א3

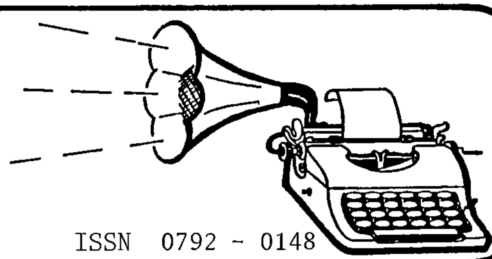
עלון למורי מתמטיקה

כרך א, חוברת מספר 3, טבת תשמ"ח

מספרים

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות

מספרים



ISSN 0792 - 0148

תוכן העניינים

מאמרים:

מערכת מספרים:

מקסים ברוקהיימר **נורית זהבי** **רחל בוהדנה** **מיכאל קורן**

הדפסה: אהובה אביבי

עיצוב גרפי: פולינה קרביץ רחל בוקשפן

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות

קוראים יקרים,

לפניכם החוברת האחרונה של כרך א'.

אנו מקוים שמצאתם ענין בעלוננו החדש,
ומזמינים אתכם להציע רעיונות נוספים,
ולשלוח מפרי עטכם.

בעמוד 59 מצורף טופס מנוי לכרך ב'.

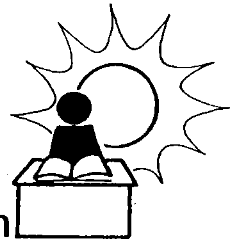
ב ב ר כ ה,

מספרים

מערכת מספרים

הכתובת:
מספרים
מערכת מספרים
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע
רחובות 76100

נדפס בישראל 1988 - תשמ"ח



השתלמויות קיץ

המועד: י"ח בתמוז תשמ"ח - כ"ט בתמוז תשמ"ח.

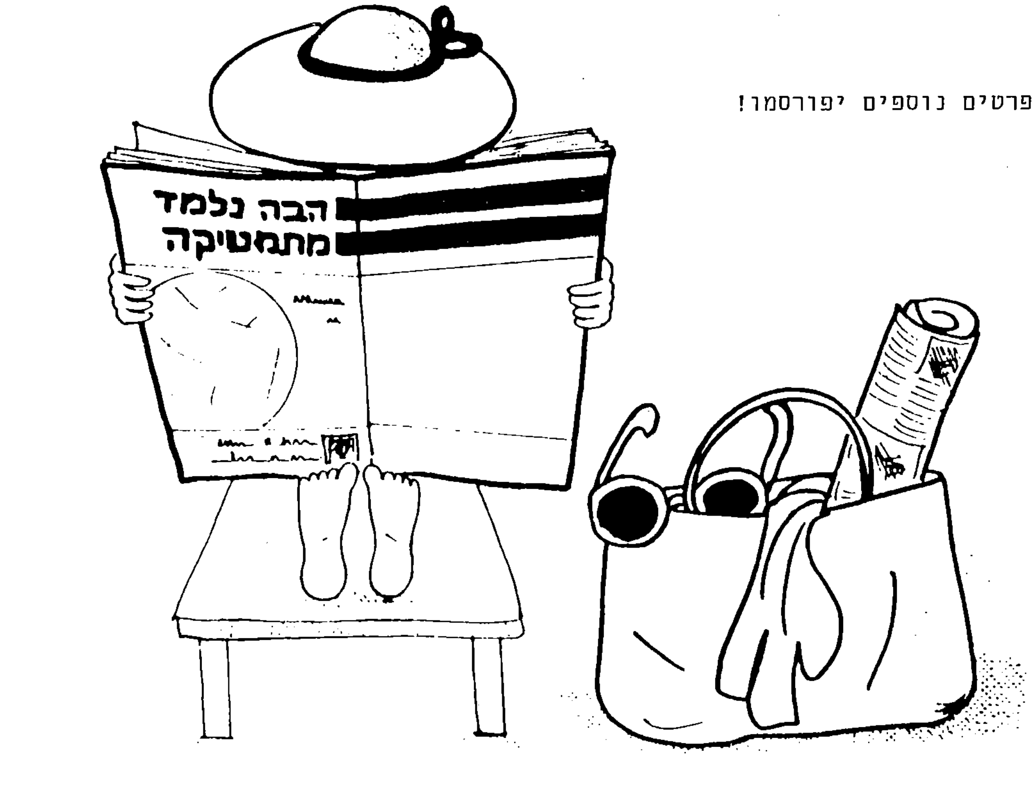
3.7.88 - 14.7.88

ח' באלול תשמ"ח - י"ב באלול תשמ"ח

21.8.88 - 25.8.88

המקום: מדרשת פיינברג
מכון ויצמן למדע
רחובות.

פרטים נוספים יפורסמו!



מאמרים

נומוגראם

מאת: גרשון רוזן
ביה"ס התיכון האיזורי, גליל מערבי

<u>מבוא</u>

רוב האנשים חושבים שחשבון הוא חשוב, אבל בכל הדורות אנשים חפשו כלי או מכשיר כזה להקל בשימושו (לדוגמא החשבוניה ABACUS בעבר או המחשב בימינו).

ברצוני להציג כלי נוסף במספר גירסות שונות ולהראות בקצרה איך ניתן לנצל אותו בכיתותנו. הכלי נקרא נומוגראם (NOMOGRAM).

נומוגראם הוא דיאגרמה של שלושה צירי מספרים. הצירים הם לא תמיד קווים ישרים וגם לא תמיד מקבילים זה לזה. הדיאגרמה מאפשרת לקרוא ממנה (בעזרת סרגל) קבוצות של שלושה מספרים, אחד מכל ציר, כשהקשר בין שלושת המספרים ידוע. אפשר גם לגלות בעזרת הנומוגראם מהו הקשר בין שלושה מספרים ידועים.

האיש הידוע ביותר בהיסטוריה של התפתחות הנומוגראם הוא דיאוקיין (D'OCAGNE), שחי באמצע המאה ה-19.

בניית נומוגראם וחקירת הכללים על פיהם פועלים היא, בדרך כלל, בתחום המתמטיקה של חטיבת הביניים.

<u>סיבות להכיר את הנומוגראם</u>

1. קל לשימוש. דורש שימוש בקו ישר בלבד.
2. אין חישוב ביניים בשימוש.
3. מדגיש את האיזומורפיזם (ISOMORPHISM) בין קבוצות מספרים שונים ופעולות בהם. למשל חיבור מספרים שלמים וחיבור שבר עשרוני בצורה ויזואלית.

המאמר מבוסס על חומר שהוכן ע"י המחבר עבור סדנת מרכזי מקצוע במתמטיקה שהתקיימה במחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים הטכניון-חיפה בריכוזה של פרופ' ניצה מובשוביץ-הדר.

4. נותן שימוש בקריאת סקלות שונות.

5. מאפשר שימוש בהנדסת המישור ומחזק את הקשרים בין ענפים שונים במתמטיקה, כמו כן הזדמנויות לתלמידים להיות יצירתיים בתחום המתמטיקה.

6. ניתן להתאמה לרמות שונות.

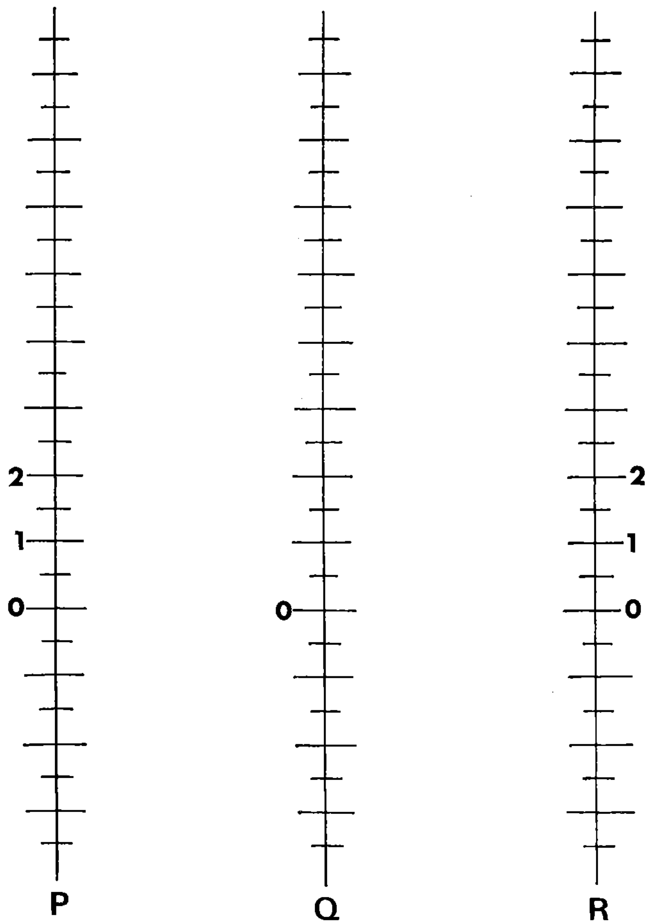
7. מקל על חישובים החוזרים על עצמם הרבה פעמים, בתחום מסויים.

8. נמצא עדיין בשימוש בתחומים שונים כמו בסדנא למכונאות או למרפאה.

9. קל לשכפול - זול - קל לשמור (על בריסטול עטוף למשל).

10. ניתן לשימוש גם על-ידי אנשים שלא מבינים את דרך בנייתו.

<u>נבנה נומוגראם ביחד</u>



1. ציר P וציר R הם שני צירים זהים. נסמן עליהם את השלמים הלא שליליים.

2. נחבר מספר כלשהוא על ציר P ומספר אחר על ציר R ונניח סרגל (או קו ישר אחר) בין הנקודות המתאימות על הצירים.

3. את הנקודה בה קו ישר זה חותך את ציר Q נסמן כערך הסכום של שני המספרים שבחרנו (אחד מציר P והשני מציר R).

4. נחזור על שלבים (2) ו-(3) עד שכל הנקודות על ציר Q יקבלו ערך מספרי.

בנינו נומוגראם עבור הקשר $Q = P + R$

אם נמשיך את סימון הצירים גם עבור המספרים השלמים השליליים נוכל לנצל את הנומוגראם גם עבור חיבור מספרים שלמים.

ניתן לנצל את הנומוגראם הזה בלי שום שינוי גם עבור חיסור במספרים שלמים.

עם שינוי בקנה המידה ניתן להשתמש בנומוגראם עבור חיבור וחיסור מספרים ממשיים בכל תחום שרוצים.

<u>מבחר נקודות שאפשר להסביר בעזרת הנומוגראם:</u>

א. חוק החילוף חל על החיבור במספרים ממשיים אבל אינו חל על החיסור.

ב. הסכום של מספר והנגדי שלו הוא אפס.

ג. לכל מספר נתון קיימים אין-סוף זוגות מספרים שהוא סכומם.

ד. הסכום של שני מספרים חיוביים הוא מספר חיובי.

ה. הסכום של שני מספרים שליליים הוא מספר שלילי.

ו. הסכום של שני מספרים שהאחד חיובי והאחד שלילי-נמצא בין שני המספרים. באילו מקרים הסכום הוא חיובי?

ז. תכונת האפס בחיבור.

ח. נסו לנסח איך ניתן להשתמש בנומוגראם עבור חיסור ופיתרו:

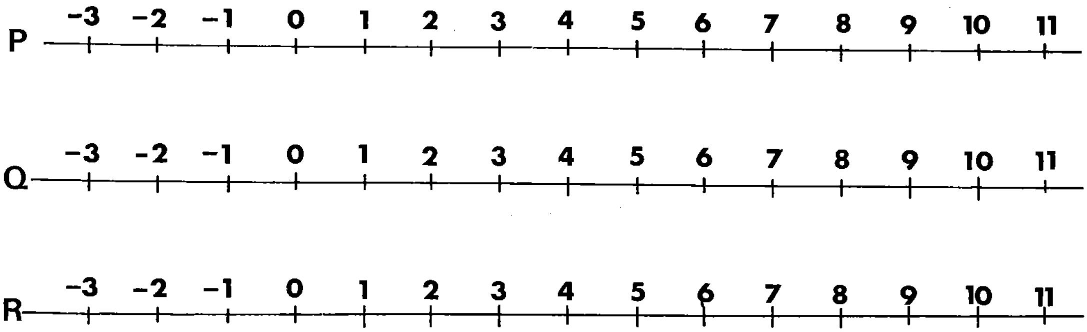
$6 - 2$; $6 - 8$; $(+6) - (+2)$; $(-6) - (+2)$; ...

איך זה פועל?

ניקח הפעם שלושה צירים זהים (למשל 3 סרגלים).

נניח את הסרגל כמו קודם בין מספר על ציר P ומספר על ציר R ונבדוק את התוצאה שעל ציר Q.

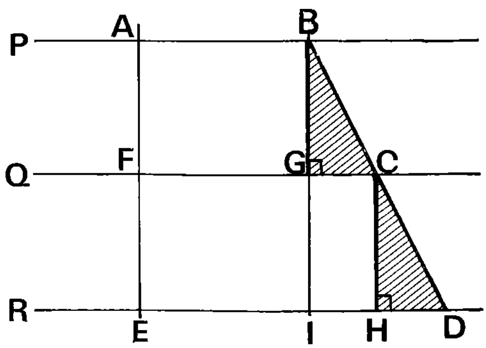
איך ניתן <u>לחשב</u> את המספר על Q כאשר ידועים P ו-R?

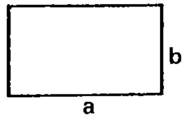


$\Delta BCG \cong \Delta CDH$ (כי הצירים מקבילים והמרחק ביניהם שווה).

$$\begin{aligned} AB + ED &= AB + EI + IH + HD \\ &= FG + FG + GC + GC \\ &= 2FG + 2GC \\ &= 2(FG + GC) \\ &= \underline{2FC} \end{aligned}$$

אם נכפיל את קנה המידה של הציר האמצעי נקבל את הנומוגראם של החיבור.



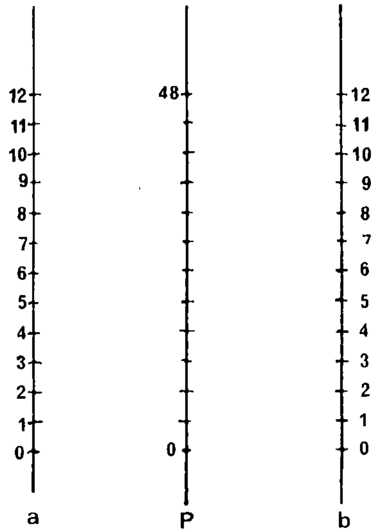


היקף P של מלבן הנ"ל ניתן ע"י

$P = 2(a + b)$

השלם את ציר P כדי שיתן היקף של מלבן.

נומוגרם להיקף מלבן



ניתן כמובן לשנות את המרחקים בין הצירים וגם את אורך היחידה על כל ציר.

