ט'י'פ.

מתימחשב

# פונקציות

## הפונקציה הריבועית ועוד

חלק ד

מהדורת פיתוח

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

גאיפ.

# פונקציות

## הפונקציה הריבועית ועוד

**מהדורת פיתוח**


המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

יוצא לאור במסגרת
המרכז הישראלי להוראת המדעים ע"ש עמוס דה-שליט
מיסודם של
משרד החינוך והתרבות, האוניברסיטה העברית בירושלים ומכון ויצמן למדע, רחובות

.פ.ו.ג

תודתנו נתונה למורי ותלמידי כיתות ט' (תשנ"ד, תשנ"ה)
באולפנית בני-עקיבא ת"א, בבית-הספר האזורי בגבעת
ברנר ובבית-הספר לטבע, ת"א, על שיתוף הפעולה והנכונות
שגילו כאשר למדו מגירסות הניסוי.

דרכי הלימוד וההוראה שגובשו בכיתות אלה הן מרכיב יסודי
בפרקי פונקציות מתומחשב.

חיברו:

***צפורה ~~רזניק~~***
***רנה הרשקוביץ***

- אילה
אלוג רוסו

- רנה הרשקוביץ

עזרו:

***בתיה עמית***
***אלכס פרידלנדר***
***מיכל טבח***

ציפי רזניק
מיכל טבח
רונה ששון

ייעוץ:

***טומי דרייפוס***
***ברוך שוורץ***

?

עריכה לשונית:

***נגה ואן-דורמולן - אברהמי***

?

הדפיסה וערכה במחשב:

***יפית לוי***

גרפיקה ממוחשבת (שרטוטים):

***חגית עפרוני***
***חנה וגה***

עיצוב והפקה:

***אגי (רחל) בוקשפן***




נדפס בישראל תשנ"ו - 1996
הרצות פילמים - גרפאור בע"מ
דפוס מאירי בע"מ

**אל התלמידים,**

בסדרת החוברות **מתימחשב - פונקציות** תעסקו במושג הפונקציה שהוא אחד המושגים היסודיים במתמטיקה ובמדעים.
החומר מהווה איפוא בסיס להמשך לימודי המתמטיקה והמדעים בחטיבה העליונה.

ברוב המקרים תגלו את התכונות השונות של פונקציות וכן דוגמאות רבות ומגוונות של פונקציות, תוך כדי **עבודת צוותים בתהליכי חקירה ופתרון של סיטואציות בעיה שהיקפן רחב.**

תגלו כי השימוש במחשב או במחשבון הגרפי, שהוא מרכיב חשוב ב**מתימחשב - פונקציות**, מגביר את יכולתכם וגם את עצמאותכם בתהליכי החקירה והפתרון של הסיטואציות השונות.

תוכלו לראות כי רוב החומר בכל יחידה נמצא כבר בפעילויות הראשונות בה. הפעילויות הנוספות בכל יחידה מהוות לכן מאגר לחזרה ולהעמקה נוספת.

רנה הרשקוביץ

ראש פרוייקט מתימחשב

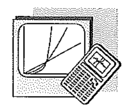
# ביאור סמלים

תחילת יחידה לימוד מצויינת על-ידי מספר. לדוגמא 3

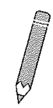
יחידת לימוד כוללת:

פעילות אחת או שתיים מרכזיות **המכילות את כל חומר הלימוד של היחידה.**

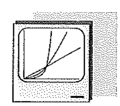
## סמלים בתוך הפעילות:



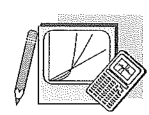
פעילות לעבודה עם מחשב או עם מחשבון גרפי.



פעילות מומלצת לעבודה ללא מחשב או מחשבון גרפי.

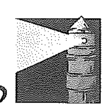


פעילות למחשב בלבד.



פעילות מתאימה לעבודה עם כלי טכנולוגי או בלעדיו.

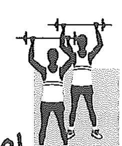
ינשוף המסכם ומזכיר נשכחות.



הארות

קשיים צפויים בפעילות? המגדלור מאיר כיוון.

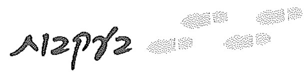
פעילות או חלק מפעילות לרמה גבוהה.



נסו את כוחכם

אתגר נוסף הקשור לפעילות, לתלמידים שסיימו אותה.

## סמלים בתוך היחידה:




דיון וגיבוש של הנושאים המתמטיים בפעילות.

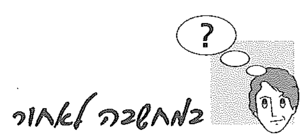

לבחירה בלבד.


משימות קצרות יחסית, חלקן קשורות לפעילויות הרחבות. המשימות מתאימות לעבודת בית ואינן מחייבות שימוש בכלי טכנולוגי.

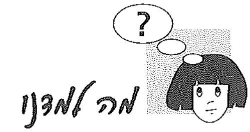
סיכום ביניים בחרוזים.


פיתוח מיומנויות מתמטיות.

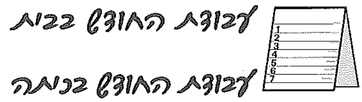

קריאת חומר מתמטי המלווה בשאלות מנחות ובשאלות הבודקות את הבנת הקריאה, ויישום החומר הנלמד בה.




הזדמנות לחשיבה מחדש על מושגים ותהליכים שעלו בפעילויות.




סיכום קצר של הנלמד ביחידה.




חיבור דף פעילות תוך שימוש בסל המושגים שנלמדו לאחרונה.

פעילות פתוחה.

## פרק ד

# הפונקציה הריבועית ועוד

1. הזזות ושיקופים
2. על המשפחה $y = m(x-p)^2 + k$
3. על המשפחה $y = ax^2 + bx + c$
4. נקודות אפס
5. קצת מפה וקצת משם

# 1. הזזות ושיקופים

## כרטיס ביקור

**שם:** פונקציה ריבועית

**תבנית:** $f(x) = x^2$

**במחשב:**

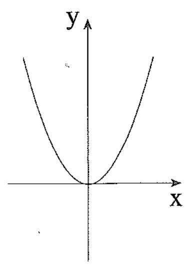
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| y | = | x | ^ | 2 |

**במחשבון גרפי:**

| | | |
|---|---|---|
| $y_1 =$ | x I T | $x^2$ |

**שם הגרף:** פרבולה

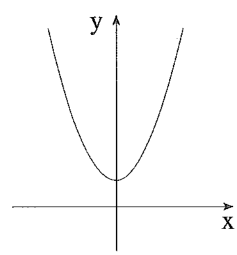
**גרף**



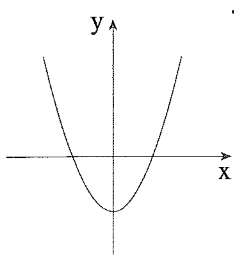

רִשמו שלוש תכונות לפונקציה $f(x) = x^2$

1. שרטטו במחשב גרפים מן הסוג הבא:

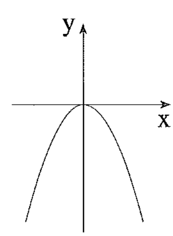
א.



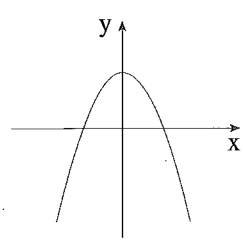

ב.




ג.

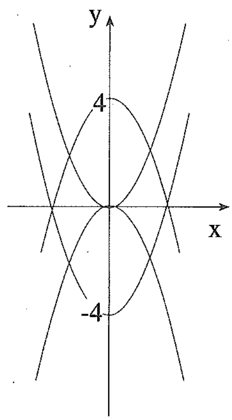



ד.




אילו מתכונות הגרף של הפונקציה $f(x) = x^2$ נשמרות בכל הגרפים האלה?

2. שרטטו את הגרפים הבאים במחשב.



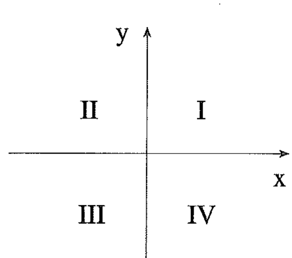

3. שרטטו במחשב את גרף הפונקציה $y = (x - 3)^2$.
היכן יש לפונקציה ציר סימטריה? התוכלו להסביר מדוע?

4. נסו לשרטט פונקציה כזו שציר הסימטריה שלה הוא $x = -2$.
אם לא הצלחתם, שרטטו את הגרפים של הפונקציות הבאות:

א. $y = x^2$ ב. $y = (x - 5)^2$ ג. $y = [(x - (-3)]^2$

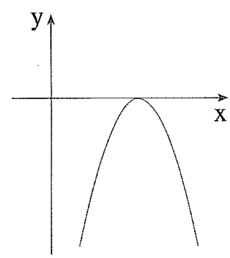
ד. $y = (x + 6)^2$

5. הזיזו את השרטוט מתרגיל 2 כך שרובו ייראה ברביעים הראשון והרביעי.

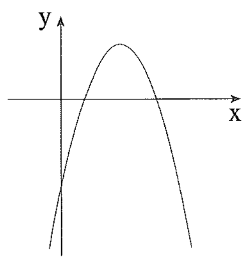


6. נסו לשרטט במחשב גרפים מן הסוג הבא. אם הצלחתם, רשמו את תבניותיהם.

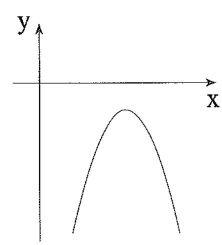
א.



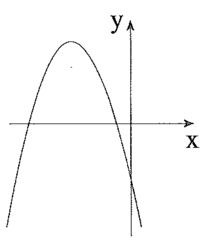

ב.




ג.




ד.




7. שרטטו במחברת סקיצות של גרפים של הפונקציות הבאות:

$$y = (x + 2)^2 + 3$$

$$y = -(x - 5)^2 - 1$$

בדקו במחשב.

אם סיימתם, נסו את כוחכם בעמוד 17 תרגיל 1.

## $y = x^2$

במכירה פומבית של דברים משונים,
הפרבולה $y = x^2$ עומדת למכירה.
״מה תכונותיה״? שואלים הקונים,
עונה הכרוז: ״מיד אקרא״.

״בתחילה היא **יורדת**, ואחר היא **עולה**,
ופרט לנקודה אחת, היא **חיובית** כולה.
אבל, בנקודה זו היא **אפס** מושלם,
בתנאי שאינה מטיילת בעולם.

נקודה זו אצלה יחידה,
ובה נמצא קודקודה.
לכן, אולי יש לה תכונה מאכזבת,
על קודקודה היא אוהבת לשבת.

רק כך היא תמיד מחייכת.
כי אם היא מתהפכת,
וקודקודה נמצא על כתפיה,
היא מאבדת את רוב תכונותיה.

תכונה אחת אינה משתנה;
**הסימטריה לישר** היא התכונה.
צידה הימני לצידה השמאלי
תואמים זה לזה להפליא.

תכונה נוספת שיש לה תמיד,
הקצב שלה אינו אחיד;
בתחילה היא מאיטה עד שעוצרת,
אך בסוף היא יותר ויותר ממהרת״.

מה דעתכם תלמידים?
האם יימצאו לה קונים?

# בעקבות הצצות ושיקופים

1. התאימו, ללא מחשב, לכל גרף את התבנית המתאימה .
בדקו על ידי הצבת נקודה.
שימו לב! $k(3) = -3^2 + 2 = -9 + 2 = -7$

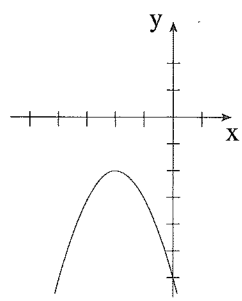
$$k(-3) = -(-3)^2 + 2 = -9 + 2 = -7$$

$f(x) = (x-2)^2$ $\quad$ $k(x) = -x^2 + 2$ $\quad$ $n(x) = -(x+2)^2 + 2$

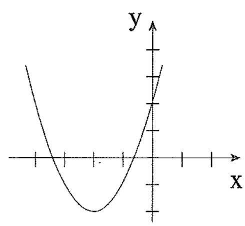
$g(x) = (x+2)^2$ $\quad$ $l(x) = (x+2)^2 - 2$ $\quad$ $p(x) = -(x-2)^2$

$h(x) = x^2 + 2$ $\quad$ $m(x) = (x-2)^2 + 2$ $\quad$ $j(x) = -(x+2)^2 - 2$

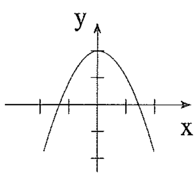
א.



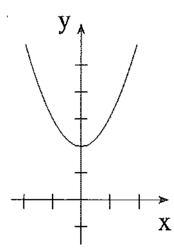

ב.



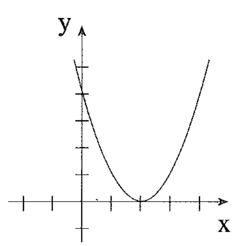

ג.



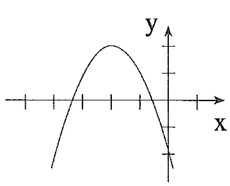

ד.



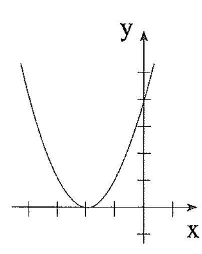

ה.



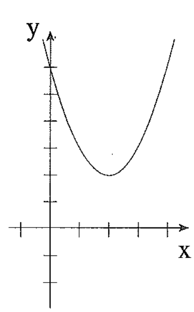

ו.



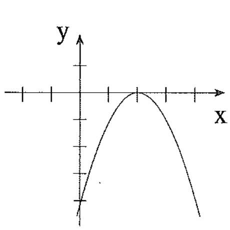

ז.




ח.




ט.



2. א. שרטטו את הגרף של $y = x^2$ במחברתכם.
על פי טבלה של חמש נקודות לפחות.

ב. מוסיפים 3 לכל תמונה בטבלה.
כיצד ישתנה הגרף?
כיצד תשתנה התבנית?

ג. מפחיתים 5 מן התבנית $x^2$.
כיצד תשתנה הטבלה?
כיצד ישתנה הגרף?

ד. מזיזים כל נקודה על הגרף ימינה ב-7 יחידות.
כיצד תשתנה התבנית?
כיצד תשתנה הטבלה?

3. א. שקפו את הגרף של $y = x^2$ בציר ה-x,
ואחר הכינו לו טבלה, וכִתבו לו תבנית.

ב. חִזרו על תרגיל 2 סעיפים ב׳, ג׳ ו-ד׳ לגבי הפונקציה הנוצרת בסעיף א׳.

**אתגר**

ג. האם סדר הפעולות (הזזה ושיקוף) משנה את התוצאה?
התייחסו בנפרד לסעיפים ב׳ ג׳ ו-ד׳.

## פעילויות נוספות

### I. ענבר בחרה מספר

ענבר בחרה מספר, חיסרה ממנו 5, ואת ההפרש העלתה בריבוע.

1. מְצאו שני מספרים שבחירתם תוביל לאותה תוצאה.
התוכלו למצוא זוגות מספרים נוספים כאלה?

2. מה מאפיין כל זוג מספרים שבחירתם נותנת אותה תוצאה?

3. עבור אילו מספרים שתבחר ענבר היא תקבל מספר חיובי?
מספר שלילי? אפס?

4. שרטטו סקיצה של הגרף המתאר את התוצאה המתקבלת כפונקציה (f) של המספר הנבחר.

5. איזו מתכונות הגרף מסבירה את התשובה לשאלה 2? לשאלה 3?

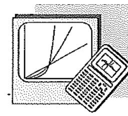
לתוצאה הסופית, ענבר הוסיפה 2.

6. חִזרו על שאלות 1 עד 5.

מן התוצאה הסופית (אחרי הוספת 2) ענבר החסירה 11.

7. חִזרו על שאלות 1 עד 5.

אם סיימתם, נסו את כוחכם בעמוד 17 שאלה 2.



## II. משחקים עם גרפים

בפעילות זו נשחק עם גרפים.
נזיז אותם למעלה, למטה, ימינה ושמאלה,
ונשקפם בציר ה-x.
נחקור כיצד משתנה גרף הפונקציה כאשר נפעל על התבנית שלה.

1. נתונה הפונקציה $f(x) = |x|$.
שרטטו, ללא מחשב, סקיצות של הגרף שיתקבל אם נפעיל על התבנית את הפעולות הבאות:
א. $y = -f(x)$   ב. $y = f(x) - 2$   ג. $y = -f(x) + 4$

| | **במחשב** | **במחשבון גרפי** |
|---|---|---|
| א. שרטטו $f(x) = \lvert x \rvert$ | $f(x) = ABS\ (x)$ | $y_1 = ABS\ (x)$ |
| ב. שרטטו $y = -f(x)$ | $y = -f(x)$ | $\boxed{y_2 =}\ \boxed{(-)}\ \boxed{2nd}\ \boxed{VARS}$ * $\boxed{1}$ |
| ג. שרטטו $y = f(x) + 2$ | וכן הלאה .... | $\boxed{y_3 =}\ \boxed{2nd}\ \boxed{VARS}\ \boxed{1}\ + 2$ |
| ד. שרטטו $y = -f(x) + 4$ | | |

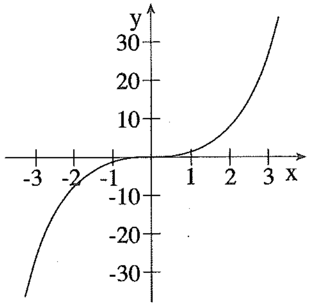
2. שרטטו **במחשב** $y = f(x - 6)$.
**במחשבון גרפי**: אין דרך לבצע זאת כפעולה "בתוך הפונקציה".
לכן רִשמו תבנית אלגברית $y = |x - 6| = ABS(x - 6)$

3. שרטטו סקיצה של הגרפים שיתקבלו אם נפעיל את הפעולות הבאות:
א. $y = f(x + 2)$   ב. $y = -f(x + 2)$   ג. $y = -f(x - 4) + 5$
בִּדקו במחשב.

**במחשב**: רִשמו את התבניות כמו שהן כתובות בחוברת.
**במחשבון גרפי**: רִשמו תבניות אלגבריות מלאות.

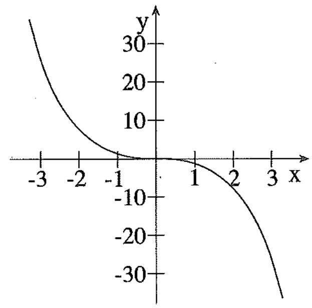
* יש ללחוץ על $\boxed{VARS}\ \boxed{2nd}$ כדי שהמחשבון יתייחס ל-y-ים ולא ל-x-ים.

4. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = x^3$.

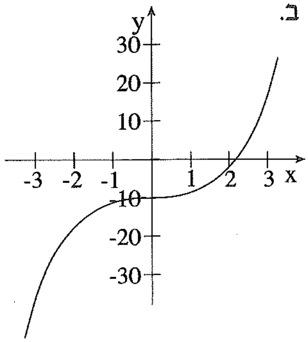



נסו לשרטט במחשב את הגרפים הבאים:

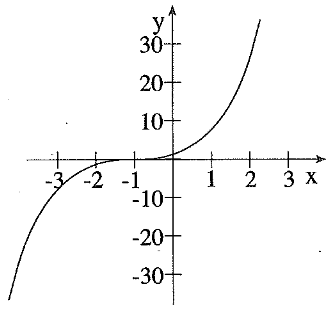
א.



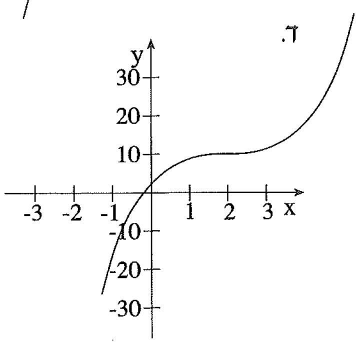

ב.




ג.




ד.




5. א. שרטטו את הפונקציה $y = \frac{1}{x}$.

ב. הזיזו את גרף הפונקציה למטה.

ג. שקפו את גרף הפונקציה בציר ה-x.

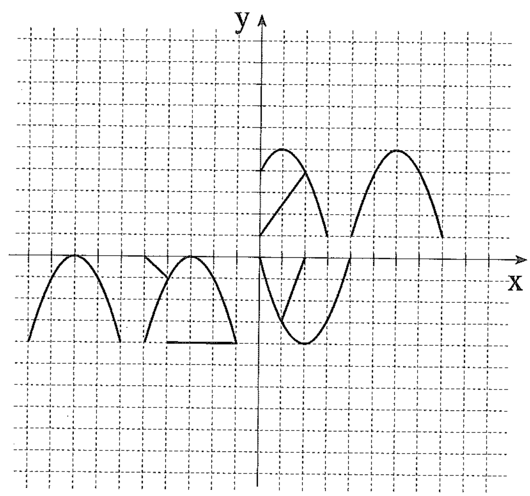
ד. הזיזו את גרף הפונקציה כך שלא יעבור ברביע ה III.

אם סיימתם, נסו את כוחכם בעמוד 18 שאלות 3-5.

# נסו את כוחכם

1. לפעילות: "כרטיס ביקור"

שרטטו על מסך המחשב את הכתובת הבאה:




דוגמה: האות ג מורכבת משתי פונקציות:

$y = -(x-1)^2 + 5 \quad | \quad 0 \le x \le 3$

$y = \_\_\_\_\_\_\_\_ \quad | \quad 0 \le x \le 2$

מעמוד 8

2. לפעילות: "ענבר בחרה מספר".

האם נכון לומר כי, לגבי שלוש הפונקציות שיצרה ענבר מתקיים:

$$f(x-5) = f(5-x)$$

נסו להסביר.

