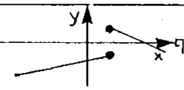
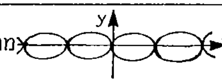
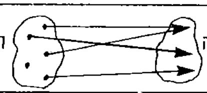
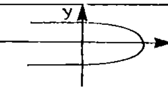


דף לתלמיד

פעילות סביב פונקציות

פעילות 1 - <u>פונקציה או לא פונקציה</u>

זכור! פונקציה היא התאמה בה <u>לכל איבר</u> של התחום מתאים <u>איבר אחד</u> מהטווח.

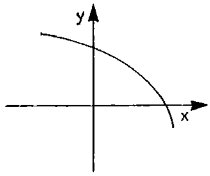
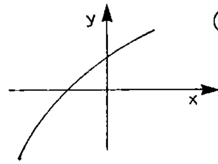
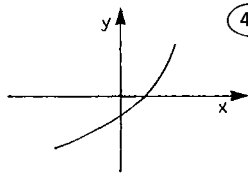
אם הגרף  מתאר פונקציה רשום מ אחרת רשום ה	
אם הגרף  מתאר פונקציה רשום ש אחרת רשום ר	
אם הגרף  מתאר פונקציה רשום צ אחרת רשום ת	
אם הגרף  מתאר פונקציה רשום ז אחרת רשום ל	
אם הגרף  מתאר פונקציה רשום א אחרת רשום מ	
אם ההתאמה  היא פונקציה רשום נ אחרת רשום ש	
אם הגרף  מתאר פונקציה רשום ח אחרת רשום ו	
אם הגרף  מתאר פונקציה רשום מ אחרת רשום ר	
אם ההתאמה  היא פונקציה רשום ז אחרת רשום א	
אם הגרף  מתאר פונקציה רשום ? אחרת רשום ?	

אם ביצעת נכון את ההוראות - קיבלת משפט בן שלוש מלים:

....

פעילות 2 - <u>פונקציה עולה או יורדת</u>

במשבצות שלפניכם רשומות פונקציות או תכונותיהן. רשמו בכל משבצת אם הפונקציה עולה או יורדת.

(182) $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ הפונקציה: ________	(743)  הפונקציה : ________
(671) $\frac{3}{4}x = -y$ הפונקציה: ________	(937) $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 0$ הפונקציה: ________
(514)  הפונקציה: ________	(269) $-5x = 9 - y$ הפונקציה: ________
(407)  הפונקציה: ________	(380) (פונקציה קווית) $\alpha > 90^o$ הפונקציה: ________

רמז: α היא הזווית בין הקו הישר והכיוון החיובי של ציר ה-x

א) לכל פונקציה שייך מספר המסומן בעיגול. רשום את מספרי הפונקציות היורדות בטור השמאלי של טבלת הסיכום, ובטור הימני רשום את מספרי הפונקציות העולות. (הסדר לא משנה).

ב) חבר את המספרים בכל טור.

ג) אם קיבלת 2 מספרים הכתובים באותן ספרות, אך בסדר הפוך - פתרת נכון!

טבלת	סיכום
עולה	יורדת

פעילות 3 - **תשבץ**

א	ב	ג
ד	ה	ו
ז	ח	ט

א) המקור של 13 לפי פונקציה $f(x) = 2x + 3$

ב) נקודת חיתוך של פונקציה $y = 3x + 3$ עם ציר y

ג) התמונה של 2 לפי פונקציה $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

ד) מנת ההפרשים בין נקודות $A(6,20)$ ו $B(4,2)$

ה) השיפוע של פונקציה $7x = y + 3$

ו) פרמטר b של הפונקציה $3(x + 1) = y + 2x - 2$

ז) התמונה של (-13) לפי פונקציה $f(x) = -x$

ח) פרמטר a של הפונקציה $4x + 5(x + 1) = y - 2x$

ט) התמונה של 4 לפי פונקציה $g(x) = \frac{1}{4}x + 8$

* קיים קשר בין המספרים בכל טור. מהו?

* קיים קשר בין המספרים בכל שורה. מהו?

ל מ ו ר ה

* שלוש הפעילויות יכולות לשמש תרגול וטיפול בלתי שגרתי במושגים הקשורים בפונקציות.
* עבודה בדפים אלה מלווה בדרך כלל במוטיבציה גבוהה וסקרנות מצידו של התלמיד.
* שימוש באיסטרטגיות שונות לגיוון התרגול מאפשר, בנוסף לכל, גם בדיקה עצמית של התלמיד.

ת ש ו ב ו ת

1. **ה ש ד ל א נ ו ר א!**

2. 1372 טבלת סיכום

עולה	יורדת
182	671
514	743
407	937
269	380
1372	2731

3. המספרים בטורים הם איזוגיים בדילוגים של 4 והמספרים בשורות הם איזוגיים בדילוגים של 2.

על פי מודל זה נקבל ארבעה מאורעות שההסתברות לכל אחד מהם היא:

I. $1/42$ = P(גשם בפורים , גשם בחנוכה)

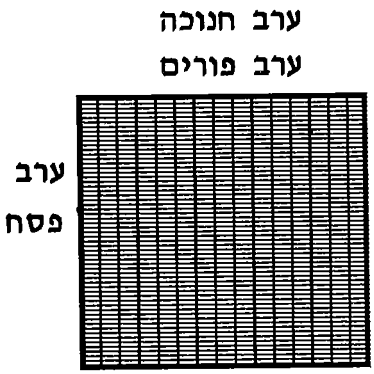
II. $5/42$ = P(לא גשם בפורים , גשם בחנוכה)

III. $6/42$ = P(גשם בפורים , לא גשם בחנוכה)

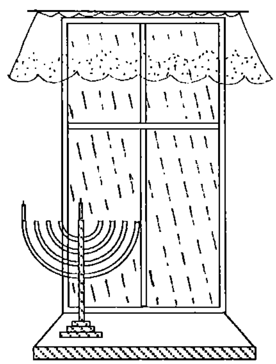
IV. $30/42$ = P(לא גשם בפורים , לא גשם בחנוכה)

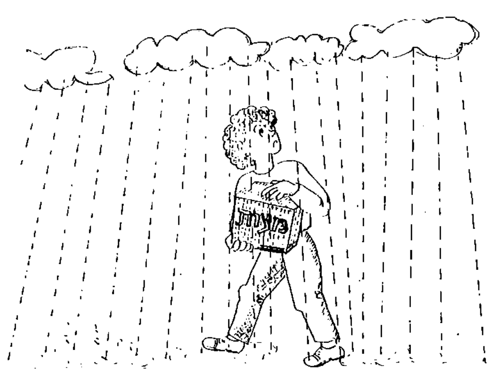
ב. בשלב שני נבדוק את חיתוך ארבעת המאורעות דלעיל עם ההסתברות לירידת גשם ואי ירידתו בערב פסח.

מודל זה יחולק לעמודות בהתאם להסתברויות שמצאנו לעיל כמו כן תהיינה במודל 15 שורות מהן: אחת המייצגת את המאורע "ירד גשם בערב הפסח", ו-14 - את המאורע - "לא ירד גשם בערב הפסח", בהתאם להסתברות המאורעות האלו.



מכאן ניתן לפתור את השאלה שהוצגה בבחינה ושאלות נוספות על סמך הנתונים.





מודל הנפח

אם נרצה להדגים את פתרון הבעיה, בשלב אחד, בעזרת מודל גיאומטרי, נצטרך להעזר במודל המכיל שלושה ממדים, כלומר מודל הנפח יחליף את מודל השטח. לכן במקום ציור של ריבוע יבוא ציור של קוביה בעלת נפח 1, וספירת התיבות תחליף את ספירתם של המלבנים.

מודל הנפח פשוט תאורטית, אבל מסורבל למעשה. לעיתים קרובות הוא קשה יותר מהבעיה אותה הוא בא לפתור...

נראה לי כי בשלב בו התלמידים מבינים, מספיק טוב את מושגי ההסתברות במאורעות המכילים שני שלבים, (בעזרת הדוגמאות הקודמות), המעבר לשלושה שלבים ויותר לא יהווה בעיה. פה המקום שכדאי להתחיל לעבוד עם דיאגרמת עץ שהיא פשוטה יותר מבחינה טכנית.

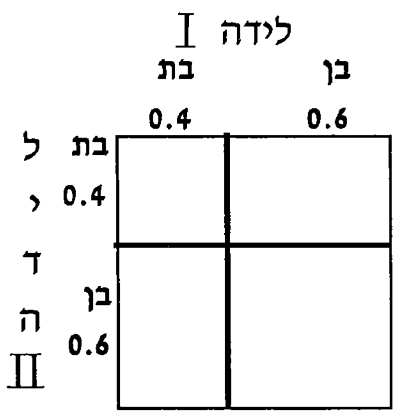
5. יישום מודל השטח לבעיות מורכבות יותר

נציג עוד כמה שאלות ופיתרונן ע"י מודל גיאומטרי. בדרך כלל משתמשים לפיתרונן במושגי הסתברות מותנה ותלות בין מאורעות - אבל לא נראה שכדאי להכניס זאת עד לשלב מתקדם יותר.