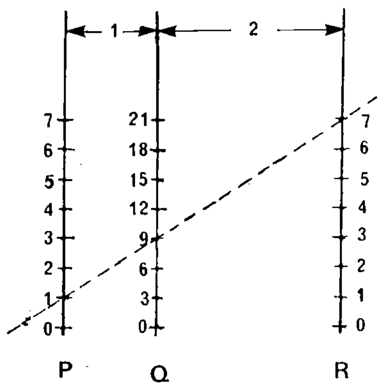
בדוגמאות הבאות השלם את הטבלאות בשלשות המתאימות ונסה לחשב את המספר על ציר Q אם ידועים המספרים על הצירים P ו-R.

א)

הציר Q נמצא ב- $\frac{1}{3}$ המרחק בין הצירים P ו R.

P	Q	R
1	9	7

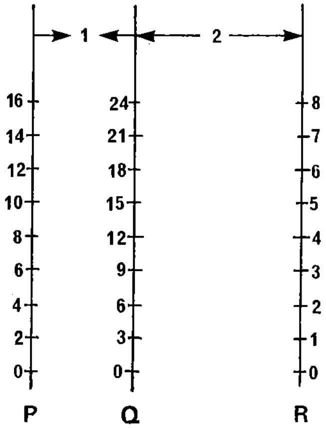
ניסוח: Q = _____ + _____



האם חוק החילוף קיים פה? _____

ב)

הציר Q נמצא ב- $\frac{1}{3}$ המרחק בין
הצירים P ו R.

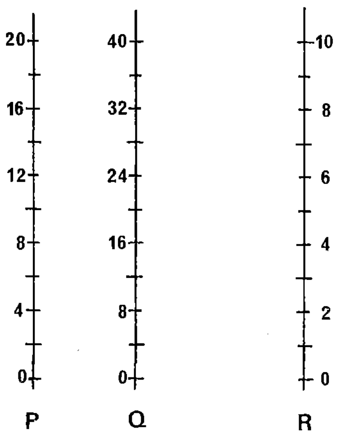


P	Q	R

ניסוח: Q = ______ + ______

האם חוק החילוף קיים פה? ______

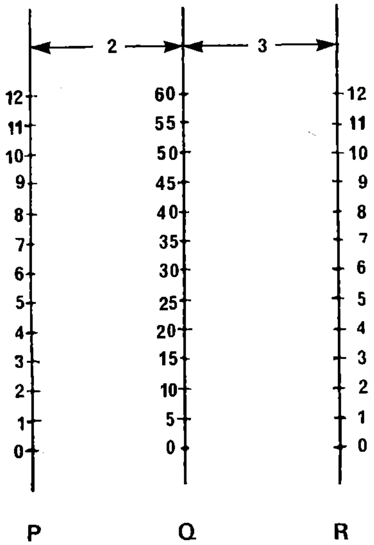
ג)



ניסוח: Q = ______ + ______

ד)

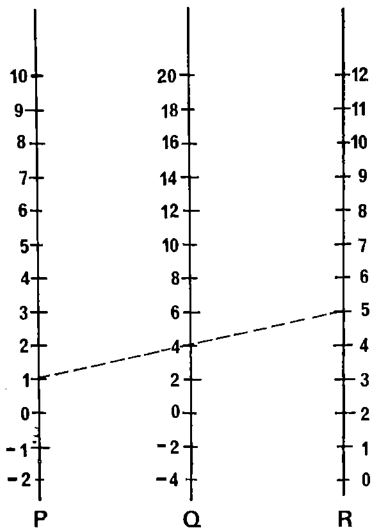
הציר Q נמצא ב- $\frac{2}{5}$ מהמרחק בין P ו R.



P	Q	R

Q = ___ + ___

ה)



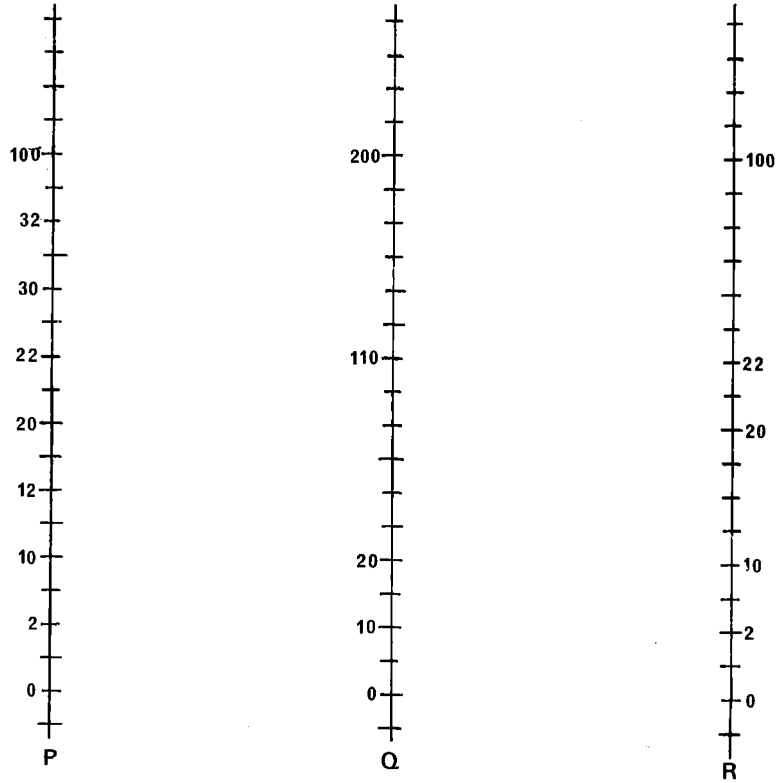
P	Q	R
1	4	5

Q = ___ + ___

נומוגראם לחיבור בבסיסים

נחליף את המספרים שליד הצירים בשמותיהם בבסיס אחר.

השלם את המספרים החסרים בצירים שמצאת.



השתמש בסרגל ובמונוגראם שלעיל כדי לפתור את התרגילים הבאים:

$2_{\text{ארבע}} + 32_{\text{ארבע}} =$

$2_{\text{ארבע}} + 30_{\text{ארבע}} =$

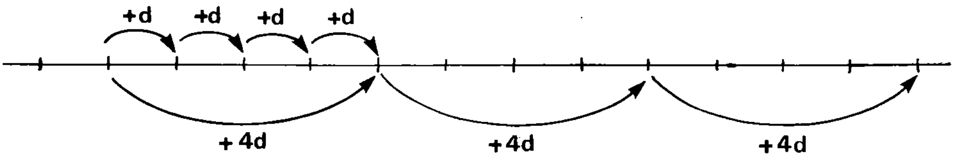
$12_{\text{ארבע}} + 100_{\text{ארבע}} =$

$20_{\text{ארבע}} + \qquad = 100_{\text{ארבע}}$

$11_{\text{ארבע}} + \qquad = 100_{\text{ארבע}}$

ציר מספרים עם סקלה לא ליניארית

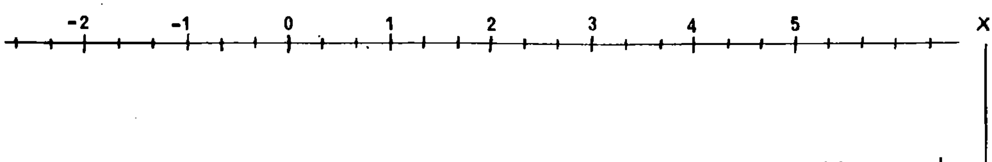
בכל המונוגראמים שבדקנו עד עתה, השתמשנו בצירי מספרים עם קני מידה שונים אבל עם תכונה אחת משותפת. לכולם רישומים עם "סקלה ליניארית", שהיא בנויה על פי המושג שמרחקים שווים בציר המספרים מייצגים הפרש מספרי קבוע. למשל:



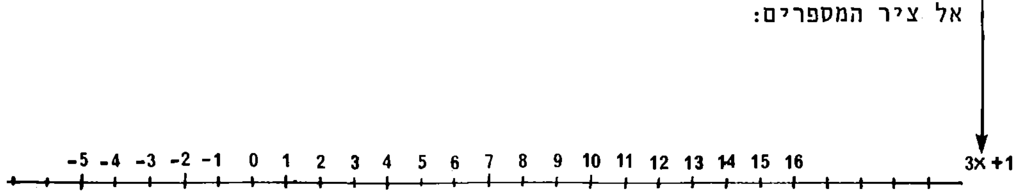
אם נקבע, למשל, את מיקום האפס ואורך ההפרש הקבוע (שהוא, בדרך כלל, אורך היחידה), אז קבענו גם את שמות כל שאר הנקודות על הציר הממשי (ראה חוברת מלווה לספר ג', עמוד 70 והלאה).

סקלה זו נקראת "סקלה ליניארית", כי כל ציר מספרים הבנוי לפי התיאור הנ"ל ניתן לקבל מציר המספרים הבא, בעזרת פונקציה ליניארית (פונקציה קווית) $y = ax + b$.

לדוגמא: הפונקציה הליניארית $y = 3x + 1$ הופכת את ציר המספרים:

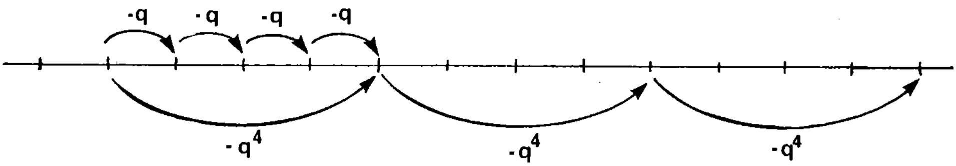


אל ציר המספרים:

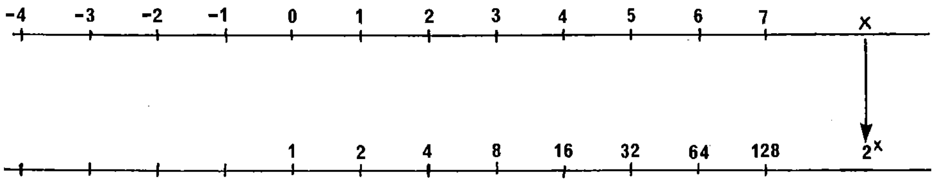


שבו כל נקודה בציר מקבלת ערך חדש לפי ההתאמה $x \longrightarrow 3x + 1$

נשאלת השאלה: האם ניתן לבנות ציר מספרים שבו כל נקודה מקבלת שם לפי כלל אחר. למשל מנה (או מכפלה) קבועה עבור מרחקים שווים בציר.

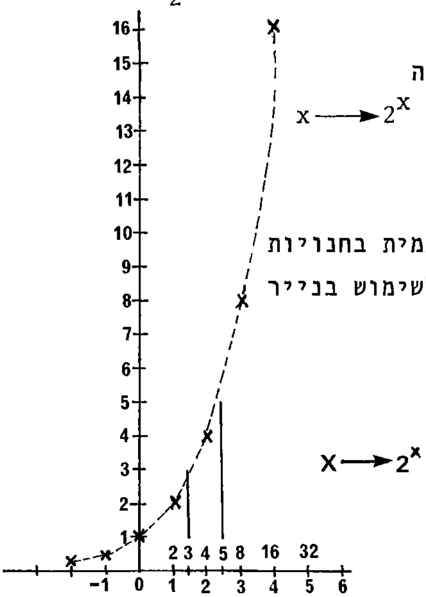


באילו מספרים נסמן את הנקודות על הציר עכשיו?
אף נקודה בציר זה לא תקבל ערך של אפס. למה?
אם ניקח נקודה על ציר זה ונסמן אותה במספר אחר, למשל 1 וניקח לדוגמא: $q = 2$ אז נקבל את הציר שבו כל נקודה מקבלת ערך חדש לפי הפונקציה
$x \longrightarrow 2^x$.



איך נסמן את הנקודות משמאל ל-1?

סקלה זו איננה ליניארית. היא נקראת סקלה לוגריתמית ע"פ שם __הפונקציה ההפוכה__ לפונקציה $x \longrightarrow 2^x$ שהיא הפונקציה הלוגריתמית $x \longrightarrow \log_2 x$



אם ברצוננו לסמן נקודות על הציר בין אלה שכבר סימנו, נוכל להיעזר בגרף הפונקציה $x \longrightarrow 2^x$ (או בגרף הפונקציה ההפוכה $x \longrightarrow \log_2 x$)

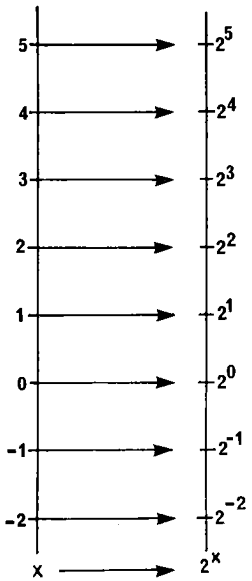
ניתן לרכוש צירים מסומנים בסקלה לוגריתמית בחנויות לכלי כתיבה, ציור וגרפיקה (ראה דוגמא לשימוש בנייר זה בעמודים הבאים).

נומוגראמים לפעילויות אחרות

כפל (נייר לוגריתמי)

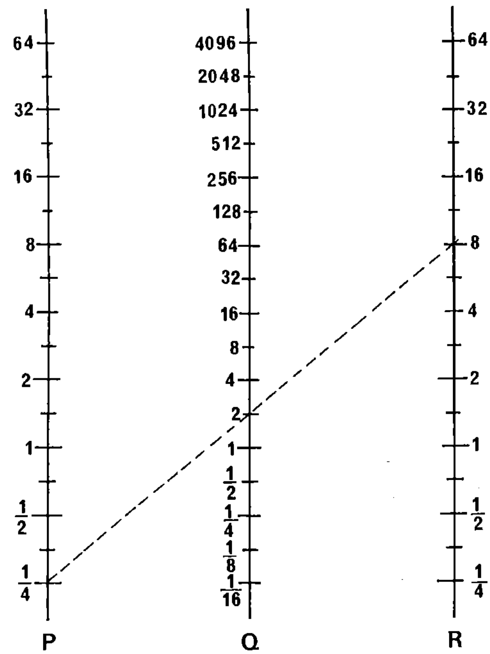
הנומוגראמים שבדקנו עד כה התקבלו ע"י שינוי שמות הנקודות על הצירים בנומוגראם שבאיור 1, כלומר ע"י חיבור, חיסור, כפל או חילוק במספר מסויים או ע"י שינוי יחס המרחקים בין הצירים.