מעמוד 14

3. לפעילות: "משחקים עם גרפים".
שרטטו במחשב "מגן דוד" בעזרת 4 גרפים בלבד.

מעמוד 15

4. לפעילות: "משחקים עם גרפים".
חקרו כיצד משתנה גרף של פונקציה $y = f(x)$ כאשר מחליפים בתבנית כל x, בנגדי לו. כלומר כאשר משרטטים את גרף הפונקציה $y = f(-x)$.
לשם כך בחרו תבניות שונות, ושרטטו את הגרף שלהן, לפני ההחלפה ואחריה.
באילו מן הפונקציות הגרף לא ישתנה אחרי הפעולה? נסו להסביר.

מעמוד 15

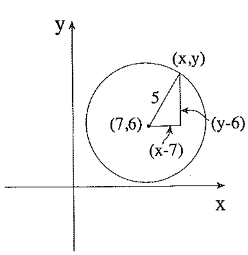
5. לפעילות: "משחקים עם גרפים".
בפעילות: "עוגה עוגה" מצאנו כי משוואת מעגל, שמרכזו בראשית הצירים, ורדיוסו 5 יחידות, היא: $x^2 + y^2 = 25$.

שימו לב! אם תרצו לשרטט אותו במחשב,
עליכם להחליף את המשוואה בשתי פונקציות

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

$$y = -\sqrt{25 - x^2}$$

נסו להסביר.




התוכלו לרשום משוואה של מעגל שמרכזו ברביע הראשון ורדיוסו 5 יחידות?

הדרכה: בצעו את ההזזה המתאימה לשתי הפונקציות.

מעמוד 15

# גרפים מטיילים

כאשר על תבנית פועלות
פעולות חשבון רגילות,
כמו הוספה של מספר, ופעולת הנגדי,
הגרף משתנה באופן מיידי.

הגרף אינו משנה **צורתו**,
כשנוסיף לתבנית מספרים.
משתנה רק **מקומו**
בתוך מערכת הצירים.

אם נרצה את הגרף **למעלה** להזיז,
מספר **חיובי** לתבנית **נוסיף**.
אבל, אם את הגרף נרצה **להוריד**,
מספר **שלילי נוסיף** לתבנית.

ואם נרצה להזיז **לימין**,
הפעם קשה יותר להבין.
**מכל** x בתבנית היסודית,
מספר **חיובי** יש **להפחית**.

אבל אם מספר **שלילי נפחית**,
**מכל** x הרשום בתבנית,
אז למרות **שהוספנו מספר חיובי**,
התזוזה היא **לשמאל**, בניגוד לתחושה הטבעית.

ואם **שיקוף בציר** x נרצה לגרום,
את **הנגדי** לתבנית נרשום.
אפשר גם לשלב מספר פעולות,
ולקבל גם שיקוף וגם הזזות.

1. מהו תחום העליה של כל אחת מהפונקציות הבאות (היעזרו בסקיצות):

א. $y = x^2$

ב. $y = x^2 - 3$

ג. $y = -x^2$

ד. $y = -x^2 - 6$

ה. $y = (x - 3)^2$

ו. $y = (x - 3)^2 + 2$

ז. $y = (x + 4)^2$

ח. $y = (x + 4)^2 - 9$

ט. $y = -(x - 5)^2$

י. $y = -(x - 5)^2 + 1$

יא. $y = (x - p)^2$

יב. $y = (x - p)^2 + k$

יג. $y = -(x - p)^2$

יד. $y = -(x - p)^2 + k$

- התוכלו למצוא קשר בין שני הטורים?

2. מִצאו את נקודות האפס של הפונקציות הבאות:

דוגמה: $y = -(x - 2)^2 + 9$

$$0 = -(x - 2)^2 + 9$$

$$(x - 2)^2 = 9$$

$$x - 2 = \pm 3$$

$x = 3 + 2$ או $x = -3 + 2$

$x = 5$ או $x = -1$

בִּדקו על ידי הצבה בתבנית.

א. $y = x^2$

ב. $y = (x - 3)^2 - 4$

ג. $y = (x + 1)^2 - 4$

ד. $y = -(x - 5)^2$

ה. $y = (x - 2)^2 + 1$

ו. $y = -x^2 + 25$

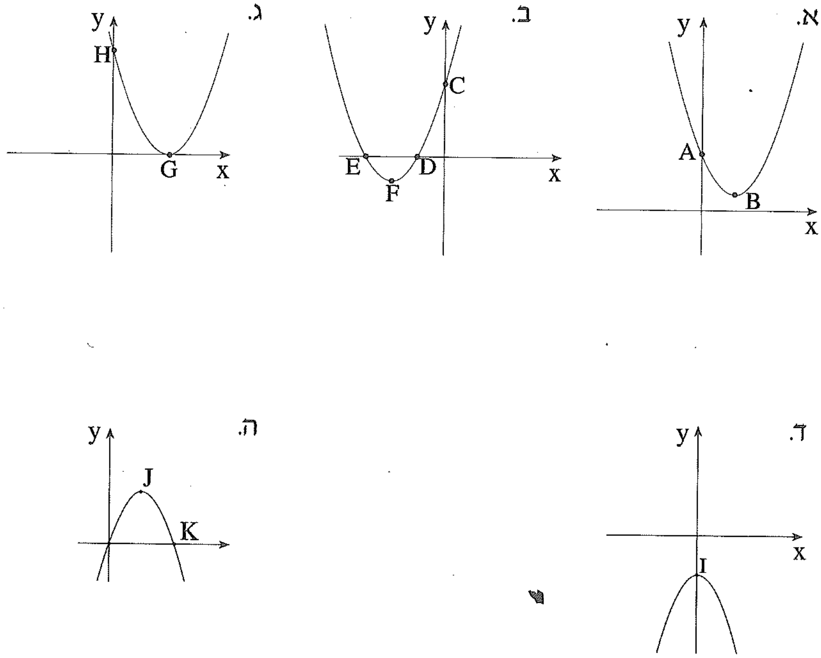
ז. $y = -(x - 2)^2 + 25$

ח. $y = -x^2 - 2$

ט. $y = (x - 5)^2 - 2$

י. $y = -(x + 4)^2 + 3$

3. לפניכם גרפים ותבניות




$h(x) = (x + 5)^2 - 1$ $\qquad$ $g(x) = - x^2 - 9$ $\qquad$ $f(x) = (x - 3)^2$

$p(x) = (x - 2)^2 + 1$ $\qquad$ $k(x) = - (x - 2)^2 + 4$

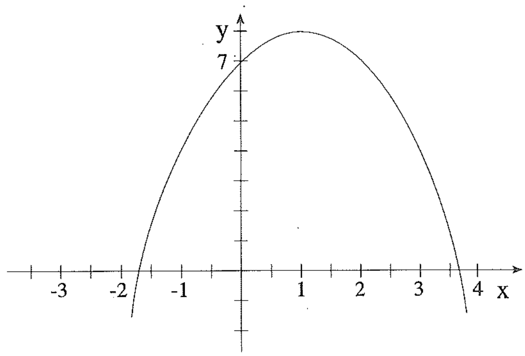
א. התאימו תבנית לגרף.

שימו לב! גודל היחידה של ציר ה-x אינו שווה בהכרח לגודלה על ציר ה-y.

ב. מִצאו אֶת שיעורי כל הנקודות המסומנות.

ג. באיזה תחום כל פונקציה עולה? יורדת?

4. לפניכם גרף של פונקציה מהצורה: $y = -(x - \boxed{\phantom{0}})^2 + \boxed{\phantom{0}}$




א. התוכלו למלא את המשבצות הריקות?

ב. מִצאו את נקודות האפס של הפונקציה (בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה).

ג. מהו התחום בו הפונקציה חיובית? שלילית?

ד. מהו התחום בו הפונקציה עולה? יורדת.

ה. על אילו מן הסעיפים ב'-ד' אפשר לענות ללא התבנית?

5. כמה נקודות אפס יש לפונקציות הבאות?
היעזרו בתבנית, בגרף או בשניהם.
שימו לב! אין צורך **למצוא** את נקודות האפס.

א. $y = (x-4)^2$

ב. $y = (x-4)^2 + 3$

ג. $y = (x-4)^2 - 1$

ד. $y = -(x+1)^2$

ה. $y = (x+1)^2 - 6$

ו. $y = -(x+1)^2 - 2$

ז. $y = -x^2 + 3$

ח. $y = x^2$

## שימרו על כושר

1. א. פִּתחו סוגריים ופשטו את התבניות שאינן פשוטות, בעמוד 20 תרגיל 1.

ב. נסו למצוא קשרים כלליים, בין התבניות המקוריות לתבניות שהגעתם אליהן.

ג. נתונה התבנית $y = -x^2 + 6x + 8$, שהיא פישוט של תבנית מהצורה $y = -(x - p)^2 + k$.
כִּתבו כל מה שתוכלו לומר על הגרף שלה.

2. שרטטו סקיצות של הפונקציות הבאות.
היעזרו בנוסחאות הכפל המקוצר.

א. $y = x^2 - 6x + 9$

ב. $y = x^2 + 12x + 36$

ג. $y = (x - 2)(x + 2)$

ד. $y = -x^2 - 8x - 16$

ה. $y = -x^2 + 4x - 4$

ו. $y = (x - 1)(x + 1) + 4$

ז. $y = x(x - 10) + 25$

ח. $y = + 49 - 14x + x^2$

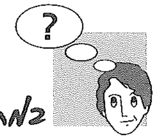
ט. $y = (5 - x)(5 + x)$

י. $y = x^2 - 49$

יא. $y = (x + 2)^2 - (x + 1)^2$

**אתגר**

יב. $y = x^2 - 6x + 10$




## במחשבה לאחור

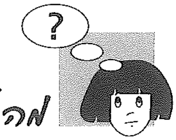
1. א. כיצד אפשר לראות מן **התבנית** $y = x^2$, כי הגרף שלה סימטרי לציר ה-y?

ב. איך אפשר לראות מן התבנית של הפונקציה $y = (x + 5)^2$, כי הגרף שלה סימטרי לישר $x = -5$.

ג. הגרף של הפונקציה $y = (x - 2)^2$ גם הוא סימטרי לגבי ישר. איזה ישר? הסבירו בעזרת התבנית.

ד. האם הגרף של הפונקציה $y = (x - 3)^2 + 2$ סימטרי לגבי ישר? אם כן, איזה ישר? אם לא, הסבירו למה לא.

2. בחרו פונקציה, ותארו במכתב לחבר חולה כיצד ישתנה הגרף בעקבות שינויים בתבנית.




# מה למדנו

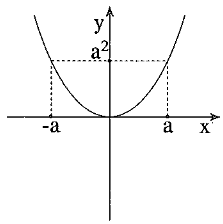
**למדנו להכיר את תכונות הפונקציה** $y = x^2$.

התכונה העיקרית:

הפונקציה $y = x^2$ **סימטרית לגבי ציר ה-y.**

תכונה זו מתבטאת בטבלה ובתבנית: למקורות נגדיים (כלומר מקורות הנמצאים במרחק שווה מציר ה-y) יש תמונות שוות.

כי: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$



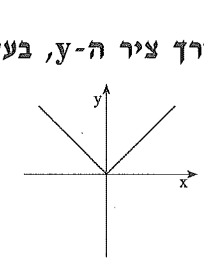

תכונה זו מתבטאת בגרף: אם נקפל את הדף לאורך ציר ה-y, ענף אחד של הפונקציה יפול על הענף השני.

תכונות נוספות:

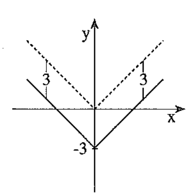
- הפונקציה אינה שלילית.
- יורדת בתחום $x < 0$ ועולה בתחום $x > 0$
- $(0\,,0)$ היא הנקודה הנמוכה ביותר שלה.
- קצב הירידה וקצב העליה משתנה. ככל שרחוקים מציר ה-y קצב ההשתנות גדל.

את כל התכונות אפשר להסיק מן הגרף ומן התבנית.

**למדנו להעלות או להוריד את הגרף לאורך ציר ה-y, בעזרת פעולות על התבנית של הפונקציה.**




לדוגמה: התבנית $y = |x|$.




הורדת הגרף ב-3 יחידות למטה תיעשה על ידי הוספת $-3$ לתבנית.

התבנית של הגרף החדש:

$y = |x| - 3$.

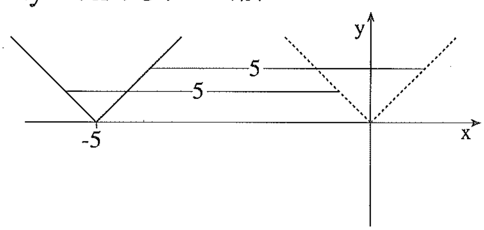
**למדנו להזיז גרף של התאמה ימינה ושמאלה לאורך ציר ה-x.**

לדוגמה: התבנית $y = |x|$.

נזיז את הגרף 5 יחידות שמאלה

התבנית של הגרף החדש: $y = |x - (-5)|$

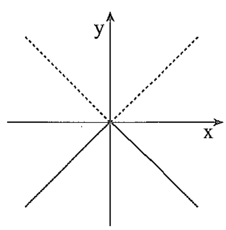
או: $y = |x + 5|$.




**למדנו לשקף גרף של התאמה בציר ה-x.**

לדוגמה: התבנית $y = |x|$.

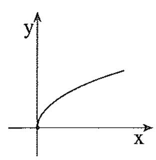
התבנית של הגרף החדש $y = -|x|$.




**למדנו גם "להכיר" בפונקציות מסויימות, את התבנית המקורית ואת הפעולות שנעשו עליה.**

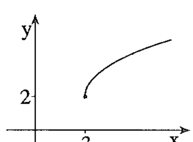
לדוגמה: $y = \sqrt{x - 3} + 2$

התבנית המקורית $y = \sqrt{x}$ והגרף שלה:




הפעולות שנעשו על התבנית גורמות להזזת הגרף 3 יחידות ימינה ו-2 יחידות למעלה.

הגרף של התבנית אחרי הפעולות:



# 2. על המשפחה $y = m(x - p)^2 + k$

## עכביש הפונקציות $y = mx^2$

בחרו עבור m לפחות ששה מספרים (חיוביים ושליליים, כולל שברים), ושרטטו במחשב תיאור מהיימן של משפחת הפונקציות $y = mx^2$, זוהי משפחה חלקית למשפחה $y = m(x - p)^2 + k$ כאשר $p = 0$ ו- $k = 0$.

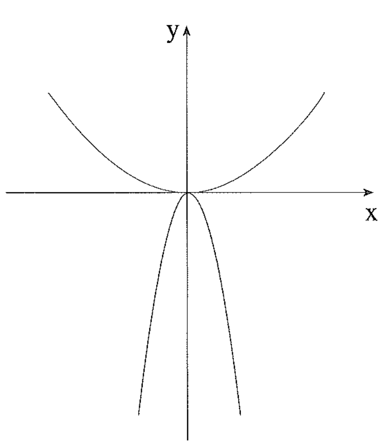
1. א. רִשמו תכונות משותפות לכל הפונקציות מן המשפחה.

ב. חלק מ"רגלי העכביש" מופנה למעלה וחלק מופנה למטה.
חלקו את המשפחה לשתי קבוצות (גרפים "שמחים" וגרפים "עצובים").
מִצאו תכונות משותפות, לכל קבוצה בנפרד.

ג. נסו להסביר כל תכונה שרשמתם על פי התבנית.

ד. במה נבדלת כל פונקציה פרטית מפונקציה פרטית אחרת?
מי משפיע על ההבדלים? כיצד?

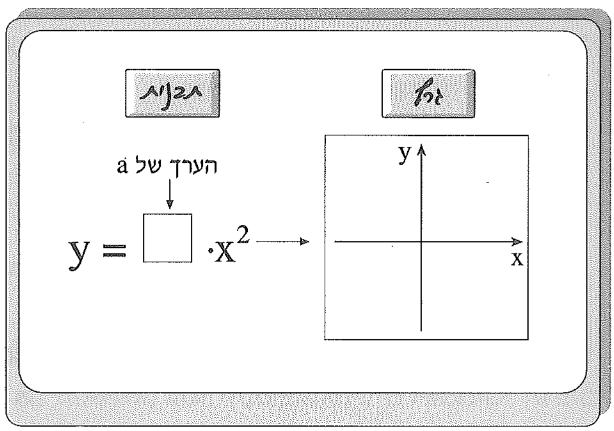
2. במערכת הצירים שלפניכם,
משורטטים גרפים של שתי פונקציות
מן המשפחה $y = mx^2$.
רִשמו מספר מתאים במקום m,
עבור כל אחת מן הפונקציות.



3. א. מִצאו פונקציה, מן המשפחה, שהגרף שלה עובר דרך הנקודה (25 , 2.5–).

ב. כמה פונקציות מן המשפחה מקיימות: הגרף עובר דרך הנקודה (3– , 6)?

4. לִפניכם אוטומט לשרטוט גרפים:




במשבצת שבציור מופיעים ערכים שונים של **הפרמטר m** בתבנית המשפחה

$$y = mx^2$$

הערכים במשבצת משתנים מ- 1000– עד 1000 בצעדים של 0.1. כל ערך המופיע במשבצת, גורם להופעת הגרף המתאים לאותו m, במערכת הצירים.

נסו לתאר את סדר הופעת הגרפים.

השתמשו בזרועותיכם כבענפי הפונקציה.

5. עכביש הגרפים של המשפחה $y = mx^2$ מטייל במערכת הצירים.

א. הַזיזו אותו למטה

ב. הַזיזו אותו שמאלה.

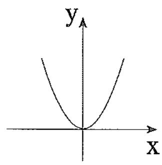
ג. הַזיזו אותו כך שמרכז גופו יהיה ברביע ה II.

אם סיימתם, נסו את כוחכם בעמוד 42 שאלה 1.

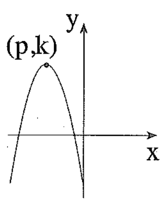
# בעקבות ההצגה $y = m(x-p)^2 + k$

תעודת זהות

שם: **פרבולה**




כאשר קודקודה בראשית הצירים,
התבנית המתאימה לה היא
מהמשפחה $y = mx^2$.
נקרא לה: **פרבולה יסודית**.

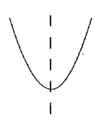



כאשר קודקודה בנקודה $(p\ ,\ k)$,
התבנית המתאימה לה היא מהמשפחה

$y = m(x-p)^2 + k$.

נקרא לה: **פרבולה מוזזת**.

1. השלימו את **תכונות הפרבולה המוזזת**.
תוכלו לקבל כיוון על ידי מגדלור עם *האריות* בעמוד 40.



א. **סימטרית** לגבי ציר ה-y או ישר מקביל לו.
ישר זה נקרא **ציר הסימטריה**,
ומשוואתו: $x =$ __________

ב. בעלת נקודת מינימום (נקודה הכי נמוכה בגרף),

או בעלת נקודת מקסימום (נקודה הכי גבוהה בגרף).

נקודה זו נקראת **קודקוד הפרבולה** ,
ושיעוריה ( , ).

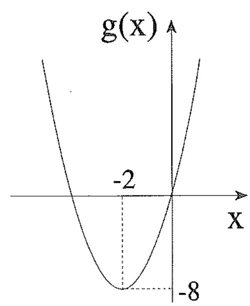
ג. כאשר m חיובי $(m > 0)$,

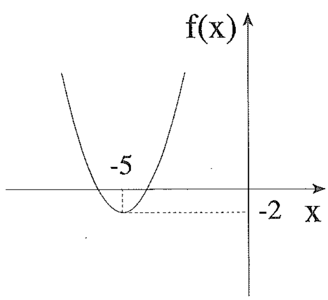
**יורדת** בתחום ____________
**ואחר כך עולה** בתחום ____________

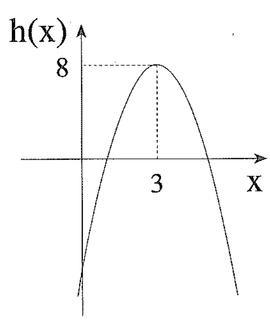
כאשר m שלילי $(m < 0)$,

**עולה** בתחום ____________
**ואחר כך יורדת** בתחום ____________

ד. **נקודות אפס** של פונקציות פרטיות.
הגרפים שבשרטוט הם הזזות של $y = 2x^2$ או של $y = -2x^2$.
מִצאו, בכל מקרה, את תבנית הפונקציה המוזזת ואת נקודות האפס שלה.

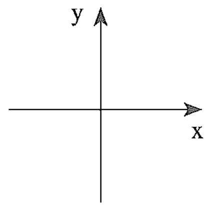
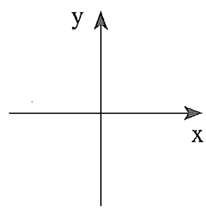
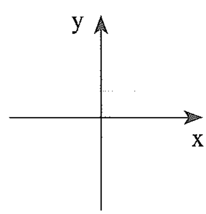


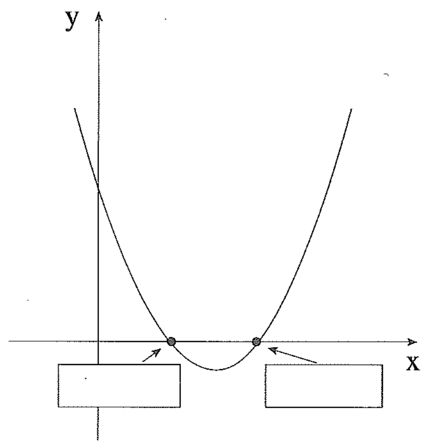



## ה. מספר נקודות אפס

$$y = m(x-p)^2 + k$$

| | 2 סקיצות של גרפים מן המשפחה | מספר נקודות האפס |
|---|---|---|
| $k = 0$ |  | |
| m ו-k<br>בעלי סימנים שונים |  | |
| m ו-k<br>בעלי סימנים שווים |  | |

ו. **נקודות אפס** של פונקציה כלשהי מהמשפחה.
הגרף שבשרטוט הוא הזזה של $y = mx^2$.
נמצא את נקודות האפס.