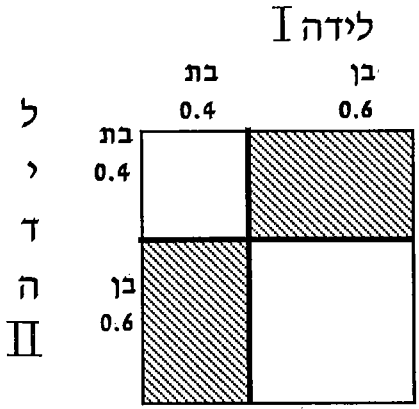
שאלה 1:

בהנחה שההסתברות להולדת בן היא 0.6 והסתברות להולדת בת היא 0.4, מה ההסתברות שהבכור הוא בן, אם ידוע שלמשפחה נולדו בן ובת?

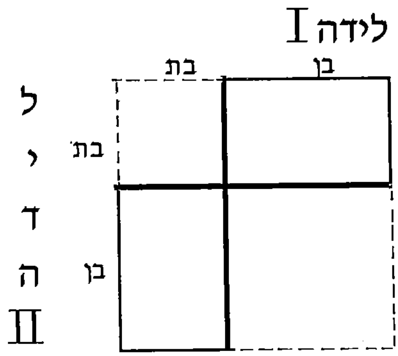
קודם כל נתעלם מהידוע לגבי המשפחה, ונעסוק במודל לשתי לידות:



אבל כאן נמסרה לנו האינפורמציה שנולדו בן ובת. ולכן, מתוך כל הריבוע נתבונן רק במלבנים המודגשים.



ההסתברות של המאורע שהם מייצגים ודאית ולכן "שטחם" 1. המלבנים האחרים מייצגים מאורעות בלתי אפשריים, לכן "שטחם" 0. התוצאה היא שמודל השטח הצטמצם וקיבלנו את המודל הבא:

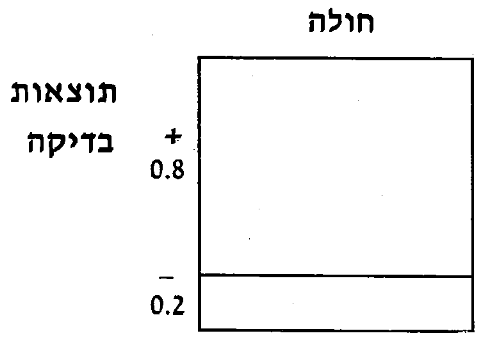


אנו רוצים לדעת עכשיו מה הסתברות המאורע "בן בלידה ראשונה" בתנאי שנולדו בן ובת. זהו 1/2 מהשטח. משבצת אחת מתוך שתיים, ולכן ההסתברות המבוקשת היא 1/2.

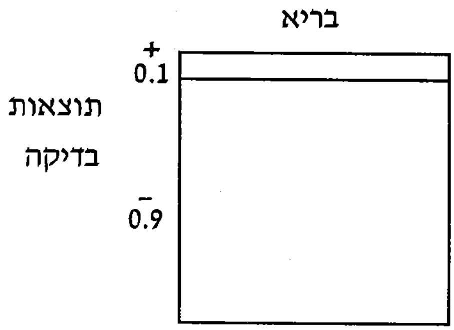
<u>שאלה 2:</u>

בדיקה לאיבחון מחלה מסויימת מגלה מחלה (כלומר, תוצאת הבדיקה +) אצל אדם חולה בהסתברות של 80%, ואצל אדם בריא בהסתברות 10%. נניח שמדובר במחלה אשר שכיחותה בקרב האוכלוסיה הנבדקת היא 30%, מה ההסתברות שאדם אשר הבדיקה נתנה לגביו (+) הוא אמנם חולה?

לפיתרון השאלה בעזרת מודל שטח נשתמש בשני ריבועים, האחד מתאר מצד אחד את החולים, ומצד שני את תוצאות הבדיקה. השני מתאר מצד אחד את הבריאים ומצד שני את תוצאות הבדיקה. במידה וידוע שאנו בודקים אדם חולה, ההסתברות לתוצאות הבדיקה (+) או (-), תתואר ע"י:

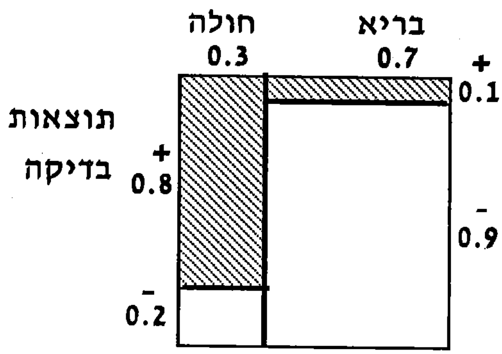


במידה וידוע שאנו בודקים אדם בריא, ההסתברות ל (+) או (-), תתואר ע"י:



במידה ולא ידוע אם עוסקים באדם חולה או בריא, נאחד את שני המודלים האלו למודל שטח אחד. הבריאים מהווים 70% מהאוכלוסיה, ולכן מיוצגים על ידי 0.7 משטח הריבוע.

ידוע לנו שתוצאת הבדיקה היתה (+), לכן מאורעות אלו הסתברותם ודאית, והמלבנים המייצגים אותם "שטחם" 1. (הוא מיוצג עלידי 0.31 משטח הריבוע המצויר). נקבל עתה את מודל השטח הבא:



הסתברות המאורע המבוקש תהיה עפ"י השטח המתאר אדם חולה (0.24) מתוך סה"כ מרחב המדגם (0.31) : 24/31.

<u>שאלה 3</u>:

כד מכיל 10 כדורים: 7 אדומים ו 3 כחולים.

גד מוציא כדור (הוא אינו מחזיר את הכדור לכד), ואז מוציא כדור שני.

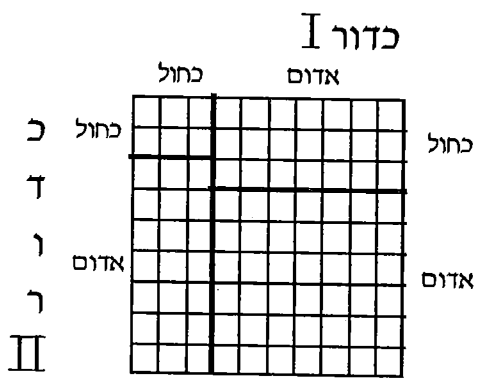
מה ההסתברות שיוציא:

א. שני כדורים כחולים?

ב. שני כדורים אדומים?

לא ידוע לנו איזה כדור הוצא בפעם הראשונה. לכן נבנה מודל שטח שיכלול שתי אפשרויות. אם הכדור הראשון שהוצא הוא אדום, אזי יישארו 6 כדורים אדומים ו 3 כחולים להוצאה השניה (מצד ימין בציור).

אם הכדור הראשון שהוצא הוא כחול, אזי יישארו 7 כדורים אדומים ו 2 כחולים להוצאה השניה (מצד שמאל בציור).



א. $P(כ,כ) = 3\cdot2/90 = 6/90$

ב. $P(א,א) = 7\cdot6/90 = 42/90$

6. המלצות

מודל השטח מתאים במיוחד לשלבים הראשונים של הוראת ההסתברות. (אולי כבר בחטיבת הביניים, אך יש לבדוק זאת).

עם התקדמותם של התלמידים, והגברת ההבנה שלהם בנושא, ניתן ללמד את דיאגרמת העץ ואת המודל החישובי, שהשימוש בהם קל יותר.

השימוש במודלים הגיאומטריים מהווה רק את התחלת הלימוד. על מנת שהתלמידים יהיו מסוגלים לפתור בעיות הסתברויות מורכבות, יהיה עליהם להגיע להפשטה ולפתרונות מתמטיים/חישוביים. המודלים הגיאומטריים יעמדו לרשותם, כל אימת שייתקלו בבעיה שיתקשו בהבנתה ובהפשטתה. הם תמיד יוכלו לחזור למודלים אלו ולהבין אותם בקלות רבה יותר. כמאמר חז"ל "איננו דומה מי שיש לו פת בסלו למי שאין לו פת בסלו".

רשימת מקורות

1. Armstrong, R.D.(1981): An area for Solving Probability Problems. In A.P. Schulte (Ed.) , Teaching Statistics and Probability, National Council of Teachers of Mathematics, Reston Va.135-142

2. Dahlke, R. and Falker R. (1981): Geometrical Probability. In A.P. Schulte (Ed.),Teaching Statistics and Probabiliry, National Council of Teachers of Mathematics, Reston Va. 143-153

3. Lappan G.,Philips E., Winter M. J.,and Fitzgerald W. M. (1987): - Area Models for probability. Mathematics teacher Vol. 80.

4. Lappan G., Philips E., Fitzgerald W. n , and Winter M. J. (1987): - Area Models and Expected Value. Mathematics Teacher. Vol. 80.

הבעת תודה: ברצוני להודות לפרופ' מ. ברוקהיימר וד"ר נ. זהבי על עזרתם בהכנת המאמר.

מושגים והגדרות במסגרת מדע דדוקטיבי

מאת: עמנואל קרמר
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

בין הפילוסופים של המדע חלוקות הדעות ביחס לתהליך ההיווצרות של "תורה מדעית"; האם תחילתה של תורה מדעית הוא באוסף של עובדות ומושגים שמהם מתגבשת אחר כך תיאוריה ומנוסחים חוקים ועקרונות או להיפך: על פי תיאוריה הקיימת במוחו של החוקר נאספות עובדות העוזרות לגיבושה והשלמתה לכלל תורה מדעית. בכל מקרה, כעבור זמן הופכת התורה למבנה דדוקטיבי מסודר, שאת יסודות מבנהו ננסה להציג במאמר זה.