הפעם נשנה את שמות הנקודות על הציר לפי החוק $x \longrightarrow 2^x$



ואז נקבל את הנומוגראם הבא:

נא לשים לב! לא שינינו את מקום הנקודות



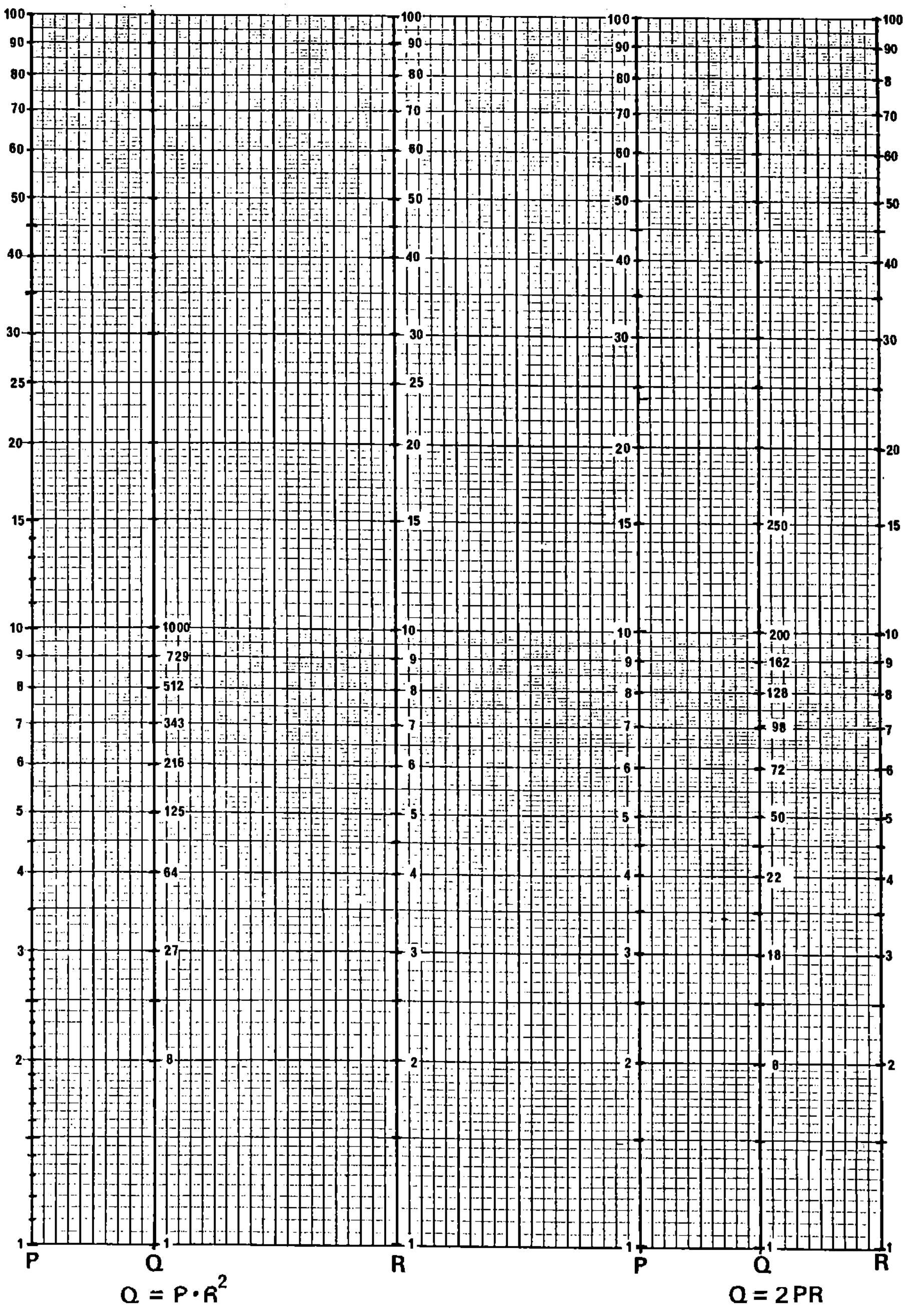
אם נחליף את הצירים הנ"ל לצירים לוגריתמים נקבל את הנומוגראם לכפל/חילוק.

נומוגראם זה ניתן לשנות בדיוק באותה הדרך $(n \longrightarrow 2^n)$ ואז נקבל תבניות

כמו: $Q = m \cdot P \cdot R$

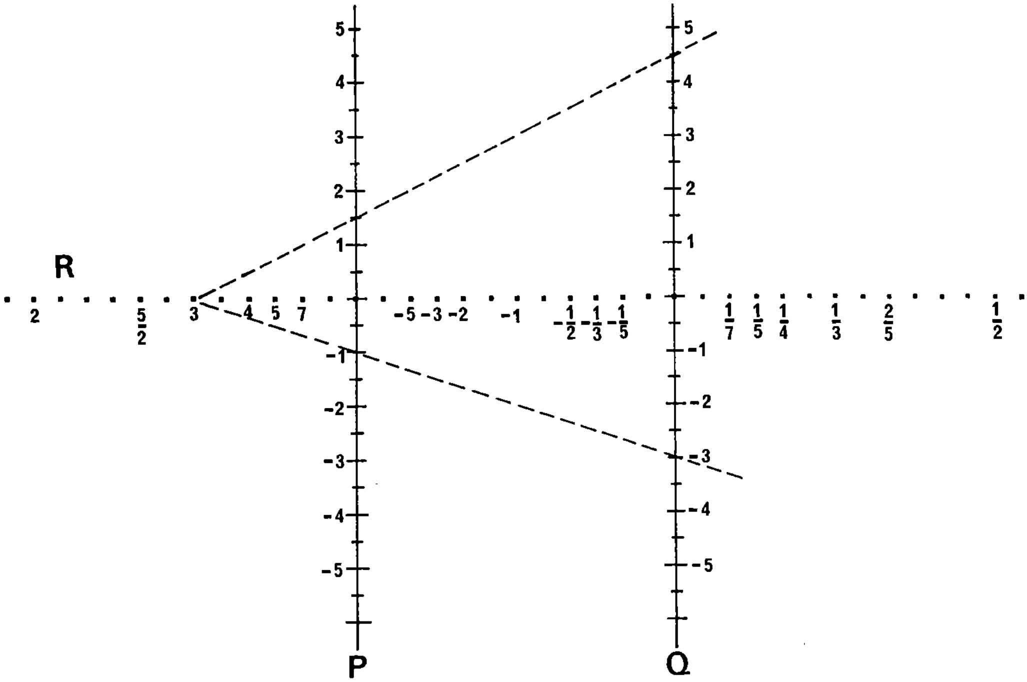
וגם: $Q = P^m R^n$

השינוי מתבצע באמצעות סרטוט על נייר לוגריתמי.



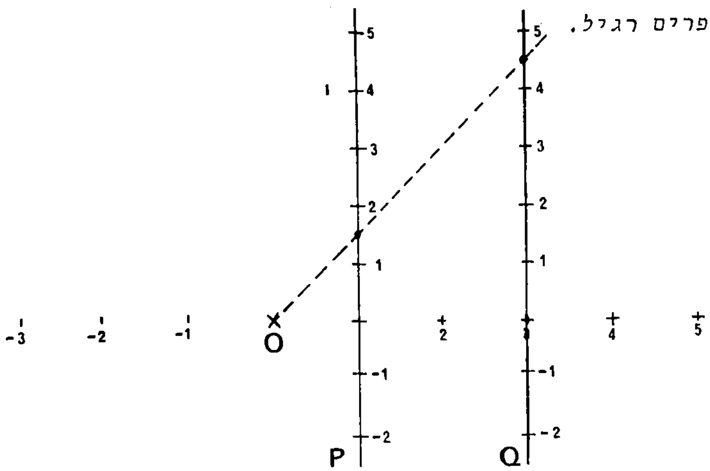
כל הנומוגראמים עד כה היו בנויים משלושה קווים מקבילים. נבדוק עכשו שלושה נומוגראמים שונים.

1. נומוגראם לכפל/חילוק (טוב להדגמת תכונות של כפל מספרי הזזה). (לא קשה להוכיח את דרך פעולתו בעזרת משולשים דומים).



הסרטוט מראה כפל פי 3, או באופן כללי $Q = 3P$ כאשר מרכז ההגדלה הוא 3 על ציר R. נקודה a על ציר R מאפשר חישובים מסוג: $Q = aP$.

<u>הערה</u>: ציר R <u>איננו</u> ציר מספרים וזה חיסרון. אם מאפשרים לציר Q לנוע אפשר לקחת נקודה O על ציר R כמרכז קבוע ואז ציר R הופך להיות ציר מספרים רגיל.



.2 שימוש בפרבולה

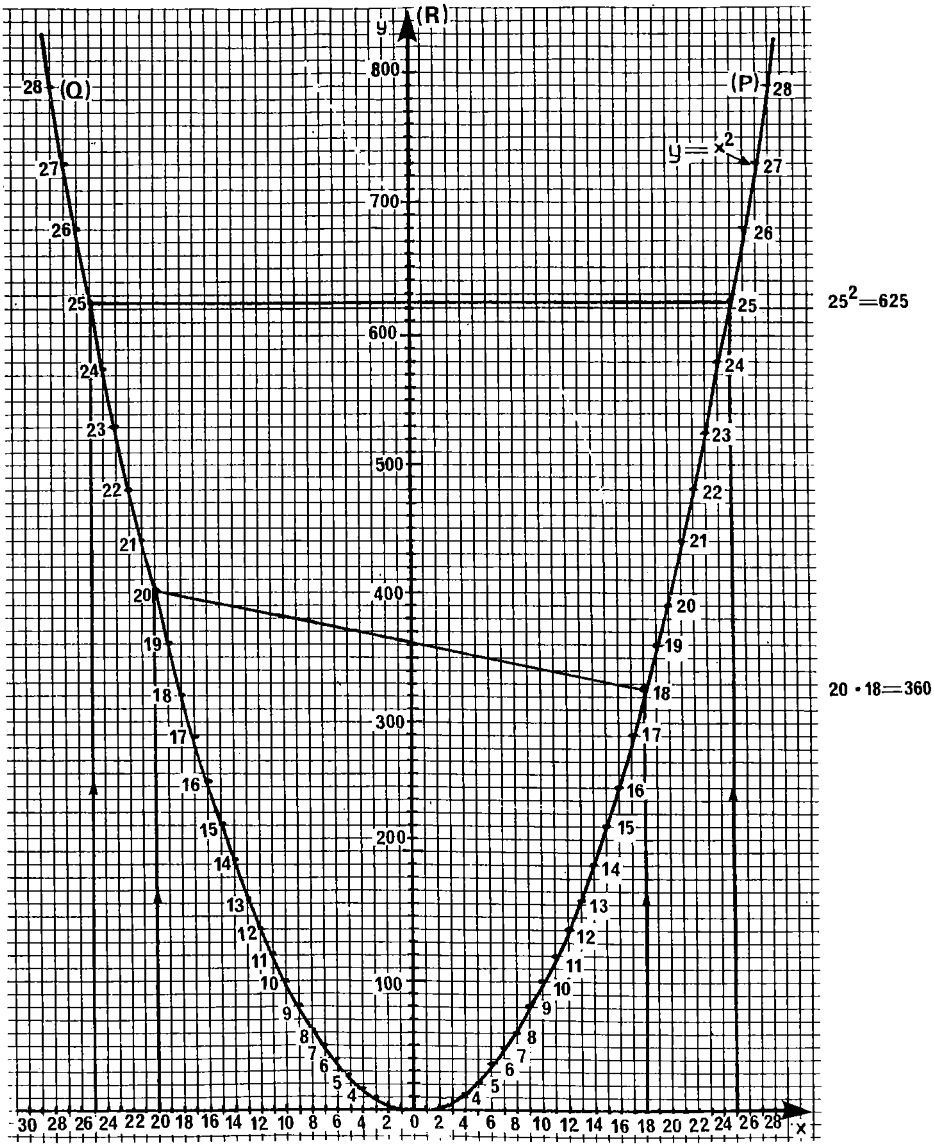
הערך המוחלט של שיעור ה-x רשום על הפרבולה.
ראה דיאגרמה.

ענף ימין הוא P

ענף שמאל הוא Q

ציר y הוא R

הנומוגראם מראה $PQ = R$

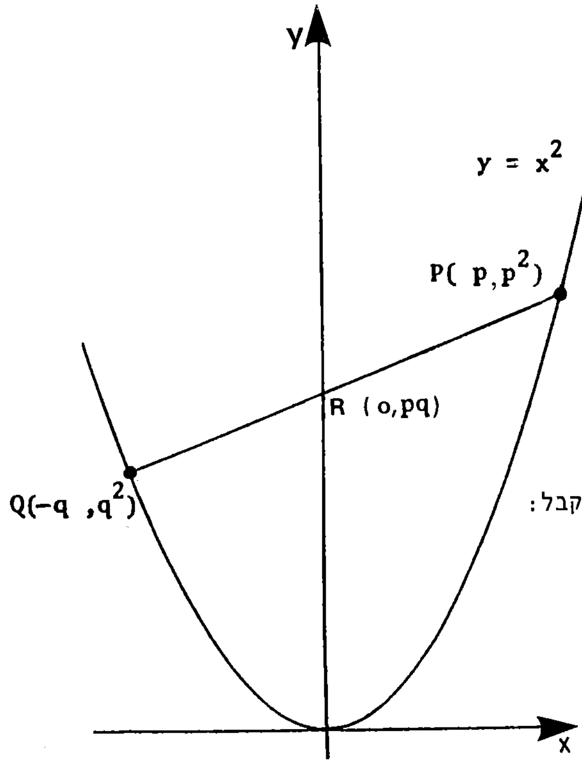


פרבולה $y = x^2$

$P(p\ ,p^2)$

<u>הוכחה:</u> $Q(-q\ ,q^2)$

מנת ההפרשים של PQ



$$a = \frac{p^2 - q^2}{p - (-q)}$$

$$\Downarrow$$

$$a = p - q$$

משוואת AB: $y = (p - q)x + b$

כיוון שהישר עובר דרך $P(p\ ,p^2)$ נקבל:

$$p^2 = (p - q)p + b$$

$$p^2 = p^2 - pq + b$$

$$\Downarrow$$

$$b = pq$$

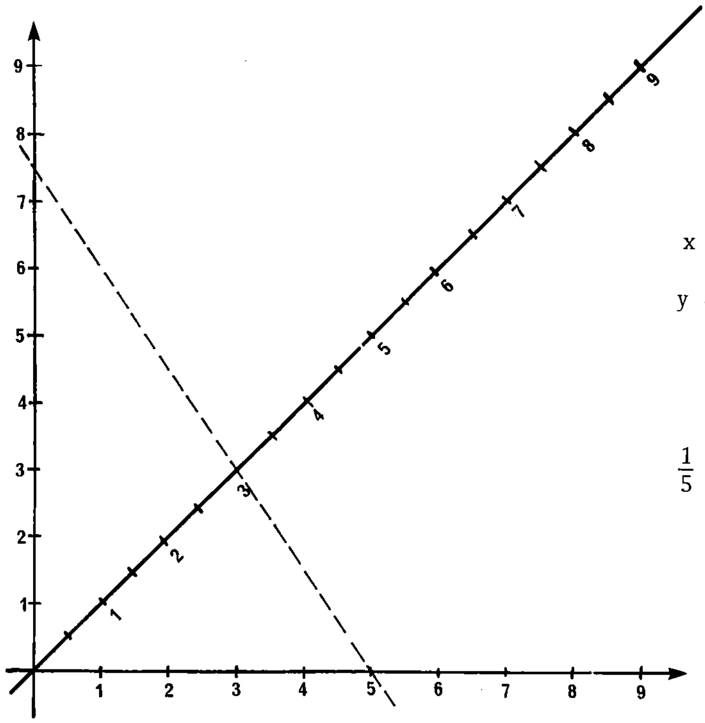
מכאן: $y = (p - q)x + pq$

ולכן הישר חותך את ציר y ב pq.