תבנית הפונקציה $f(x) = m(x-p)^2 + k$.
חישוב נקודות האפס: $0 = m(x-p)^2 + k$.
השלימו את שאר השלבים:
תוכלו לקבל כיוון על ידי מגדלור עם *הארה* בעמוד 41.

שיעורי נקודות האפס: $x =$ ______ או $x =$ ______

- התבוננו בתבניות של נקודות האפס והחליטו לפיהן מה מספר נקודות האפס של הפונקציה במקרים השונים.
השוו לדיון הקודם שנעשה על פי הגרף (בסעיף ה').

2. נתונה התבנית המוזזת $y = m(x-p)^2 + k$.

א. מה תפקיד $m$ לגבי הפרבולה?

ב. מה תפקיד $p$ לגבי הפרבולה?

ג. מה תפקיד $k$ לגבי הפרבולה?

3. מה הקשר בין מספר היחידות שהפרבולה זזה בכיוון אופקי ובכיוון אנכי, לבין שיעורי הקודקוד שלה?

4. נתונה הפרבולה $y = -3(x + 4)^2 + 12$. נסו לענות **ללא חישובים**.

א. היכן קודקודה?

ב. היכן ציר הסימטריה שלה?

ג. האם יש לה נקודת מינימום או נקודת מקסימום?

ד. מהם תחומי העלייה והירידה שלה?

ה. מה מספר נקודות האפס שלה?

5. מהן נקודות האפס של הפרבולה מתרגיל 4?

6. אילו פרמטרים קובעים את צורת הפרבולה, ואילו את מקומה במערכת הצירים?

7. א. בחרו משבצת **אחת בכל** טור וסמנו בה √ .

| הפרמטר | m | p | k |
|---|---|---|---|
| חיובי | | | |
| שלילי | | | |
| אפס | ////// | | |

מה תוכלו לומר על הפרבולה המתקבלת לפי סימונכם, לגבי כל אחד מהסעיפים של שאלה 4?

ב. חִזרו על א׳ עם סימון אחר בכל טור.

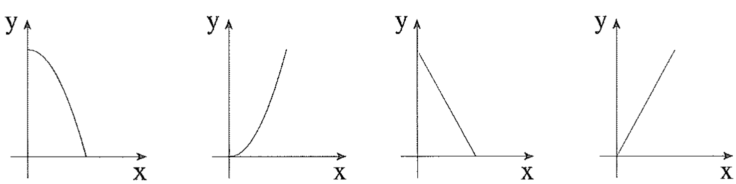
# פעילויות נוספות

## I. נפילה חופשית

מפילים אבן מגובה רב.
f היא פונקציה המתאימה לזמן שעבר, את המרחק שעברה האבן מאז החלה ליפול.

החליטו מה מייצג כל ציר, ושרטטו במערכת צירים סקיצה של גרף הפונקציה.

1. איזה מהגרפים הבאים הוא הדומה ביותר לגרף ששרטטתם?




2. מקובל לבחור ב-x כמייצג את הזמן בשניות, וב-f(x) המייצג את המרחק במטרים. ממדידות של גופים נופלים מתברר כי התבנית $f(x) = 5x^2$, היא קירוב טוב לתוצאות הניסיוניות.

בְּדקו את החלטותיכם הקודמות לאור מידע זה.
בחרו את הגרף המתאים על פי שיקולים אלגבריים.

3. מלאו את הטבלה הבאה, וסמנו היכן רואים בגרף.

| הסיפור | החישוב | הסימון |
|---|---|---|
| | | f(3) |
| | | f(0) |
| המרחק שעברה האבן לאחר 6 שניות | | |
| המרחק שעברה האבן בשנייה השישית | | |
| | | f(6) – f(2) |
| | | $\frac{f(6) - f(2)}{6 - 2}$ מנת הפרשים |
| | x = | f(x) = 1000 |

4. מְצאו שלוש תכונות לפונקציה, ותרגמו אותן לשפת הסיפור.

5. תארו דרך בה תוכלו למדוד עומק של באר על ידי הפלת אבן לתוכה.
רמז: האבן "מרעישה" כשהיא מגיעה לתחתית.
תנו נתונים מספריים הממחישים את השיטה.

6. צנחן צנח צניחה חופשית, ממטוס בגובה של 10,000 מטר.

א. רִשמו פונקציה, המתאימה לזמן שעבר מאז קפץ מן המטוס, את מרחקו **מן הקרקע**.

ב. שרטטו גרף מתאים, אם ידוע כי בשלב מסוים פותח הצנחן את מצנחו. שימו לב לתחום הפונקציה.

אם סיימתם, עִברו לפעילות: "על כוכבים אחרים" עמוד 36.

## II. על כוכבים אחרים

קצב הנפילה של אבן משתנה מכוכב לכוכב.
לדוגמה: על הירח (בהשוואה לארץ) נופלת האבן יותר לאט.
קצב הנפילה של אבן על כוכב, תלוי בכוח המשיכה של הכוכב.
(כוח המשיכה של כוכב תלוי בגודל הכוכב ובצפיפותו.)

בטבלה שלפניכם, מופיע המספר הקובע את קצב הנפילה של אבן על כוכבי לכת אחדים.

מספר זה מסומן ב-g, ונקרא: תאוצת הנפילה החופשית.

| **כוכב הלכת** | פלוטו | ירח | מאדים (מרס) | נוגה (ונוס) | ארץ | שבתאי (סטורן) | צדק (יופיטר) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **תאוצת הנפילה g** | 0.4 | 1.62 | 3.74 | 8.87 | 9.81 | 11.8 | 26.5 |

התבנית המתאימה למשפחת הפונקציות, המתארות את המרחק שעברה אבן נופלת, בהתאם לזמן שעבר (x) היא:

$$f(x) = \frac{1}{2}gx^2$$

1. רשמו תבניות לפונקציות פרטיות מן המשפחה לכל אחד מכוכבי הלכת הרשומים בטבלה.

2. שרטטו את הגרפים במערכת צירים אחת.
שימו לב! בחרו את הגבול העליון של ציר ה-y כ-1000, כי האבן נופלת מגובה 1000 מ'.

3. א. איזה מרחק עברה האבן ב-3 השניות הראשונות, על כל כוכב לכת?

ב. כמה זמן, על כל כוכב, לוקח לאבן ליפול את 500 המטרים הראשונים שהיא נופלת?

ג. כמה זמן, על כל כוכב, לוקח לאבן ליפול את 500 המטרים האחרונים שהיא נופלת?

- באילו הצגות (מילולית, טבלה, תבנית, גרף) השתמשתם כדי לענות על כל שאלה?
התוכלו להשתמש בהצגות אחרות? איך?

4. בתבנית $f(x)=\frac{1}{2}gx^2$ יש הבדל בין המשתנים x , y ו-g.
התוכלו להדגים הבדל זה?

**התבנית** $y=\frac{1}{2}gx^2$

x ו-y הם משתנים
ו-g הוא משתנה.
ביניהם לבינו אנו מבחינים,
כי g משתנה שונה.

כשנציב מספר במקום g בתבנית,
נקבל פונקציה פרטית.
כאשר משתנה כזה בתבניתך,
זהו סימן למשפחה.

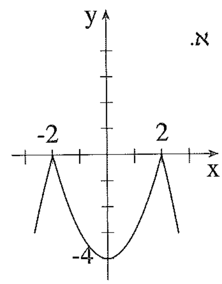
בגלל תפקידו השונה,
**פרמטר** נקרא לו במקום משתנה.
האם כבר נתקלתם בשם זה?
היכן ובאיזה נושא?

## III. מתיחות וכיווצים

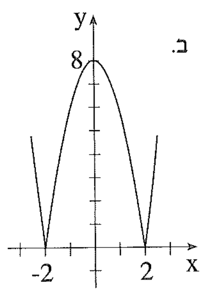
בפעילות זו נמתח ונכווץ גרפים לאורך ציר ה-y, וכן נשקף בציר ה-x ונזיז לכל הכיוונים.

1. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x) = | x^2 - 4 |$.
שרטטו במחשב בעזרת פעולות על f את הגרפים הבאים:

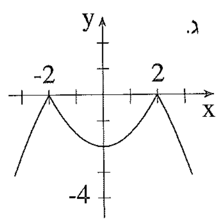
א.



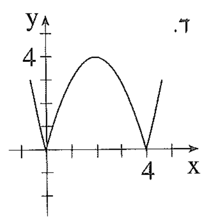

ב.




ג.

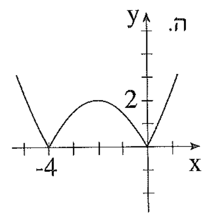



ד.

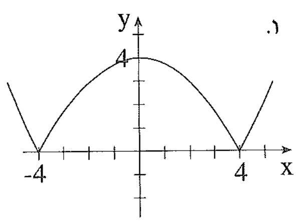



אתגר

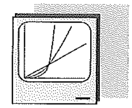
ה.




ו.




אם סיימתם, נסו את כוחכם בעמוד 42 שאלה 2.

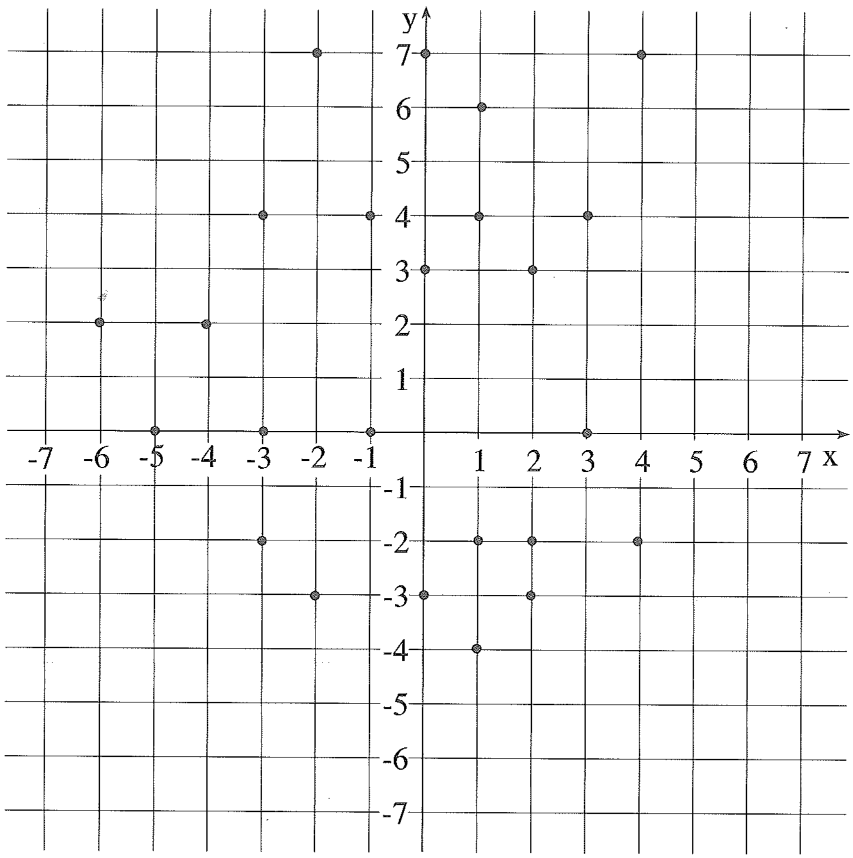


## IV. משחק פרבולות -

תחרות לשני מחשבים ולארבעה תלמידים.

הוראות המשחק:

הכנה: כל זוג תלמידים מסמן על המחשב שלו את 24 הנקודות הבאות:




מהלך: כל זוג תלמידים מנסה להעביר פרבולות דרך הנקודות שעל המסך.

המטרה: להעביר פרבולות דרך כל הנקודות.

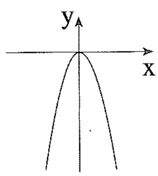
המנצח: זוג התלמידים שהצליח להעביר פרבולות דרך כל הנקודות, והשתמש במספר פרבולות מינימלי.

## הארות

לפעילות: "בעקבות ההצגה $y = m(x-p)^2 + k$"

### תעודת זהות

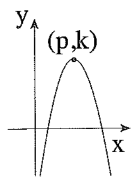
שם: **פרבולה**




כאשר קודקודה בראשית הצירים
התבנית המתאימה לה היא
מהמשפחה $y = mx^2$

לדוגמה: $y = -2x^2$

נקרא לה: **פרבולה יסודית.**




בדוגמה שלנו: $m =$ _______

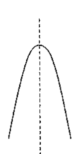
כאשר קודקודה בנקודה $(p\ ,\ k)$
התבנית המתאימה לה היא מהמשפחה

$$y = m(x-p)^2 + k$$

לדוגמה: $y = -2(x-4)^2 + 6$
נקרא לה: **פרבולה מוזזת.**

בדוגמה שלנו: $m =$ _____ $p =$ _____ $k =$ _____

1. השלימו את **תכונות הפרבולה המוזזת.**



א. **סימטרית** לגבי ציר ה-y או ישר מקביל לו.
ישר זה נקרא **ציר הסימטריה.**
בדוגמה שלנו משוואתו: $x =$ _______

ב. בעלת נקודת מינימום (נקודה הכי נמוכה בגרף),

או בעלת נקודת מקסימום (נקודה הכי גבוהה בגרף).

המשך

בדוגמה שלנו: בעלת נקודת ________, כי 0 ____ m

נקודה זו נקראת **קודקוד הפרבולה**.

בדוגמה שלנו שיעוריה: (   ,   ).

ג. בדוגמה שלנו: m שלילי $(m < 0)$.

לכן הפונקציה

עולה בתחום ________

ואחר כך יורדת בתחום ________

מעמוד 29

---

לפעילות: "בעקבות ההצגה $y = m(x-p)^2 + k$" - נקודות אפס.

1. נקודות אפס של פונקציה כלשהי מהמשפחה

$$f(x) = m(x-p)^2 + k$$

בנקודות האפס: $0 = m(x-p)^2 + k$

כדי לבודד את x, הפעילו על שני האגפים את הפעולות הבאות, לפי הסדר:

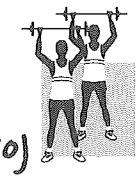
- חסרו k.
- חלקו ב m. $m \neq 0$, נסו להסביר מדוע.
- הוציאו שורש. אל תשכחו לרשום $\pm$ לפני סימן השורש. הסבירו מדוע.
- חברו p.

האם הגעתם לביטוי $x = \pm\sqrt{\frac{-k}{m}} + p$ ?

יש, אם כך, שני נקודות אפס. השלימו:

$x = p +$ ______   $x = p -$ ______

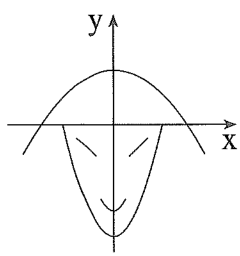
מעמוד 32



# נסו את כוחכם

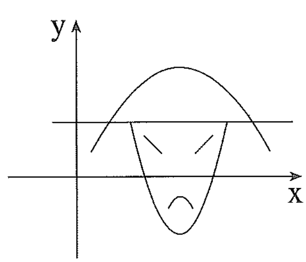
1. לפעילות: "עכביש הפונקציות".
   שרטטו את הכוכב המנצנץ בעזרת המשפחה $y = m|x|$.
   השתדלו שהזוויות בין קרני הכוכב יהיו שוות.

מעמוד 27




2. לפעילות: "מתיחות וכיווצים".
   לפניכם שרטוט של סיני עליז.
   א. שרטטו אותו במחשב.

   ב. שרטטו גם את הסיני העצוב.
   השתדלו שרוב השרטוט יהיה ברביע הראשון והרביעי.




מעמוד 38

# משפחת הפרבולות

במשפחה $y = mx^2$ שמחה והמולה.
כל פרבולה עבור m, מספר מגרילה,
ואל מקומה בראשית הצירים היא עולה.

פרבולה אחת מן המשפחה,
שהצפיפות גרמה לה הרגשה לא נוחה,
במערכת הצירים לטייל הלכה.

אם המספר **חיובי וגדול**, יש לה נחת,
**כלפי מעלה** אז היא **נמתחת**,
ואל השמיים ידיים שולחת.

קמה במשפחה צעקה!!
אמרו כי זוהי עריקה,
והוחלט מן המשפחה לסלקה.

וזו ש**שבר חיובי** לוקחת,
זרועות לצדדים היא שולחת,
ובחיוך **רחב** את פיה פותחת.

הפרבולה לא נבהלה,
והמשיכה בטיולה:
ימינה ושמאלה מטה ומעלה.

וזו שקיבלה **מספר שלילי**, מתייפחת.
כלפי **מטה** היא נמתחת,
ואל התהום ידיים שולחת.

תוך כדי הליכתה,
היא שינתה את תבניתה,
ומשפחה אחרת אימצה אותה.

כשכל הפרבולות במקומן נמצאות,
את המישור הן ממלאות,
ורק בנקודה אחת זו בזו נוגעות.

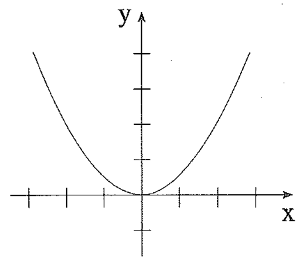
לבסוף קודקודה נעצר בנקודה,
וזו התבנית שנוצרה כשנעמדה:
$y = 2(x + 3)^2 + 4$

לאן הגיע קודקודה?
ואיזו משפחה אימצה אותה?
התדע?!!

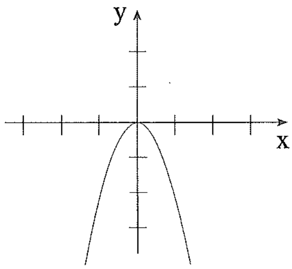
## אוסף משימות

1. שרטטו סקיצות של גרפים מן המשפחות הבאות:

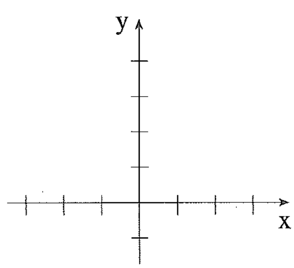
א. $y = 0.5(x-3)^2 + k$




ב. $y = -2(x-p)^2 + 3$




ג. $y = a(x+2)^2 + 1$




2. נתונה הפרבולה $y = 5(x-1)^2$.

א. היכן קודקודה?

ב. היכן ציר הסימטריה שלה?

ג. האם יש לה נקודת מינימום או נקודת מקסימום?

ד. מהם תחומי העלייה והירידה שלה?

ה. מה מספר נקודות האפס שלה? מהן?

3. חִזרו על סעיפי שאלה 2 עם הפרבולה $y = 2(x+5)^2 + 1$.

4. לפניכם מספר פונקציות.
שרטטו סקיצה של כל פונקציה, ורשמו תחומי עלייה וירידה.

| | | | |
|---|---|---|---|
| א. | $y = -2x^2$ | ד. | $y = 5(x + 3)^2$ |
| ב. | $y = 3(x - 1)^2 + 5$ | ה. | $y = \frac{1}{2}(x - 4)^2 - 5$ |
| ג. | $y = -(x + 7)^2 + 4$ | ו. | $y = -3x^2 + 7$ |

5. מִצאו נקודות אפס של כל פונקציה.

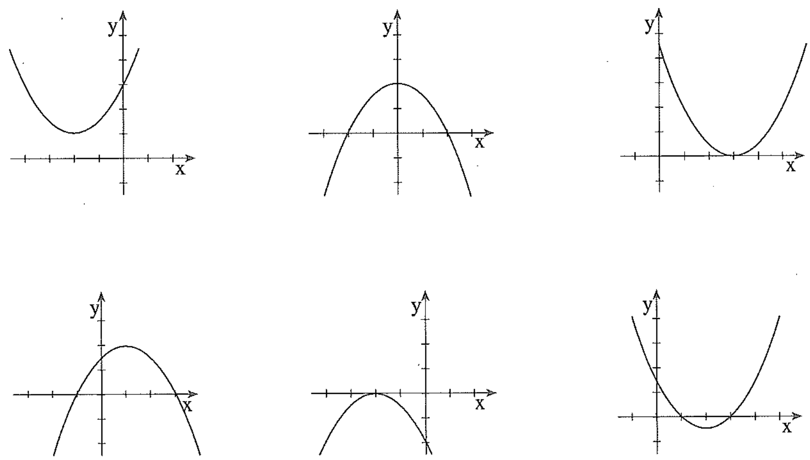
| | | | |
|---|---|---|---|
| א. | $y = -2x^2$ | ד. | $y = 5(x + 3)^2$ |
| ב. | $y = 3(x - 1)^2 + 5$ | ה. | $y = \frac{1}{2}(x - 4)^2 - 5$ |
| ג. | $y = -(x + 7)^2 + 4$ | ו. | $y = -3x^2 + 7$ |

6. גזרו מן הנייר השקוף, בסוף החוברת, את המלבנים בהם משורטטות הפרבולות היסודיות $y = 0.5x^2$ ו- $y = 2x^2$ .
"שרטטו" בעזרת הפרבולות את הגרפים של הפונקציות הבאות, ומִצאו באופן גרפי את נקודות האפס אם הן קיימות.

| | | | |
|---|---|---|---|
| א. | $y = 0.5(x - 2)^2 + 1$ | ה. | $y = 0.5(x + 3)^2$ |
| ב. | $y = -0.5(x - 1)^2 + 2$ | ו. | $y = -0.5(x + 4)^2 - 1$ |
| ג. | $y = 2(x - 3)^2$ | ז. | $y = 2 - 2x^2$ |
| ד. | $y = -2(x - 3)^2 + 2$ | ח. | $y = - 2 - 2x^2$ |

7. רשמו תבנית מוזזת לפונקציות הבאות.