המקצוע היחידי, הנלמד במסגרת בית הספר התיכון, שיש לו יסודות של מבנה דדוקטיבי מסודר, הוא הגיאומטריה האוקלידית, ומשום כך נתמקד במאמר בנושא זה.

את הגיאומטריה לומדים בשלושה שלבים עיקריים:

א. בשלב האינטואיטיבי, הלימוד נעשה תוך התנסות פעילה של התלמיד בשרטוט ומדידה. המושגים הגיאומטריים הם אותם המושגים המוחשיים המשורטטים. תכונותיהם מושגות ע"י מדידה, גזירה, קיפול וכו'.

ב. בשלב הסמי-אינטואיטיבי, מתחיל ארגון החומר במערכת דדוקטיבית. התלמיד נפגש במושג האכסיומה והמשפט, מושג יסודי, ומושג מורכב. נוהגים בדרך כלל להרחיב את מספר האכסיומות ואת מספר מושגי היסוד מעבר לנדרש מבחינה מתימטית ואכסיומות שונות "מובלעות" בהסברים הכלליים. השרטוט, בשלב זה, חשוב, אך לא מספיק. השרטוט מייצג את המושגים והצורות הגיאומטריות, אך לא ממצה אותם.
ההוכחה אינה בנויה על השרטוט ויש לה קיום מבלעדיו.

ג. בשלב הפורמלי מוצגות בפני התלמיד הדרישות שעל מערכת האכסיומות למלא, (שלמות, אי תלות), והמקצוע נלמד כמבנה דדוקטיבי שלם.

שתי מטרות עיקריות להוראת הגיאומטריה בבית הספר העל יסודי:

(1) הכרת הצורות הגיאומטריות במישור ותכונותיהן היסודיות.

(2) הכרת המבנה והעקרונות של תורה דדוקטיבית.

לא מגיעים בביה"ס לשלב השלישי, כלומר מדע דדוקטיבי כהלכתו עם כל התנאים והדרישות של אי תלות ושלמות המערכת האכסיומטית. מוכנים בד"כ להרחיב את מספר האכסיומות מעבר למינימום הנדרש מבחינה מתימטית וכן להרחיב את מספר המושגים היסודיים מעבר לנדרש. חשוב שהתלמיד יכיר את המבנה והעקרונות גם על חשבון פשרות מסויימות שבלעדיהן הוא עלול להחמיץ את המטרה.
לשלב השלישי מגיעים, אם בכלל, במסגרות של השכלה על תיכונית. לתלמידים טובים אפשר להדגים חלק מהרעיונות של "מבנה דדוקטיבי מלא", וזאת בעצם עושה המאמר כאן.

מושגים והגדרות

כל תורה מדעית וגיאומטרית בפרט, עוסקת במושגים ובקשר ביניהם.
בכדי שהמשמעות של מושג תהיה זהה לכל המשתמשים בו, יש צורך להגדיר את המושג.

בכל מושג מבחינים בין "היקף המושג" ו "תוכן המושג": היקף המושג הוא קבוצת כל האוביקטים השייכים אליו. למשל, היקף המושג "מעוין" מכיל את כל המעוינים שהיו עד היום ושיהיו בעתיד.

תוכן המושג הוא קבוצת כל התכונות של המושג. למשל, תוכן המושג "מעוין" כולל את התכונות: "מעוין הוא מרובע", "כל הצלעות שוות", "האלכסונים חוצים זה את זה", "האלכסונים מאונכים זה לזה" וכו'.

מתוכן המושג ניתן להקצות תכונה אחת או צירוף של תכונות שכל האחרות נובעות ממנה. תכונה זו נקראת תכונה אופיינית של המושג.
כל הגדרה מבטאת אחת מהתכונות האופיניות של המושג.

היקף מושג אחד יכול להיכלל בהיקף מושג אחר. למשל, היקף המושג "מקבילית" כולל את היקף המושג "מעוין" ונכלל בהיקף המושג "מרובע".

בהגדרת מושג נוקטים פעמים רבות בשיטה הבאה: יוצאים ממושג שהיקפו כולל את המושג הנתון (ואולי מושגים נוספים) ומוסיפים תכונה אופיינית המבדילה את המושג הנתון ממושגים אחרים הכלולים בהיקף המושג הכולל.
למשל: "מלבן הוא מקבילית שכל זוויותיה שוות".

כשנוקטים בדרך זו, בכדי לקצר את ההגדרה, משתמשים בהיקף המושג הכולל הקרוב ביותר למושג אותו רוצים להגדיר.

מעדיפים להגדיר ריבוע כמלבן בעל צלעות שוות מאשר כמרובע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו שוות.

יוצא מכך שמבחינת ההיקף : "מרובע" $\subset$ "מקבילית" $\subset$ "מעוין"
ואילו מבחינת התוכן: "מרובע" $\supset$ "מקבילית" $\supset$ "מעוין"

אם מגדירים מושג באמצעות מושג אחר (שהיקפו רחב יותר), ואותו באמצעות מושג בעל היקף עוד יותר רחב, מתעורר צורך, בסופו של דבר, לקבל מספר מושגים בלי הגדרה כדי שלשרשרת המושגים תהיה איזו שהיא התחלה. למושגים אלה קוראים מושגים ראשוניים או יסודיים. בהנדסה נוהגים, בדרך כלל, להשתמש במושגים "נקודה", "ישר", ו "מישור" כמושגים ראשוניים.

<u>אכסיומות ומשפטים</u> :

מערכת היחסים שבין המושגים, חייבת להיות אף היא מוגדרת היטב. מושגים כמו "ישרים מקבילים", "ישר עובר דרך נקודה נתונה", "נקודה נמצאת על", נקודה שייכת ל..., חייבים לקבל משמעות זהה לכל המשתמשים בהם.
גם כאן, מגיעים ליחסים "ראשוניים" המשמשים כנקודת מוצא למערכת היחסים כולה.

יחסים ראשוניים אלה אינם ניתנים באמצעות הגדרות, אלא באמצעות תכונות המאפיינות אותם המנוסחות כאכסיומות.

האכסיומות מתארות יחסים ראשוניים בין מושגים ראשוניים והן תכונות.

מקובל לחלק את האכסיומות לחמש קבוצות עיקריות:

א. אכסיומות הקשר (7 אכסיומות) המגדירות יחסים ראשוניים בין המושגים הראשוניים נקודה, ישר ומישור כגון: "דרך שתי נקודות עובר ישר אחד ויחיד", "דרך כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מישור אחד ויחיד", "קיימות לפחות שתי נקודות שונות זו מזו", ועוד.

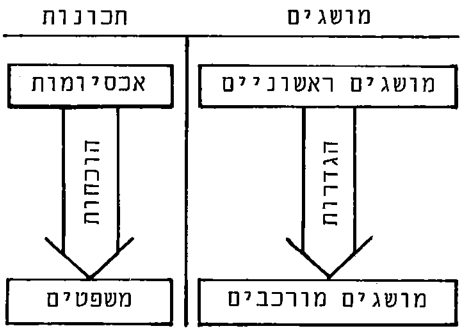
ב. אכסיומות הסדר (5 אכסיומות) הנותנות משמעות ליחס "נקודה נמצאת בין שתי נקודות נתונות".

ג. אכסיומות החפיפה (6 אכסיומות) הנותנות משמעות למושג החפיפה (של קטע, זוית, משולש).

ד. אכסיומת הרציפות המבטיחה כי הישר הוא רצוף ואין בו "חורים".

ה. אכסיומת המקבילים המבטיחה כי דרך נקודה מחוץ לישר נתון אפשר להעביר רק ישר אחד המקביל לישר הנתון.

כשם שבעולם המושגים ישנם מושגים ראשוניים ומהם נבנים, באמצעות הגדרות מתאימות המושגים האחרים, כך במערכת היחסים שבין המושגים, ישנן תכונות אותם מקבילים ללא הוכחה, ותכונות אחרות המתחייבות מהתכונות הנ"ל כמסקנות.



בהוכחת כל טענה, מסתמכים על טענות אחרות המתבססות אף הן על טענות אחרות, יסודיות יותר, ובסופו של דבר, כמו במושגים, חייבים לקבל מספר טענות, בלי הוכחה, כדי שלשרשרת ההוכחות תהיה ההתחלה. טענות אלה הן האכסיומות.

כדי לבנות מערכת דדוקטיבית, יש צורך, איפוא, במערכת של מושגים ראשוניים ומערכת אכסיומות המתארת יחסים ראשוניים ביניהם. בעזרתן אפשר להכניס מושגים חדשים (באמצעות הגדרות), לנסח טענות (משפטים), ולהוכיח שהן מתחייבות ממערכת האכסיומות.

למערכת הכוללת את המושגים הראשוניים והיחסים הראשוניים ביניהם המוגדרים באמצעות אכסיומות, קוראים מערכת אכסיומטית.

המשמעות הניתנת למושגים ראשוניים אינה יחידה. אפשר להתחיל ממערכות שונות של מושגים יסודיים. גם הדרך לקביעת האכסיומות אינה יחידה. אפשר לצאת ממערכות שונות של אכסיומות. לא כל אוסף של מושגים ראשוניים ואכסיומות נותן מערכת אכסיומטית. ישנן דרישות כלליות שעל מערכת אכסיומטית למלא. בהמשך נבהיר נושאים אלה.

