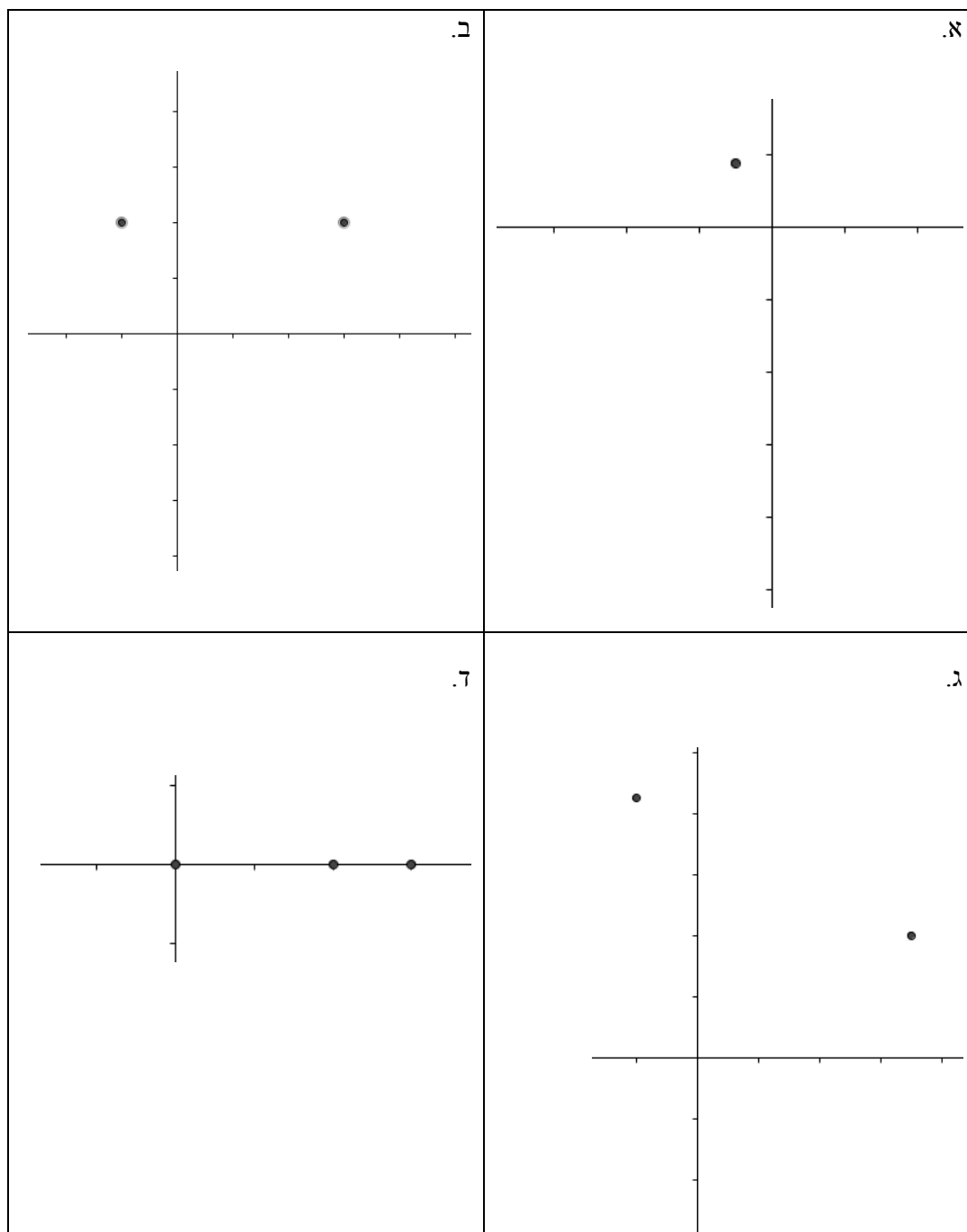
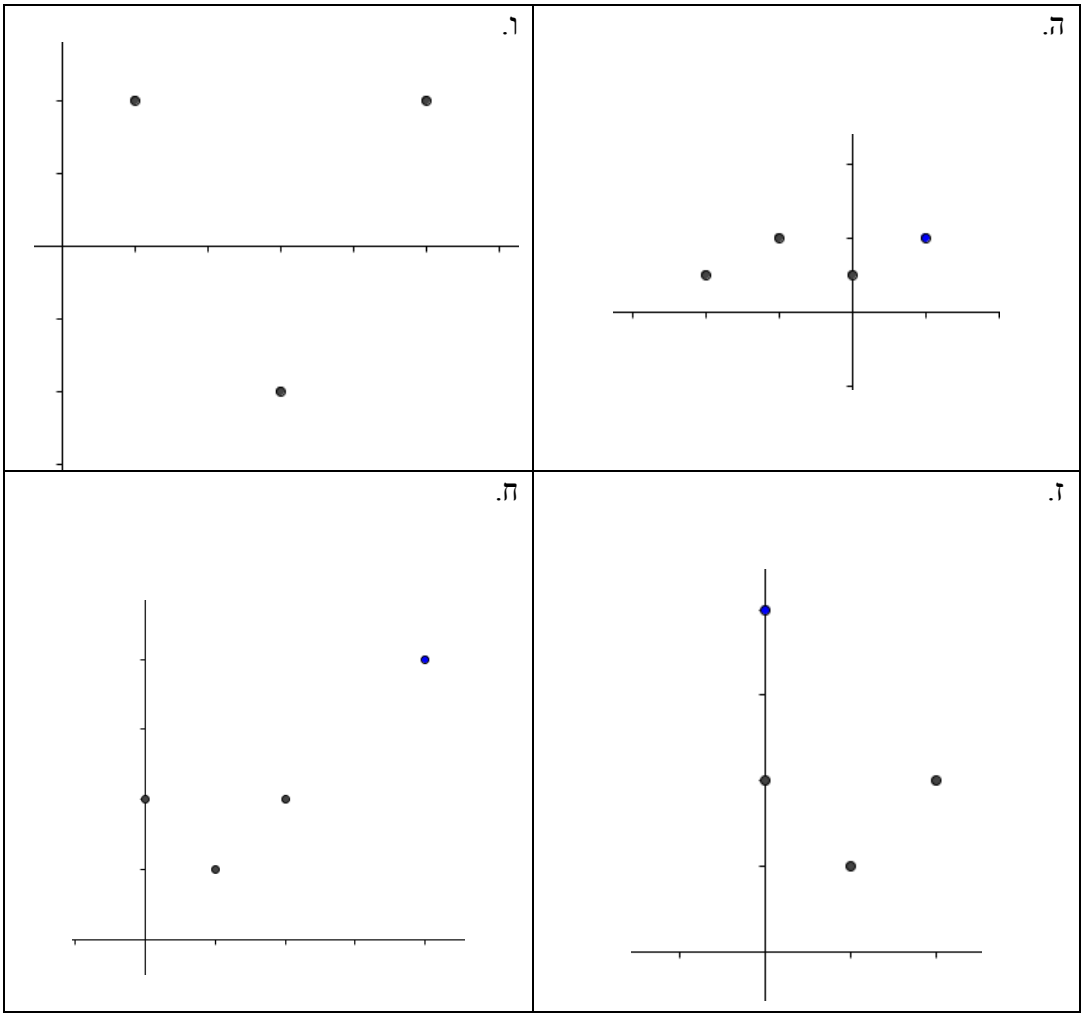