שימו לב! התבנית היסודית של כל פונקציה היא $y = \frac{1}{2}x^2$.



8. אבן נופלת מגג של בניין.
נתאים לזמן שחלף (בשניות) מאז החלה האבן ליפול, את גובהה (במ') מעל פני האדמה. ההצגה של התאמה זו בתבנית $f(x) = 125 - 5x^2$ מתארת קירוב טוב של ההתאמה.

א. באיזה מרחק מן האדמה היתה האבן אחרי 3 שניות?

ב. איזה מרחק עברה האבן בשנייה השלישית?

ג. מה גובה גג הבניין מעל פני האדמה?

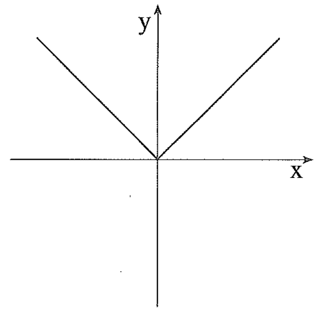
ד. כמה זמן נמשכה נפילת האבן?

ה. שרטטו סקיצה של גרף ההתאמה.

ו. נניח שהאבן נפלה מן הגג בדיוק לתוך בור שעומקו 30 מ'.
כיצד ישתנה הגרף, בעקבות הסיפור החדש?
מה הקשר בין גרף זה לפרבולה שתבניתה $y = 125 - 5x^2$?

## במחשבה לאחור

1. לפניכם התבנית והגרף של הפונקציה $y = |x|$.




א. התוכלו לשרטט באותה מערכת צירים את הגרפים הבאים:

$f(x) = 2|x|$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{2}|x|$ $\qquad$ $h(x) = -|x|$ $\qquad$ $h(x) = -3|x|$

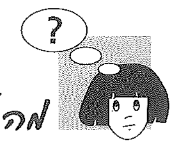
ב שרטטו, ללא טבלה, את גרף הפונקציה $y = -2|x - 3| + 4$
וענו על השאלות הבאות:

א. האם יש לפונקציה נקודת מינימום או נקודת מקסימום?

ב. באיזה תחום הפונקציה עולה? באיזה תחום היא יורדת?

ג. מהן נקודות האפס של הפונקציה?

ד. באיזה תחום הפונקציה חיובית? באיזה תחום היא שלילית?



# מה למדנו

**למדנו להכיר את תפקידי הפרמטרים m p ו-k**
**בהצגה $y = m(x - p)^2 + k$.**

## תפקידי m

א. סימנו של m.

- אם $m > 0$ (חיובי) הפרבולה פתוחה כלפי מעלה (מחייכת), לכן במקרה זה יש לפרבולה נקודת מינימום.

- אם $m < 0$ (שלילי) הפרבולה פתוחה כלפי מטה (עצובה). לכן במקרה זה יש לפרבולה נקודת מקסימום.

ב. גודלו של הערך המוחלט של m.

- כאשר ערכו המוחלט של m גדול מ-1, הפרבולה נמתחת במקביל לציר ה-y, בהשוואה לפרבולה $y = x^2$.
- כאשר ערכו המוחלט של m קטן מ-1, הפרבולה מתכווצת במקביל לציר ה-y בהשוואה לפרבולה $y = x^2$.

## תפקידי p

א. הפרבולה זזה ב-p יחידות (בהשוואה ל - $y = x^2$) במקביל לציר ה-x.
p חיובי גורם לתזוזה ימינה, ו-p שלילי לתזוזה שמאלה.

ב. $x = p$ היא משוואת ציר הסימטריה של הפרבולה .

## תפקידי k

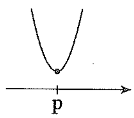
הפרבולה זזה ב-k יחידות (בהשוואה ל - $y = x^2$) במקביל לציר ה-y.
k חיובי גורם לתזוזה כלפי מעלה, ו-k שלילי, לתזוזה כלפי מטה.

## תפקידי p ו- k

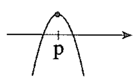

הנקודה $(p\ ,k)$ היא נקודת הקודקוד של הפרבולה.

## תפקידי m ו-p

m ו-p קובעים את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה.

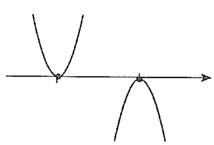



- אם $m > 0$ אז הפרבולה יורדת בתחום $x < p$,
  ועולה בתחום $x > p$
- אם $m < 0$ אז הפרבולה עולה בתחום $x < p$,
  ויורדת בתחום $x > p$.



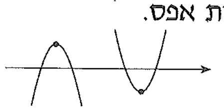

## תפקידי m ו-k

m ו- k קובעים את מספר נקודות האפס של הפרבולה .

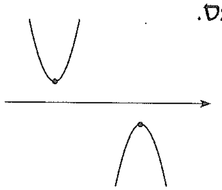


- אם $k = 0$ כלומר שיעור y של הקודקוד הוא 0,
  אז יש נקודת אפס אחת.

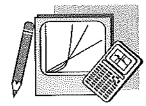
- אם $m > 0$ (הפרבולה מחייכת) ו $k > 0$ (הקודקוד מתחת לציר ה-x)
  או אם $m < 0$ (הפרבולה עצובה) ו $k < 0$ (הקודקוד מעל ציר ה-x),
  כלומר אם הסימנים של m ו-k שונים, אז יש שתי נקודות אפס.



- אם $m > 0$ (הפרבולה מחייכת) ו- $k > 0$ (הקודקוד מעל ציר ה-x)
  או אם $m < 0$ (הפרבולה עצובה) ו-$k < 0$ (הקודקוד מתחת לציר ה-x),
  כלומר אם הסימנים של m ו-k שווים, אז אין נקודות אפס.

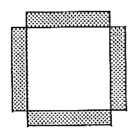
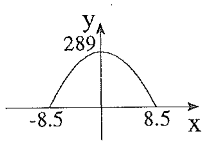
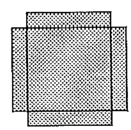
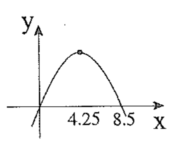
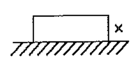
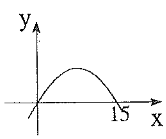
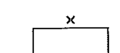
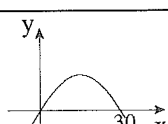
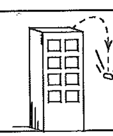
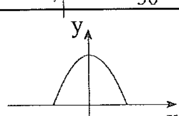
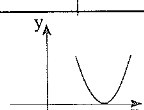


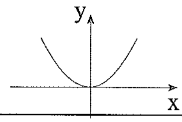
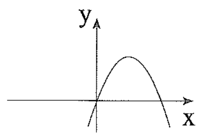
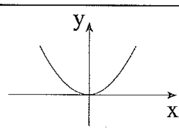
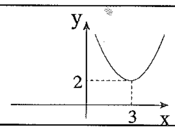
# 3. על המשפחה $y = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$



**סל של דוגמאות - פעילות הכנה**

המשפחה $y = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$ נקראת:
משפחת הפונקציות הריבועיות.
התבנית מן הצורה הזאת נקראת ***התבנית הסטנדרטית***.
לפניכם אוסף של תבניות וגרפים של פונקציות ריבועיות,
שאולי נתקלתם בהם בלימודיכם השנה. התבניות התקבלו
מתרגום בעיה, והן לאו דווקא מסוג התבנית הסטנדרטית.

| | תזכורת | תבנית | גרף |
|---|---|---|---|
| א. |  | $y = 4(17 - 2x)x \cdot 0.25$ |  |
| ב. |  | $y = 0.25(289 - 4x^2)$<br>או<br>$y=0.25[(17-2x)^2+4(17-2x)x]$ |  |
| ג. |  | $y = (30 - 2x)x$ |  |
| ד. |  | $y = \frac{30 - x}{2} \cdot x$ |  |
| ה. |  | $y = 45 - 5x^2$ |  |
| ו. | ענבר בחרה מספר | $y = (x - 5)^2$ |  |

| | תזכורת | תבנית | גרף |
|---|---|---|---|
| ז. | אבן נופלת. | $y = 5x^2$ |  |
| ח. | סכום שני מספרים הוא 6. מהי מכפלתם? | $y = x(6 - x)$ |  |
| ט. | זוג רגלי עכביש | $y = 0.2x^2$ |  |
| י. | זוג רגלי עכביש מטייל | $y = 0.2(x - 3)^2 + 2$ |  |

1. פשטו כל תבנית, והביאו אותה לצורה הסטנדרטית: $y = ax^2 + bx + c$.
רִשמו לגבי כל תבנית $a =$ ____ , $b =$ ____ , $c =$ ____

2. א. מִצאו בכל סעיף, על פי התבנית, את התבנית היסודית $y = mx^2$.

ב. מִצאו את p על פי הגרף, ואת k בהצבה בתבנית.
**שימו לב!** אם אינכם עובדים במחשב, תוכלו להיעזר בחישוב נקודות האפס, ובסימטריה של הגרף.

ג. רִשמו את התבנית בצורתה המוזזת: $y = m(x - p)^2 + k$.

ד. פשטו כל תבנית מוזזת, והראו כי היא אכן תואמת לתבנית הסטנדרטית.

3. התוכלו למצוא קשרים, בין התבנית המוזזת ובין התבנית הסטנדרטית של אותו הגרף?

אם סיימתם, נסו את כוחכם בעמוד 63, שאלה 1.

## אל התבנית המוזזת

נתונה התבנית הסטנדרטית $y = ax^2 + bx + c$
של פונקציה ריבועית.
המטרה: למצוא תבנית מוזזת $y = m(x-p)^2 + k$ תואמת
לתבנית הסטנדרטית.
הסיבה: בעזרת התבנית המוזזת קל יותר לשרטט סקיצה של הגרף.

1. ננסה תחילה למצוא תבנית מוזזת, עבור מקרה פרטי.

נתונה הפונקציה: $y = 2x^2 + 6x - 8$

א. נפשט את התבנית המוזזת הכללית $y = m(x-p)^2 + k$

עד שנגיע לצורה הסטנדרטית. $= m(x^2 - 2px + p^2) + k$

$= mx^2 - 2pmx + mp^2 + k$

ב. נשווה לפונקציה הנתונה: $y = 2x^2 + 6x - 8$

$mp^2 + k = -8 \qquad -2pm = 6 \qquad m = 2$

נציב $m = 2$ ב- $-2pm = 6$ ונקבל: $-4p = 6$

$\boxed{p = -1.5}$

נציב $m = 2$ ו- $p = -1.5$ ב- $mp^2 + k = -8$

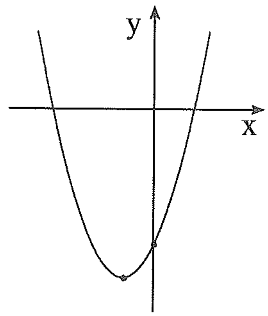
ונקבל: $2(-1.5)^2 + k = -8$

$\boxed{k = -12.5}$

מצאנו כי $m = 2$, והקודקוד: $(-1.5\ ,\ -12.5)$.

ג. השלימו את שיעורי הנקודות המסומנות בגרף, ואת התבנית המוזזת.

התבנית המוזזת: $y =$ ______________.




ד. פשטו את התבנית המוזזת, ובדקו אם קבלתם בחזרה את התבנית הסטנדרטית הנתונה.

2. חִזרו על התהליך עם הפונקציה הבאה $y = x^2 + x + \frac{1}{4}$.

- פשטו שנית את התבנית המוזזת, ובדקו אם הגעתם לתבנית המקורית.

3. נתונה הפונקציה $y = ax^2 + bx + c$.

נחפש תבנית מוזזת לפונקציה זו.

כבר ראינו שהתבנית של הפונקציה המוזזת נראית לאחר פישוט, כך:

$$y = mx^2 - 2mpx + mp^2 + k$$

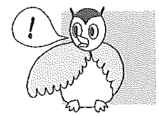
הפונקציה הנתונה: $y = ax^2 + bx + c$.

הראו כי מתקיימים הקשרים הבאים:

| | | |
|---|---|---|
| $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ | $p = -\frac{b}{2a}$ | $m = a$ |

4. א. נתונה הפונקציה $y = 2x^2 + 6x - 8$.

הביעו אותה בצורה מוזזת, ושרטטו סקיצה שלה.




**שימו לב!** אם נדע לחשב את $p$,
בעזרת $a$ ובעזרת $b$,
אז אין צורך בעל פה ללמוד
חישוב $k$ של הקודקוד.
כי הצבת $p$ במקום $x$ בתבנית,
נותנת את השיעור השני.

ב. חִזרו על התהליך עם הפונקציות:

$y = 2x^2 - 16x - 96$ $\qquad$ $y = -3x^2 + 6x$

5. הסתמכו על הנוסחה $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ ועל הדיון בדבר מספר נקודות האפס בעמודים 32, 31 והראו כי לפונקציה הריבועית $y = ax^2 + bx + c$

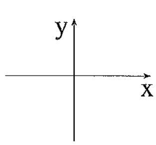
יש שתי נקודות אפס, אם $b^2 - 4ac > 0$.

יש נקודת אפס אחת, אם $b^2 - 4ac = 0$.

אין נקודות אפס, אם $b^2 - 4ac < 0$.

# בעקבות הפונקציה הריבועית

## 1. תעודת זהות

| המושג | השלימו: | תזכורת |
|---|---|---|
| תבנית סטנדרטית | $y = -2x^2 + 16x - 14$<br>$a =$ __ , $b =$ __ , $c =$ __ | $y = ax^2 + bx + c$ |
| תבנית יסודית | | $y = ax^2$ |
| קודקוד | | $p = -\frac{b}{2a}$<br>$k$ על פי הצבה |
| תבנית מוזזת | | $y = a(x-p)^2 + k$ |
| נקודות אפס | | $y = 0$ |
| נקודת חיתוך עם ציר y | | $x = 0$ |
| ציר סימטריה | | $x = p$ |
| תחומי עליה/ירידה | עליה:<br>ירידה: | גרף הפונקציה (סקיצה)<br> |
| תחום בו הפונקציה חיובית/שלילית | חיובית:<br>שלילית: | |

2. נתונות שלוש הצגות של פונקציה f, מן העמוד הקודם.

| התבנית המוזזת | התבנית הסטנדרטית | התבנית הכתובה כמכפלה |
|---|---|---|
| $f(x) = -2(x-4)^2 + 18$ | $f(x) = -2x^2 + 16x - 14$ | $f(x) = -2(x-7)(x-1)$ |

התוכלו להראות כי התבניות תואמות?

באילו מן ההצגות תוכלו למצוא, בלי להיעזר בהצגה אחרת:

א. מהו ציר הסימטריה?

ב. מהי נקודת הקודקוד?

ג. לאיזה כיוון פתוחה הפרבולה?

ד. האם יש לפרבולה נקודת מקסימום או מינימום?

ה. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

ו. מהי נקודת המפגש עם ציר ה-y?

ז. מהן נקודות האפס של הפונקציה?

ח. באילו תחומים הפונקציה חיובית, ובאילו תחומים היא שלילית?

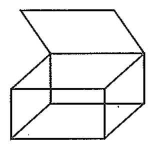
ט. מהו $f(10)$?

י. מהו x שעבורו $f(x) = 10$?

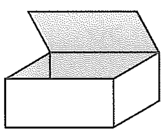
## פעילויות נוספות

### I. קופסאות תכשיטים

במפעל מכינים קופסאות לתכשיטים בצורת תיבות שבסיסן ריבוע. תחילה מכינים שלד של הקופסה מחוט מתכת גמיש שאורכו 120 סמ׳.



אחר כך מצפים את השלד בלוחות מתכת, ומקבלים קופסה עם מכסה (המכסה הוא בדיוק בגודל בסיס הקופסה).



את הקופסה מצפים לפי בחירת הלקוח בציפוי כסף.

מחירה של הקופסה נקבע לפי השטח שציפו בציפוי כסף.

תוכלו לקבל כיוון על ידי מגדלור עם *הארות* בעמוד 62.

1. מִצאו את מידות הקופסה, שמחירה הגבוה ביותר, לפי הבקשות הבאות של הלקוחות:
   א. מצפים את כל הקופסה בציפוי כסף.
   ב. מצפים את הקופסה ללא תחתיתה.
   ג. מצפים את הקופסה ללא התחתית וללא המכסה.
   ד. מצפים רק 2 לוחות צדדיים של הקופסה ואת המכסה.

2. האם יש קופסאות שמחירן שווה, לפי הבקשות השונות של הלקוחות? הסבירו כיצד מצאתם.

3. שאלו שאלה נוספת הקשורה במחירי הקופסאות, וענו עליה.

אם סיימתם, נסו את כוחכם בעמוד 63 שאלה 2.

## II. זורקים לגובה

דוד ויהונתן התחרו מי יזרוק כדור לגובה רב יותר.

x   מייצג את מספר השניות מרגע הזריקה.

g   פונקציה המתאימה לזמן (בשניות) את גובה הכדור של דויד (במטרים).

$$g(x) = -5x^2 + 10x + 2$$

h   פונקציה המתאימה לזמן (בשניות) את גובה הכדור של יהונתן (במטרים).

$$h(x) = -5x^2 + 11x + 1$$

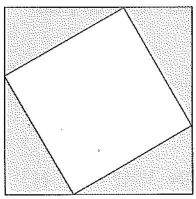
- מי ניצח בתחרות?
- האם התחרות היתה הוגנת?

אם אינכם יודעים כיצד לקבוע זאת, תוכלו לקבל כיוון על ידי מגדלור עם *הארות* בעמוד 62.

אם סיימתם, נסו את כוחכם בעמוד 63 שאלה 3.

## III. ריבוע בתוך ריבוע

המורה למתמטיקה חילקה דפים ריבועיים במידות 10ס"מ x 10ס"מ, וביקשה מן התלמידים לגזור מן הפינות משולשים ישרי זווית חופפים, כך שהחלק הנשאר יהיה ריבוע, כמתואר בשרטוט.



- הוכיחו כי אכן נוצר, בדרך זו, ריבוע.

נסמן ב-$x$ את אחד הניצבים של המשולש.
נסו לשער תשובות לשאלות הבאות. נמקו את השערתכם.

תוכלו לקבל כיוון על ידי מגדלור עם *הארות* בעמוד 62.

- מה צריך להיות $x$, כדי ששטח הריבוע הפנימי יהיה **הקטן** ביותר? מה יהיה אז שטחו?

- מה צריך להיות $x$, כדי שסכום שטחי המשולשים יהיה **הגדול** ביותר? מה יהיה אז שטחם?

1. נסמן ב-$f$ את הפונקציה המתאימה ל-$x$ את שטח הריבוע הפנימי, וב-$g$ את הפונקציה המתאימה ל-$x$ את סכום שטחי המשולשים.

א. נסו לשרטט את הסקיצות של $f$ ושל $g$, באותה מערכת צירים.

ב. כתבו תבניות ל $f$ ול-$g$, והעבירו אותן לצורה מוזזת.

ג. שרטטו את הגרפים של $f$ ושל $g$, בהתאם לצורה המוזזת ו/או בעזרת המחשב.

2. שרטטו את הגרף של $y = f(x) + g(x)$. מה קיבלתם? התוכלו להסביר?

## IV. התעמלות של גרפים

בפעילות זו ננסה למצוא את הקשר בין תבניות הכתובות כמכפלה לבין צורת הגרף שלהן.

1. א. שרטטו את הגרפים של הפונקציות הכתובות כמכפלה במערכת צירים אחת, ואחר התבוננו בכל אחת בנפרד.

$$y = (x + 3)(x + 1)$$

$$y = (x + 3)(x + 1)(x - 1)$$

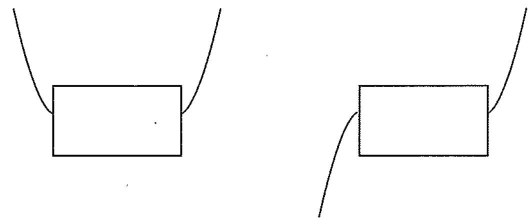
$$y = (x + 3)(x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

ב. חקרו את הנקודות הבאות:

- מה תוכלו לומר על נקודות האפס של הפונקציות?
- כיצד ישתנה הגרף, אם נוסיף למכפלה גורם מהצורה $(x - a)$?
- מה הקשר בין מספר הגורמים השונים מצורה זו, לבין מספר נקודות המפנה שלה הגרף?

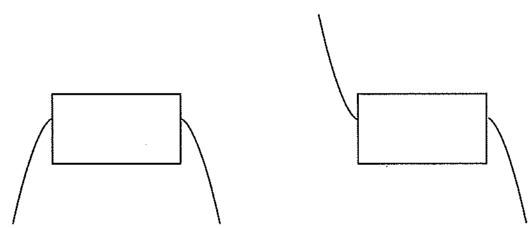
2. פתחו סוגריים ופשטו כל תבנית.

3. לפניכם דוגמאות של גרפים המוסתרים בחלקם על ידי מלבן. בתוך המלבן גרף הפונקציה **משנה כיוון מספר פעמים**, אבל מחוץ למלבן הוא "שולח ידיים".



רשמו שתי דוגמאות של תבניות לכל מקרה.

4. התוכלו לתת דוגמאות למקרים הבאים?



**אתגר**

5. לאיזה "מצב ידיים" שייכת כל אחת מהפונקציות הבאות.
תחילה ענו ונמקו, ואחר בדקו במחשב.

א. $y = x^5 - 2x$

ב. $y = 5x^2 - x^4$

ג. $y = 3x(1 - x)(3 + x)(2 - x)$

ד. $y = 3x(1 - x)(3 + x)$

ה. $y = (x^2 - 1)(5x - 2x^2)$

# הארות

1. לפעילות: "קופסאות תכשיטים".