<u>המשמעות של המושגים והיחסים הראשוניים במערכת אכסיומטית:</u>

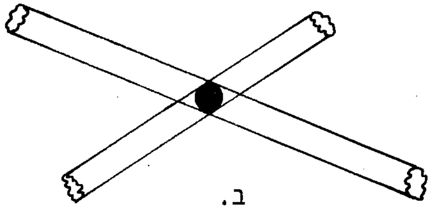
המשמעות של המושגים הראשוניים "נקודה", "ישר" ו"מישור" למשל, אינה בהכרח קשורה לאנלוג הפיזי שלהם אליו כל כך התרגלנו. זוהי אינה הקבוצה היחידה המקיימת את מערכת האכסיומות של ההנדסה האוקלידית. נראה עוד שתי דוגמאות של קבוצות כאלה:

א. "נקודה" היא כדור במרחב שרדיוסו יחידה. "ישר" הוא גליל אינסופי במרחב שרדיוסו יחידה.

נקודה נמצאת על ישר כאשר כדוּר המתאים לנקודה הנ"ל חסום בגליל המתאים לישר הנ"ל (שרטוט א').

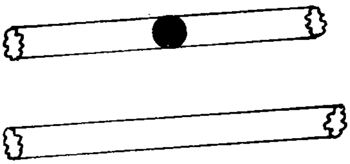
נאמר כי שני ישרים "נחתכים" כאשר לשני גלילים המתאימים לישרים הנ"ל יש כדור אחד משותף: (שרטוט ב').

א.



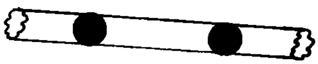
ב.

שרטוט ג' מייצג את האכסיומה: דרך נקודה מחוץ לישר נתון עובר ישר אחד ויחיד המקביל לישר הנתון.



ג.

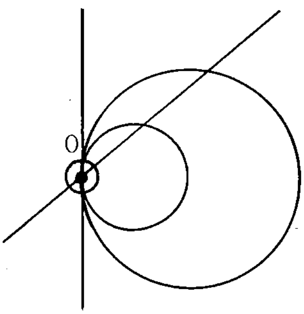
שרטוט ד' מייצג את האכסיומה: דרך שתי נקודות עובר ישר אחד ויחיד.



ד.

אפשר להראות כי קבוצת הכדורים והגלילים הנ"ל מקיימת את כל האכסיומות של ההנדסה האוקלידית במישור.

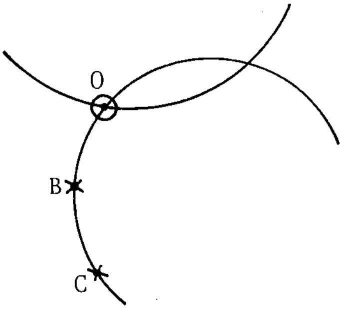
ב. נתבונן במישור בקבוצת כל המעגלים והישרים (הרגילים) העוברים דרך נקודה O.



כ"נקודוּת" ניקח את כל נקודות המישור הרגילות, חוץ מנקודה O.
כ"ישרים" ניקח את כל המעגלים והישרים (הרגילים) העוברים דרך O.

פואנקרה (1854-1912) הראה כי בקבוצה זו של נקודות וישרים מתקיימות כל האכסיומות של הנדסה אוקלידית.

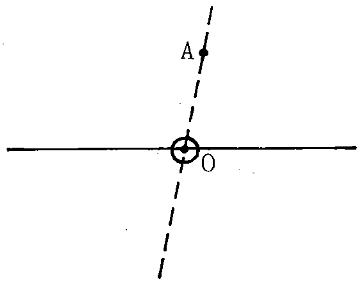
למשל, דרך שתי נקודות
עובר ישר אחד ויחיד.
ואמנם, אם B ו C שתי
נקודות שאינן על ישר
(רגיל) העובר דרך O,
אז דרך שלוש נקודות
אלה B, C, O עובר מעגל
אחד ויחיד (ראה שרטוט).



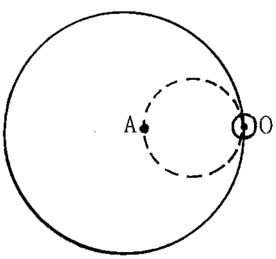
אם B ו C נמצאות על
ישר (רגיל) העובר דרך O,
אז B ו C קובעות את
הישר המבוקש.

או למשל, דרך נקודה נתונה מחוץ ל"ישר" עובר רק "ישר" אחד המקביל לו:

אם ה"ישר" הנתון הוא ישר
במשמעות הרגילה (העובר דרך O),
ו A נקודה מחוצה לו, אז הישר
המקביל הוא הישר העובר דרך A
ו O. (O אינה נקודת חיתוך,
כי O איננה "נקודה" בגיאומטריה
זו).



אם "הישר" הנתון הוא מעגל העובר דרך O, הישר המקביל דרך A
הוא מעגל.



לקבוצת אלמנטים המקיימת את כל המערכת האכסיומטית קוראים מודל של האכסיומטיקה. כלומר, מודל מתימטי למערכת אכסיומטית הוא קבוצה מוגדרת היטב, בה ניתן פירוש למושגי היסוד באופן כזה שמתקיימות בו כל האכסיומות של המערכת.

קיומם של מודלים מתחומים שונים למערכת אכסיומטית מבטאת את כלליותה של המערכת.

חשיבות מיוחדת יש למודלים כאשר בודקים את הדרישות שעל מערכת אכסיומטית למלא.

הדרישות ממערכת אכסיומטית :

מערכת אכסיומטית צריכה למלא את הדרישות הבאות:

I. אי סתירה: בין כל האכסיומות וכל התכונות (משפטים) שאפשר להוכיח במערכת, לא תהיינה שתיים הסותרות זו את זו.

II. אי תלות: אף אחת מהאכסיומות של המערכת אינה תולדה של אכסיומות אחרות.

III. שלמות: במערכת האכסיומטית הנ"ל תהיה אפשרות לתת תשובה לכל השאלות הקשורות למושגים של המערכת.

הוכחת אי סתירה ואי תלות במערכת אכסיומטית היא מסובכת. גם אם חקרנו מספר גדול מאוד של משפטים, ולא מצאנו סתירה ביניהם, אין זה אומר שלא נמצא סתירה במשפטים הבאים.

להוכחת אי סתירה ואי תלות נעזרים במודלים.

נדגים כיצד בודקים במערכת אכסיומטית אי סתירה ואי תלות:

בכדי להוכיח שבמערכת אכסיומטית מסויימת אין סתירה, מספיק להצביע על מודל מתמטי המקיים את האכסיומות.

כמושגים יסודיים נקח שניים: "נקודה" ו"ישר".

M - קבוצת כל הנקודות היא "מישור".
נגדיר ישרים מקבילים כישרים הנמצאים במישור ואין להם נקודה משותפת.
נציג מערכת אכסיומטית:

א.1. כל ישר הוא קבוצת נקודות (כלומר, קבוצה חלקית ל M).

א.2. לשתי נקודות שונות קיים ישר אחד ויחיד שהן שייכות לו.

א.3. לכל ישר שייכות שתי נקודות לפחות.

א.4. קיימות לפחות 3 נקודות שאינן שייכות לישר אחד.

א.5. לכל ישר a, ולכל נקודה A שאינה שייכת לו, קיים ישר המכיל את הנקודה A, ומקביל לישר a.

א.6. לכל ישר a, ולכל נקודה A שאינה שייכת לו, קיים <u>לא יותר</u> מישר אחד המכיל את הנקודה A ומקביל לישר a.

משפט: הקבוצה M מכילה לפחות 4 נקודות שונות.

הוכחה: לפי א.4. קיימות ב M לפחות 3 נקודות שאינן על ישר אחד.
נסמנן A, B ו-C.

לפי א.2. הנקודות B ו C שייכות לישר שנסמנו a.

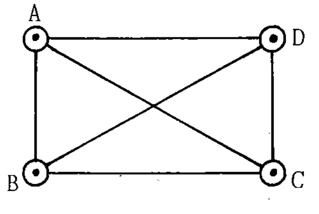
לפי א.5. קיים ישר b המכיל את A ומקביל ל-a.

לפי הגדרת ישרים מקבילים, אין ל a ול b נקודות משותפות, אבל
לפי א.3. לישר b שייכת נקודה נוספת אחת (לפחות), שנסמנה D.
לכן, ב M יש לפחות 4 נקודות שונות זו מזו C,B,A ו-D.

אי אפשר להוכיח שבקבוצה M יש יותר מארבע נקודות.

נבנה מודל מתאים:

M = {A,B,C,D} קבוצת האותיות A,B,C,D
שהן "נקודות".



ה"ישרים" הן הקבוצות החלקיות:

{A,B} , {A,C} , {A,D} ,
{B,C} , {B,D} , {C,D}
(ההמחשה בשרטוט)

לא קשה לראות בשרטוט שבמודל זה מתקיימות כל האכסיומות א.1. - א.6. מה שמוכיח את אי הסתירה בין האכסיומות האלה.

נוכיח עתה כי האכסיומה א.6 אינה תלויה באכסיומות א.1 - א.5.

נקח מודל של "מישור" W

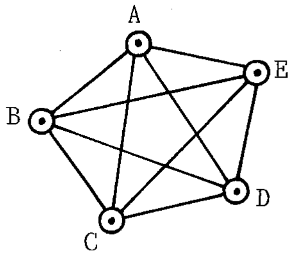
המכיל חמש נקודות $W = \{A,B,C,D,E\}$

במודל זה ישנם עשרה "ישרים":

$\{A,D\},\{A,E\},\{B,C\},\{B,D\},\{B,E\}$

$\{A,C\}$ $\{A,B\}$ $\{C,D\}$ $\{C,E\}$ $\{D,E\}$

(ההמחשה בשרטוט)



במודל זה מתקיימות האכסיומות א.1 - א.5, אך האכסיומה א.6 אינה מתקיימת כי למשל, דרך נקודה A עוברים שני ישרים $\{A,B\}$ ו- $\{A,C\}$ המקבילים לישר $\{E,D\}$ (אין להם נקודות משותפות).