שהיא המכפלה של הערכים המוחלטים של שעורי ה-x-ים של הנקודות A ו B.

3. נומוגראם לחישובים מסוג: $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

נתונים x ו-y מהו הערך של z .



$$\left.\begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 7\tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad z = 3$$

כאשר

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{7\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

נשאיר את נימוק דרך פעולתו של הנומוגראם הזה כתרגיל.

ביבליוגראפיה

1. Cameron, A.J., Mathematical Enterprises for Schools. Pergamon Press, 1966.

2. Mold, J., Number Lines (topics from mathematics). C.U.P. 1973.

כמה כללים לא כל כך ידועים ומדוע הם עובדים

מאת: Steven Schwartzman
Austin Community College

תרגום: רחל בוהדנה וצפורה מימון

ספרי לימוד ישנים במתמטיקה הכילו לא רק נושאים שיצאו בינתיים מתוכנית הלימודים, אלא גם נושאים מוכרים אשר טופלו בדרכים שכעת אינן מוכרות. בזמן שהדגש בספרי הלימוד של היום, הוא על למידת אלגוריתמים כלליים ומדוע הם עובדים, ספרי הלימוד הישנים היו לעיתים קרובות מלאים בכללים וקיצורי דרך, אשר הפחיתו עד למינימום את כמות העבודה שתלמידים היו צריכים לבצע. בחור דוגמא אחת של שינוי זה בגישה, חישבו על האלגוריתם הישן לחישוב שורש ריבועי, לעומת הגישה של חילוק וממוצע שנמצאת ברוב הספרים החדשים: האלגוריתם הישן יעיל יותר, אך קשה יותר להבנה, לעומת הגישה החדשה שהיא קלה להבנה אך קשה לביצוע.

ריכוז נפלא של כללים מיושנים הוא הספר "אריתמטיקה גבוהה" (J.J.Hangh: Higher Arithmetic); המהדורה הארבע עשרה הוצאה לאור על ידי מ.ה. ג'יל ובנו בדבלין 1903. כותרת המשנה של הספר מסבירה שהוא היה מיועד לתלמידים שהיו צריכים להיבחן עבור השרות הציבורי או בחינות בי"ס ברמת תיכון או ברמה ארצית: שאלות רבות מבחינות אלה מופיעות בפרק גדול בסוף הספר. בספר נמצאים 293 כללים. דבר אופייני הוא, שהמחבר מוכיח כללים אלה לאו דוקא עבור מקרה כללי ביותר, כפי שאנו היינו עושים, אלא עבור דוגמא מייצגת. כנראה ציפו מן הקוראים, שיוכלו לבנות מן הדוגמא הוכחה כללית באותו אופן.

לפני שתקראו את הכלל ואת הדוגמא הבאים, מתוך "אריתמטיקה גבוהה", עליכם להכיר את המינוחים המיושנים. מה שנקרא היום שבר עשרוני מחזורי, היה מוכר תחת השם שבר עשרוני מעגלי ורשמו נקודה מעל לספרה הראשונה ומעל לספרה האחרונה של המחזור. שבר מחזורי בו נמצאות כמה ספרות עשרוניות לפני המחזור, כונה שבר עשרוני מעגלי מעורב. שבר רגיל היה כינויו של שבר פשוט. לאפס נהגו לקרוא "סיפרה". הנקודות העשרוניות הופיעו בספר

This article is taken with permission from The Mathematics Teacher, Vol. 78, No. 7 (October 1985).

של Hangh במקום בו אנו רושמים את סימן הכפל באלגברה. בהתחשב בדברים המיוחדים האלה, חישבו על הכלל הבא מן הפרק הנקרא "פישוטם של שברים פשוטים ועשרוניים" (עמ' 83).

על מנת להפוך שבר עשרוני מעגלי מעורב לשבר פשוט, חסר את החלק שאינו מחזורי מהכל ורשום את ההפרש בתור מונה: במכנה שים ספרות 9 כמספר ספרות המחזור והוסף "ספרות" כמספר הספרות שאינן במחזור כך:

$$.6\dot{4}\dot{3} = \frac{643-6}{990} = \frac{637}{990}$$

הוכחה:

נניח	$.643434343\ldots$	$a =$
אז	$643.434343434\ldots$	$1000a =$
כמו כן	$6.434343434\ldots$	$10a =$

כעת, על ידי חיסור השוויון השלישי מן השני, נקבל:

$$990a = 643 - 6$$
$$\Downarrow$$
$$a = \frac{637}{990}$$

מ.ש.ל.

מדוגמא זאת נובעת הוכחה כללית.

נניח ש M, השבר העשרוני המעגלי המעורב, מיוצג כך:

$$M = .\overbrace{(d\ldots f)}^{k}\ \overbrace{(\overline{x\ldots z})}^{n}$$

כאשר לחלק הלא מחזורי k ספרות ולמחזור n ספרות.

נכפיל את שני האגפים, פעם ב 10^{k+n} ופעם ב 10^{k}, נקבל שני שוויונות.

$$10^{k+n}\cdot M = (d\ldots f)\ (x\ldots z).(\overline{x\ldots z})$$

$$10^{k}\cdot M = (d\ldots f).(\overline{x\ldots z})$$

נחסיר שני שוויונות אלה ונקבל:

$$10^{k+n}\cdot M - 10^{k}\cdot M = (d\ldots f)(x\ldots z)-(d\ldots f)$$

כאשר נוציא M לפני הסוגריים באגף שמאל ונחלק את שני האגפים בגורמים האחרים נקבל:

$$M(10^k)(10^n - 1) = (d...f)(x...z)-(d...f)$$

$$M = \frac{(d...f)(x...z)-(d...f)}{(10^n-1)(10^k)}$$

כתיבת המכנה בצורה אחרת תביא את השבר בדיוק לצורה המתוארת בסיכום הכלל:

$$M = \frac{(d...f)(x...z)-(d...f)}{\underbrace{999...9}_{n}\ \underbrace{00...0}_{k}}$$

גישה זאת שווה ביסודה לזאת המובאת ברוב הספרים בני זמננו. אבל יתרונה בכך שהיא מוליכה את התלמידים באופן ישיר מן השבר העשרוני המקורי אל השבר הפשוט השווה לו, בלי צורך ליצור את האלגוריתם מחדש בכל פעם. כמובן, ישנם מורים שיסתכלו בחשדנות על תלמיד שאינו מציג את כל השלבים ורק מנחית תשובה, אך ל J.J. hangh (עמ' 83) היתה השקפה אחרת: "בוחן שמוצא תשובה שנרשמה מיידית על ידי הנבחן, סביר שיאמין שנבחן כזה יודע אריתמטיקה טוב יותר מאשר אחד שמתאמץ ומבזבז זמן רק כדי לגלות את השבר הפשוט המבוקש".

דגש דומה על יעילות נמצא בספר "אריתמטיקה משרדית", שהמהדורה השישים וחמש שלו יצאה לאור ב 1902, בלי שם מחבר, על ידי חברת Sodler-Rowe בבלטימור. כותרת המשנה קובעת שהספר "מיועד לבנקאים, מתווכים, סוחרים, אנשי עסקים, מנהלי חשבונות, מכונאים, מורים ותלמידים". ההקדמה מדגישה "הקניית אריתמטיקה שימושית ... בתקופה הזאת בה כה עסוקים..." (ההדגשות הוספו). כתוצאה מכך הוכחות כלשהן אינן ניתנות לאף אחד מהכללים הרבים שבספר (מה כבר אפשר לצפות מספר בלי מחבר!).

המושג היחיד שדורש הגדרה, המופיע בכלל בדוגמא 1, הוא "מספרים מקורבים לחזקה של 10"; הכוונה היתה לשני מספרים שקטנים במעט מאותה חזקה של 10.

להלן ההוכחה החסרה:

נציג את שני המספרים בתור $(10^n - a)$ ו- $(10^n - b)$.

אז המכפלה P ניתנת על ידי:

$$
\begin{aligned}
P &= (10^n - a)(10^n - b) \\
&= 10^{2n} - 10^n (a + b) + ab \\
&= 10^{2n} - 10^n \{ - 10^n + a + 10^n - 10^n + b + 10^n\} + ab \\
&= 10^{2n} + 10^n \{(10^n - a) - 10^n + (10^n - b) - 10^n\} + ab \\
&= 10^{2n} + 10^n \{(10^n - a) + (10^n - b)\} - 2 \cdot 10^{2n} + ab \\
&= \{(10^n - a) + (10^n - b)\} \cdot 10^n - 10^{2n} + ab
\end{aligned}
$$

הביטויים בשורה האחרונה מתאימים למספרים הנזכרים בכלל.

המספרים המקוריים היו בני n ספרות כל אחד. כאשר מצמידים n אפסים לכל אחד מהם (ז"א מכפילים ב 10^n), ומחברים מספרים חדשים אלה, תהיה הסיפרה 1 מועברת לעמודה של 10^{2n}, זאת תתבטל ע"י הביטוי -10^{2n}.

לבסוף, את מכפלת המשלימים, ab, צריך להוסיף למה שנשאר.

מאחר שתלמידים מסויימים סובלים, כפי הנראה, מ"יצר בלתי מסופק" "לזרוק" דברים כגון סימני מינוס או סוגריים, אני אומר להם לפתור כל ערב כמה בעיות בעזרת כלל זה, על מנת להתפטר מן היצר הזה; אחרי שהם זורקים צרור של 1-ים, אולי ישמחו לשמור על דברים אחרים שהם זקוקים להם.

להלן קטע ציטוט מתוך הספר:

כ פ ל

פריט 102 - למצוא את <u>המכפלה</u> של שני מספרים קרובים ל-100, 1000, 10000 וכו'.

כ ל ל

רשום את המוכפל וצרף מספר "ספרות" כמספר הספרות במכפיל. רשום את המכפיל תחת המוכפל בלי להתייחס ל"ספרות" המצורפות. מצא את המכפלה של המשלימים של שני המספרים הנתונים ורשום את המכפלה תחת ה"ספרות" בצד ימין של המוכפל. חבר מספרים אלה המסודרים בצורה הזאת והשמט את הסיפרה השמאלית. תוצאה זאת תהיה המכפלה הנכונה.

דוגמאות כתובות

1. הכפל 988 ב 998.

משלימים	פעולה
12	988000
2	998024
	986024

הסבר - מאחר שיש שלוש ספרות במכפיל, אנו מצרפים שלוש "ספרות" - למוכפל. המשלים של 988 הוא 12; ושל 998 הוא 2; לכן שמים את המכפלה (או 24) תחת הספרות מימין. מחיבור והשמטת הסיפרה משמאל (מחיבור 9+9) נקבל 986024, או המכפלה הנכונה של שני המספרים הנתונים.

הספר השלישי והאחרון שאני מבקש להתייחס אליו שונה משני האחרים בכך שהוצא לאור לראשונה בשנת 1965.

Vedic Mathematics, עם כותרת משנית "שש עשרה נוסחאות מתימטיות פשוטות מכתבי ה Vedas", נכתב בסוף ימיו על ידי Jagadguru Swami Sri Bharati Krsna Tithaji Maharaja (רוב שמות אלה הם תארים והמחבר נקרא גם בתואר נוסף, Shankaracharya בו אני אשתמש). בתחילת המאה, מי שהתעתד להיות Shankaracharya התחיל להתעניין מאוד במתמטיקה ובמדע, נושאים אותם למד בבית הספר. חלק גדול של חייו בהמשך, הוקדש לדת, אך התעניינותו הראשונית נשארה. משוכנע שה Vedas, כתבי יד הינדו עתיקים, מכילים הדרכה בכל תחומי החיים האנושיים, החליט להרהר בהם בהקשר למתמטיקה, במשך שנים הגיע לעמקויות רבות שאותן פיתח בסידרה של כתבי יד.

כתבי יד אלה אבדו לרוע המזל; הספר הנמצא הינו רק תקציר של כתבי היד המוקדמים. Shankaracharya מת ב 1960, לפני שהספיק לשחזר אף אחד מן הכרכים הבודדים ביתר פירוט. בכל מקרה, גם התקציר ששרד מעניין ביותר.

הכלל מתוך Vedic Mathematics שאטפל בו מורכב משתי מלים בסנסקריט: Sunyam Samyasamuccaye. אפילו התרגום דורש הסבר: "כאשר ה Samuccaya שווה, Samuccaya זה שווה אפס, כלומר צריך להשוות אותו לאפס".

המחבר ממשיך להסביר ש Samuccaya הוא מונח מקצועי שמקבל משמעויות שונות במעט, בהקשרים שונים (האות c היא כנראה הכתיב בסנסקריט עבור צליל ה "ch" באנגלית).

בדוגמא שלנו, Samuccaya מצביע על סכום שני המונים או שני המכנים בפרופורציה מן הסוג

$$\frac{3x + 4}{6x + 7} = \frac{5x + 6}{2x + 3} \qquad (1)$$

סכום שני המונים הוא $8x + 10$ וכן סכום שני המכנים.

לפי הכלל קיים אז:

$$8x + 10 = 0 \quad \Downarrow \quad x = \frac{-5}{4}$$

Shankaracharya מסב תשומת לב לעובדה שאם נכפיל באלכסון את השוויון המקורי נקבל משוואה ריבועית; לכן, נדרש גם פתרון שני. כמסקנה הוא מגדיר Samuccaya בצורה אחרת: הערך המוחלט של ההפרש בין המונה השמאלי והמכנה השמאלי או בין המונה הימני והמכנה הימני:

$$|(3x + 4) - (6x + 7)| = 3x + 3$$

$$|(5x + 6) - (2x + 3)| = 3x + 3$$

לכן $3x + 3 = 0$ ו- $x = -1$ הוא השורש השני. בלי "כפל באלכסון" ובלי נוסחת הפתרון של משוואה ריבועית.

בדרך כלל Shankaracharya מוכיח את כלליו אך לא במקרה הזה. הוא השמיט אותה לא בגלל הקושי, אך כנראה בכלל אורכה.

הנה ההוכחה כפי שהיתה צריכה להיות:

$$\frac{ax + b}{ex + f} = \frac{cx + d}{(a + c - e)x + (b + d - f)}$$

כפל באלכסון וכינוס ביטויים דומים,נותנים:

$$x^2(a + c)(a - e) + x\,(2ab + bc - be + ad - af - de - cf) + b^2 + bd - bf - df = 0.$$

היות שסכום שני המונים (או המכנים) של הביטוי המקורי, הוא $(a + c)x + d + b$, צריך להשוות סכום זה לאפס.

תשובה אחת, אם כך, היא

$$x = \frac{-b - d}{a + c}$$

אם מציבים פתרון זה, במשוואה הארוכה, עשרים ושמונה האיברים שמתקבלים יבטלו זה את זה והשוויון יתקיים.