אלגברה – פונקציה ריבועית

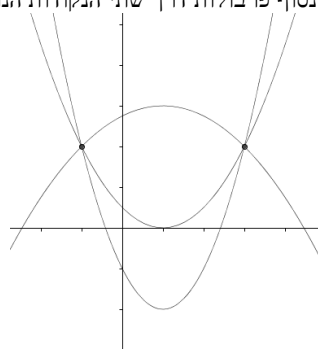
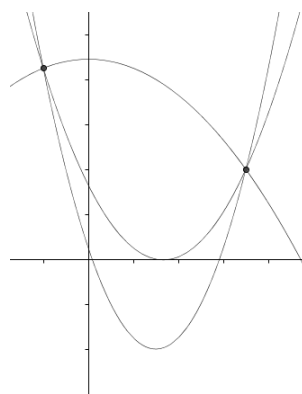
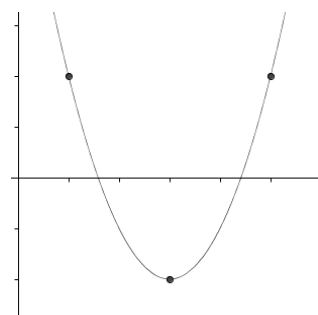
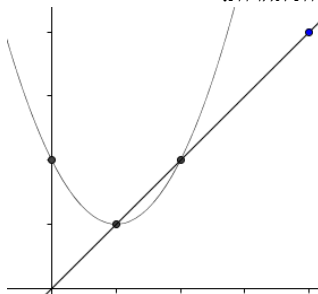
שאלה 1

להלן שרטוטים של שמונה מערכות צירים. בכל מערכת מסומנות מספר נקודות. כמה פרבולות שונות (גרפים של פונקציות ריבועיות) עוברות דרך הנקודות הנתונות? אם לא קיימת פרבולה העוברת דרך הנקודות הנתונות, הסבירו מדוע.