בשני המודלים מתקיימות האכסיומות א.1 - א.5, אך במודל הראשון מתקיימת גם אכסיומה א.6 ובשני לא. כלומר אכסיומה א.6 אינה מסקנה הכרחית של האכסיומות א.1 - א.5, ובמובן זה היא בלתי תלויה בהן.

בניית מודל מישורי מתאים לגיאומטרית המישור שיוכיח כי כל האכסיומות הדרושות בלתי סותרות זו את זו ובלתי תלויות זו בזו, אפשרי, אך קשה הרבה יותר ולו רק בגלל שמספר הנקודות במודל כזה חייב להיות אינסופי.

מודל מתאים למערכת האכסיומטית של הנדסה אוקלידית הוא "הנדסה אנליטית": לבניית המודל יש, ראשית, לתת משמעות למושגים וליחסים הראשוניים:

"נקודה" - זוג סדור של מספרים ממשיים (x,y)

"ישר" - קבוצת נקודות המקיימת את המשוואה $ax + by = c$

נקודה (x_o,y_o) <u>שייכת</u> לישר $ax + by = c$ אם $ax_o + by_o = c$

נקודה $B(x_o,y_o)$ נמצאת <u>בין</u> $A(x_1,y_1)$ ל $C(x_2,y_2)$

אם $ax_o + by_o = c$ וגם $ax_1 + by_1 = c$ וגם $ax_2 + by_2 = c$

וקיים $x_1 < x_o < x_2$ או $x_1 < x_o < x_1$

אם $x_o = x_1 = x_2$ אז הדרישה היא $y_1 < y_o < y_2$ או $y_2 < y_o < y_1$

אם: $D(x_4\ ,y_4)$, $C(x_3,y_3)$, $B(x_2,y_2)$, $A(x_1,y_1)$

אז קטע AB חופף לקטע CD כאשר:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2$$

חשיבות מודל זה היא במעבר ממושגים ואכסיומות "הנדסיות" למושגים ואכסיומות אריתמטיות.

בעית אי הסתירה ואי התלות של המערכת הגיאומטרית הופכת לבעית אי סתירה ואי תלות של המערכת האריתמטית (שהוכחה בנפרד).

<u>הערות היסטוריות:</u>

לקראת סוף המאה התשע עשרה התחיל משבר עמוק ומעורר חרדה ביסודותיהם של המדעים המדוייקים. עד אז נחשבה האמת המדעית כעומדת מעבר לאפשרות של ספק. הגיונו של המדע נחשב משהו ששגיאה לא תיתכן בו, ואם חלה טעות, נחשב הדבר כטעות בהבנת הכללים. השאלות הגדולות מצאו כולן את תשובותיהן בדרך הדדוקטיבית ה"טהורה", ואם אמנם נשארו מספר תופעות לא מוסברות (כגון רדיו-אקטיביות, מעבר האור דרך ה"אתר" והיחס המיוחד בין כוחות מגנטיים לכוחות חשמליים), סביר היה שאלה ימצאו בסופו של דבר את פתרונם.

במתמטיקה, ניתנה משמעות ברורה (האינטואיטיבית) למושגים היסודיים, ואף האכסיומות נראו כל כך ברורות וחד-משמעיות עד כי לא ניתן היה להטיל בהן ספק. כל זאת, פרט לאכסיומת המקבילים. זמן רב ניסו לשוא להוכיחה, ויתכן שנסיון מצטבר זה היה ראשית המשבר.

אכסיומה זו היא אחת מאבני היסוד שעליהן מושתת מלוא ההבנה של הגיאומטריה ואי אפשר היה לסלקה מבלי להרוס נחחי ענק של ההנדסה.

לבסוף, ברבע הראשון של המאה התשע עשרה, וכמעט בו זמנית, קבעו בולאי ולובאצ'בסקי - הונגרי ורוסי - באופן שאין לסתרו, כי הוכחת אכסיומה זו היא בלתי אפשרית. זאת עשו ע"י שהניחו שאם אכסיומה זו היא תולדה של אכסיומות אחרות, אז היפוך המסקנה של האכסיומה צריך לגרום לסתירות הגיוניות בגיאומטריה.

לובאצ'בסקי הניח תחילה, שדרך נקודה נתונה במישור יכולים לעבור שני ישרים שאין להם נקודה משותפת עם ישר נתון. חוץ מזה השאיר בתוקף את כל יתר האכסיומות. מכאן, הסיק סידרה של משפטים ובנה גיאומטריה, חסרת סתירות, שאינה נופלת במאומה מהגיאומטריה האוקלידית מבחינה הגיונית.

לא ההוכחה עצמה היתה מעוררת חרדה. היה זה תוצר הלואי הרציונלי שלה שהאפיל עד מהרה עליה וכמעט כל דבר אחר בשדה המתימטיקה.

המתימטיקה, אבן-הפינה של הודאות המדעית, הפכה ללא ודאית.

אם האמת המדעית אינה ניתנת לערעור, כיצד אפשר לדעת מי מהגיאומטריה הנ"ל היא הנכונה באופן מוחלט?

ומשנפתחה הדלת, קשה היה לצפות שמספר השיטות הסותרות של אמת מדעית שאין לערערה, יהיה מוגבל לשתיים. גרמני , בשם רימן, הופיע עם עוד שיטה גיאומטרית המוותרת לא רק על אכסיומת המקבילים אלא גם על האכסיומה הקובעת ששתי נקודות נתונות מוכלות בישר אחד ויחיד.

גם הפעם לא היו שום סתירות פנימיות אלא רק עקביות ביחס לגיאומטריות של לובאצ'בסקי ואוקלידס.

דוקא הגיאומטריה של רימן מתארת בצורה הטובה ביותר את העולם בו אנו חיים על פי תורת היחסות.

פריצת המחסום הזה במדעי הטבע בכלל, ובמתימטיקה בפרט, נתנה דחיפה עצומה להתפתחות הידע שלתוצאותיה אנו עדים יום - יום.

לסיכום נעיר שגם אם במסגרת בית הספר איננו מלמדים את יסודות המבנה והמושגים של מדע דדוקטיבי באופן מדויק ושלם, חשוב שנדע לפחות, על מה אנו מוותרים.

לקריאה נוספת:

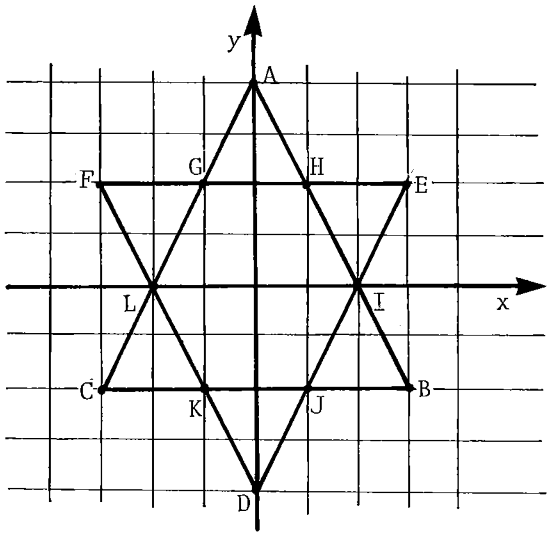
1. בן יהודה ברוך, למהותה של המתימטיקה, אוצר המורה תשכ"ד 1966.
2. אברהם הלוי, פרנקל, מבוא למתימטיקה, כרך שני, חטיבה שלישית, מסדה תשכ"ו.
3. אמירה דיבשה, ביסוס אכסיומטי ליסודות הגיאומטריה, עם עובד 1962.
4. האוניברסיטה הפתוחה, אשנב למתימטיקה, יחידה 10.
5. האוניברסיטה הפתוחה, מתימטיקה ברמה תיכונית, יחידה 21.
6. D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie ,1930
(תורגם לאנגלית ע"י E.J. Townsend)

זה רעיון

פעילות סביב "מגן דוד"

מאת: צפורה רזניק
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

במערכת הצירים שלפניך משורטט "מגן דוד".



נדגים מספר פעילויות בכיתות שונות ובנושאים שונים סביב שרטוט זה.

שים לב!

בין הפעילויות השונות הממוספרות ב 1, 2, ... אין בהכרח קשר, ולפעמים אין טעם לתת שתי פעילויות כאלה.

הסעיפים בפעילות מסויימת יסומנו באותיות א', ב', ג'.

לכיתה ז'

הנושא: סימון נקודות במישור

1. רשום את שיעורי הנקודות שבשרטוט.

2. א) רשום קבוצות של נקודות שיש להן אותו שיעור x.

ב) רשום קבוצות של נקודות שיש להן אותו שיעור y.

ג) רשום את כל הנקודות ששיעור ה y שלהן גדול משיעור ה x.

ד) רשום את כל הנקודות ששיעור ה y שלהן הוא פי 2 משיעור ה x.

ה) רשום את כל הנקודות ששיעור ה y שלהן גדול ב 1 משיעור ה x.

ו) רשום את כל הנקודות ששיעור ה y שלהן קטן ב 1 משיעור ה x.