על מנת לקבל את השורש השני; ערך ה Samuccaya המתקבל ע"י חיסור הוא $(a - e)\ x + b - f$,

ומכאן:

$$x = \frac{f - d}{a - e}$$

כאשר מציבים ערך זה במשוואה הארוכה, שוב כל עשרים ושמונה הביטויים באגף השמאלי יבטלו זה את זה והשוויון יתקיים.

אם השוויון המקורי הוא בעצם רק ליניארי, כמו ב $\frac{3x + 2}{3x - 7} = \frac{3x - 13}{3x - 4}$

אזי רק לסוג הראשון של Samuccaya, יהיה מובן, במקרה זה $6x - 11$, ולכן רק ביטוי זה ישווה לאפס. שורש אחד הוא $x = 11/6$. ה Samuccaya השני הוא קבוע, תשע, שכמובן לא ישווה לעולם לאפס.

מ ס ק נ ה

מנסיוני, לימדתי את גישת ה Samuccaya בכיתה שלומדת שנה שנייה של אלגברה בצורה מזורזת, בה ישבו בעיקר תלמידי כיתה י'. הייתי רושם משוואות בדומה ל- (1) על הלוח ואחרי מעט תירגול, התלמידים יכלו לתת את שני השורשים במבט ראשון. כמה מהם אפילו שלטו בגישת Samuccaya מסובכת יותר עבור משוואות מן הסוג

$$\frac{1}{3x+2}+\frac{1}{5x+6}=\frac{1}{x+7}+\frac{1}{7x+1}$$

ויכלו למצוא בעל פה את כל שלושת הפתרונות.

במקרה הזה: x = 5/2 , x = 1/4 ו- x = -1.

כמה תלמידים נהנו מן המלה Samuccaya עצמה, כנראה בגלל מקורה האקוסטי, ואמרו אותה במנגינה כמו בקריאת עידוד.

גישה אחרת היא להראות לכיתה את הטכניקות ולגרות תלמידים להציע הסברים מדוע הן עובדות: באופן הגיוני אפשר לצפות רק מן התלמידים הטובים ביותר שיציעו הוכחות. לחילופין, המורה יכול לחשב את התשובות בעל פה, לתת אותן לכיתה, ואז לבקש מתלמידים לגלות את קיצור הדרך של החישוב. עם כמות מספקת של נתונים, תלמידים רבים יגלו בודאי לפחות קיצור דרך אחד; גילוי אינדוקטיבי קל הרבה יותר מאשר הוכחה דדוקטיבית. שוב, גישה אחרת היא שהמורה מציג כל קיצור דרך, אחרי שהכיתה למדה והוכיחה ע"י מבחן שליטה בגישה המקובלת. בהמשך, התלמידים יהיו רשאים להשתמש בקיצור הדרך. מורה יכול גם לתת תוספת לציון לתלמיד שמצא שיטות אחרות בספרות או גילה קיצורי דרך חדשים בכוחות עצמו.

בשביל המורה, קיצורי הדרך המוצגים כאן, מציעים דרך מהירה לפתרון שאלות במבחן, בלי צורך לעבור את כל הצעדים הרגילים. כל מורה המעורב בהכנות לתחרויות במתמטיקה, בהן יש פרס עבור מהירות התלמידים, יכול להשתמש בשיטות אלה כדי ליצור שאלות שאפשר לפתור עם קיצור הדרך כנועט במבט ראשון, אך שבדרך אחרת גוזלות זמן רב.

סטטיסטיקה מהי

מאת: ברברה פרסקו
מכון ויצמן למדע ומכללת בית ברל

נושא הסטטיסטיקה אינו המצאת התקופה המודרנית, שורשיו הם עתיקים מאוד. מושג הממוצע, למשל, היה ידוע בימי הפילוסוף - המתימטיקאי יווני פיתגורס וסקרים סטטיסטיים אף מוזכרים בתנ"ך.

הסטטיסטיקה שאנו מכירים היום התפתחה והתרחבה במאה ה-16, כשהשלטונות באירופה החלו להתעניין בנתוני אזרחיהם לצורך הטלת מיסים, גיוס צבאי וכדומה. במאה ה-17 כבר היה נפוץ בממלכות רבות לערוך סקרים בסגנון מיפקדי האוכלוסין של היום. חברות הביטוח, שהתרבו בתקופה זו, אספו נתונים על תוחלת החיים כדי לקבוע מחיריהם.

בחמישים השנים האחרונות, השימוש בסטטיסטיקה ואיסוף נתונים, קיבלו תנופה גדולה מאוד. הביקוש הרב לנתונים סטטיסטיים החל בעקבות ההרחבה הניכרת הן בתחומי העיסוק של הממשלה, הן בתחומי המסחר והתעשיה, והן במחקר המדעי. במקביל לעליה בביקוש, נעשה איסוף הנתונים ועיבודם קל יותר, מצד אחד בגלל המצאתו ושכלולו של המחשב האלקטרוני, ומצד שני בגלל התפתחות תורת הסטטיסטיקה שאפשרה הסקת מסקנות מהימנות ממדגמים.

<u>מהי סטטיסטיקה?</u>

ענף הסטטיסטיקה מחולק לשני תחומים עיקריים: סטטיסטיקה תיאורית וסטטיסטיקה הסקתית.

<u>סטטיסטיקה תיאורית</u> עוסקת בארגון ועיבוד נתונים בצורה שיטתית, כך שניתן לקבל מידע שימושי ומשמעותי מכמויות אדירות של נתונים. הנושאים הקשורים לתחום זה הם: ארגון נתונים בלוחות התפלגות ובצורות גרפיות שונות, מדדי נטיה מרכזית (כגון שכיח, חציון וממוצע), מדדי פיזור (סטיית תקן ואחרים), מדדים של מיקום יחסי (דרוגים אחוזונים וציוני תקן), ומדדי קשר בין משתנים (כגון מתאמים).

סטטיסטיקה הסקתית עוסקת בהסקת מסקנות ובקבלת החלטות במצב של אי וודאות. תחום זה קשור לבדיקת השערות במדע אבל יישומו לא רק במדע, אלא בענפים רבים ומגוונים בחברה כולה. לימוד הסטטיסטיקה ההסקתית מקנה הבנה מעשית בהסתברות, ונותן כלים המאפשרים בדיקת השערות בצורה שיטתית והערכת אומדנים מהימנים.

מי צריך סטטיסטיקה?

אם נשאל את עצמנו איפה משתמשים בסטטיסטיקה ובאילו תחומים דרוש ידע מינימלי בסטטיסטיקה, נגלה כי הרשימה ארוכה מאוד. לדוגמא:

בתחום הממשלה

- לצורך תכנון שרותים ציבוריים: תחבורה, יחידות דיור, בתי ספר, בתי סוהר, בתי חולים וכו'.
- לצורך תכנון כלכלי: גידול כלכלי, החלטות בענין מסים, סובסידיות וכו'.

בתחום הפוליטי

- משאלי דעת קהל וסקרים בהעדפות פוליטיות, בתמיכה במדינות שונות וכדומה.

בתחום הרפואה

- בדיקת תרופות חדשות וטיפולים חדשים.
- החלטות לגבי הפצת תרופות חדשות.

בתחום החינוך

- חלוקת משאבים.
- הערכת הישגי המערכת.
- תכנון מספר המקומות בסמינרים להכשרת מורים.
- קביעת קריטוריונים לקבלת סטודנטים למוסדות להשכלה גבוהה.

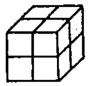
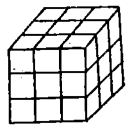
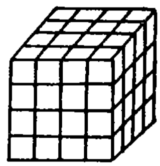
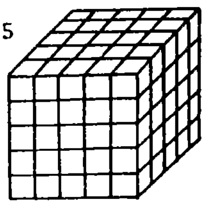
בתחום התעשיה והמסחר

- בדיקת מוצרים חדשים.
- בקרה בייצור.
- סקרים בענין שיווק.

העוגות של שמיל

הטבח שמיל אופה עוגות יום הולדת בצורה של קוביות בגדלים שונים. לאחר האפיה, הוא טובל את העוגה בציפוי שוקולד וחותך אותה לקוביות של $1\times1\times1$. כך נוצרות קוביות עוגה המכוסות קרם על 3, 2, 1 או על אף אחת מפאותיהן.

מצא בכל מקרה <u>כמה קוביות מכל סוג מתקבלות?</u>

גודל העוגה	קוביות עם 3 פאות מכוסות קרם	קוביות עם 2 פאות מכוסות קרם	קוביות עם פאה אחת מכוסה קרם	קוביות שאינן כל מכוסות קרם	סך-הכל מספר קוביות
$2\times2\times2$ 					
$3\times3\times3$ 					
$4\times4\times4$ 					
$5\times5\times5$ 					
⋮ $10\times10\times10$					
⋮ $a\times a\times a$					

הערות

לפני תחילת העבודה, כדאי להציג בפני הילדים,או לשרטט על הלוח, קוביה גדולה ולדון במרכיבים שלה (קודקודים, מקצועות ופאות) ובמספר כל אחד מהם (8, 12 ו-6 בהתאמה).
עתה, מחלקים לכל קבוצה של 2-4 ילדים 30-50 קוביות קטנות (בעלות מקצועות של 1-2 ס"מ) בעזרתן יוכלו לבנות את הקוביות של 2×2×2, 3×3×3 ואפילו חלקים מן הקוביה של 4×4×4 (אם קבוצות מחליטות להתאחד, הן יוכלו לבנות אף קוביות גדולות יותר.)

את השלב הראשון בפתרון - הקוביה של 2×2×2-אפשר לפתור ביחד, כדי שהתלמידים יתרגלו לדרך בה ממלאים את הטבלה.

בשלב שני, נותנים לילדים לעבוד בקבוצות.
תחילה, קיימת נטיה לספור ממש את הקוביות מכל סוג (חלקם "ישכחו" לספור את הקוביות הנמצאות על הפאות או על המקצועות התחתונות המוסתרות). ככל שמידות הקוביה גדלות, הספירה נעשית מסורבלת יותר, מספר הקוביות איננו מספיק עוד, ומתעורר הצורך במציאת "שיטה".

תוך כדי הספירה מגלים התלמידים, כי:

א. הקוביות ששלוש מפאותיהן מכוסות קרם נמצאות בקודקודים (ולכן מספרן תמיד 8).

ב. הקוביות ששתיים מפאותיהן מכוסות קרם נמצאות על החלק הפנימי של המקצועות (ולכן מספיק לספור את מספרן על מקצוע אחד ולהכפיל ב 12).

ג. הקוביות בעלות פאה אחת מכוסה קרם נמצאות על "הריבוע המרכזי" של כל פאה (ולכן מספיק לספור את מספרן על פאה אחת ולהכפיל ב 6).

ד. הקוביות שאינן מכוסות קרם מהוות קוביה פנימית המתקבלת לאחר ש"מקלפים" שיכבה אחת של קוביות מסביב.

העבודה על הקוביה של 10×10×10 מחייבת כימות מדוייק יותר של הקשרים שנתפסו עד עתה באופן אינטואיטיבי ומהווה צעד נוסף לכיוון ההכללה.

סיכום ביניים של התוצאות שהושגו עד השלב הזה ושל העקרונות העומדים מאחורי ספירת הקוביות מכל סוג יכול להוות עזרה נוספת לתלמידים המתקשים להכליל.

<u>הצעות לשאלות נוספות:</u>

א. בדוק, על-ידי פישוט תבניות המספר הרשומות בשורה האחרונה של הטבלה, כי סכום הקוביות מארבעת הסוגים הוא אמנם המספר הכולל של קוביות (a^3).

ב. כמה חיתוכי סכין דרושים, בכל מקרה, לטבח שמיל כדי להפריד את הקוביות הקטנות? (שמיל אינו אוהב להתלכלך, ולכן אין הוא מזיז חלקים של הקוביה הגדולה ממקום למקום תוך כדי תהליך החיתוך).

ג. מה מידות העוגות הנותנות לאחר חיתוכן:

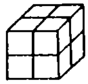
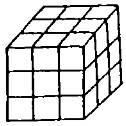
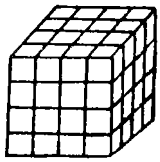
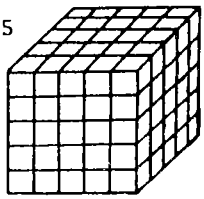
- 343 קוביות קטנות שאינן מכוסות קרם?
- 240 קוביות קטנות בעלות שתי פאות מכוסות קרם?
- 150 קוביות קטנות בעלות פאה אחת מכוסה קרם?

שים לב! שיקולים נבונים עדיפים על חישובים מסובכים.

ד. עבור על כל שלבי השאלה הנתונה, אם ידוע כי במקום טבילה, מניח הטבח שמיל את העוגה על מגש ומורח אותה בקרם רק על חמש הפאות הגלויות לעין.

הפתרון בעמוד הבא.

פתרון השאלה:

גודל העוגה	קוביות עם 3 פאות מכוסות קרם	קוביות עם 2 פאות מכוסות קרם	קוביות עם פאה אחת מכוסה קרם	קוביות שאינן כל מכוסות קרם	סך-הכל מספר קוביות
2×2×2 	8	0	0	0	8
3×3×3 	8	12	6	1	27
4×4×4 	8	24	24	8	64
5×5×5 	8	36	54	27	125
⋮ 10×10×10	8	$8\cdot 12$ 96	$64\cdot 6 =$ 384	$8^3 =$ 512	1,000
⋮ a×a×a	8	$12\cdot(a\cdot 2)$	$6\cdot(a-2)^2$	$(a-2)^3$	a^3

<u>בתחום המדע</u>

- בדיקת השערות.

אלה דוגמאות בלבד. הרשימה המלאה היא ארוכה כפליים.

בל נקבל את הרושם כי רק אנשים מקצועיים צריכים ידע בסטטיסטיקה. כולנו, באופן מודע או בלתי מודע, נחשפים לנתונים סטטיסטיים ומסתמכים על נתונים אלה בחיינו. כשמאזינים לחדשות ברדיו או בטלויזיה שומעים על ביטויים סטטיסטיים כגון: "ההכנסה <u>הממוצעת</u>", <u>"העשירון התחתון</u> או <u>העשירון העליון</u> של האוכלוסיה", "גודל המשפחה <u>הממוצעת</u>", המחיר <u>הממוצע</u> של דירות בשוק" וכדומה. מופיעות כתבות בעיתונים המביאות נתונים סטטיסטיים מסקרים ציבוריים וממחקרים מדעיים. לעיתים בכתבות אלו גם מציגים נתונים באמצעות גרף או לוח. קורא הבקיא בסטטיסטיקה בסיסית מתמצא ומבין כתבות כאלו ביתר קלות.