אם x מציין את אורך צלע הבסיס

אז תבנית לגובה היא $\frac{120 - 8x}{4}$. הסבירו מדוע.

פשטו את התבנית.

עתה תוכלו לרשום תבניות לכל אחד מן השטחים המבוקשים.

מעמוד 57

2. לפעילות: "זורקים לגובה".

המנצח בתחרות הוא זה שכדורו הגיע לגובה רב יותר.
התחרות הוגנת אם התנאים ההתחלתיים שווים.
בִּדקו אם שניהם זרקו את הכדור מאותו גובה.

מעמוד 58

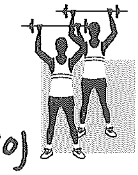
3. לפעילות: "ריבוע בתוך ריבוע".

א. דוגמאות לשיקולים: מה יהיה שטח הריבוע הפנימי כאשר $x = 0$?
מה קורה לשטח הריבוע כאשר x הולך וגדל?
מהו ה-x הגדול ביותר האפשרי?

ב. כדי למצוא תבנית לשטח הריבוע הפנימי, אפשר להשתמש במשפט פיתגורס.

ג. שטח משולש ישר זווית אפשר למצוא על ידי חצי מכפלת הניצבים.
אפשר למצוא את סכום שטחי המשולשים, גם על ידי הרכבתם ל-2 מלבנים.

מעמוד 59



# נסו את כוחכם

1. לפעילות: "סל של דוגמאות".

התוכלו למצוא, ללא עזרת מחשב, תבנית מוזזת לתבניות הבאות:

א. $y = x(x - 10)$

ב. $y = x(x - 10) + 16$

מעמוד 50

2. לפעילות: "קופסאות של תכשיטים".

מחיר ס"מ אחד של ציפוי כסף הוא 2 ש"ח.
מה מחירה של הקופסה היקרה ביותר, לפי כל אחת מאפשרויות הציפוי?

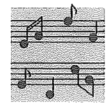
מעמוד 57

3. לפעילות: "זורקים לגובה"

א. מי לדעתכם זרק את הכדור בכוח רב יותר?
איזה מספר בתבנית מראה זאת?

ב. איזה כדור הגיע יותר מאוחר לאדמה? נמקו היטב.

מעמוד 58



## מי משלושתן יפה יותר?

א. התבנית המוזזת
$y = a(x-p)^2 + k$,
התחילה חורזת
את מעלותיה
לפני חברותיה:

ב. ב-$a$ אם מסתכלים,
מיד מגלים,

אם הגרף מכווץ או מתוח.

ונוסף לזאת
ניתן לגלות,
לאיזה כיוון הוא פתוח.

ג. הצצה אחת על הפרמטרים האחרים,
מגלה את מקומו במערכת הצירים.
וגם תכונות נוספות נדע,
כמו תחומי עליה וירידה.

ד. אמרה התבנית הסטנדרטית:
$y = ax^2 + bx + c$
את אמנם שרמנטית
ופשוטה אני,
אך זהו יתרוני.

ה. בפישוט של תבנית ריבועית,
אני הצורה הסופית.
וחלק מן המעלות שמנית,
נמצאות גם בי בתבנית.
ויש בי יתרון שאין אצלך,
רואים היכן הגרף את ציר ה-$y$ חותך.

ו. וכדי להגיע לשאר המידע,
יש לעשות מעט עבודה:

חישוב $p = -\frac{b}{2a}$ לפי הנוסחה,

ומציאת $k$ על ידי הצבה.

ז. תבנית חדשה לפתע הביעה:
כל השבח לי מגיע.
אני כתובה כמכפלה,
$y = a(x-r)(x-s)$
את יתרוני אני בכך מגלה.

ח. מלבד מעלותי האחרות,
את נקודות האפס אפשר לראות.
ואת ציר הסימטריה בקלות נמצא,
אם בין $r$ ו-$s$ נחשב ממוצע,
או על הציר בין שתיהן,
את נקודת האמצע נסמן.

ט. לבסוף הגיעו למסקנות,
כי לכל אחת יתרונות,
ויש גם הרבה מן המשותף,
כמו $a$ וכמו הגרף.

1. בעמוד 21 תמצאו חמש פונקציות בהצגה המוזזת.

א. פשטו את התבניות והגיעו לצורה הסטנדרטית.
רשמו לגבי כל תבנית $a =$ ____ , $b =$ ____ , $c =$ ____.

ב. אילו מן הנקודות המסומנות בגרפים אפשר למצוא ללא חישובים בעזרת התבנית הסטנדרטית? נמקו!

ג. איזו מבין התבניות הסטנדרטית והמוזזת נוחה יותר לשרטוט הגרף? נמקו!

2. לפניכם "סיפורים" שונים.

- תרגמו אותם לתבניות (אל תתייחסו לתחום הבעיה).
- מיינו אותם לקבוצות, לפי סוגי התבניות המתאימות:

  תבנית ריבועית, תבנית קווית, תבנית אחרת.
- לגבי כל תבנית קווית רשמו: $a =$ ____ , $b =$ ____
  ונסו לשרטט סקיצה.
- לגבי כל תבנית ריבועית רשמו: $a =$ ____ , $b =$ ____ , $c =$ ____
  ונסו לשרטט סקיצה.

א. התאמה $f$ בין אורך צלע של ריבוע להיקפו.

ב. התאמה $g$ בין אורך צלע של ריבוע לשטחו.

ג. התאמה $h$ בין אורך צלע של ריבוע לאורך אלכסונו.

ד. התאמה $j$ בין מספר **לסכום** של ריבועו עם ריבוע העוקב לו.

ה. התאמה $k$ בין מספר **למכפלת** ריבועו עם ריבוע העוקב לו.

ו. התאמה $l$ בין מספר **להפרש** בין ריבועו לריבוע העוקב לו.

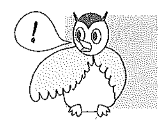
ז. בחרתי מספר $x$, כפלתי אותו במספר גדול ממנו ב-5, והוספתי למכפלה 4.
הפונקציה $m$ מתאימה למספר שבחרתי את התוצאה.

ח. היקפו של מלבן 20 ס"מ.
הפונקציה n מתאימה לאורך אחת מצלעות המלבן את שטחו.

ט. שטחו של מלבן 20 סמ"ר.
הפונקציה p מתאימה לאורך אחת מצלעות המלבן את היקפו.

י. הפונקציה q מתאימה למספר הקודקודים במצולע את מספר האלכסונים היוצאים מכל קודקוד.

יא. הפונקציה r מתאימה למספר הקודקודים במצולע את מספר האלכסונים במצולע.




שימו לב! כשכופלים את מספר האלכסונים היוצאים
מכל קודקוד, במספר הקודקודים,
נִספַּר כל אלכסון פעמיים.

יב. מסמנים נקודות על דף ומחברים כל שתיים מהן בקטע.
הפונקציה s מתאימה למספר הנקודות את מספר הקטעים.

יג. כל תלמיד שסיים את בית הספר היסודי, נתן את תמונתו לכל התלמידים האחרים בכיתתו.
הפונקציה t מתאימה למספר התלמידים את מספר התמונות שחולקו.

יד. נערך טורניר שחמט, כל משתתף משחק עם כל משתתף אחר.
הפונקציה y מתאימה למספר המשתתפים את מספר משחקי השח הנערכים.

3. נתונות הפונקציות הבאות:

$$f(x) = x^2 - 8x + 3$$
$$g(x) = 2 - 2x^2 + 12x$$
$$h(x) = x^2 + x - 1$$

א. מהי משוואת ציר הסימטריה של כל אחת מהפונקציות.

ב. מִצאו זוג נקודות סימטריות על הגרף של כל אחת מהפונקציות.

4. רִשמו פונקציה ריבועית שציר הסימטריה שלה הוא $x = 3$.
כמה פונקציות ריבועיות כאלה תוכלו למצוא?

5. נקודות האפס של פונקציה ריבועית הן $x = 1$ ו- $x = 3$.
מִצאו את משוואת ציר הסימטריה שלה.

6. מִצאו את נקודות האפס ואת משוואת ציר הסימטריה, לכל אחת מהפונקציות הריבועיות הבאות:

א. $y = (x - 2)(x - 6)$

ב. $y = (2x - 4)(x + 2)$

ג. $y = (7 - x)(x + 3)$

7. ציר הסימטריה של פונקציה ריבועית הוא $x = -4$.
גרף הפונקציה עובר דרך ראשית הצירים $(0 , 0)$. מִצאו נקודה נוספת על הגרף.

8. מִצאו את שיעורי הקודקוד של הפונקציות הריבועיות הבאות:
(אינכם חייבים להשתמש בנוסחה עבור שיעור $y$ של הקודקוד)

א. $y = 2x^2 + 3x - 4$

ב. $y = 5x^2 + 3$

ג. $y = -x^2 + 4x$

ד. $y = (x + 1)(x + 2)$

ה. $y = 2x(5 - x)$

ו. $y = 1 + \frac{1}{2}x^2 - x$

9. חִזרו על הפעילות "בעקבות הפונקציה הריבועית" (עמוד 55) עם הפונקציה $y = x^2 - 7x + 8$ ועם הפונקציה $y = 2x^2 + 6x + 5$.

10. נתונה פונקציה ריבועית. בנקודת הקודקוד שלה, $x = 2$.
הנקודות $(0 , 1)$ , $(-3 , 4)$ נמצאות על גרף הפונקציה.
מִצאו עוד שתי נקודות השייכות לגרף הפונקציה.

11. נתונה פונקציה ריבועית. הנקודה $K(1\ ,\ 3)$ היא קודקודה. ידוע כי הנקודה $E(2\ ,\ 5)$ נמצאת על גרף הפונקציה. הסבירו מדוע הנקודות הבאות אינן יכולות להימצא על גרף הפונקציה.

א. $(2\ ,\ 7)$ ב. $(-2\ ,\ 5)$ ג. $(0\ ,\ 4)$ ד. $(-1\ ,\ 3)$

12. באיזה רביע נמצא קודקוד הגרף של כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. $y = (x + 4)(x - 2)$ ד. $y = -x^2 + 2x + 2$

ב. $y = (x - 5)(x - 3)$ ה. $y = 2x^2 + 6x - 4$

ג. $y = (5 - x)(x - 3)$ ו. $y = x + 2x^2 + 3$

13. שרטטו סקיצות של גרפים של הפונקציות הבאות:

א. $y = 2x^2 + 2x - 4$

ב. $y = -3x^2 - 6x + 9$

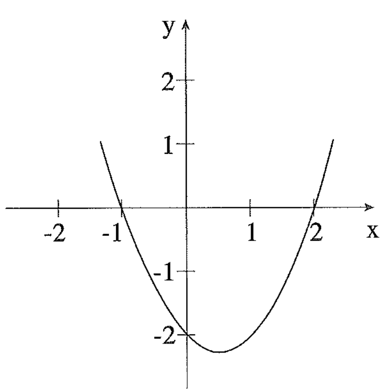
ג. $y = x^2 - 4x + 4$

14. לפניכם גרף של פונקציה ריבועית מן המשפחה $y = x^2 + bx + c$ בה $a = 1$.

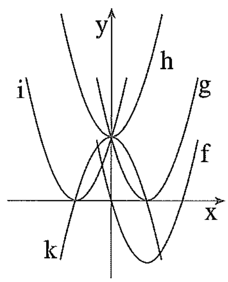
א. קראו מן הגרף את ערכו של c.

ב. מִצאו בעזרת הגרף את ערכו של b.

ג. רִשמו תבנית לפונקציה ובְדקו, על-ידי הצבה, של שיעורי אחת מנקודות הגרף.



15. התאימו גרף לתבנית.




א. $y = x^2 - 2x + 1$

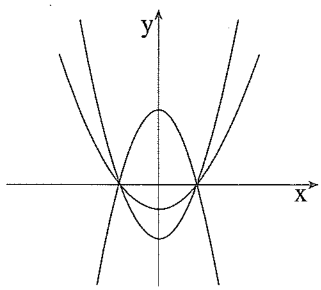
ב. $y = 1 - x^2$

ג. $y = x^2 - 2x$

ד. $y = 1 + x^2$

ה. $y = (x + 1)^2$

16. לפניכם שלוש פונקציות ריבועיות בהצגתן האלגברית והגרפית.




$f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$

$g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$

$h(x) = a_3x^2 + b_3x + c_3$

א. סדרו את המספרים $a_3, a_2, a_1, 0$
לפי סדר עולה.

ב. סדרו את המספרים $c_3, c_2, c_1, 0$
לפי סדר עולה.

ג. מהו לדעתכם הסדר בין המספרים $b_3, b_2, b_1, 0$?

**אתגר**

17. מִצאו את נקודות האפס של הפונקציות הבאות:

א. $y = (x - 2)(x + 5)(x - 1)$

ב. $y = x(x^2 - 9)$

ג. $y = x^4 - x^2$

ד. $y = x^4 - x$

- נסו לשרטט סקיצה של גרף ולקבוע את התחום שבו כל פונקציה חיובית.

## שימרו על כושר

1. מְצאו את שיעורי הקודקוד של הפונקציות הריבועיות הבאות.

א. $y = \frac{x(x-2)}{3} + \frac{x}{6}$

ב. $y = \frac{x^2-5}{5} - \frac{x^2+10x}{10}$

ג. $y = (x-2)^2 + (x+5)^2$

ד. $y = (x-3)(2x-8)$

ה. $y = (x-6)^2$

ו. $y = 5(x-4)^2 + 30x$

ז. $y = (x+5)(x-4)$

ח. $y = \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(x-1)^2}{3}$

ט. $y = 3 - \frac{(x-1)^2}{4}$

י $y = -(5-x)^2 + 1$

יא. $y = -2x(x+3) + 5(x+3)$

יב. $y = x^2$

יג. $y = (x-4)(x+4)$

יד. $y = 4 - 2(x+3)^2$

**אתגר**

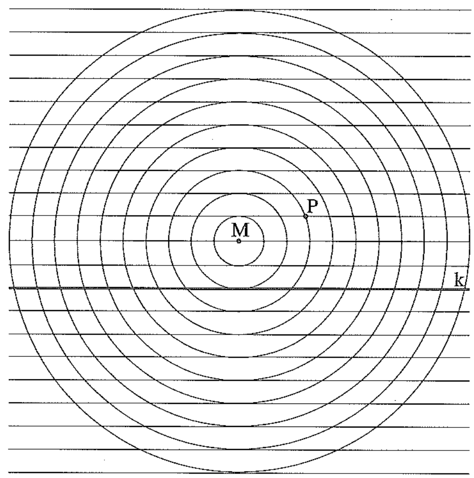
טו. $y = \frac{x^4-1}{x^2+1}$

2. השתמשו בנוסחאות בעמוד 54 כדי לדעת כמה נקודות אפס יש לכל אחת מן הפונקציות שלמעלה.

3. פתחו סוגרים ופשטו את התבניות שיש בהן סוגריים בעמוד 45.

## קריאה מ~~ע~~הנה

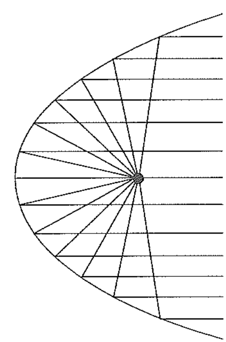
לפניכם שרטוט של מעגלים בעלי מרכז M וישרים.
אחד הישרים מודגש ומסומן ב-k.
המרחק בין כל שני מעגלים סמוכים הוא יחידה אחת,
וכן המרחק בין כל שני ישרים סמוכים הוא יחידה.




בשרטוט מסומנת נקודה P.
נקודה זו מרוחקת במידה שווה מן הישר k וממרכז המעגל. מה המרחק?
מְצאו נקודות נוספות המרוחקות במידה שווה מן הישר k
ומן הנקודה M.
איזו צורה התקבלה?

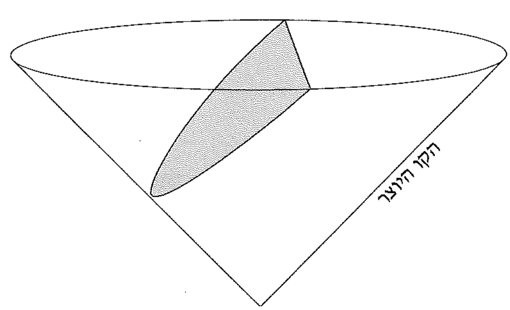
פרבולה היא אוסף של כל הנקודות המרוחקות במידה שווה
מנקודה נתונה ומישר נתון.
הנקודה נקראת **מוקד** הפרבולה והישר נקרא **מדריך**.
זוהי אחת מהגדרות הפרבולה ובתור כזאת היא
"יצור גיאומטרי".
כבר היוונים ידעו את תכונותיה הגיאומטריות של הפרבולה.
לדוגמה: ציר הסימטריה של הפרבולה עובר תמיד דרך המוקד התוכלו להסביר
והוא מאונך למדריך. מדוע?

מסופר שארכימדס הצליח בעזרת ידע זה לשרוף את אוניות האויב של ארצו, הוא בנה מול הים מראות שצורתן פרבולה.
אחת התכונות הגיאומטריות של הפרבולה היא כי קרן שמש הפוגעת בה בכיוון מאונך למדריך שלה חוזרת אל המוקד.
לפי הסיפור, ארכימדס השתמש בתכונה זו,
עם תכונות אלגנטיות נוספות של הפרבולה,
לערוך מראות לאורך החוף, כך שהן מיקדו את
חום השמש על האוניות הרומיות שהיו,
כמובן עשויות עץ.

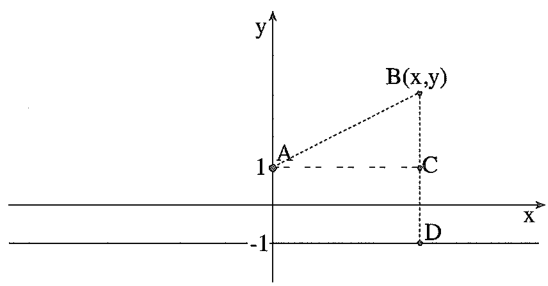


החלק הפנימי של פנס של מכונית עשוי ממראה הבנויה כפרבולה במרחב.
הפעם מנצלים את התכונה בכיוון הפוך.
האור היוצא מן הפנס (המוקד) מגיע אל המראה וחוזר בקווים אופקיים וכך הוא מתפזר פחות.

היוונים ידעו גם, כי כאשר חותכים חרוט בקו מקביל לקו היוצר של החרוט (ראה שרטוט) מקבלים מישור חיתוך שצורתו פרבולה.



רק בשלב הרבה יותר מאוחר של התפתחות המתמטיקה,
בעקבות הכנסת מערכת הצירים על ידי דה קארט (1596-1650),
בדקו איזו תבנית אלגברית מתקבלת לגרף הפרבולה.
נברר זאת בעזרת מקרה פרטי.
השאלה: מהי משוואת הפרבולה, שנקודותיה רחוקות
במידה שווה מן הנקודה (0 , 1) ומן הישר $y = -1$?




נניח כי $B(x , y)$ היא נקודה כזו.
נמצא את מרחק B מ (0 , 1).
לפי משפט פיתגורס:
$d^2 = x^2 + (y - 1)^2$

מרחק B מן הישר $y = -1$ היא $y + 1$.

מהם הקטעים המסמנים
את המרחקים השווים?
היכן המשולש ישר הזווית?
התוכלו להביע את אורכי
ניצביו?
הסבירו!

אם $BD = BA$ אז גם $BD^2 = BA^2$.

לכן: $(y + 1)^2 = x^2 + (y - 1)^2$

נפשט: $y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 2y + 1$

$$4y = x^2$$

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

קיבלנו תבנית של פונקציה ריבועית.

חִזרו על התהליך לגבי
הנקודה $(0 , p)$
והישר $y = -p$

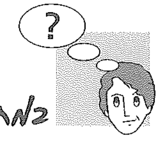
ואומנם, בכל פעם שנסדר את מערכת הצירים
כך שציר ה-x יקביל למדריך, נקבל תבנית
מהצורה $y = ax^2 + bx + c$,
עבור כל הנקודות שמרחקיהן מן המוקד
והמדריך שווים.
ולהיפך, לכל גרף של פונקציה ריבועית
אפשר למצוא מוקד ומדריך, כך שכל נקודה
על הגרף מקיימת את התכונה:
מרחקה מן המוקד שווה למרחקה מן המדריך.

התוכלו לנמק מדוע?

שרטטו את גרף הפונקציה
$y = x^4$.
התוכלו להסביר מדוע גרף
זה אינו פרבולה?

## שאלה

מִצאו את התבנית לפרבולה שכל הנקודות עליה מרוחקות
במידה שווה מן הנקודה $(2, 3)$ ומן הישר $y = 1$.




## במחשבה לאחור

1. תנו דוגמה לפונקציה ריבועית בהצגה מוזזת.
רשמו אותה פונקציה בהצגה סטנדרטית.

2. רשמו את הפונקציה $y = 2(x - 4)(x + 2)$ הכתובה כמכפלה, בהצגה סטנדרטית ובהצגה מוזזת.

3. אילו מן ההצגות: מוזזת, סטנדרטית, מפורקת לגורמים (כתובה כמכפלה) עדיפה בעיניכם. נמקו היטב.

4. האם אפשר למצוא בכל הצגה תשובה לשאלות הבאות? אם כן כיצד?

א. מהו ציר הסימטריה?

ב. מהי נקודת הקודקוד?

ג. לאיזה כיוון פתוחה הפרבולה?

ד. האם יש לפרבולה נקודת מקסימום או נקודת מינימום?

ה. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

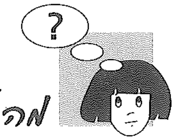
ו. מהי נקודת המפגש עם ציר ה-y?