פתרונות

א. יש אינסוף פרבולות דרך נקודה אחת כלשהי.	ב. יש אינסוף פרבולות דרך שתי הנקודות הנתונות. 
ג. יש אינסוף פרבולות דרך שתי הנקודות הנתונות. 	ד. שלוש הנקודות נמצאות על ישר. הפונקציה דרכן היא קווית. אין פרבולה שמתלכדת עם פונקציה קווית.
ה. לא קיימת פרבולה דרך ארבע הנקודות הנתונות. אין פרבולה שעולה, יורדת, ושוב עולה.	ו. יש פרבולה אחת דרך שלוש הנקודות הנתונות. 
ז. ארבע הנקודות לא נמצאות על גרף של פונקציה, כי יש שתי נקודות בעלות אותו שיעור x (0). אם הייתה פונקציה כזאת, היא לא הייתה חד-ערכית.	ח. לא קיימת פרבולה דרך ארבע הנקודות הנתונות. שלוש הנקודות השמאליות קובעות פרבולה, והנקודה הרביעית נמצאת על הישר דרך שתי נקודות אחרות. 

הערות והדגשים דידקטיים

משימה זאת מתייחסת לגרף הפונקציה הריבועית ותכונותיו תוך הימנעות מטיפול בביטוי האלגברי שלה. להלן כמה תובנות שאפשר להגיע אליהן מתוך עיסוק במשימה:

- בגלל הסימטריה של גרף הפונקציה הריבועית, שתי נקודות ששיעורי ה- y שלהן שווים קובעות באופן יחיד את שיעור ה- x של נקודת הקיצון (חצי המרחק בין שיעורי ה- x של הנקודות). אבל כיוון שנקודת הקיצון יכולה להיות מינימום או מקסימום, וכיוון שיש אינסוף אפשרויות לשיעור ה- y שלהן, קיימים אינסוף גרפים כאלה (סעיף ב).
- גם כאשר לשתי נקודות יש שיעורי y שונים, יש דרכן אינסוף פרבולות (סעיף ג).
- כל שלוש נקודות שאינן על אותו ישר קובעות פרבולה, אבל קשה להגיע למסקנה זו משיקולים גיאומטריים. למרות זאת, יש מצבים שבהם ניתן להצדיק אמירה זו. בסעיפים ה-ו נתונות שתי נקודות "סימטריות" (אותו שיעור y) ונקודה שלישית בה שיעור ה- x שלה הוא באמצע המרחק בין שיעורי ה- x של הנקודות הנתונות. נקודה זו חייבת להיות נקודת הקיצון של הפרבולה.

שאלה 2

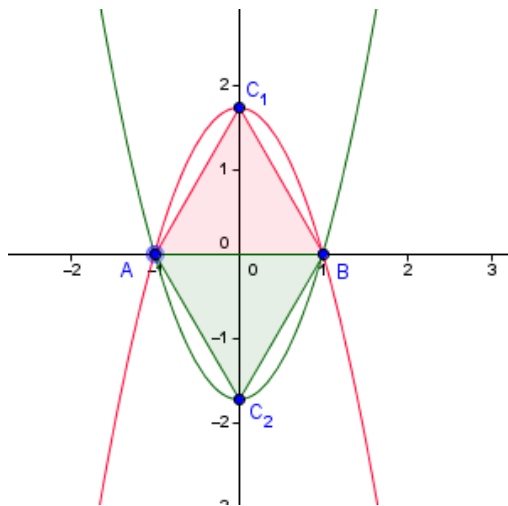
נתונות שתי נקודות במערכת צירים: $A(-1,0)$, $B(1,0)$.

א. מצאו נקודה שלישית C כך שהנקודות A , B , C יהיו קודקודים של משולש שווה צלעות. הבחינו בין מקרים שונים.

ב. מה היקף ומה שטח המשולש (או המשולשים) ABC ?

ג. מצאו פונקציה ריבועית שהגרף שלה עובר דרך הנקודות A , B ו- C . הבחינו בין המקרים השונים.