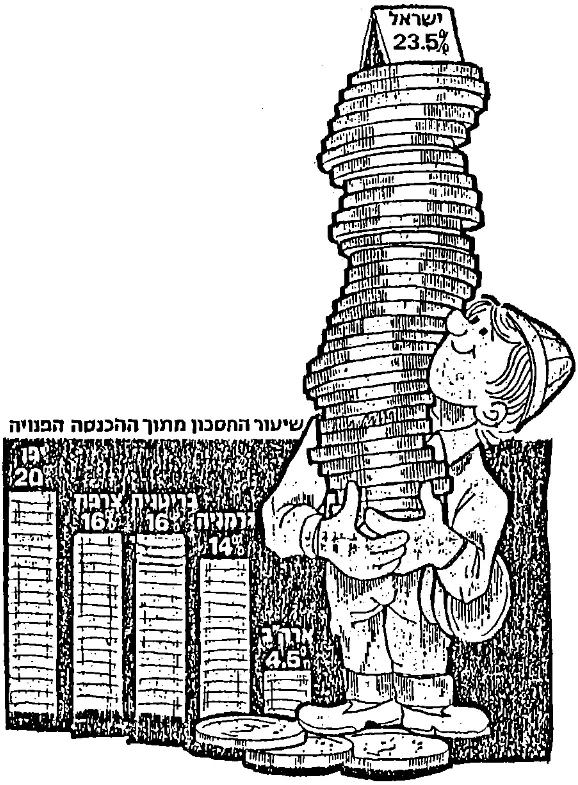
מעבר לנתונים הסטטיסטיים שאנחנו מקבלים מאמצעי התקשורת, אנחנו בעצמנו נוהגים להיות "סטטיסטיקאים קטנים". למשל, כשיש צורך לקנות מקרר חדש או מכונית חדשה, אנחנו רגילים לאסוף מידע על הדגמים השונים, מחיריהם וכו' לפני שמחליטים מה לקנות. דוגמא נוספת: כהורים אנו נוטים, למדוד את ההתפתחות הגופנית והשכלית של ילדינו בהשוואה לנורמות מסויימות. אם הנורמה אומרת שתינוק מתחיל ללכת בגיל שנה, הרינו הורים גאים בילד המקדים ומתחילים לדאוג מהילד המאחר.

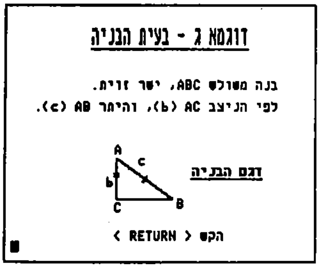
<u>ל ס י כ ו ם</u>

אין ספק שהיום ידיעה בסיסית בסטטיסטיקה יכולה לעזור לכל אחד לתפקד טוב יותר בעבודה, בבית וגם כאזרח. המודעות החברתית לחשיבות הנושא הביאה להגברת הלימוד של נושאים סטטיסטיים ברמות שונות במערכת החינוך. באם בתחילת המאה ה-20 רק אוניברסיטאות מעטות בעולם הציעו שיעורים בסטטיסטיקה, כיום בכל אוניברסיטה ומכללה מתקיימים שיעורים בסטטיסטיקה במחלקות רבות ושונות, החל ממתמטיקה, רפואה, ביולוגיה וחקלאות, עד פסיכולוגיה, סוציולוגיה, כלכלה וחינוך. לימוד הסטטיסטיקה מתחיל בעצם עוד לפני הכניסה למוסד להשכלה גבוהה.

בארץ מושגים סטטיסטיים, כמו הממוצע או שכיחות, מופיעים לראשונה בתכנית הלימודים של בית הספר היסודי ומטופחים ומורחבים בחטיבת הביניים. נושאים מתקדמים יותר נלמדים בחטיבה העליונה ונכללים בבחינת הבגרות במתמטיקה.

לימוד הסטטיסטיקה הוא בכל זאת נושא חדש בתכנית הלימודים, ולכן עדיין יש אנשים רבים החוששים ממנו. לאמיתו של הדבר, לימוד הסטטיסטיקה, ברמה המתבקשת לבן האדם הפשוט, איננו דורש ידע מעמיק במתמטיקה אלא ביישום מעשי של מושגים מוכרים מלימוד החשבון. בקיצור, רכישת ידע בסיסי בסטטיסטיקה הוא דבר חשוב וגם אפשרי לכל אחד.





בניות הנדסיות

מאת: נורית הדס, עמנואל קרמר
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

מ ב ו א

פתרון בעיות בניה בגיאומטריה דורש רמת הפשטה גבוהה יותר מנושאים אחרים הנלמדים במסגרת הגיאומטריה בביה"ס. הסיבה לכך היא, כנראה, שהתלמיד נדרש לפעול עם המושגים ולא להשתמש בהם. (Thompson ,1985). למשל, יש הבדל בין הידיעה שהמרחק בין שני ישרים מקבילים קבוע, לבין שימוש בידיעה זו כדי לבנות מקום גיאומטרי של נקודות הנמצאות במרחק קבוע מישר נתון.

בניות הנדסיות יכולות להחשב כמיקרו-עולם.
מיקרו-עולם, ניתן להגדרה כסביבה לימודית סגורה המורכבת מאוסף "אוביקטים" ומערכת של "אופרציות" הפועלת על האוביקטים וכן מערכת של חוקים השולטים באופרציות המבוצעות על האוביקטים האלה. (Groen and Kieran ,1983).

במיקרו-עולם של הבניות ההנדסיות, האוביקטים הם קטעים וזוית. האופרציות הן הבניות היסודיות ומערכת החוקים השלטת בעולם זה היא אוסף המשפטים של הגיאומטריה האוקלידית.

מיקרו-עולם מסוג זה, המבוסס על מספר קטן של אופרציות מתאים מאוד לעבודה עם מחשב והוא בעל פוטנציאל דידקטי (Dreyfus ,1984).

העובדה שהמחשב מגביל את הלומד לשימוש אך ורק באופרציות המותרות במיקרו-עולם היא יתרון גדול. יתרה מזאת, העובדה שהמחשב מבצע את הבניות היסודיות מאפשרת ללומד להתרכז בעיקר ולהתמקד באנליזה של הבעיה.

הלומדה המוצגת כאן מהווה מיקרו-עולם ללימוד הבניות ההנדסיות בהתאם לתוכנית הלימודים בחט"ב לרמה א'.

השלבים בפתרון בעית בניה

התהליך ה"רגיל" בפתרון של בעית בניה כולל מספר שלבים, כל אחד עם קשייו המיוחדים.

1. אנליזה: הלומד צריך לבצע אנליזה של הבעיה ולמצוא כיצד להפוך את הנתונים לסידרה של בניות יסודיות הדרושות לפתרון. זהו האתגר המרכזי של תהליך הפתרון והוא גם המעניין והמרתק ביותר.

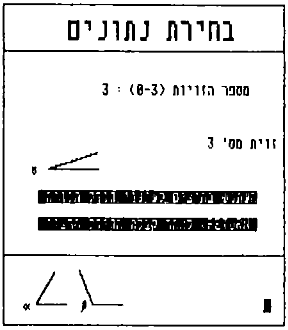
2. בחירת נתונים: אחרי ניתוח הבעיה, שנעשה בשלב הקודם, על הלומד לבחור נתונים מתאימים (קטעים וזוויות), תוך התחשבות במגבלות מתמטיות. למשל, אי אפשר לבנות משולש מכל שלושה קטעים נתונים: סכום של שתי צלעות חייב להיות גדול מהצלע השלישית.

3. בניה: בשלב זה, הלומד צריך להתמודד בבעיות הטכניות של שרטוט באמצעות מחוגה וסרגל בלבד. כמו כן עליו לחזור שוב ושוב על אותן בניות יסודיות (כגון חציית קטע, העלאת אנך וכו').

4. תיאור הבניה: על התלמיד להגיש בכתב תיאור מפורט של הבניה, שכן המוצר הסופי המשורטט אינו מספיק כדי לראות אם הבניה, אמנם, בוצעה על פי שלבים נכונים, ובהתאם ל"חוקי המשחק" הדדוקטיביים.

5. הוכחת הבניה : על התלמיד להיעזר במשפטים גיאומטריים כדי להוכיח שהבניה אומנם נכונה. מבחינות רבות זהו שלב משלים לשלב האנליזה של הבעיה (השלב הראשון), והוא מציב בפני הלומד אותם קשיים קוגניטיביים האופייניים להוכחה גיאומטרית באופן כללי.

הלומדה



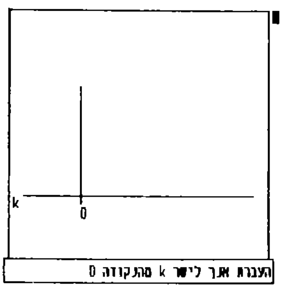
הלומדה שפותחה במכון מאפשרת ללומד לבחור מספר קטעים וזוויות המתאימים לנתוני הבעיה. את אורכי הקטעים הוא יכול לקבוע (ללא יחידות מידה) כמו כן את גודל הזווית (ללא יחידות מידה).

התלמיד מקבל בעית בניה המתאימה לפרק אותו הוא לומד. בעיות מתאימות ניתן למצוא בחוברת המלווה את הלומדה, או בספר לימוד אחר בהתאם להנחיות המורה. התוכנית מאפשרת ללומד לבחור רשימת פקודות (בניות יסודיות), התלמיד בוחר פקודה מהרשימה ומפעיל אותה על הנתונים (קטעים וזוית). תוך הפעלה של סידרת פקודות כאלה, מתבצעת הבניה על המסך.

בניות יסודיות

העתקת קטע (מנקודה על ישר)...
העתקת זוית (בנקודה על ישר)..
חציית קטע....................
חציית זוית......................
העברת מקביל לישר (בנקודה נתונה).
העברת אנך לישר
(בנקודה נתונה)..............

נמחיש זאת בדוגמא.



למשל, כאשר יש לבנות משולש לפי צלע, גובה לצלע, ואחת מהזויות הסמוכות לצלע. התלמיד נדרש, תוך ביצוע הבניה, לבנות אנך לישר k בנקודה D. כדי לבצע פקודה זו הוא מקיש PE (אנך), ואז מופיעה על המסך הפקודה: הקש את שם הישר.

התלמיד מקיש "k", ואז מופיעה השאלה "באיזו נקודה?" , והתלמיד מקיש "D".

הפקודה מבוצעת ותיאורה מופיע בתחתית המסך: "העברת אנך לישר q בנקודה D". במיקרו-עולם זה הבניות היסודיות הן הכלים בהם משתמשים לתהליך הדדוקטיבי של פתרון בעיות בניה מורכבות יותר.

ניתן לבצע בניות גם באמצעות "המשער הגאומטרי" , לומדה שפותחה על-ידי שוורץ וירושלמי. אלא שקיים הבדל במטרה ובמבנה: המיקרו-עולם שמובא כאן מרשה לתלמיד לבצע בניה דדוקטיבית על פי כללי המשחק של בניות גאומטריות בלבד, בעוד ש"המשער הגאומטרי" שם דגש על גילוי של משפטים גאומטריים באופן אינדוקטיבי.

דיון

נראה לנו שבנינו מערכת תיקון ובקרה הנשלטת על ידי התלמיד עצמו, במובן שאליו התכוונו Groen ו Kieran (P.372, P. 359 1983).

התיקון והבקרה עליו,מושגים על-ידי היזון חוזר ישיר מיידי שהתלמיד מקבל.

היזון חוזר זה יוצר קונפליקט המוביל לשיפור דרך הבניה בשלוש רמות קוגניטיביות המתוארות להלן:

1. כאשר תלמיד בונה בעזרת הלומדה, נוצר קונפליקט בין מה שהוא מצפה שיקרה לבין מה שמופיע על המצג. קונפליקט זה גורם לתלמיד לחשוב שנית, ובכך לשפר את יכולתו לבצע את האנליזה של פתרון הבעיה הגיאומטרית.

2. תוך עבודה בתוך המיקרו-עולם, התלמיד לומד את "כללי המשחק" של הבניות הגיאומטריות, שהם החוקים הדדוקטיביים של בניות בדרך הגיאומטרית האוקלידית.

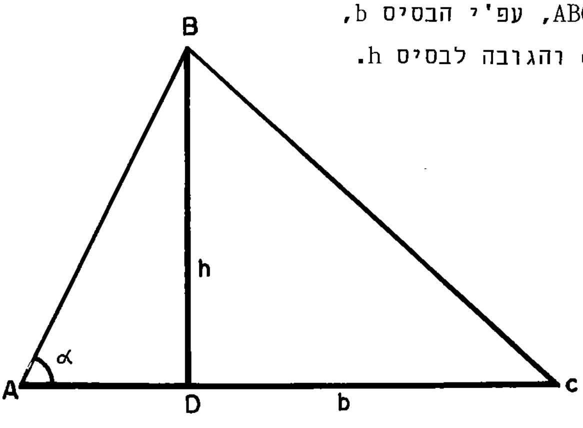
3. התלמיד לומד, במהלך העבודה, את דרך הניסוח הפורמלי המדויק של הפתרון.

לא ביצענו מחקר סטטיסטי רחב, אך ערכנו תצפיות על מספר תלמידים בכיתה י' שלמדו גיאומטריה אוקלידית אך לא עסקו בנושא בניות הנדסיות.

צפינו בכל אחד מהתלמידים בשעה שהוא נעזר במחשב כדי להתמודד עם חמש בעיות בניה.

השתדלנו להתמקד בצפיה בעיקר בסיטואציה של קונפליקט והתמודדות. נראה למשל, איך דני ורותי מתמודדים עם פתרון הבעיה שהוצגה קודם:

בנית משולש ABC, עפ'י הבסיס b,
זוית הבסיס α והגובה לבסיס h.

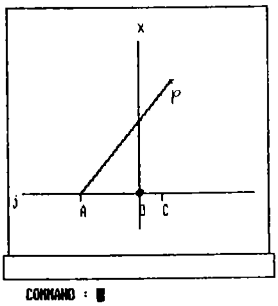


א. לא היתה בעיה לדני או רותי בבחירת הנתונים; שני קטעים וזוית. אך שניהם התחילו בפקודה CS (Copy Segment). כלומר, העתקת קטע. בתגובה לפקודה CS שואל המחשב :

- על איזה ישר?

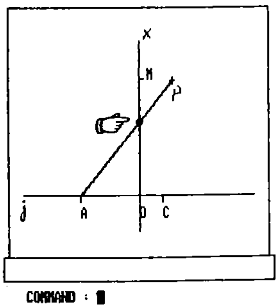
- באיזו נקודה?

מיד בשלב זה מגלה התלמיד את השגיאה שלו - עליו להתחיל בשרטוט ישר ונקודה עליו.
(שגיאה זו היא ברמה של שימוש נכון על פי כללי המשחק).



ב. לאחר העתקת הקטע והזוית בחר דני נקודה שרירותית D על AC, והעביר ממנה אנך ל AC. עתה ביקש דני להעתיק את הקטע h על האנך x .

בנקודה זו שאלנו: ולאן לדעתך יגיע קצה הקטע h?