ז. מהן נקודות האפס של הפונקציה?

ח. באילו תחומים הפונקציה חיובית או שלילית?

ט. מהו $f(1000)$?

י. מהו $x$ שעבורו $f(x) = 1000$?




# מה למדנו

**למדנו להכיר את תפקידי הפרמטרים בפונקציה ריבועית בהצגה סטנדרטית $f(x) = ax^2 + bx + c$.**

### תפקידי a

a מן ההצגה הסטנדרטית שווה ל-m בהצגה המוזזת $f(x) = m(x - p)^2 + k$,
לכן לשניהם אותם תפקידים. (ראו תפקידי m בעמוד 48).

### תפקידי c

$(0 , c)$ היא נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה-y,
כי בהצבת $x = 0$ בתבנית $y = ax^2 + bx + c$ מתקבל $y = c$.

### תפקידי a ו-b

$-\dfrac{b}{2a}$ הוא שיעור x של הקודקוד של הפרבולה.

את שיעור ה-y נמצא על ידי הצבת שיעור ה-x בפונקציה, כלומר $y = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

$x = -\dfrac{b}{2a}$ היא משוואת ציר הסימטריה של הפרבולה.

**למדנו לעבור מן הצורה הסטנדרטית לצורה המוזזת.**

אחרי שנמצא את ערכי p ו-k באמצעות a b ו-c (ראו תפקידי a ו-b),
נציב אותם ואת a בתבנית המוזזת $f(x) = m(x - p)^2 + k$.

**למדנו להכיר את תפקידי הפרמטרים בצורה הכתובה כמכפלה** $y = a(x - r)(x - s)$.

### תפקידי a

a מן ההצגה הסטנדרטית שווה ל-m בהצגה המוזזת $f(x) = m(x-p)^2 + k$,
לכן לשניהם אותם תפקידים. (ראו תפקידי m בעמוד 48).

### תפקידי r ו-s

$(r , 0)$ ו-$(s , 0)$ הן נקודות האפס של הפונקציה.

$x = \frac{r+s}{2}$ היא משוואת ציר הסימטריה, וכן שיעור x של קודקוד הפרבולה.

# 4. נקודות אפס

## דף קריאה מפחיד ביותר

ראינו כבר איך נוכל למצוא את נקודות האפס של פונקציה ריבועית הכתובה כמכפלה. למשל: $f(x) = 2(x-1)(x+3)$.

כמו כן למדנו למצוא את נקודות האפס, כאשר הפונקציה בעלת תבנית מוזזת. למשל: $f(x) = 4(x-3)^2 - 4$. התרצו לנסות?

אבל . . . איך נוכל למצוא את נקודות האפס של פונקציה ריבועית בעלת תבנית סטנדרטית?! למשל: $g(x) = 3x^2 - 7x + 4$.

נברר מה אנו כבר יודעים:

1. את נקודות האפס של התבנית המוזזת:

$$f(x) = m(x-p)^2 + k$$

$$0 = m(x-p)^2 + k$$

.

.

.

השלימו את השלבים החסרים.

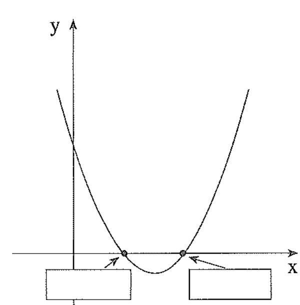
$$x = p \pm \sqrt{\frac{-k}{m}}$$

האם $\frac{-k}{m}$ הוא תמיד מספר שלילי?

עבור אילו ערכים של k ו-m

$\frac{-k}{m}$ אינו מספר שלילי?

מה קורה לנקודות האפס כאשר מתחת לשורש יש מספר שלילי?




השלימו את שיעורי הנקודות בגרף בעזרת k , p ו-m.

2. אנו יודעים לעבור

מתבנית מוזזת $\xrightarrow{\text{אל}}$ תבנית סטנדרטית

מ- $f(x) = m(x-p)^2 + k \xrightarrow{\text{אל}} f(x) = ax^2 + bx + c$

$$f(x) = mx^2 + (-2mp)x + (mp^2 + k)$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$m = a$$

לכן $f(x) = ax^2 + (-2ap)x + (ap^2 + k)$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ b & c \end{array}$$

$$-2ap = b \qquad c = ap^2 + k$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{p = -\frac{b}{2a}}$$

$$k = c - ap^2$$

$$= c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$= c - a \cdot \frac{b^2}{4a^2}$$

$$= c - \frac{b^2}{4a}$$

$$\boxed{k = \frac{4ac - b^2}{4a}}$$

ידוע מ- 1 כי נקודות האפס הן:

$$x = p \pm \sqrt{\frac{-k}{m}}$$

נציב ונקבל:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) : a}$$

נפתח סוגריים ונחלק ב-a:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

הוצאת שורש:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

מצאנו נוסחה לחישוב נקודות האפס של פונקציה הנתונה בתבנית סטנדרטית.

## שאלות

1. בחנו את הנוסחה לחישוב נקודות האפס ואשרו את הממצא לגבי מספר נקודות האפס מעמוד 54.

2. מִצאו את נקודות האפס של הפונקציה $y = x^2 - 6x + 8$.
   שרטטו סקיצה של הפונקציה, וּמִצאו באילו תחומים הפונקציה עולה, יורדת, חיובית, שלילית.

# בעקבות נקודות אפס I

## משוואה ריבועית

משוואה ריבועית היא משוואה מהצורה
$ax^2 + bx + c = 0$ כאשר $a \neq 0$.
פתרון של משוואה ריבועית, כמו פתרון של
כל משוואה במשתנה אחד, הוא מספר
שאם נציב אותו במשוואה, נקבל פסוק אמת.

פתירת משוואה ריבועית, שקולה למציאת
נקודות האפס של הפונקציה הריבועית
המתאימה; $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

התוכלו להסביר מדוע?

לכן הנוסחה למציאת הפתרונות של משוואה מהצורה:
$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

היא: $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

פתרו את המשוואה:
$2x^2 + 3x - 2 = 0$

לתבנית $b^2 - 4ac$ קוראים **הדיסקרמיננטה**
של המשוואה הריבועית, ומסמנים אותה ב- $\Delta$ .
תוצאת ההצבה של $a$ , $b$ ו-$c$ בתבנית $b^2 - 4ac$,
קובעת את מספר הפתרונות של המשוואה.

התוכלו להסביר כיצד?

כדי לפתור משוואה ריבועית, כדאי תחילה
למצוא את ערך ה-$\Delta$ .
אם $\Delta < 0$ יודעים שאין פתרון.

מִצאו את $\Delta$ עבור:
$x^2 + 10x + 25 = 0$

אם $\Delta = 0$ יודעים שיש פתרון אחד $x = -\frac{b}{2a}$.

התוכלו להסביר מדוע?

אם $\Delta > 0$ נחשב $\sqrt{\Delta}$, ונכניס את התוצאה לזכרון
בעזרת המקש $\boxed{\text{M in}}$ ונשלוף את $\sqrt{\Delta}$ עבור שני הפתרונות
בעזרת המקש $\boxed{\text{MR}}$ .

נסו זאת עבור:
$5x^2 - x - 3 = 0$

# בעקבות נקודות אפס II

## כאשר המשוואה איננה מסודרת

לדוגמה: $x(x - 2) = 3$
מחפשים תבנית שקולה לראשונה
מהצורה $ax^2 + bx + c = 0$.
עושים זאת על ידי פישוט ועל ידי פעולות
מותרות על שני האגפים.

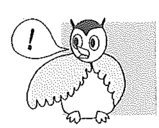
התוכלו למצוא
למשוואה $x(x - 2) = 3$
תבנית שקולה כזו?
פתרו את המשוואה,
והציבו את הפתרונות
במשוואה המקורית
כדי לבדוק אם
קבלתם בכל פעם פסוק
אמת.

### שאלה

1. פתרו, ובדקו את פתרונותיכם על ידי הצבה בתבנית המקורית.

א. $x^2 - 2x = x + 4$

ב. $(x + 2)(x - 4) = 3 - 3x^2$



**שימו לב!**
פתרונות של משוואה אינם חייבים
להיות מספרים שלמים.

# בעקבות נקודות אפס III

## אי שוויון ריבועי

כמו שפתרון משוואה ריבועית שקול למציאת נקודות האפס של הפונקציה הריבועית המתאימה, כך פתרון אי-שוויון ריבועי שקול למציאת תחום החיוביות או השליליות של הפונקציה הריבועית המתאימה.

דוגמה: $-x^2 + 4x - 3 < 0$

המספרים שהצבתם תיתן פסוק אמת, הם אותם המספרים השייכים לתחום השליליות של הפונקציה:

$f(x) = -x^2 + 4x - 3$

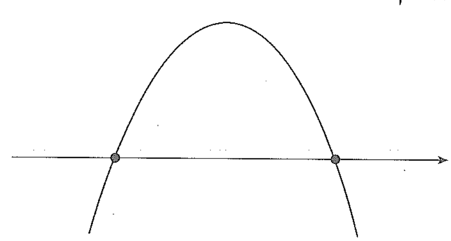
הסבירו מדוע.

לכן על פי נקודות האפס $x_1 = 1$ ו $x_2 = 3$

ועל פי a נשרטט סקיצה של הפונקציה.

בדקו את נקודות האפס

הסקיצה:



רשמו את נקודות האפס על ציר ה-X. מדוע לא שרטטנו את ציר y?

וקבוצת האמת:

$x < 1 \quad , \quad x > 3$

מהו פתרון התבנית $-x^2 + 4x - 3 > 0$?

## שאלות

1. פתרו את אי השוויון

א. $x^2 - 3x - 10 > 0$

ב. $2x^2 > 10x - 12$

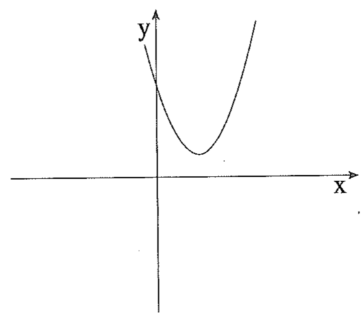
2. כל אחד מהגרפים הבאים מתאר פונקציה מהצורה

$y = ax^2 + bx + c$

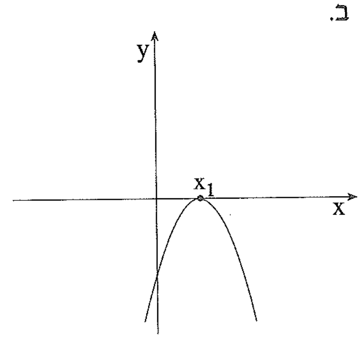
לכל גרף רשמו את קבוצת האמת של

אי השוויון המתאים: $ax^2 + bx + c < 0$.

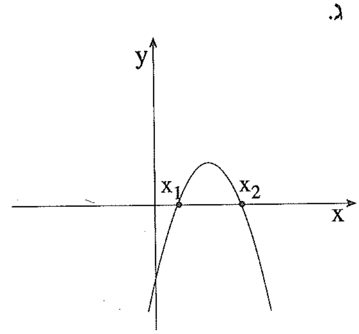
א.



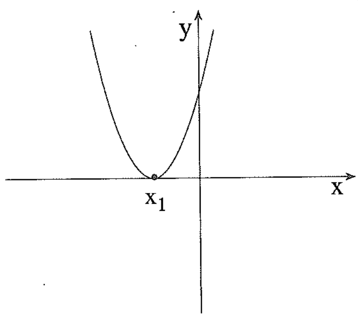

ב.



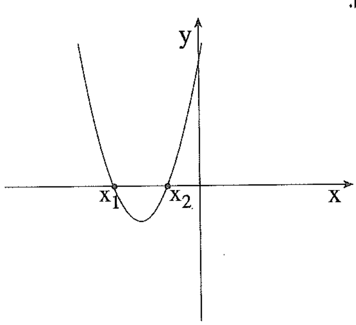

ג.



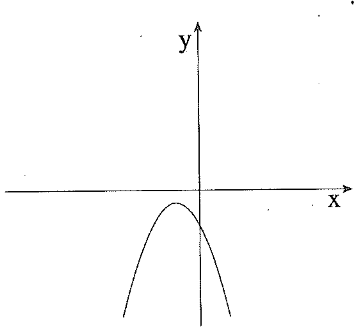

ד.




ה.




ו.



## פעילויות נוספות

### I. זורקים אבנים

מקצה גגו של בית, שגובהו 25 מ׳ נזרקה אבן כלפי מעלה, והיא חזרה ונפלה על האדמה.

f היא פונקציה המתאימה למספר השניות (x) שחלפו מאז נזרקה האבן, את גובהה מעל פני האדמה.

f מתוארת בקירוב על ידי התבנית $f(x) = -5x^2 + 20x + 25$.

1. מהו הגובה המקסימלי אליו הגיעה האבן?
2. כעבור כמה שניות הגיעה האבן לאדמה?
3. באיזה פרק זמן היה מרחק האבן מהאדמה גדול מ-25 מ׳?
4. במשך איזו שנייה היתה התקדמות האבן הגדולה ביותר?
5. מהו תחום הפונקציה f?
6. נתונה פונקציה g שיש לה אותה תבנית כמו ל-f, אבל תחומה הוא כל המספרים הממשיים.
מהן נקודות האפס של g? התוכלו לתת להן משמעות בקשר לבעיה?
7. חִזרו על השאלות הקודמות, אם גובה הבית היה 60 מ׳.
התבנית המתארת את הפונקציה במקרה זה היא $k(x) = -5x^2 + 20x + 60$.

## II. הפרש של פונקציות

בפעילות זו ננסה להבין את הקשר בין פונקציות ריבועיות ובין פתרון משוואות ריבועיות המורכבות מפונקציות אלו.
לדוגמה:
נתונה המשוואה $x(x-2)=3$
התוכלו לפתור את המשוואה בדרך גרפית?
נסו לתחילה לעשות זאת בדרכים שונות, לפני שתמשיכו בפעילות.

1. יש מספר דרכים לפתור את המשוואה $x(x-2)=3$ בדרך גרפית.
   א. נשרטט את הגרף של הפונקציה $f(x)=x(x-2)$ ,
   ונברר מהם המקורות שתמונתם 3, על ידי הילוך על גרף.

   ב. נשרטט את הגרפים של הפונקציות $f(x)=x(x-2)$ ו-$g(x)=3$,
   ונשאל מהם נקודות החיתוך של f ו-g.

   ג. נשרטט את גרף הפונקציה $k(x)=f(x)-g(x)$,
   ( או את גרף הפונקציה $k(x)=f(x)-3$ )
   ונשאל מהן נקודות האפס של k.

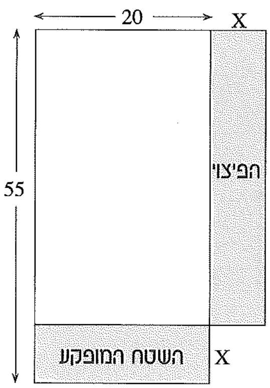
   הסבירו כל אחת מן הדרכים ופעלו לפיה (אם עדיין לא עשיתם זאת).
   האם קיבלתם בכל הדרכים אותם פתרונות?

2. נתונות שתי פונקציות $f(x)=4-x^2$ ו- $g(x)=2x+1$.
   א. שרטטו את שני הגרפים במערכת צירים אחת במחשב.
   ב. שרטטו את גרף ההפרש $k(x)=f(x)-g(x)$.
   ג. האם תוכלו למצוא קשר בין נקודות החיתוך של f ו-g, לבין נקודות האפס של k? הסבירו.
   ד. איך ניתן למצוא את תחומי החיוביות והשליליות של k, בעזרת f ו-g?
   ה. שרטטו את גרף ההפרש $p(x)=g(x)-f(x)$.
   כתבו כל מה שתגלו על הפונקציה p, והקשר שלה עם k.
   ו. מהו פתרון המשוואה $4-x^2=2x+1$ ?

אם סיימתם, נסו את כוחכם בעמוד 92 שאלה 1.

## III. בעיית הפיצוי

ליוסף מזרחי חלקת אדמה שמידותיה
55 מ' X 20 מ'
עקב סלילת כביש מדרום לחלקה
נאלצת המדינה להפקיע חלק משטח החלקה.




המדינה מציעה לו פיצוי ממזרח לחלקה.
(ראו שרטוט.)

נחקור את שלוש השאלות המרכזיות:

- איזה שינוי של החלקה יהיה הוגן (שני הצדדים לא יפסידו)?
- איזה שינוי של החלקה יהיה לטובת מר מזרחי?
- איזה שינוי של החלקה יהיה לטובת מר מזרחי במידה הרבה ביותר?

1. x הצלע של השטח המופקע, והצלע של שטח הפיצוי, כבשרטוט.

א. כִּתבו תבניות לפונקציות הבאות:

$m(x)$ - השטח המופקע

$p(x)$ - שטח הפיצוי

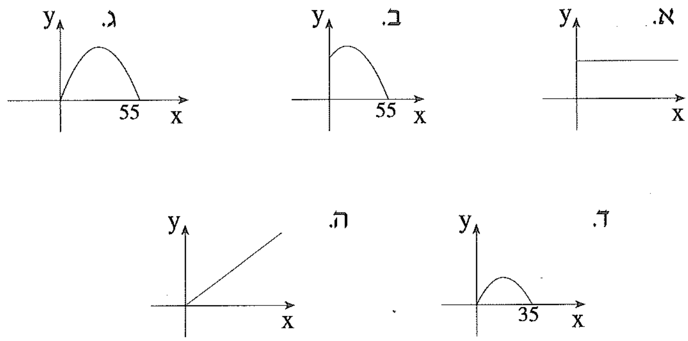
$h(x)$ - השטח המקורי של החלקה

$k(x)$ - השטח החדש של החלקה

$s(x)$ - השינוי בשטח החלקה, לעומת השטח המקורי.

ב. מִצאו קשרים רבים, ככל שתוכלו, בין הפונקציות שרשמתם.
כִּתבו את הקשרים כמשוואות.

2. התאימו, ללא מחשב, גרף לכל אחת מהתבניות שרשמתם, בשאלה 1 א'.




3. לפניכם מספר תבניות פסוק המורכבות מתבניות הפונקציות של שאלה 1, תרגמו אותן למילים לפי במשמעות הסיפור, וכִּתבו אותן במפורש, בעזרת התבניות שרשמתם.

א. דוגמה: $h(x) = k(x)$ השטח המקורי של החלקה שווה לשטח החדש של החלקה.

התבנית המפורשת: $1100 = (20 + x)(55 - x)$

ב. $s(x) = 0$

ג. $p(x) > m(x)$

ד. $h(x) - k(x) > 0$

על אילו מן השאלות המרכזיות אפשר לענות על ידי פתרון תבניות הפסוק?
על איזו מן השאלות לא יכולתם לענות בעזרת פתרון תבניות הפסוק?
בעזרת איזו פונקציה ניתן לענות על שאלה זו?

אם סיימתם, נסו את כוחכם בעמוד 92 שאלה 2

## עם הספר

בהוצאת ספרים "עם הספר" גילה המנהל כי בכל יום נמכרים בממוצע 50 ספרי בישול, במחיר 60 ש"ח כל אחד.
הוא ערך סקר ומצא כי בכל פעם שמוזילים את הספר בשקל אחד נוסף, נמכרים בכל יום 5 ספרים יותר.
כלומר:
במחיר 59 ש"ח לספר, נמכרים בממוצע 55 ספרים ביום.
במחיר 58 ש"ח לספר, נמכרים בממוצע 60 ספרים ביום.
במחיר 57 ש"ח לספר, נמכרים בממוצע 65 ספרים ביום.

המנהל החליט לכבוד שבוע הספר להוזיל את המחיר, כדי לקבל את ההכנסה המקסימלית.

- איזה מחיר לדעתכם קבע המנהל לספר הבישול?
אם אתם מתקשים במציאת התבנית, תוכלו לקבל כיוון על ידי מגדלור עם *הארות* בעמוד 91.

- לאור הוצאה של מהדורה חדשה משופרת, החליטו בהוצאת הספרים למכור את ספרי הבישול מהמהודרה הישנה, בהוזלה ניכרת. למרבה הפלא, גילו כי ההכנסה הכוללת מספרי הבישול היתה כמו ההכנסה המקורית.
בכמה הוזילו את המחיר לספר?

- שאלו שאלה נוספת בקשר ל"סיפור", ונסו לענות עליה.

## V. הולכים לתאטרון

בית-ספר קנה כרטיסים להצגה. לפי ההסכם עם מארגני ההצגה יעלה כל כרטיס 50 ש״ח, אם יבואו 100 או פחות מ-100 תלמידים.
אך, אם יבואו להצגה יותר מ-100 תלמידים, תהיה הנחה **על כל כרטיס**.
על כל תלמיד מעל ל-100 תלמידים, יורידו 20 אגורות **מכל כרטיס**.
לדוגמה:
אם יבואו 101 תלמידים, יעלה כל כרטיס 49.80 ש״ח.
אם יבואו 102 תלמידים, יהיה מחיר כל כרטיס 49.60 ש״ח.

א. ידוע שבאו להצגה פחות מ-100 תלמידים.
כִּתבו פונקציה המתאימה למספר התלמידים שבאו להצגה את ההכנסה מהכרטיסים.

ב. חִזרו על סעיף א׳ אם ידוע שבאו להצגה יותר מ-100 תלמידים.

ג. מתי ההכנסה מן הכרטיסים תהיה מקסימלית?
תוכלו לקבל כיוון על ידי מגדלור עם *הארות* בעמוד 91.

ד. מנהל בית-הספר העביר לקופת התאטרון 3000 ש״ח, אך שכח בבית את מספר התלמידים ההולכים להצגה.
עִזרו לו למצוא מספר זה.