פתרונות והערות



א. בעזרת משפט פיתגורס מוצאים את שיעורי שתי האפשרויות עבור הנקודה C : $(0, \pm\sqrt{3})$.

ב. היקף: 6 יחידות אורך, שטח $\sqrt{3}$ יחידות שטח.

ג. הפונקציה המבוקשת היא מהצורה $f(x) = ax^2 \pm \sqrt{3}$. את הערך של a ניתן למצוא מתוך העובדה שהגרף עובר דרך הנקודה $(-1,0)$. לדוגמה, עבור $f(x) = ax^2 + \sqrt{3}$ מתקבלת המשוואה: $0 = a \cdot 1^2 + \sqrt{3}$ ומכאן $a = -\sqrt{3}$.
לכן הביטוי האלגברי של הפונקציה הוא: $f(x) = \sqrt{3}x^2 \pm \sqrt{3}$

שאלה 3

כתבו ביטוי אלגברי ל:

- א. פונקציה ריבועית שהגרף שלה עובר דרך שני רביעים.
- ב. פונקציה ריבועית שהגרף שלה עובר דרך שלשה רביעים.
- ג. פונקציה ריבועית שהגרף שלה עובר דרך ארבעת הרביעים רביעים.
- ד. הסבירו למה לא קיימת פונקציה ריבועית שהגרף שלה נמצא כולו ברביע אחד.

פתרונות והערות

- א. האפשרות היחידה לכך היא ששני הרביעים יהיו הרביע הראשון והשני, או הרביע השלישי והרביעי. במקרה הראשון $a > 0$ ובמקרה השני $a < 0$. גרף של פונקציה ריבועית שעובר דרך כל זוג אחר של רביעים, היא בהכרח תעבור לפחות ברביע אחד נוסף.
- ב. אם, למשל, נתון הגרף של הפונקציה הריבועית $f(x) = x^2$, מזיזים אותו אופקית שתי יחידות שמאלה ולאחר מכן מזיזים אותו מטה יחידה אחת יתקבל גרף שעובר דרך שלושה רביעים (ראשון, שני ורביעי). בדרך דומה ניתן ליצור דוגמאות רבות נוספות.
- ג. בדומה לסעיף הקודם, אם, למשל, נתון הגרף של הפונקציה הריבועית $f(x) = x^2$ ומזיזים אותו מטה מספר כלשהו של יחידות, יתקבל גרף שעובר דרך כל ארבעת הרביעים.
- ד. תחום כל פונקציה ריבועית הוא כל המספרים הממשיים, כלומר ניתן להציב בה מספר חיובי או שלילי כלשהו, משמע הגרף שלה חייב לעבור דרך שני רביעים לפחות.

שאלה 4

- א. הציבו $x = 5$ ו- $x = 10$ בביטוי הריבועי $x^2 - 4x + 7$ וחשבו את הערכים שמתקבלים.
- ב. מור שמה לב שכאשר הציבה 5 קיבלה תוצאה גדולה מ-5, וכאשר הציבה 10 קיבלה תוצאה גדולה מ-10. היא שיערה כי עבור כל מספר שהיא תציב התוצאה תהיה גדולה יותר מהמספר שהציבה. נסו מספרים אחרים וחפשו דוגמה נגדית להשערה של מור.
- ג. דן בטוח כי ההשערה של מור נכונה עבור כל המספרים השליליים. מה יכולים להיות הנימוקים שלו?
- ד. הציעו דרכים שונות לחקור את ההשערה של מור.
- ה. החליפו את המספר 7 בביטוי הריבועי כך שיהיה לפחות מספר אחד שמפריך את ההשערה של מור.

פתרונות והערות

המשימה מתחילה כתרגיל הצבה בביטוי ריבועי וחישוב התוצאה, בדומה למשימות באלגברה בכיתה ז. המטרה של התחלה כזאת היא לעורר את הצורך הן להפעיל שיקולים אלגבריים והן לעשות שימוש בכלים מתאימים שנלמדו בכיתה ט (משוואות, אי-שוויונות, פונקציות וגרפים). כמו כן, המשימה מאפשרת לדון בתפקיד הדוגמה הנגדית להפרכת טענה והצורך בהוכחה כדי לאשרה (גם אם קיימות דוגמאות מאשרות רבות).