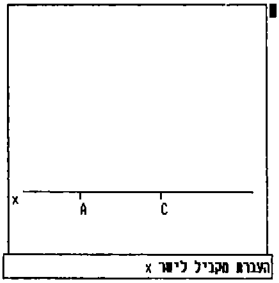


דני מצביע בבטחון על נקודת החיתוך של p ו x .

דני הופתע כשראה שלאחר ביצוע הפקודה, נמצאה הנקודה M מעל הישר p.

דני התלבט מה הלאה, והחליט: "צריך להזיז את x!".
חיפש ברשימת הפקודות, אך לא הצליח למצוא ברשימה פקודה להזזת קטע או ישר (כמובן, שכן זו איננה בניה המוגדרת כיסודית). בסופו של תהליך החקירה הזה, הגיע דן למסקנה שעליו להעביר מקביל ל AC דרך M.

כאן אנו נוכחים בהתמודדות עם בעיה, תוך קונפליקט ומציאת פתרון ברמה של אנליזה.



ג. לאחר העתקת AC על ישר,
החליטה רותי, בניגוד לדן,
לבנות מקביל ל AC במרחק h.
לכן הקישה PA (Parralel).

תגובות המחשב, הדורש נקודה
מחוץ לישר שדרכה יעבור המקביל,
הבהירו לה שהעברת מקביל לישר
במרחק נתון - אינה בניה יסודית! לאחר חיפוש ברשימת הפקודות היא הגיעה למסקנה (הנכונה) שדרושות שלוש בניות יסודיות (העלאת אנך, הקצאת המרחק הנתון על האנך והעברת מקביל), בכדי להעביר מקביל לישר במרחק נתון ממנו.

כאן אנו רואים שיפור ברמה של לימוד כללי המשחק הדדוקטיביים.

ערכת הלימוד: לדיסקט הלומדה, המותאמת בינתיים למחשבי Apple II+ ותואמיו, מצורפת חוברת עבודה לתלמיד. חוברת זו, יחד עם הדיסקט, מהוות ערכת לימוד המאפשרת לימוד הנושא גם באופן עצמאי ללא הדרכה צמודה של המורה.

בניות הנדסיות אינן מופיעות יותר בתכנית הלימודית המקובלת בגיאומטריה. אולי משום שניתן לוותר על נושא סגור כזה, הדורש זמן וכושר חשיבה, מבלי לפגוע במהלך הלימוד.

עם זאת, זהו נושא מרתק ומעניין המציג אתגרים יפים בפני התלמיד הטוב.

את נושא הבניות אפשר לשלב במהלך לימוד הגיאומטריה בשני אופנים עיקריים. האחד, להפנות רק את התלמידים הטובים לערכת הלימוד כחומר להעשרה אינדיבידואלית. התוכנה מכילה דוגמאות פתורות המדריכות את הלומד המתחיל להשתמש בה. כמו כן החוברת מכילה בעיות מדורגות עם הדרכה לפתרון המאפשרות ללומד המתחיל לבקר את מהלכיו.

הדרך השניה לשלב את ערכת הלימוד במהלך לימוד הנושא (משולשים, מרובעים, יחס שטחים ותלס, מעגל חוסם וחסום). המורה יכול לתת לתלמידים שונים תרגילים שונים בהתאם לרמתם. זאת משום שהתרגילים מדורגים.

במקרה כזה מומלץ שהשיעורים הראשונים ייערכו במסגרת ההוראה בכיתה, ויעסקו בבניות היסודיות ובהדרכה לשימוש בתוכנה.

פרק המלמד כיצד לבצע את הבניות היסודיות באמצעות סרגל ומחוגה מופיע כנספח בחוברת. (בניות אלה הן פקודות היסוד של התוכנה).

התוכנה מאפשרת ביקורת למורה באמצעות שמירת מהלך הבניה על התקליטון, והצגתה מאוחר יותר באמצעות הדפסת תיאור הבניה ושרטוט הבניה.

<u>מסקנות:</u>

אנו מצפים שהתוכנה תהווה סביבה לימודית מתקנת בשלוש הרמות שצויינו:

1. רמת האנליזה: אנליזה מוטעית של הפתרון מובילה לקונפליקט בין ציפיות התלמיד לתמונה שעל המסך. קונפליקט זה מחייב אותו לחזור לשלב ניתוח הבעיה ולתקן את התכנית: בפתרון ללא מחשב התלמיד "מצליח" בדרך כלל לבצע את תוכניתו המוטעית מבלי לחוש בטעות.

למשל, אם נתייחס לפתרון של דני בדוגמא הנ"ל, תלמיד עלול לבחור את הנקודה, תוך התחשבות בנתונים המשורטטים מולו ואילוץ השרטוט כך שיתאים למה שציפה. (ואז קצה האנך "נופל" על שוק הזווית).

הדיוק בו מבצע המחשב את השרטוט, מונע מהתלמיד לחשוב שהניתוח ותכנית הבניה נכונות ורק השרטוט לקוי.

2. ברמת היישום של כללי בניה גיאומטרית:

מגבלת המחשב המבצע רק על פי הפקודות המתוכנתות לתוכו, היא במקרה זה יתרון. בזכות תכונה זו נאלץ התלמיד להשתמש אך ורק בבניות המותרות על פי הגיאומטריה האוקלידית. (למשל, אי אפשר לבצע הזזה של קטע כבניה יסודית אלא רק בצירוף של בניות.

3. ברמת הניסוח הפורמלי: בכל שלב של ביצוע הבניה התלמיד נשאל על ידי המחשב שאלות המנוסחות בדרך הפורמלית המדוייקת. הניסוח הפורמלי המדוייק של כל שלב, מתקבל בתחתית המסך כתוצאה של הדו-שיח עם המחשב.

בסיכום, ערכה זו מאפשרת לתלמידים להתמקד בעיקר ולהשקיע יותר אנרגיה בשלב של ניתוח הבעיה ופיתרונה, כאשר האנליזה מתבצעת תוך כדי הפתרון (ולאו דווקא מראש). המחשב מאפשר עבודה בשיטה של ניסוי וטעיה, ומשחרר את התלמיד מהקשיים הטכניים של בניה תוך ביצוע חוזר של הבניות היסודיות.

ליוונים הקדמונים לא היתה תוכנת מחשב לביצוע בניות הנדסיות. אך גם הם הסתפקו באנליזה של הבעיה ולא ביצעו אותה הלכה למעשה.

אם הם לא ביצעו את הבניות - מדוע נדרוש זאת מתלמידינו?!

זה רעיון

פתיתי אלגברה

מאת: גלי ארגמן
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

לאחרונה פיתחנו סידרה של 15 דפי עבודה **"פתיתי אלגברה"** המיועדים להעמקת הידע והחשיבה של התלמידים בטכניקה אלגברית. הסידרה כוללת את כל הנושאים הנלמדים בחטיבת הביניים.

<u>מטרות עיקריות</u>

1. מניעת שכחה של נושאים חיוניים בזמן שמלמדים חומר אחר.
2. טיפול בשגיאות אופייניות.
3. פיתוח חשיבה מתמטית.

<u>עקרונות במבנה הסדרה</u>

1. כל דף מכיל בערך 10 נושאים שונים, שבכל אחד 2 - 4 תרגילים.
2. בסוף כל דף יש תרגיל רשות - "נסה את כוחך".
3. דרגת קושי, בדרך כלל עולה, גם בתוך הדף עצמו (לקראת הסוף), וגם מדף לדף.
4. הדפים מותאמים לתוכנית הלימודים של חטיבת הביניים בכיתה ח'. זאת אומרת - הדפים הראשונים מתבססים על החומר של כיתה ז', ואחר כך משתלבים בהם הנושאים של כתה ח'.
5. הנושאים חוזרים על עצמם במשך הסידרה לצורך העלאת דרגת הקושי, או ההתפתחות של הנושא.

<u>הצעות לשימוש בסידרה</u>

א) כדף דו שבועי בכתה ח' החל מהחגים.

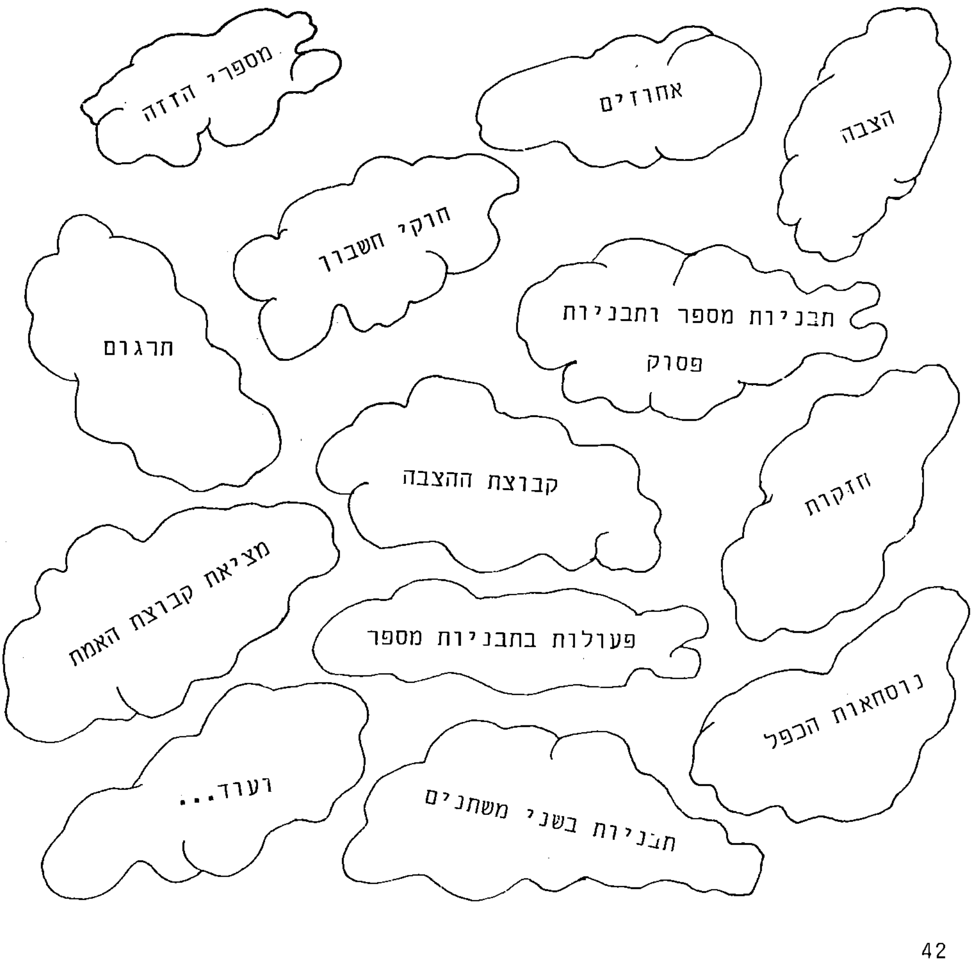
i) מקדישים 10 - 15 דקות בזמן חלוקת הדף להערות חשובות ותזכורות למיניהן.

ii) בודקים כל דף או חלקים ממנו בצורה יסודית.

ב) כדף שבועי מתחילת כתה ט' לצורך טיפול בידע קודם.

אנחנו מקורים שהסידרה תעזור לכם להתגבר על חלק מהבעיות ב"טכניקה אלגברית", וגם תוסיף גיוון בטכניקה שמשעממת בדרך כלל.

נשמח לקבל מכם הערות, תגובות, ורעיונות חדשים בתחום זה.



להלן מספר פתיחים לדוגמא:

3

פתיחי אלגברה - 3

1. כתוב סימן > , < או =, כך שיתקבל פסוק אמת לכל מספר שתציב

א) $x + 3 \_\_\_ x + 1$

ב) $a + b \_\_\_ b + a$

ג) $m + 1 \_\_\_ m - 1$

2. חשב:

א) $(\frac{2}{3})^2 =$

ב) $\frac{2^2}{3} =$

ג) $-\frac{2^2}{3} =$

ד) $(-\frac{2}{3})^2 =$

ה) $-(\frac{2}{3})^2 =$

3. כתוב פסוקים:

א) 20 גדול ב 4 מ 16. ____________________

ב) 5 קטן פי 3 מ 15. ____________________

4. רשום תבנית מספר מתאימה:

א) לריבוע של הפרש המספרים a ו b

ב) להפרש הריבועים של המספרים a ו b

5. מה תציב במקום x כך שיתקבל פסוק אמת?

א) $2x + 1 = 10$

ב) $4 - x = 7$

ג) $\frac{x + 3}{2} = 6$

ד) $\frac{x}{2} + 1 > 2$

6. הצב $y = 3$ $x = 2$ וחשב:

א) $4(x^2 + y^2) =$

ב) $4(x + y)^2 =$

ג) $[4(x + y)]^2 =$

ד) $4 + (x + y)^2 =$

7. כתוב "נכון" או "לא נכון" :

א) $x \cdot 7 + x = 8x$

ב) $m + m \cdot m = m + m^2$

ג) $2 + 7 \cdot b = 9b$

ד) $a - a \cdot 2 = -a$

8. כתוב שני מספרים.

א) הקטנים מ (-3) ______________________________

ב) בין 1.5 ל 1.6 ______________________________

9. צמצם אם אפשר:

א) $\frac{12a}{18b} =$

ב) $\frac{ax}{ay} =$

ג) $\frac{ax}{a+2} =$

ד) $\frac{2x^2y^2}{6xy^4} =$

10. כתוב את קבוצת ההצבה:

א) $\frac{m-2}{m+3}$ ב) $\frac{2}{2a-6}$

ג) $\frac{3x}{4}$ ד) $\frac{5}{(y-2)(y+4)}$

11. מצא את קבוצת האמת:

א) $3(x-4)+3(x-1)-5(x-3)=7$

ב) $20-(5-x)=3(x+5)-3x$

נסה את כוחך

רשום מספר במסגרת כך שתקבל פתרון שלם עבור a

$\frac{3}{4}a + 1 = \boxed{}$

9

1. נתונים שלושה מספרים: המספר הראשון 4, השני - 5, והמספר השלישי מיוצג ע"י a. כתוב תבניות מספר מתאימות ל :

א) המכפלה של המספר הראשון בסכום המספרים השני והשלישי.

ב) המכפלה של המספר השני בהפרש בין המספרים השלישי והראשון.

ג) מנת החילוק בין סכום שני המספרים הראשונים למספר השלישי.

2. צמצם אם אפשר:

א) $\dfrac{2a^2 + 4a - 8}{2} =$

ב) $\dfrac{6x^3 - 12x^2}{6x} =$

ג) $\dfrac{4(x - y) - a(x - y)}{x - y} =$

ד) $\dfrac{x^2 + 2x + 8}{4} =$

3. מצא את קבוצת האמת:

א) $6x + (2x^2 - 6x):2x = 11$

ב) $\dfrac{5x + 1}{2} - 3x \geq 2$

ג) $|x| + 5 = 1$

4. סמן את הטענה הנכונה בכל זוג הטענות:

א) אם $x > 9$ אז $x > 1$

אם $x > 1$ אז $x > 9$

ב) אם $y < 2$ אז $y < -1$

אם $y < -1$ אז $y < 2$

ג) אם $a < -6$ אז $a < -3$

אם $a < -3$ אז $a < -6$

ד) אם $a \geq 4$ אז $a = 4$

אם $a = 4$ אז $a \geq 4$

5. השלם:

א) $2ab : \boxed{} = 2a$

ב) $b^2 + \boxed{} = b$

ג) $b^{\boxed{}} = \frac{1}{b}$

6. רשום $<$, $>$, $\geq$, $\leq$ כך שיתקבל פסוק אמת לכל הצבה במקום המשתנה.