ה. האם ייתכן כי המארגנים לא לקחו בחשבון כי לפי הסידור הנ״ל יכול לקרות שהכרטיס לא יעלה כלל?
אם כן, כמה תלמידים צריכים ללכת להצגה כדי שזה יקרה?

הציעו שינוי להסכם, כך שמארגני ההצגה לא יפסידו, במקרה שיבואו להצגה מספר רב של תלמידים:

# הארות

1. לפעילות: "עם הספר".

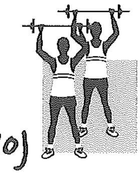
נסמן ב-x את ההוזלה בשקלים לספר.
כִּתבו תבנית למחיר הספר לאחר ההוזלה.
כִּתבו תבנית למספר הספרים שנמכרים סך-הכל ביום עקב ההוזלה.
כִּתבו תבנית להכנסה ליום של הוצאות הספרים, עקב מכירת הספרים.

מעמוד 89

2. לפעילות: "הולכים לתאטרון".

לפונקציה המתאימה למספר התלמידים שבאו להצגה את ההכנסה מן הכרטיסים, יש שתי תבניות, והיא פונקציה בחלקים.
שימו לב לנקודה זו, כאשר אתם עונים על השאלות.
זכרו! כדי למצוא ערך של y בפונקציה בחלקים, יש למצוא באיזה תחום נמצא ה-x המתאים ולהציבו בתבנית השייכת לתחום זה.
כדי למצוא מקור לתמונה ידועה בפונקציה כזו, יש לברר לאילו מן התחומים שייכת התמונה, ורק אז למצוא את המקור, על ידי פתרון משוואה (או משוואות) מתאימה.

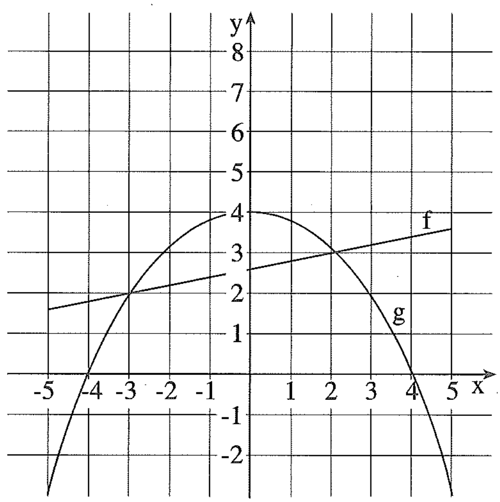
מעמוד 90



## נסו את כוחכם

1. לפעילות: "הפרש של פונקציות".

א. לפניכם גרפים של שתי פונקציות f ו-g.
שרטטו באותה מערכת צירים את גרף ההפרש בין f ו-g $(f-g)$
על ידי ספירת יחידות.




מה תוכלו לומר בעזרת הפונקציות הנתונות על נקודות האפס, ועל התחומים בהן פונקצית ההפרש חיובית או שלילית.

ב. הציעו דרכים רבות ככל האפשר לפתרון תבניות הפסוק:
$x^3 + 6x^2 > 16x$ $\qquad$ $x^3 + 6x^2 = 16x$

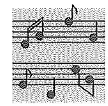
ג. פִּתרו את המשוואה $(x+1)^2 = 2x^2 - 10x + 17$
בדרכים רבות ככל האפשר.

מעמוד 86

2. לפעילות: "בעיית הפיצוי".

יוסף מזרחי לא הסכים להצעת המדינה. נראה היה לו שיפסיד מן העניין.
פעלו כעורך הדין של מר מזרחי והציעו למדינה הצעה נגדית.

מעמוד 87



$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

בויכוח הנודע
מי נותן יודע מידע,
התבנית הסטנדרטית
נראתה כמפסידה.

ובעוד היא רוגזת
על התבנית המוזזת,
אשר בדרך מלבבת
את נקודות האפס מחשבת.

ובעוד היא מגלה
בזו הכתובה כמכפלה,
שאפשר אחת ושתיים
למצוא את הנקודותיים;

נודע לה להפתעתה,
כי נוסחה התגלתה,
ואפשר מעתה
למצוא בעזרתה.

אם נקודות האפס בכלל קיימות,
ומהו מספרן,
והיכן הן נמצאות,
כלומר, על הציר מהו מקומן.

אמנם הנוסחה נראית מאיימת,
לדאגה ולפחד היא גורמת,
אך במשך הזמן כאשר נתרגלה,
היא תיראה מאוד קלה.

ומכיוון שכל תבנית
אשר במהותה היא ריבועית,
ואיננה מסודרת כרגיל;
הפישוט אל הסטנדרטית מוביל.

לכן זו הוכחה ניצחת
שבוויכוח היא מנצחת.

## אוסף משימות

1. מְצאו את נקודות האפס של כל אחת מהפונקציות (אם הן קיימות).

א. $y = x + 2x - 15$

ב. $y = -2x^2 - 3x + 20$

ג. $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$

ד. $y = -3x^2 + 10x - 9$

- בִּדקו את פתרונותיכם על ידי הצבה בתבנית.

2. כמה נקודות אפס יש לפונקציות הבאות?

א. $y = (2x - 3)^2 + 8(x^2 - 1)$

ב. $y = (3x + 1)^2$

ג. $y = (2x - 3)(2x + 3)$

ד. $y = x^2 - 6$

ה. $y = 5x^2 + 4$

ו. $y = 4x - x^2$

ז. $y = -1 - (x - 4)^2$

ח. $y = x - \frac{(3 + x)^2}{2}$

3. $x_1$ ו- $x_2$ הן נקודות האפס של פונקציה ריבועית.

א. הביעו את $x_1 + x_2$ באמצעות $a$, $b$ ו- $c$.

ב. הביעו את $\frac{x_1 + x_2}{2}$. הסבירו.

4. נתונה משפחת הפונקציות הריבועיות מהצורה: $y = ax^2 + 2x + 1$

א. עבור אילו ערכים של $a$ יש לפונקציה השייכת למשפחה, שתי נקודות חיתוך עם ציר ה-x?

ב. עבור אילו ערכים של $a$ יש פונקציה השייכת לאותה משפחה עם נקודת מפגש אחת עם ציר ה-x?

**אתגר**

ג. עבור אילו ערכים של $a$ כל ערכי הפונקציה חיוביים?

5. קבעו האם לפונקציות הריבועיות הבאות נקודות אפס, ואם כן מִצאו אותן.

א. $y = 2x^2 - x - 15$
ב. $y = 5x^2 + 3x - 14$
ג. $y = x^2 + 8x + 25$
ד. $y = 10x - 3 - 8x^2$
ה. $y = 5x(4x - 10)$
ו. $y = (3x + 2)^2 + 2(x - 2)$
ז. $y = x^2 - 9x + 14$
ח. $y = x^2 - 19x - 150$
ט. $y = 3x^2 - 5x - 12$
י. $y = 6x^2 - 36 + 54$
יא. $y = 7x^2 + 15x - 100$
יב. $y = -x(5x - 6) - 8(1 - x)$

6. נתונה הפונקציה: $y = x^2 - 2x - 3$.

א. חשבו את נקודות האפס שלה וסמנו אותן במערכת צירים.
ב. שרטטו "סקיצה" של הפונקציה, ללא חישוב נקודות נוספות.
ג. עבור אילו איברים בתחום הפונקציה שלילית?

7. חִזרו על סעיפי שאלה 6 עם הפונקציה $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$.

8. פִּתרו את המשוואות הבאות:
שימו לב! במשוואות אלה אין צורך להשתמש בנוסחה הכללית.
דוגמה: $x^2 + 6x + 9 = 0$
השלימו: $(x + \boxed{\phantom{0}})^2 = 0$ ומִצאו את קבוצת האמת.

א. $x^2 - 100 = 0$
ב. $400 - x^2 = 0$
ג. $x^2 - 10 = 0$
ד. $2x(x - 5) = 0$
ה. $3x^2 - 5x = 0$
ו. $(2x + 3)^2 = 0$
ז. $4x^2 + 4x + 1 = 0$
ח. $(x + 4)^2 = 9$
ט. $(x - 3)^2 - 4 = 0$
י. $-3(x - 3)^2 - 1 = 0$
יא. $2(x - \sqrt{3})^2 = 0$
יב. $x^2 + 64 = 0$

9. התאימו לכל פונקציה את סקיצת הגרף שלה על פי שיקולים. כִּתבו את שיקוליכם.

שימו לב! אל תסמכו על גודל היחידות על הצירים. הגרף אינו מדויק.

$f(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$

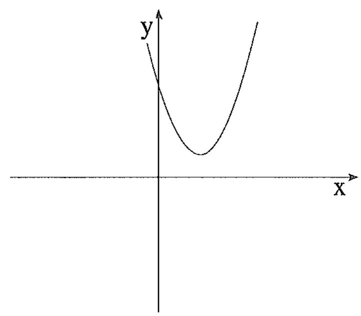
$h(x) = -x^2 + x - \frac{1}{4}$

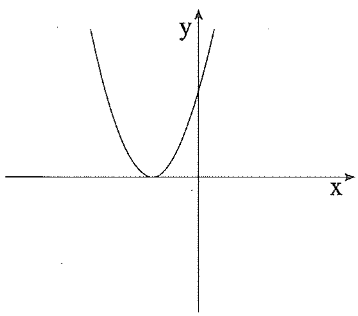
$g(x) = x^2 + 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

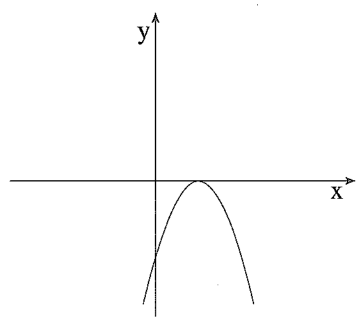
$j(x) = -x^2 + 1\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

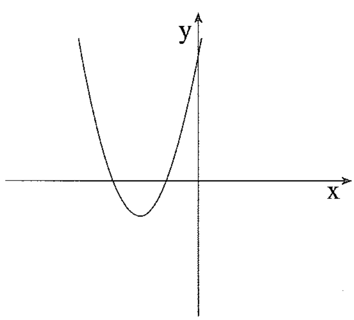
$p(x) = x^2 - x + 1$

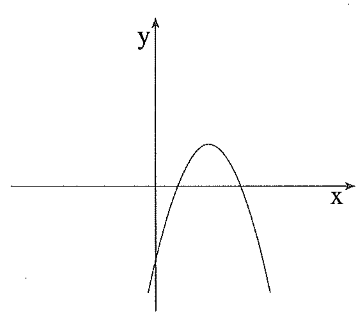
$k(x) = -x^2 - x - 1$

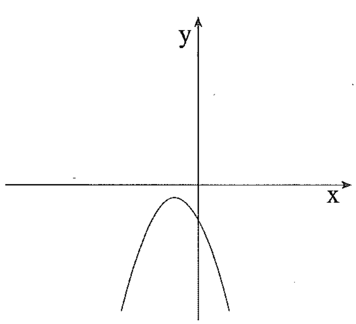


10. מִצאו את קבוצת האמת של תבניות הפסוק הבאות, ובדקו בתבנית המקורית.

א. $x(x+5)-6=0$

ב. $x(x+1)+5(x+\frac{1}{2})=0$

ג. $x(6x-13)+2(5x-1)=0$

ד. $x(3x-5)=(3x-5)$

ה. $2x(x+1)-5=-3.5$

ו. $4(x-2.5)=x(x-7)$

ז. $\frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}=0$

ח. $x+\frac{x^2-x}{2}=2$

ט. $\frac{x(x+5)}{2}-2x+4=0$

י. $x\left(\frac{x}{4}-\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{5}=0$

יא. $\frac{x+2}{3}+\frac{x(x+1)}{6}=-1\frac{2}{3}$

יב. $(x+3)^2=4$

יג. $(x+3)(x+4)=72$

יד. $(x+6)(x+2)=-4$

טו. $(x-3)^2=x+3$

טז. $(2x-1)(x-1)=13-5x$

יז. $(3x+4)(x-1)=2x^2+2$

יח. $4+\frac{2x^2-2x}{3}=0$

יט. $(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$

כ. $3x^2-2x+9=2x(x-4)$

11. מִצאו נקודות המשותפות לגרפים של כל אחד מזוגות הפונקציות הבאות. בּדקו על ידי הצבה.

א. $f(x)=x^2+6x+8$ , $g(x)=x+2$

ב. $f(x)=x^2-7x$ , $g(x)=-10$

ג. $f(x)=x^2-4x+3$ , $f(x)=5x-11$

ד. $f(x)=-2x^2+3x$ , $g(x)=-8x+9$

ה. $f(x)=4-x^2$ , $g(x)=x^2+2$

ו. $f(x)=-2x^2+3x-2$ , $g(x)=-x^2$

ז. $f(x)=-2x^2+3x-1$ , $g(x)=x^2-5x+4$

ח. $f(x)=x^2+3x+2$ , $g(x)=-4x^2+16$

12. פִּתרו את הבעיות הבאות. כִּתבו תשובה לבעיה ושימו לב שהיא תתאים לתוכן הבעיה.

א. נתונים שני מספרים עוקבים. סכום ריבועיהם שווה ל-1301.
מהם המספרים?

ב. היקף המלבן הוא 70 סמ׳ ושטחו 174 סמ״ר. מהם אורכי צלעותיו?

ג. בסיום בית הספר החליטו תלמיד כיתה י״ב להחליף ביניהם תמונות. כמה תלמידים בכיתה, אם הוחלפו בסך הכל 870 תמונות?

ד. במשחקי שחמט שיחק כל שחקן עם כל אחד מן השחקנים האחרים.
כמה שחקנים היו, אם הם שחקו בסך הכל 36 משחקים?
שימו לב! בכל משחק משחקים **שני** שחקנים.

ה. כמה צלעות למצולע שיש לו 65 אלכסונים?

ו. דני אוהב להשתעשע במספרים.
יום אחד מצא חמישה מספרים שלמים עוקבים אשר סכום הריבועים של שלושת המספרים הראשונים בהם, שווה לסכום הריבועים של שני המספרים האחרונים. מהם המספרים שמצא דני?

ז. אורכו של היתר במשולש ישר זווית הוא 15סמ׳.
אורך אחד הניצבים גדול פי $1\frac{1}{3}$ מאורך הניצב השני. מהו היקף המשולש?

ח. המרחק בין צמרות שני ברושים, גדול פי 1.25 מהמרחק בין גזעיהם.
אחד הברושים גבוה מהשני ב-1.5 מ׳. מהו המרחק בין גזעי הברושים?

ט. המרחק בין גזעי שני ברושים גדול ב 3.5 מ׳ מהפרש הגבהים שלהם.
המרחק בין צמרותיהם הוא 6.5 מ׳.
מהו גובהו של הברוש הגבוה, אם גובה הברוש הנמוך הוא 5 מ׳?

13. מִצאו את קבוצת האמת של כל תבנית מתבניות הפסוק הבאות:

דוגמה: $\frac{x^2 - 15x + 26}{x - 2} = 3$

$x^2 - 15x + 26 = 3(x - 2)$ וגם $x \neq 2$

$x^2 - 15x + 26 = 3x - 6$

$x^2 - 18x + 32 = 0$

$x_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{81 - 80}}{2}$

( $x = 2$ או $x = 16$ ) וגם $x \neq 2$

קבוצת האמת: $\{16\}$

א. $\frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 1} = 0$

ב. $\frac{(x + 3)^2 - 4}{x + 1} = 0$

ג. $\frac{x^2 - 3x}{x - 3} = 2$

ד. $\frac{x^2 + 5x - 36}{x + 9} = 0$

ה. $\frac{(x - 3)x}{x - 3} = 3$

ו. $\frac{2x + 4}{x + 2} = 4$

ז. $\frac{x^2 + 2x}{x + 2} = 3$

ח. $\frac{x^2 + 4x}{x + 4} = -2$

ט. $\frac{x^2 + 16x}{x + 1} = 12$

י. $\frac{x^2 - 3x}{x} = 0$

יא. $\frac{x(x - 5) - 1}{x - 2} = 3$

יב. $\frac{x^2 - 3x + 2}{x} = 0$

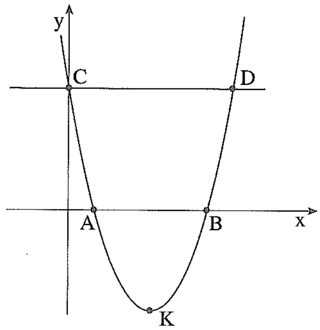
יג. $\frac{(x + 4)(x + 1)}{x + 5} = 0$

יד. $\frac{3x^2 + 5x - 20}{x} = 1$

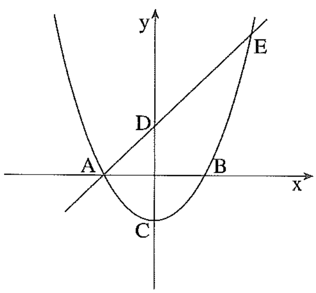
טו. $\frac{x^2 - 3x - 10}{x - 4} = 0$

טז. $\frac{x^2 - 3x + 10}{x - 4} = 0$

14. נתון גרף הפונקציה
$f(x) = x^2 - 6x + 5$.
מִצאו את שיעורי הנקודות:
A, B, C, D, K

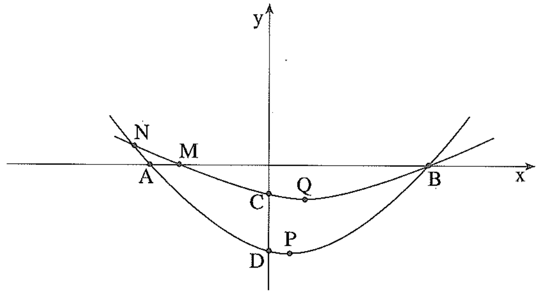



15. נתונים הגרפים של הפונקציות
$f(x) = x^2 - 1$ ו- $g(x) = x + 1$.
מִצאו את שיעורי הנקודות:
A, B, C, D, E

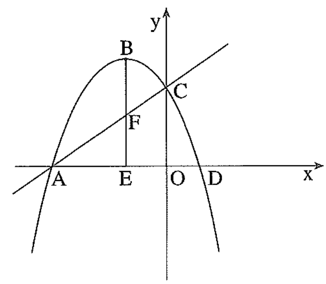



16. א. נתונים הגרפים של הפונקציות $f(x) = 2x^2 - x - 15$
ו- $g(x) = x^2 - x - 6$. (P ו-Q נקודות הקודקוד.)
זהו את הגרף המתאים לכל אחת מהן.

ב. מִצאו את שיעורי הנקודות A, B, C, D, M, N, P ו-Q.



17. נתון הגרף של הפונקציה $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.

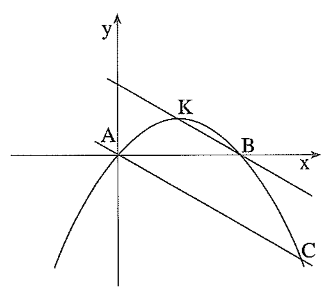



א. חַשבו את שיעורי הנקודות $B, A$ ו-$C$.

ב. מְצאו את משוואת הישר $AC$.

ג. מְצאו את שיעורי הנקודה $F$.

18. נתון הגרף של הפונקציה $f(x) = 2x - x^2$.
$AC$ מקביל ל $BK$ ($K$ הוא הקודקוד).
מְצאו את שיעורי הנקודות $C, B, A$ ו-$K$.



19. מְצאו את קבוצת האמת של כל אחת מתבניות הפסוק הבאות:
ראו דוגמה ב״מה למדנו״ עמוד 107.

א. $x^2 - 5x + 4 \le 0$

ב. $x^2 + 2x - 3 \ge 0$

ג. $-2x^2 - 5x + 7 \ge 0$

ד. $-x^2 + x + 12 \le 0$

ה. $x^2 + 3x + 4 > 0$

ו. $x^2 + 2(x - 5) = 5$

ז. $2x^2 - 3x - \ge -2x$

ח. $11 - (x - 4)^2 > (x + 7)(x - 2)$

ט. $\frac{(x - 3)(x - 2)}{2} < 2$

י. $(x - 5)^2 + (x + 3)^2 \le 16x - 8$

יא. $[3(x + 2) + 2(x - 1)]^2 - 1 = 0$

יב. $\frac{(2x - 1)^2}{-4} < 9$

20. מה תוכלו לומר על שני מספרים שלמים עוקבים, אשר סכום ריבועיהם קטן מ-205?

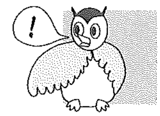
21. מהו התחום בו נמצא מספר, אשר ריבועו גדול ממנו ביותר מ-72?

22. בחורש 5000 עצים, כל שנה גדל מספר העצים ב-p אחוזים.
באיזה תחום צריך להימצא p, על מנת שמספר העצים לאחר שנתיים יהיה גדול מ-72000?

23. ירקן קנה תפוחי עץ ושילם תמורתם 100 ש״ח.
10 ק״ג התקלקלו, ואת השאר מכר ברווח של 1 ש״ח לק״ג. ברווח של הירקן מתפוחי העץ, ניתן לקנות למעלה מ-10 ק״ג נוספים. מה תוכלו לומר על מספר הקילוגרמים של תפוחי עץ שקנה הירקן?

24. באיזה תחום חייב להמצא מספר חיובי, כך שהסכום שלו עם המספר ההופכי לו יהיה קטן מ-2?

25. מִצאו את התחום של כל פונקציה.



תזכורת!

קבוצת הצבה של $\sqrt{x}$ היא $x \geq 0$.

קבוצת ההצבה של $\frac{1}{x}$ היא $x \neq 0$

א. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

ב. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

ג. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

ד. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$

ה. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$

ו. $f(x) = \sqrt{-x^2}$

ז. $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$

ח. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

26. נתונה תבנית הפסוק הבאה $x^2 - 4 \ge 0$.