ז) רשום זוגות של נקודות סימטריות לגבי ציר ה y, לגבי ציר ה x.

3. מצא את שטחו של ה"מגן דוד" ביחידות של מערכת הצירים.

הנושא: תבנית מספר בשני משתנים.

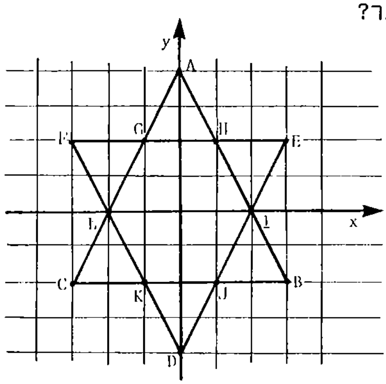
נתונה התבנית $2x - 3y$.

1. הצב שיעורי כל נקודה בתבנית וחשב.

דוגמא: $2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$; I(2 ,1)

2. מצא זוגות של נקודות אשר הצבת שיעוריהן בתבנית נותנת אותה תוצאה.

3. מהן הנקודות אשר הצבת שיעוריהן בתבנית נותנת תוצאה גדולה ביותר? תוצאה קטנה ביותר?



לכיתה ח'

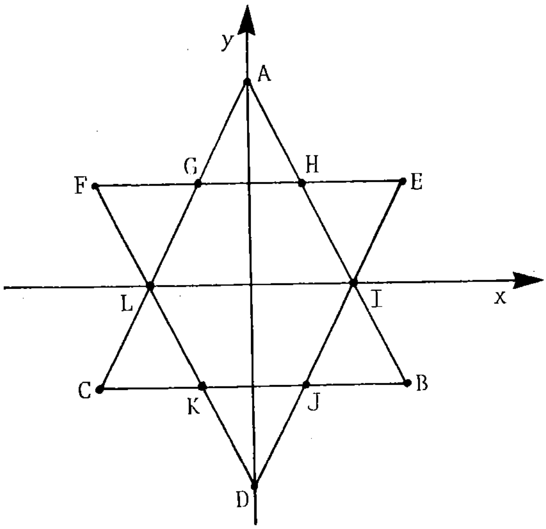
הנושא: פתרון מערכת משוואות

1. הנושא: גרף של משוואה

השרטוט שלפניך מורכב מ 6 ישרים ואילו משוואותיהן:

$y - 2x = 4$, $y - 2x = -4$, $y + 2x = 4$

$y + 2x = -4$, $y - 2 = 0$, $y + 2 = 0$



רשום ליד כל משוואה את הגרף שלה.

דוגמא: $AC : y - 2x = 4$

2. נתונות המשוואות $y = 2x + 4$, $y + 2x = 4$, $y - 2 = 0$

א) רשום מערכת "דגם" מכל זוג משוואות ומצא את פתרונה.

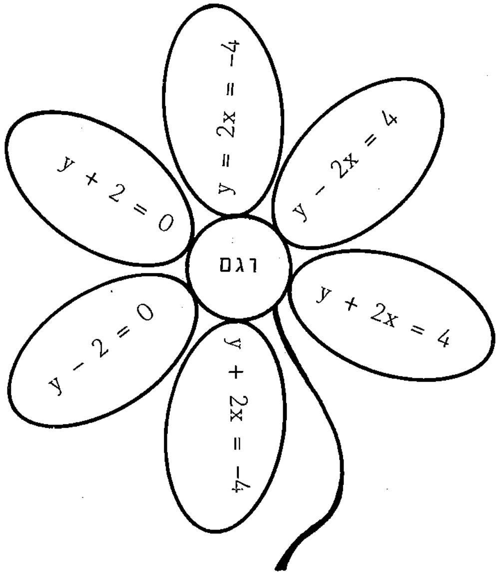
ב) סמן את הנקודות שמצאת במערכת צירים אחת וחבר את הנקודות אחת אל השניה. *(מתקבל משולש)*.

ג) חזור על סעיפים א) ו ב) לגבי המשוואות הבאות:

$y - 2x = -4$, $y = -2x - 4$, $3(x + y) = 5x - 2(x - 3)$

מה קיבלת?

3. <u>הנושא: פתרון מערכת משוואות</u>



בכל אחד מעלי הפרח רשומה משוואה.

א) רשום מערכת "רגם" מכל זוג משוואות *(סה"כ 15 מערכות)*.

ב) נסה למצוא, מבלי לחשב, באילו מערכות קבוצת האמת ריקה.

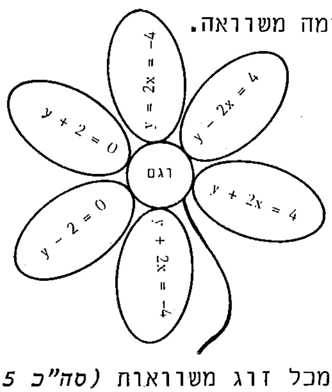
ג) ידוע כי לשתי מערכות הפתרון הוא מהצורה (, 0). מהן המערכות?

ד) ידוע כי לשתי מערכות הפתרון הוא מהצורה (0,). מהן המערכות?

ה) מצא את הפתרונות של שאר המערכות.

4. <u>הנושא: פתרון מערכת משוואות בדרך גרפית</u>

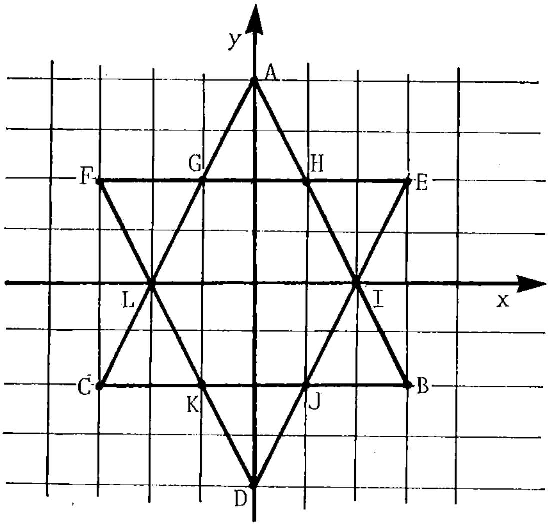
בכל אחד מעלי הפרח רשומה משוואה.



א) רשום מערכת "רגם" מכל זוג משוואות *(סה"כ 15 מערכות)*.

ב) שרטט את המשוואות במערכת צירים אחת, ומצא בשרטוט את הפתרונות של המערכות שרשמת.

5. הנושא: מערכות של אי-שוויון בשני משתנים



1) שרטוט ה"מגן דוד" שלפניך מורכב מ 6 ישרים שאלו משוואותיהן:

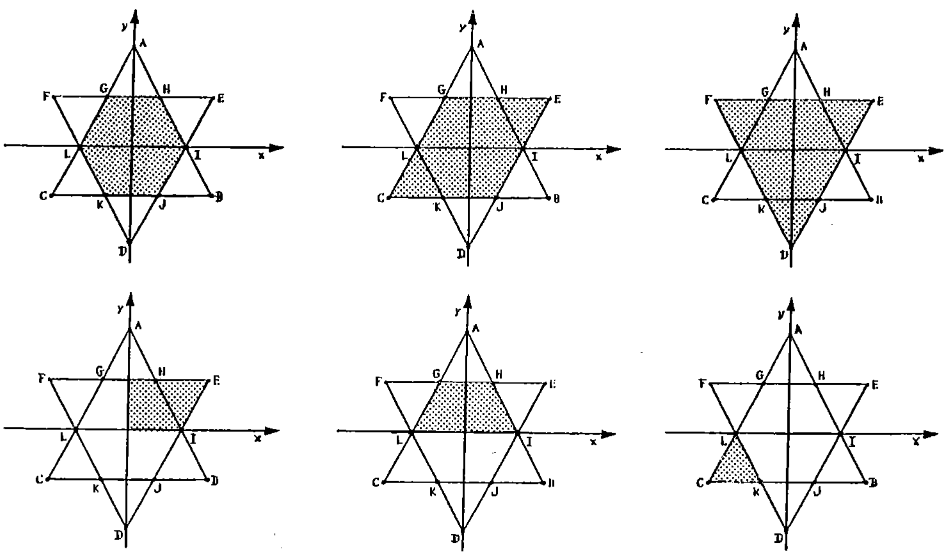
$$y - 2x = 4 \quad , \quad y - 2x = -4 \quad , \quad y + 2x = 4$$

$$y + 2x = -4 \quad , \quad y - 2 = 0 \quad , \quad y + 2 = 0$$

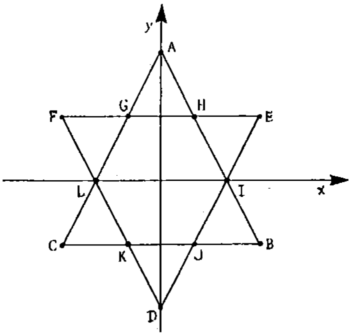
א) רשום ליד כל משוואה את הגרף שלה.