א) $x^2 + 1$ ______ 0

ב) $x^2 + 1$ ______ 1

ג) $-(x + 1)^2$ ______ 0

ד) $-x^2 + 1$ ______ 1

7. חשב:

א) $-(-2)^3 =$

ב) $(-0.2)^{-2} =$

ג) $(-1)\cdot(-3)^2 =$

8. פשט:

א) $2c^2 - 3\frac{1}{2}c^2 - 2\frac{1}{2}c^2 =$

ב) $2a^2-a(2a-5b) -b(5a - b) =$

ג) $(3+x)\cdot(-2) + 4(3x + 1) =$

9. מהי קבוצת ההצבה:

א) $\dfrac{1}{3 + \frac{1}{x}}$

ב) $\dfrac{m}{1 - 5m}$

ג) $\dfrac{a}{|8 - a|}$

ד) $\dfrac{b^2 - 4}{2}$

נסה את כוחך

שליש של מספר מסויים שווה ל $\frac{1}{2}$

מצא את המספר.

15

<u>פתיתי אלגברה - 15</u>

1) השלם:

$-5 + \boxed{} = 3.5$

$-5 - \boxed{} = 3.5$

$-5 \cdot \boxed{} = 3.5$

$-5 : \boxed{} = 3.5$

2) מצא את קבוצת האמת:

$$\frac{-x-7x}{2x} = -4$$

$$\frac{-x-7x}{2x} = -4x$$

$$\frac{-x-7x}{2x} = 4$$

3) פרק לגורמים

$x^2 - xy + 2x - 2y =$

$4a^2 - 4ax - 3x + 3a =$

$ax^2 - bx^2 + ax - bx - a + b =$

4) כתוב "נכון" או "לא נכון" לכל ערך של המשתנה

$2x - (x + 1) = x - 1$

$4x - 7 = -(4x - 7)$

$a^3 - a\cdot 2a = 0$

5) מצא את קבוצת האמת:

$$\frac{x+3}{2} - \frac{y-2}{3} = 2$$

$$\frac{x-1}{4} + \frac{y+1}{3} = 4$$

6) פשט:

$(m + 4)^2 + 4(m + 1)^2 =$

$5(3 - 5a)^2 - 5(3a - 7)(3a + 7) =$

$(m + 1)^2 + 3(m - 1)^2 - 5(m + 1)(m - 1) =$

7) מצא את קבוצת האמת:

$|x - 4| \geq 7$

$|5 - 2x| > 1$

$|x + 2| > |x|$

8) האב בן 37 שנה ובנו בן 16. בעוד כמה שנים יהיה גיל האב גדול פעמיים מגיל הבן?

9) נתון a מספר שלם. כתוב "נכון" או "לא נכון".

א) $a > 0$ לכל a

ב) $a + 2$ זוגי

ג) $\frac{a(a + 1)}{2}$ שלם

ד) $2a + 1$ אי זוגי

ה) $3a$ מתחלק ב 3

ו) $3a > a$

ז) $2a - 1 < 2a$

נסה את כוחך

פרסומות

כל המחירים בהנחה של 30%.
חסוך 20 ש"ח על כל כסא.
מה היה מחירו המקורי של הכסא.

תגובות קוראים

בעקבות המאמר "על משולשים הירוניים":

למר אביגדור רוזנטולר, מדריך בחוג למתמטיקה ביחידה לפעולות נוער במכון ויצמן למדע, התעוררה השאלה הבאה: "המשולש (3,4,5) הוא משולש הירוני שצלעותיו שלושה מספרים עוקבים. מצא משולשים אחרים מאותו סוג.

פתרון:

נניח שהתבניות $x + 1$, x, $x - 1$, כאשר $x \in N$, מייצגות את הצלעות של משולש ישר זוית הירוני מהסוג הנ"ל.

שטח המשולש יהיה:

$$S = \sqrt{\frac{3}{16}\,x^2(x^2 - 4)}$$

כיוון ש $S \in N$ חייב להתקיים ש x זוגי, כלומר $x = 2k$ $(k \in N)$,

לכן אפשר להציג את השטח בצורה:

$$S = \sqrt{3k^2(k^2 - 1)} \quad (k \in N - \{1\}).$$

מכאן (כיוון ש $S \in N$) נקבל $k^2 - 1 = 3q^2$, כאשר $q \in N$.

לכן $x = \frac{k^2 - 1}{3}$ חייב לקיים שני תנאים: i) יהיה מספר טבעי.

ii) יהיה ריבוע.

לפיכך, לכל k נחשב את ערך התבנית $\frac{k^2 - 1}{3}$.

א) אם k הוא כפולה של 3 כלומר: $k = 3m$, ומכאן $k^2 - 1$ אינו כפולה של 3 ולכן $\frac{k^2 - 1}{3}$ אינו מספר טבעי. לפיכך נחשב את ערך התבנית $\frac{k^2 - 1}{3}$ עבור $k + 1$ ונקבל:

$$x' = \frac{(k + 1)^2 - 1}{3} = \frac{k^2 + 2k}{3}$$

$$= \frac{k(k + 2)}{3}$$

אם עדיין מתקבל $\frac{k(k + 2)}{3}$ אינו מספר שלם, ממשיכים לחשב עבור $k+ 2$, עד שמתקבל מספר טבעי.

ב) אם k אינו כפולה של 3, כלומר: $k = 3m \pm 1$, ומכאן:

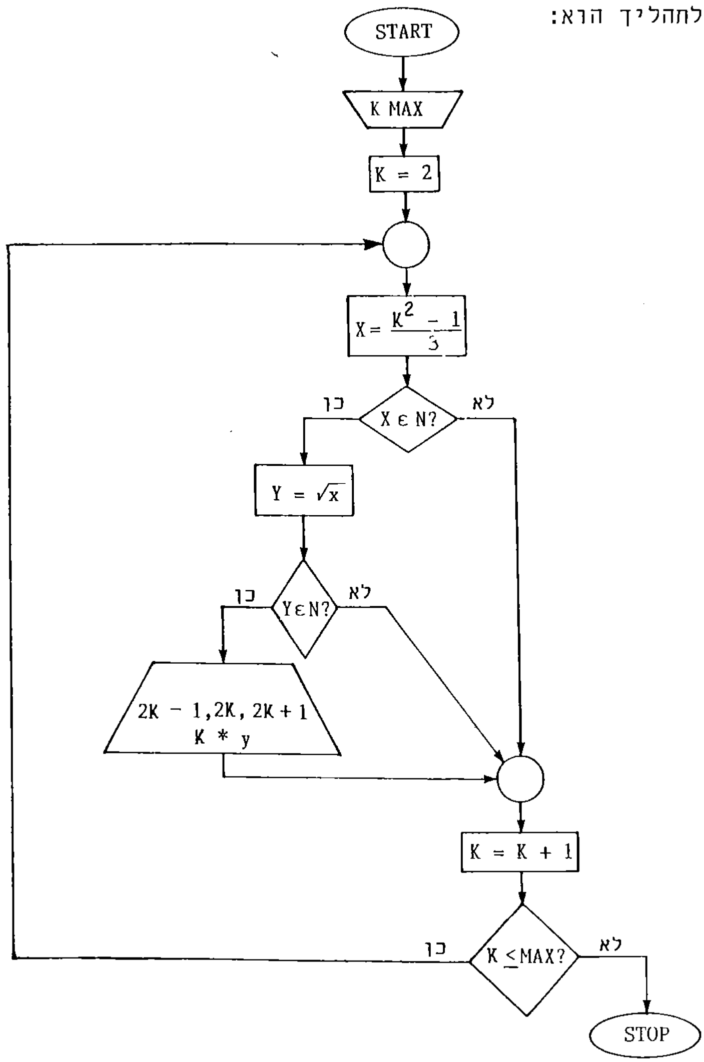
$$\frac{k^2 - 1}{3} = \frac{9m^2 \pm 6m}{3} = \text{מספר טבעי}$$

כעת x מספר טבעי. נחשב $y = \sqrt{x}$.

אם y הוא מספר טבעי, הרי צלעות המשולש הן: $2k+1$, $2k$, $2k - 1$.
(עבור אותו k שממנו התקבל x טבעי ו y טבעי).

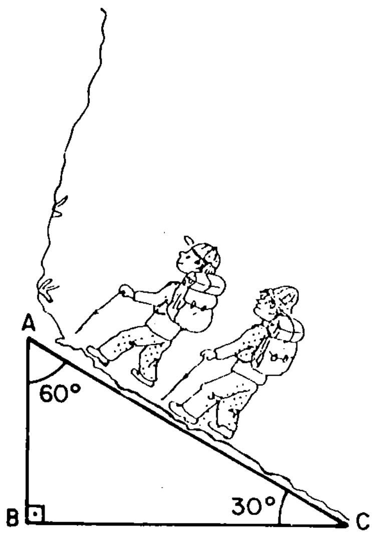
אם y אינו מספר טבעי, נחשב את x עבור $k + 1$, והתהליך חוזר.

האלגוריתם לתהליך הוא:



חישוב עבור $k = 2,3,\ldots,99$, נותן את התוצאות הבאות:

השטח	הצלעות	k
6	3, 4, 5	2
84	13, 14, 15	7
1170	51, 52, 53	26
16296	193, 194, 195	97



חומר חדש

דפי הדרכה למורה

יצאו לאור דפי הדרכה למורה ל **פונקציה קוית ברמה ב'** (פרק ב' בספר "פונקציות").

דפים אלה הם חלק מהמדריך למורה לספר כולו.

דפים דומים לפרקים ג' ו ד' יצאו לאור בחודש אדר.

לומדות

ניתן לרכוש את הלומדות הבאות גם עבור מחשבי IBM - PC (לא תואמים):

שני צדדים לאפס
קדימה אל הקודקודים
נקודות וכללים
קדימה אל התבנית

שים לב להודעה על אופן הרכישה שבעמוד 57.

יצאו לאור לומדות חדשות

התבנית מכה שנית

הלומדה עוסקת בתוצאות הצבה בתבניות מספר והפרדת רשימת מספרים לשתי קבוצות - קבוצה הנותנת תוצאות חיוביות על-ידי הצבה בתבנית וקבוצה הנותנת תוצאות שליליות.

מטרת הלומדה, לשלב תוך כדי תרגול והצבה בתבניות מספר, שיקולים לוגיים שיעזרו להבנת התהליכים הקשורים במציאת קבוצות אמת של תבניות פסוק.

התבניות המופיעות הן מדרגות קושי שונות וגם המשימות המוצגות בפני המשתמש דורשות רמות שונות של שיקולים. הלומדה ערוכה כך שהתלמיד עובר בהדרגה מדרגת קושי אחת לשניה. הנושא מתפתח בשלבים וזורע נבטים להמשך הלימוד בצורת הכללות, הבנה וניתוח.

שים לב להודעה על אופן הרכישה שבעמוד 57.

בניות הנדסיות

הלומדה עוסקת בבניות הנדסיות וכוללת דיסקט וחוברת לתלמיד.
מטרת הלומדה ללמד את "חוקי המשחק" המהוורים למעשה את עולם הבניות ההנדסיות.

הבניות ההנדסיות:

הבניות ההנדסיות הן מיקרו עולם מתימטי שבו הפעולות המותרות הן "הבניות היסודיות" בלבד (העתקת קטע, העתקת זוית, חציית קטע וכו').
מאחר שהמחשב "יודע" לבצע רק פקודות יסודיות אלה ניתן ללמוד את הנושא תוך עבודה ליד המחשב עם הדרכה מתאימה בחוברת.

ראה מאמר על הלומדה בעמודים 40 - 33.

__שים לב__ להודעה על אופן הרכישה שבעמוד 57.

הודעות

★★

מכון ויצמן למדע
המחלקה להוראת המדעים

מתמטיקה במחשב

שים לב!

החל מה 1.2.88 הרכישה של הלומדות וההוברות לא תיעשה דרך מכון ויצמן, אלא באמצעות:

חברת "רמות" ע"י אוניברסיטת תל-אביב,

רח' האוניברסיטה 32

ת.ד. 39296

תל-אביב - 61392

טלפונים: 426465, 429419, 03-420114

להלן פירוט הלומדות:

סוג המחשב / שם הלומדה	APPLE II	COMMODORE רשת	COMMODORE 1541	IBM
1) שני צדדים לאפס	+	+	+	+*
2) קדימה אל הקודקודים	+	+	+	+*
3) נקודות וכללים	+	+	+	+*
4) קדימה אל התבניות	+	+	+	+*
5) השלם לשלם	+	+	+	
6) שיקבוב	+			
7) קדימה אל האחוזים	+	+	+	
8) מירב מעורב	+	+	+	
9) בניות הנדסיות	+			
10) התבנית מכה שנית	+			

* לא פועל על תואמים.

חבילת לומדה כוללת תקליטון, חומר למורה וחומר לתלמיד.
החומר למורה כולל הדרכה למשתמש, הנחיות לשילוב הלומדה בהוראה ודפי עבודה לתלמיד (הלומדה "בניות הנדסיות", כוללת רק חומר לתלמיד, אשר נועד לשמש גם את המורה).

ניתן לרכוש לכל לומדה בנפרד חומר למורה, וכן חוברות של דפי עבודה לתלמיד.

★★

לכבוד
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע
רחובות 76100   מנוי

ברצוני להיות מנוי על מסרים כרך ב'.

המחיר למנוי עבור כרך ב' - 18 ש"ח

מחיר חוברת מס' 3 בכרך א' - 7.5 ש"ח

רצ"ב המחאה על סך _____ש"ח לפקודת מכון ויצמן למדע.

עבור: ☐ מנוי

☐ חוברת א'-3. כמות _______

שם המזמין: ______________________________

כתובת: ______________________________

ת.ז.: ____________ טלפון: ______________

שם המוסד וכתובתו: ______________________________

לכבוד
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע
רחובות 76100   מנוי

ברצוני להיות מנוי על מסרים כרך ב'.

המחיר למנוי עבור כרך ב' - 18 ש"ח

מחיר חוברת מס' 3 בכרך א' - 7.5 ש"ח

רצ"ב המחאה על סך _____ש"ח לפקודת מכון ויצמן למדע.

עבור: ☐ מנוי

☐ חוברת א'-3. כמות _______

שם המזמין: ______________________________

כתובת: ______________________________

ת.ז.: ____________ טלפון: ______________

שם המוסד וכתובתו: ______________________________