נתבונן בדרך הפתרון הבאה: $x^2 - 4 \ge 0$

$x^2 \ge 4$

$x \ge \pm 2$

לכן $x \ge 2$

קבוצת האמת: $\{x \mid x \ge 2\}$

א. הדרך הנ"ל שגויה. באיזה מעבר יש שגיאה?

ב. הציגו דרך פתרון נכונה.

27. פִּתרו את תבניות הפסוק

א. $x^2 < 3$

ב. $2x^2 \ge 5$

## שימרו על כושר

מִצאו את קבוצת האמת של תבניות הפסוק הבאות:

דוגמה: $\frac{-3}{x^2-16}=\frac{x}{x+4}$

$$\frac{-3}{(x-4)(x+4)}=\frac{x}{x+4} \quad / \cdot (x-4)(x+4)$$

$-3 = x(x-4)$ וגם $x \neq 4$ וגם $x \neq -4$

קבוצת האמת: $\{1\ ,\ 3\}$

א. $\frac{14}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}=1$

ב. $\frac{1}{x-3}+\frac{2}{(x-2)(x-3)}=\frac{x}{x-2}$

ג. $\frac{5}{x^2-2x+1}-\frac{3}{x-1}=2$

ד. $\frac{3}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}=-1$

ה. $\frac{x-1}{(x+3)(x-1)}=\frac{x}{2x+6}$

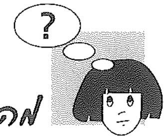
ו. $\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}$

ז. $\frac{x^2-4}{x+2}=2$

ח. $\frac{9-x^2}{x-3}=1$

ט. $\frac{5}{4x^2-9}-\frac{1}{2x-3}=0$

י. $\frac{2}{x^2-6x+9}=3-\frac{x}{x-3}$




## מה למדנו

**למדנו למצוא נקודות אפס של פונקציה ריבועית,**

$$y = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$

**לפי הנוסחה** $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

לדוגמה:

$$f(x) = -2x^2 + 5x + 3$$

$$a = -2 \qquad b = 5 \qquad c = 3$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(-2)\cdot 3}}{2\cdot(-2)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{-4} \quad \begin{cases} \frac{-5-7}{-4} = 3 \\ \frac{-5+7}{-4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

קבוצת האמת: $\{3, -\frac{1}{2}\}$

**למדנו לפתור משוואה ריבועית שאינה מסודרת.**

לדוגמה:

$$5(x-2)^2 = x - 8$$

$$5(x^2 - 4x + 4) = x - 8$$

$$5x^2 - 20x + 20 = x - 8$$

$$5x^2 - 21x + 28 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 4\cdot 5\cdot 28}}{10}$$

$$21^2 - 4\cdot 5\cdot 28 = \Delta < 0$$

לכן קבוצת האמת: $\varnothing$

**למדנו לפתור משוואה מורכבת.**

לדוגמה: $\frac{2x^2}{x^2-4} - \frac{2}{x+2} = 2\frac{1}{3} \quad / \cdot (x^2-4)$

$2x^2 - 2(x-2) = 2\frac{1}{3}(x^2-4)$ וגם $x \neq \pm 2$

$2x^2 - 2x + 4 = 2\frac{1}{3}x^2 - 9\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}x^2 + 2x - 13\frac{1}{3} = 0$

$(x = -10$ או $x = 4)$ וגם $x \neq \pm 2$

קבוצת האמת: $\{4, -10\}$

בדיקה:

$\frac{2\cdot(-10)^2}{(-10)^2-4} - \frac{2}{-10+2} = 2\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{2\cdot 4^2}{4^2-4} - \frac{2}{x+2} = 2\frac{1}{3}$

$\frac{200}{96} + \frac{2}{8} = 2\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{3^2}{12} - \frac{2}{6} = 2\frac{1}{3}$

**למדנו לפתור אי שוויון ריבועי, לפי תחומי חיוביות ושליליות של פונקציה ריבועית.**

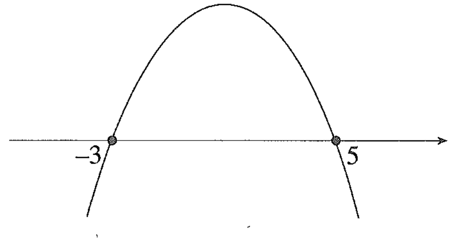
לדוגמה: $2x + 15 > x^2$

נסדר: $-x^2 + 2x + 15 > 0$

נשרטט סקיצה של גרף הפונקציה $y = -x^2 + 2x + 15$.

נקודות האפס $x_1 = -3$ $x_2 = 5$ (בְּדקו) $a < 0$.

$f(x) > 0$ כאשר $-3 < x < 5$ .



## עבודת החודש בכיתה

### על פני ימים*

חברה להעברת סחורות על פני הים, צריכה לבנות מיכלי עץ בנפח 2.25 מ"ק.

הדרישה הן כי המיכלים יהיו בעלי בסיס ריבועי, ופתוחים מלמעלה.

א. מְצאו מימדים מתאימים לשני מיכלים כאלה. בנו מקרטון את המיכלים בהתאם למימדים שמצאתם, בקנה מידה של 1:20.
(כל מטר של מיכל העץ ייוצג על ידי 5 ס"מ במיכל הקרטון.)

ב. חַשבו את שטח העץ הדרוש לבניית כל אחד משני המיכלים, שאת מימדיהם מצאתם.

העץ שממנו עשויים המיכלים הוא חומר יקר, לכן מעוניינת החברה להשתמש בכמות העץ הקְטנה ביותר.

ג. נסו לשער מה תהיינה, בערך, המידות של "המיכל האידיאלי", המקיים כמובן את כל הדרישות הכתובות למעלה. כִּתבו את השערתכם.

ד. עִזרו לחברה למצוא את המידות המדוייקות של "המיכל האידיאלי".

* מומלץ לעשות בבית מראש את שתי המטלות הראשונות של הפעילות.

## עבודת המודל בבית

### תעלומת הכרובים

משפחת גינת אוהבת כרוב,
לכן החליטה המשפחה לגדל כרוב
ליד ביתם.
המימדים החיצוניים של הבית
הם 10 מ׳ x 10 מ׳ .
הצורה הנוחה ביותר לגינה היא צורת ר.

על מנת להגן על הגינה מהעיזים הנמצאות בסביבה, מחליטה משפחת גינת לגדר את החלק החיצוני של הגינה (ראה שרטוט).
המושב מקציב למשפחה סך הכל 80 מ׳ של גדר.

א. הציעו מידות מתאימות לחלקה.

ב. רשמו מידות של צידי הגדר, כך ששטח הגינה יהיה 500 מ״ר.

ג. משפחת גינת ״משוגעת על״ כרוב.
מהן מידות הגינה שהיא ״כדאית״ להם ביותר?

# 5. קצת מפה וקצת משם

## I. שלושה מספרים

סכום שלושה מספרים הוא 10.
המספר השני גדול ב-2 מן המספר הראשון.

מה תוכלו לומר על המספרים, בכל אחד מהמקרים הבאים?

1. מכפלת שלושת המספרים היא 0.
2. **סכום** שני המספרים הראשונים שווה למספר השלישי.
3. **מכפלת** שני המספרים הראשונים שווה למספר השלישי.
4. סכום ריבועי שני המספרים הראשונים שווה לריבוע המספר השלישי.
5. המספר השלישי שלילי.
6. מכפלת שני המספרים הראשונים היא הקטנה ביותר.
7. מכפלת המספר הראשון והשלישי היא הגדולה ביותר.
8. מכפלת שני המספרים הראשונים שווה ל 35–.
9. סכום שלושת המספרים קטן מ-4.
10. סכום ריבועי המספרים גדול מ-10.

הציעו שתי הצעות משלכם.

## II. משפחה שכזאת

גיל האב הוא פי ארבע מגיל בנו הבכור.

הבן הצעיר נולד חמש שנים אחרי הבכור.

1. מה ידוע לכם על גיליהם כיום אם...

א. גיל האב קטן יותר ממכפלת גילי בניו.

ב. לפני ארבע שנים היה גיל האב גדול ממכפלת גילי בניו.

ג. בעוד שנה יהיה סכום גילי הילדים קטן, עדיין, מגילו של אביהם לפני 22 שנה, אבל גדול מגילו לפני 32 שנה.

ד. לפני ארבע שנים היה גיל האב שווה לריבוע גיל הבן הבכור אז.

2. עכשיו שאתם יודעים את גיל האב והבנים כיום. ענו על השאלות הבאות:

א. לפני כמה שנים היתה מכפלת גילי האחים שווה לגיל האב?

ב. בעוד כמה שנים יהיה סכום גילי האחים שווה לגיל האב?

ג. לפני כמה שנים היה סכום ריבועי גילי האחים שווה לגיל האב אז?

## III. טיול שנתי

משקל כל המזון בטיול השנתי הוא 96 ק״ג.

מחיר האוטובוס היה 960 ש״ח. כל ההוצאות האחרות שולמו על ידי ביה״ס.

בתחילה היה מדובר שכל תלמידי הכיתה ייצאו, והם יתחלקו שווה בשווה בהוצאת הנסיעה, ובנשיאת המזון במסע הרגלי.

לבסוף יצאו לטיול 8 תלמידים פחות מהמתוכנן ולכן נאלץ כל תלמיד שיצא לטיול לשלם יותר ולשאת מזון במשקל כבד יותר מהמתוכנן.

x מספר תלמידי הכיתה.

1. נניח כי בכיתה 24 תלמידים.

   א. כמה שילם כל תלמיד שיצא לטיול?

   ב. כמה קילוגרם מזון היה על כל תלמיד לקחת, לפי המתוכנן?

   ג. כמה קילוגרם של מזון היה על כל תלמיד לשאת, יותר מהמתוכנן?

2. מה ידוע לכם על מספר תלמידי הכיתה אם כל תלמיד שיצא לטיול שילם יותר מ-48 ש״ח.

3. כמה תלמידים בכיתה, אם כל תלמיד שילם לטיול 10 ש״ח יותר מהמתוכנן?

4. כמה תלמידים בכיתה, אם כל תלמיד נשא יותר מ-3 קילוגרמים נוספים על המתוכנן?

5. מה תוכלו לומר על מספר הקילוגרמים שנשא כל תלמיד, אם בכיתה יותר מ-30 תלמידים.

## IV. סלט פֵּרות

בעל אולם שמחות הזמין 60 ק״ג תפוחים ואגסים לארוע מסוים.

מחיר של קילוגרם אחד תפוחים, נמוך ממחיר של קילוגרם אגסים.

בעד התפוחים שילם בסך-הכל 144 ש״ח, ובעד האגסים 156 ש״ח.

1. נניח שקנה 48 קילוגרם תפוחים.
מה מחיר קילוגרם אחד של פֵּרות מכל סוג?

2. נניח שכמות התפוחים שקנה גדולה פי 2 מכמות האגסים.
מה מחיר קילוגרם אחד מכל סוג?

3. נניח כי מחיר קילוגרם אגסים הוא יותר מ- 6 ש״ח.
מה תוכלו לומר, על הכמות שקנה מכל סוג? על מחיר קילוגרם תפוחים?

4. נניח שמחיר קילוגרם אגסים גבוה ב-2.5 ש״ח ממחיר קילוגרם תפוחים.
כמה קילוגרם פֵּרות קנה מכל סוג?

5. נניח כי מחיר קילוגרם אגסים גבוה **ביותר** מ-1.5 ש״ח ממחיר קילוגרם תפוחים. מה תוכלו לומר על הכמות שנקנתה מכל סוג?

6. נניח כי בעל האולם קיבל לבסוף הנחה על המחיר, ושילם רק 285 ש״ח עבור הפֵּרות. איזה אחוז הנחה קיבל?
כמה שילם באמת עבור התפוחים, וכמה עבור האגסים?

## V. בין שני עצים

המרחק בין עץ הברוש לעץ הצפצפה הוא 30 מ'.

מעץ הברוש יצאה הנמלה דנה לכיוון עץ הצפצפה.
נניח כי היא הלכה במהירות קבועה.
מעץ הצפצפה לכיוון עץ הברוש יצאה הנמלה מינה.
נניח כי גם היא הלכה במהירות קבועה, הגדולה ב 2 מ' לשניה ממהירותה של דנה.

בשאלות הבאות אין קשר בין שאלה לשאלה, פרט לנתונים הבסיסיים.

1. נניח כי הנמלים יצאו באותו זמן, ונפגשו כעבור 2.5 דקות. באיזה מרחק מעץ הצפצפה נפגשו? כמה זמן לקח לכל אחת מהן להגיע לעץ של חברתה?

2. נניח כי דנה הגיעה לעץ הצפצפה, $2\frac{1}{2}$ דקות אחרי שמינה הגיעה לעץ הברוש. באיזה מהירות הלכה כל אחת מהן?

3. נניח כי נפגשו באמצע הדרך מה המהירות של כל אחת מהן אם **מינה** יצאה ממקומה ב-2 דקות אחרי דנה?

4. נניח כי כשמינה הגיעה לעץ הברוש נשארו לדנה **יותר** מ-3 דקות הליכה עד לעץ הצפצפה. מה המהירות של כל אחת מהן?

5. נניח כי מינה הלכה את כל הדרך בין שני העצים וחזרה במשך 24 שניות.
   א. איזו דרך עשתה דנה באותו זמן?
   ב. באיזה מרחק היתה מעץ הברוש?
   ג. כמה פעמים נפגשו הנמלים לאורך הדרך? אחרי כמה זמן מאז יצאו לדרך?

6. נניח כי הנמלים יצאו באותו זמן ונפגשו כעבור 2 דקות, ואז חזרו על עקבותיהן עד העץ שלהן. כמה זמן לקח להם המסע?

## VI. מפות שולחן

סבתא יוכבד קנתה סרט קישוט באורך 10 מ' לקשט בו שוליים של מפות שולחן מלבניות שהיא רוצה לתפור.
סבתא יוכבד רוצה להשתמש **בכל** הסרט שקנתה.
היא מתלבטת אם לקשט בו מפה אחת, או לחלק אותו לשתי מפות ריבועיות.
אורך הצלע של כל מפה צריך להיות לפחות 60 סמ'.

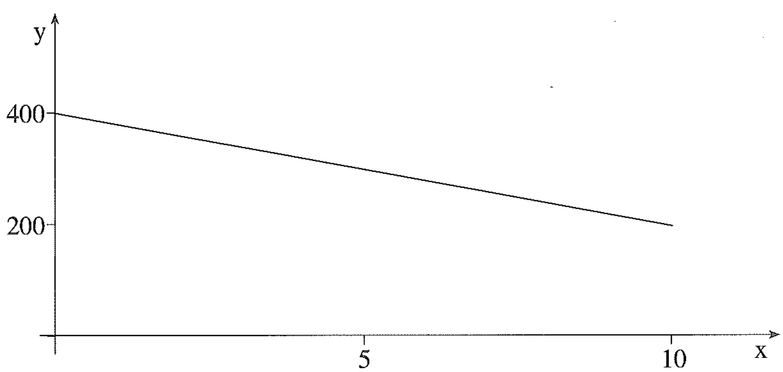
- בִּדקו עבורה אפשרויות שונות כדי ששטח המפה (או המפות) יהיה לפחות 3.5 מ"ר.
- איזו מהאפשרויות נותנות את השטח הגדול ביותר?
- איזו מהאפשרויות נותנת את השטח הקטן ביותר?
- התוכלו למצוא אפשרות, שנותנת מפה או מפות בשטח של 3 מ"ר בדיוק?

# עבודת השנה

## בפארק

בפארק חדש ערכו סקר של השתנות באוכלוסיות של החיות במשך עשר השנים הראשונות לקיומו, במטרה של תכנון הפארק לעתיד.

1. השתנות אוכלוסיית הזברות בפארק מתוארות בגרף המצורף.




א. כמה זברות היו בפארק כאשר רק הוקם?

ב. כמה זברות היו בפארק אחרי שלוש שנים?

ג. האם תוכלו לתאר בדרך שונה את השתנות אוכלוסית הזברות במשך השנים?

ד. האם, לדעתכם, קיימות עוד דרכים לתאור?

2. בפתיחת הפארק לא היו בו אריות. במשך השנה הראשונה הביאו 60 אריות ואחר כך הוסיפה האוכלוסיה לגדול בקצב אחיד של 60 אריות בשנה.

א. כמה אריות היו בפארק לאחר שלוש וחצי שנים?

ב. השוו בין מספר האריות למספר הזברות במשך 10 השנים הראשונות.

ג. מה יוכלו לומר המתכננים על שתי האוכלוסיות בעתיד?

3. אוכלוסיית הנשרים בפארק משתנה לפי התבנית $f(x) = 5x(20 - x)$ (x הזמן בשנים).

א. האם לדעתכם טובים תנאי המחיה של הנשרים בפארק?

ב. האם קצב הגידול של אוכלוסית הנשרים גדול או קטן מזה של אוכלוסית האריות?

ג. האם מסקנתכם תקֵפה למשל כל התקופה של עשר השנים הראשונות?

ד. השוו בין מספר הנשרים למספר הזברות במשך עשר השנים הראשונות

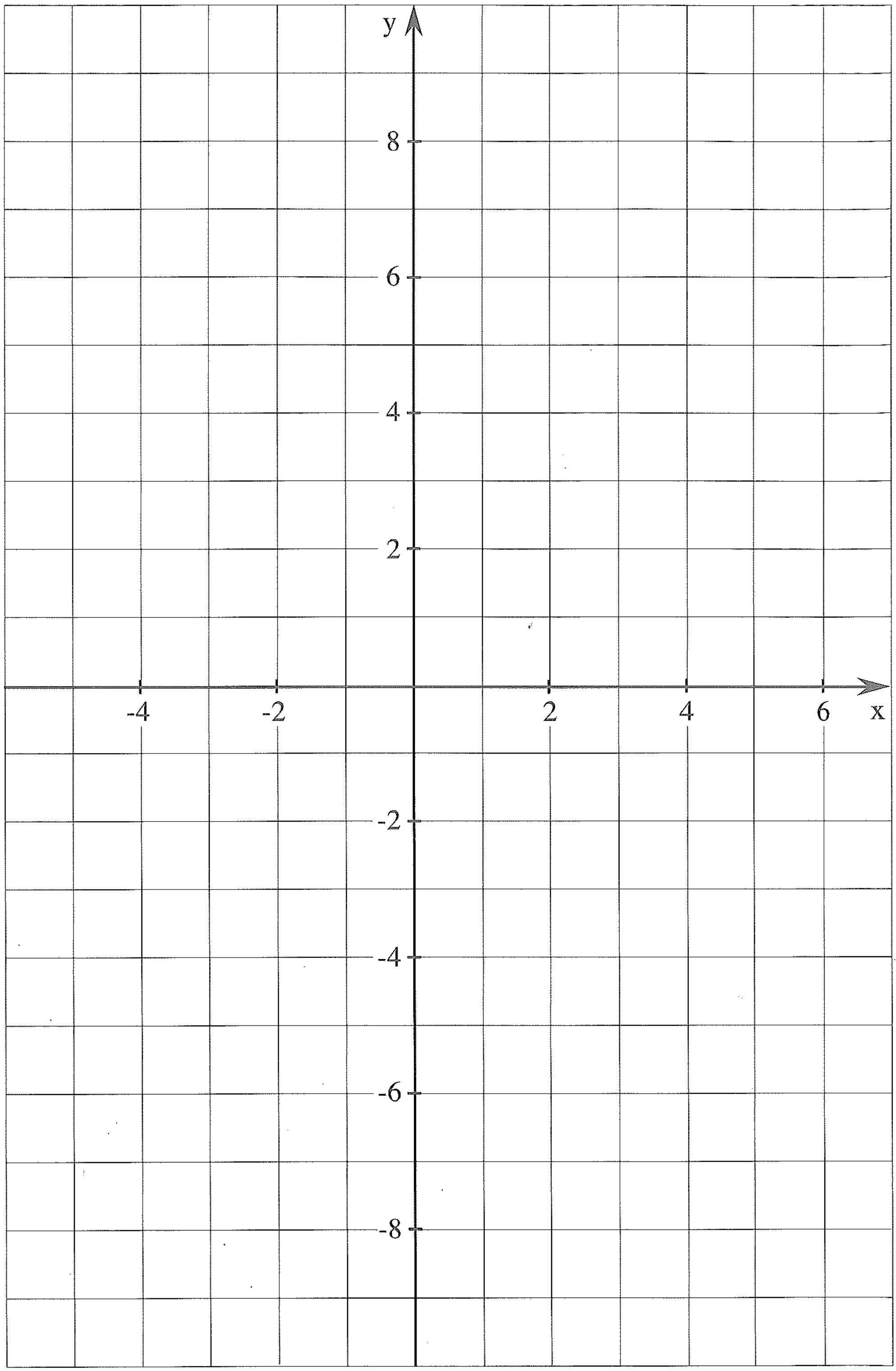
ה. מה יוכלו לומר המתכננים על שתי האוכלוסיות בעתיד?

ו. האם קיים זמן כלשהו שבו שלושת האוכלוסיות (של הזברות, האריות והנשרים) שוות?

4. מתכננים פארק חדש הדומה בכל לפארק הקודם, אך המתכננים מעוניינים כי בזמן כלשהו תהיינה שלושת האוכלוסיות שוות בדיוק.

א. המתכנן הראשון הציע הצעה אלטרנטיבית: שינוי תנאי המחיה של האריות כך שישתנה קצב הגידול של אוכלוסיה זו. מה הציע?

ב. המתכנן השני מציע להשיג זאת על ידי שינוי מספר הזברות הנמצאות בפארק ברגע פתיחתו. מה הציע?


y
8
6
4
2
-4
-2
2
4
6
x
-2
-4
-6
-8