דוגמא: $y - 2x = 4$; AC

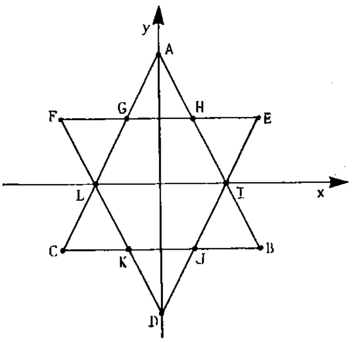
ב) רשום מערכות של אי שוויונים אשר הגרפים שלהן הם:



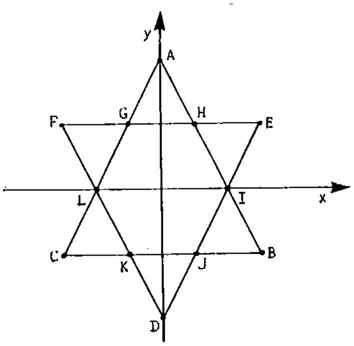
ג) השחר בשרטוטים שלהלן את הגרפים של המערכות הבאות:



.I
$$\begin{cases} y - 2x > 4 \\ y + 2x > -4 \\ y - 2 < 0 \end{cases}$$



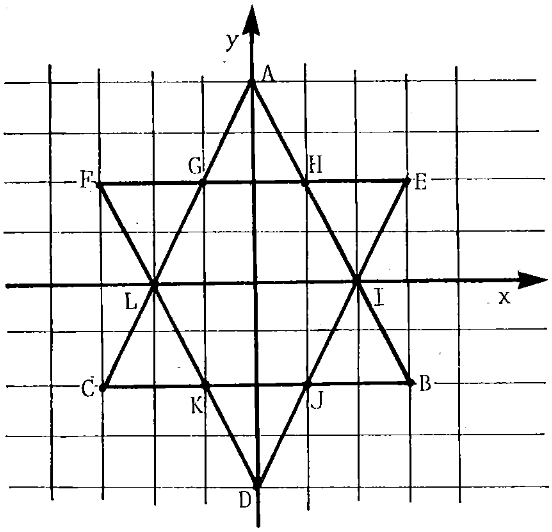
.II
$$\begin{cases} y < 0 \\ y + 2 > 0 \\ y - 2x < 4 \\ y + 2x < 4 \end{cases}$$



.III
$$\begin{cases} y > 0 \\ y - 2 < 0 \\ y - 2x > -4 \\ y - 2x < 4 \end{cases}$$

לכיתה ט'

הנושא: הפונקציה הקווית



במערכת הצירים משורטט "מגן דוד", צלעותיו מונחות על גרפים של פונקציות קוויות.

1. א) מצא את הפונקציות אשר צלעותיו של ה"מגן דוד" מונחות על הגרפים שלהן.

ב) רשום את הפונקציות המתאימות לישרים הבאים: EC , AK , IG , GJ.

2. א) מצא ישרים אשר לפונקציות שלהן יש אותו a.

ב) מצא ישרים אשר לפונקציות שלהן יש אותו b.

ג) רשום ישרים המתאימים לפונקציות עולות, יורדות, קבועות.

הנושא: מרחק בין נקודות

1. האם המשולשים שבשרטוט הם שווי צלעות? הוכח.
2. מצא את היקפו של המשושה שבשרטוט.
3. מהו אורך החוט (ביחדות של מערכת הצירים) הדרוש כדי להקיף מבחוץ את ה"מגן דוד".
4. האם אפשר לחסום את ה"מגן דוד" שבשרטוט במעגל ? הוכח.

★★★

גליונות לחשבון
ולמחשבה

עיתון לתלמידי כיתות ח', ט', י'

מופיע 4 פעמים בשנת הלימודים

במתכונת של 12 עמודים

מטרת העיתון :

חינוך לקריאה עצמית במתימטיקה

הופיעה חוברת מס' 94 - חוברת

ת ש ר י   ת ש מ " ט

העיתון כולל חומר רב בתחומים המרחיבים את האופק המתימטי. בכל חוברת מופיע מספר רב של בעיות מתימטיות מאופי שונה מהניתן בבית הספר. התשובות לכל הבעיות מופיעות בחוברת שלאחריה.

דמי החתימה בתשמ"ט 6 ש"ח.

תשלום זה כולל מע"מ ומשלוח בדואר לבית החותם.

עם החתימה נא לשלוח:

דמי החתימה לזכות **גליונות לחשבון**

שם ומשפחה של החותם

כתובת מפורטת: רחוב ומספר הבית, העיר, מיקוד.

את ההזמנה ודמי החתימה יש לשלוח לפי הכתובת:

גליונות לחשבון, חיפה, ת"ד 7187, מיקוד 31071.

מורים: אנא החתימו תלמידיכם.

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

הודעות

מכון ויצמן למדע
המחלקה להוראת המדעים
קבוצת המתמטיקה
המרכז הישראלי להוראת המדעים
ע"ש עמוס דה-שליט

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

הרצאות לכיתות ז' - ח'

מתוך נסיון להעשיר את תכנית הלימודים, לאפשר גיוון במתכונת השיעורים, ולספק לתלמידים מבט רחב יותר ולא שיגרתי על התפתחות הרעיונות המתמטיים, מוצעות, לציבור המורים, שתי הרצאות הקשורות להיסטוריה של המתמטיקה (בעתיד יש כוונה להוסיף הרצאות נוספות).

תוכן ההרצאות :

הרצאה ראשונה: ספרות ושיטות ספירה קדומות .

הרצאה זו עוסקת בדרכי כתיבת המספרים, ובשיטות הספירה של המצרים, הבבלים והרומאים. מוצגות בה שיטות הכתיבה השונות על מאפייניהן, תוך השוואה בין השיטות והשוואה לשיטת הכתיבה שלנו.

ההרצאה באה ב"חבילה" הכוללת:

- 31 שיקופיות המלוות את ההרצאה וממחישות את תוכנה.
- ההרצאה עצמה.
- דף עבודה המיועד לבדיקת ההבנה ודף תשובות לשאלות שבדף העבודה.
- פירוט הנושא המופיע בכל שיקופית.
- מדריך קצר למורה.

ההרצאה מיועדת לסיכום נושא שיטות הספירה, אשר נלמד בראשית כיתה ז'. עם זאת אפשר לתתה גם במועד מאוחר יותר, כהעשרה כללית.

הרצאה שניה : שיטות חישוב במצרים העתיקה .

הרצאה זו מתמקדת במתמטיקה המצרית העתיקה.
בחלקה הראשון מודגמת הדרך בה כפלו המצרים. חלקה העיקרי מוקדש לנושא שברי היחידה במצרים. בחלק זה מוצגים שברי היחידה, והדרך בה כתבו המצרים שברים אחרים, בעזרת שברי יחידה.
נעשה נסיון לראות מדוע בחרו המצרים בפרוקים השונים לשברי היחידה

ומודגמת שיטה, כיצד לפרק שבר מהצורה $\frac{2}{a}$, כאשר a מספר אי-זוגי, לסכום של שברי יחידה.

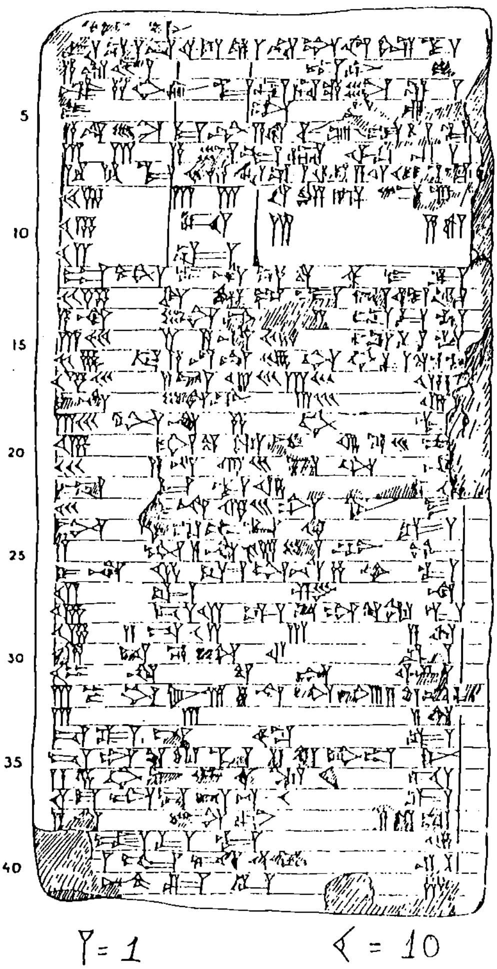
ההרצאה מלווה בשקפים וגם בה יש דף עבודה, דף תשובות ומדריך קצר למורה.

שתי ההרצאות ניתנות להשאלה, ללא תשלום בקבוצת המתמטיקה.

ההרצאה הראשונה מלווה בשיקופיות והשניה בשקפים. אנו מעוניינים לדעת מה עדיף בעיני המורים, ובמידת האפשר לבנות את החבילה בהתאם.

מורים המעוניינים בהשאלת ההרצאות, יפנו אל:

ד"ר אלכס פרידלנדר
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות 76100
(טלפון 08-482817)



גופים גיאומטריים תלת ממדיים עם משולש עזר

א. **תיבה:** כל ששת הפיאות מחומר שקוף. בפנים משולש ישר זוית מחומר שקוף צבוע שצלעותיו הן:
מקצוע צדדי, אלכסון הבסיס ואלכסון התיבה.
ממדי התיבה: 9 ס"מ, 12 ס"מ, 20 ס"מ.
ממדי המשולש: 15 ס"מ, 20 ס"מ, 25 ס"מ.

ב. **פרמידה משולשת:** כל ארבעת הפיאות מחומר שקוף. בפנים שני משולשים ישרי זוית מחומר צבוע. בסיס הפרמידה משולש משוכלל. צלעות המשולשים הן:
1. מקצוע צדדי של הפרמידה, רדיוס הבסיס, גובה הפרמידה.
2. גובה הפיאה הצדדית, גובה הפרמידה ואפטומ* הבסיס.
ממדי הפרמידה: הבסיס 30, 30, 30 ס"מ - המקצועות הצדדיות 45, 45, 45 ס"מ.
ממדי המשולשים 1. 45, 17.3, 41.5 ס"מ, 2. 42.4, 8.65, 41.5 ס"מ.

ג. **פרמידה ריבועית קטומה:** כל הפאות והבסיסים מחומר שקוף. בפנים שני משולשים ישרי זוית מחומר שקוף צבוע. הבסיסים ריבועים שצלעותיהם הן: 30 ס"מ ו־20 ס"מ בהתאמה. הפאות הצדדיות שקוף צבוע. הבסיסים ריבועים שצלעותיהם הן: 30 ס"מ ו־20 ס"מ בהתאמה, הפאות הצדדיות הן ארבעה טרפזים שווי שוקים שצלעותיהם הן: הבסיסים 30 ס"מ ו־20 ס"מ בהתאמה והשוקים 26 ס"מ כל אחת. צלעות המשולשים ישרי זוית שבפנים הן:

2. 25.5 ס"מ,

* אפטום - של מצולע משוכלל הוא הקטע המחבר מרכז המצולע עם אמצע של צלע.

הסבר גיאומטרי לנוסחה $(a+b)^3$

שתי קוביות בעלות המקצועות $a=15$ ס"מ ו־$b=10$ ס"מ. שלוש תיבות בעלות המקצועות: 10, 15, 15 ס"מ ושלוש תבות בעלות המקצועות 15, 10, 10 ס"מ. כל הגופים מפורמייקה, וכל סוג של גוף בצבע שונה.
כשמסדרים שמונת הגופים הללו באופן מסויים מתקבלת קוביה בעלת המקצוע $a+b=25$ ס"מ. נפח הקוביה השלמה הוא $(a+b)^3$ וסכום נפח שמונה הגופים הללו הוא $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
מכניסים קוביה זו בתוך קופסה של פרספקס שקוף שכל מקצועותיה הם 28 ס"מ.

מכשיר להדגמת פונקציות הפיכות

המכשיר בנוי במסגרת ריבועית מפליז ושני לוחות ריבועיים מפרספקס שקוף. למסגרת שתי רגלים עם סוליות כך שיכולים להעמיד אותה על שולחן המורה מול התלמידים. למסגרת צמוד גם "חלון" בו מצביעים על הפונקציה שבה מדובר.

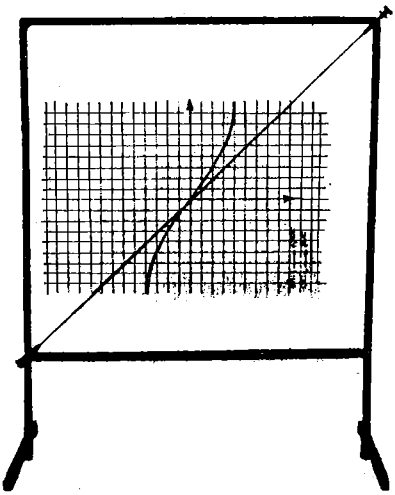
מיצבים כל אחד מהלוחות במישור המסגרת בעזרת שני ברגים שבשתי הפינות הנגדיות של המסגרת. על אחד מהלוחות חרוטים: מערכת צירים oxy והישרים $x=a$, $y=b$ עם $a, b=0, \pm 1, \pm 2, \pm 14$ הלוח הזה מנוקב בחורים בקודקודי המשבצות שהישרים האלה יוצרים.

השמוש: משרטטים על שקף מערכת הצירים oxy, הישר $y=x$ וגרף של פונקציה הפוכה. מדביקים את השקף על הלוח (הלא מנוקב) כך שהישר $y=x$ יתלכד על אלכסון הלוח המחבר, שני הברגים (p, q) ומכניסים ב"חלון" פס קרטון עליו רשומה הפונקציה. נותנים ללוח סיבוב של 180° סביב לאלכסון (p, q), ובזה גרף הפונקציה עשה סיבוב של 180° סביב לישר $y=x$, אחרי הסיבוב הגרף מייצג הפונקציה ההפוכה לפונקציה הקודמת.

כשמדוברבפונקציה קוית מסוג $y=ax+b$ (עם $a=0$) יש אפשרות נוספת; משתמשים בלוח השני (המנוקב) מכניסים בשני חורים שעל הרשת שתי סיכות וקושרים להן קצוות חוט גומי מתוח. החוט מייצג ישר. נותנים ללוח סיבוב של 180° סביב לאלכסון (p, q), אז החוט מייצג ישר אחד והפונקציה המתאימה היא הפונקציה ההפוכה לפונקציה הקודמת.

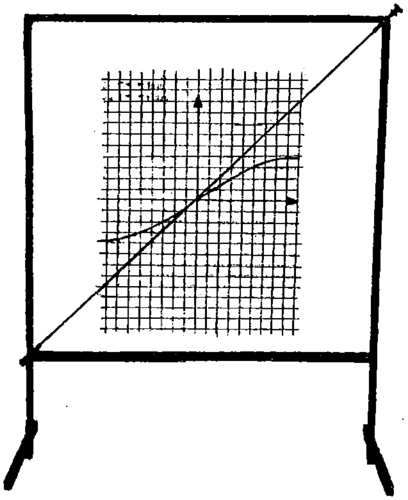
$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$ $\quad f(x)=\sin x$

$f^{-1}: [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\quad f^{-1}(x)=\mathrm{Arcsin}\,x$



$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$ $\quad f(x)=\sin x$

$f^{-1}: [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\quad f^{-1}(x)=\mathrm{Arcsin}\,x$



★★

★★

המרכז הישראלי להוראת המדעים ע״ש עמוס דה-שליט

THE AMOS DE-SHALIT SCIENCE TEACHING CENTRE IN ISRAEL

ספרי לימוד במתמטיקה לחטיבת הביניים	מחיר בש״ח
אלגברה לחט״ב כיתה ז' חלקים א-ה לתלמיד (כל ספר) (89)	3.00
אלגברה לחט״ב כיתה ז' חלקים א-ד למורה (כל חוברת)	0.40
אלגברה לחט״ב כיתה ח' חלקים א-ג לתלמיד (כל ספר) (91)	3.00
אלגברה לחט״ב כיתה ח' חלקים א-ג למורה (כל חוברת)	0.40
אלגברה לחט״ב כיתה ט' חלקים א-ג לתלמיד (כל ספר)(93)	3.00
אלגברה לחט״ב כיתה ט' חלקים א-ב למורה (כל חוברת)	0.40
גיאומטריה לחט״ב חלקים א-ו לתלמיד - רמה ב' - כל ספר (95)	2.00
גיאומטריה לחט״ב חלקים א-ד למורה (כל חוברת)	0.40
הנדסה לתלמיד - רמה ג' - חלקים א-ו (כל ספר) (97)	4.90
הנדסה למורה - רמה ג' - חלקים א-ו (כלספר (98)	5.90
אלגברה לכיתה השביעית מדריך למורה (99)	5.90
אלגברה לכיתה השמינית מדריך למורה (100)	5.90
אלגברה לכיתה התשיעית (פרקים יד-כ) מדריך למורה (101)	5.90
קובץ בחינות בגרות במתמטיקה מגמה ריאלית (105)	4.20
קובץ בחינות בגרות במתמטיקה מגמה הומנית (106)	4.20
משפטים בעיות באלגברה - חלקים א-ג (כל ספר)	5.90
גרפים פאונים ומפות	4.90

ספרי לימוד במתמטיקה לחטיבה העליונה	
אנליסה 4-5 י״ל כרך א' (107)	9.80
אנליסה 4-5 י״ל כרך ב' (907)	11.80
אלגברה 4-5 י״ל כרך א' (108)	9.80
אלגברה 4-5 י״ל כרך ב' - גישה אלגברית (808)	11.80
אלגברה 4-5 י״ל כרך ב' - גישה גיאומטרית (908)	11.80
אלגברה 4-5 י״ל - וקטורים מדריך למורה	11.80
אנליסה 2-3 י״ל כרך א' (109)	9.80
אנליסה 2-3 י״ל כרך ב' (909)	11.80
אלגברה 2-3 י״ל כרך א' (110)	9.80
אלגברה 2-3 י״ל כרך ב' (910)	4.90
אנליסה 3 י״ל כרך ג' (608)	11.80
אנליסה 5 י״ל כרך ג' (טריגונומטריה)(809)	6.00
אנליסה 5 י״ל כרך ד' (חשבון אינטגרלי + רציפות וגבולות)(609)	11.80
אנליסה 5 י״ל כרך ה' (טורי טיילור (810)	3.00
אנליסה 5 י״ל כרך ה' (פונקציות בשני משתנים)(807)	5.90
אלגברה 2-3 י״ל כרך א' בערבית (810)	9.80
אלגברה 2-3 י״ל חלק ב' בערבית	4.90
אלגברה 4-5 י״ל חלק א' בערבית (708)	9.80
אלגברה 4-5 י״ל חלק ב' בערבית	11.80
אנליסה 4-5 י״ל חלק א' בערבית (709)	9.80
אנליסה 2-3 י״ל חלק א' בערבית (710)	9.80
טופולוגיה לתלמיד (111)	9.80

The Hebrew University of Jerusalem Tel:02-660442 • האוניברסיטה העברית ירושלים טל' 02-660442 מיקוד 91904

★★