- א. $12 = 5^2 - 4 \cdot 5 + 7$, $67 = 10^2 - 4 \cdot 10 + 7$
- ב. מטרת החיפוש אחר דוגמאות נגדיות מיועדת לא רק לתרגול בהצבה בביטויים ריבועיים (ולחישוב התוצאה) אלא בעיקר לקבל תחושה לגבי ההשערה. כיוון שהתלמידים לא יצליחו למצוא דוגמה נגדית (כי ההשערה נכונה) ישנה הזדמנות לדיון כיתתי על הצורך בהוכחה.
- ג. סעיף זה מאפשר הפעלת שיקולים אלגבריים מבוססים על "קריאה" מושכלת של הביטוי על מנת להיווכח כי כל הצבה של מספר שלילי (או אפס) תניב כתוצאה של ההצבה מספר חיובי, וכל מספר חיובי הינו גדול מכל מספר שלילי.
- ד. אפשרות א': להציע את אי-השוויון $x^2 - 4x + 7 > x$ ולפתור אותו. כתיבת אי-השוויון מזמין תרגום של התנאי המילולי (תוצאת ההצבה גדולה מהמספר שהצבנו) לשפת האלגברה.
- אפשרות ב': להשוות בין הגרפים של הפונקציות $f(x) = x^2 - 4x + 7$ ו- $g(x) = x$. תלמידים רבים לא מודעים לכך כי ניתן לבטא את המספר שהצבנו כפונקציה $g(x) = x$.
- אפשרות ג': ניתן לחשב את פונקציית ההפרש $f(x) - g(x)$ כ- $x^2 - 5x + 7$ ואת הביטוי הזה ניתן לכתוב כך (לאחר חילוף ריבוע שלם): $(x - 2.5)^2 + 0.75$, ולשים לב כי הערך המינימלי של הפונקציה הוא 0.75 (כאשר $x = 2.5$), כלומר, פונקציית ההפרש תמיד חיובית.
- ה. דיון כמו זה של אפשרות ג' לעיל, מראה כי החלפת המספר 7 במספר שקטן מ- או שווה ל-6.25 "מוריד" את גרף הפונקציה ומאפשר קיום הפרשים שליליים או אפס, כלומר $f(x) - g(x) \leq 0$. כל ביטוי $x^2 - 4x + c$ בו $c \leq 6.25$ יספק מספרים הסותרים את ההשערה.

שאלה 5

נתונה "משפחה" של פונקציות ריבועיות מהצורה $f(x) = x^2 + bx + c$ ($a = 1$). בכל אחד מהמקרים הבאים מצאו את הערכים המתאימים של b ושל c :

- א. נקודת הקיצון של הגרף היא $(0,0)$.
- ב. נקודת הקיצון של הגרף היא על ציר ה- y .
- ג. נקודת הקיצון של הגרף היא על ציר ה- x .
- ד. נקודת הקיצון של הגרף היא על הישר $y = -3$.
- ה. נקודת הקיצון של הגרף היא על הישר $x = 2$.
- ו. נקודת הקיצון של הגרף היא על הישר $y = x$.

פתרונות והערות

א. $b = 0$ וגם $c = 0$

ב. $b = 0$

ג. $b^2 = 4c$

ד. $b^2 = 4(c + 3)$

ה. $b = -4$

ו. אם נזיז את הגרף של הפונקציה $y = x^2$ ימינה ולמעלה (או שמאלה ולמטה) באותו מספר יחידות d , תתקבל משפחה של פונקציות מהצורה $f(x) = (x - d)^2 + d$
כלומר: $f(x) = x^2 - 2dx + d^2 + d$, ומכאן ש: $c = d^2 + d$; $b = -2d$. נבודד את d :
 $d = -\frac{b}{2}$, ונקבל

$$c = d^2 + d = \frac{b}{4}(b - 2)$$

שאלה 6

נתונה פונקציה ריבועית $f(x)$ בעלת התכונות הבאות:

- $f(-3) = f(1)$

- $f(x) \geq x$ לכל x

- נקודת הקיצון היא על ציר ה- x

- א. מצאו את שיעור ה- x של נקודת הקיצון, והראו כי היא חייבת להיות מינימום.
- ב. שרטטו סקיצה של גרף של פונקציה המקיימת את התכונות וכתבו את הביטוי האלגברי שלה.
- ג. מצאו ביטוי אלגברי לפונקציה נוספת.
- ד. מצאו פונקציה ריבועית שמקיימת את שתי התכונות הראשונות, אך נקודת הקיצון איננה על ציר ה- y .

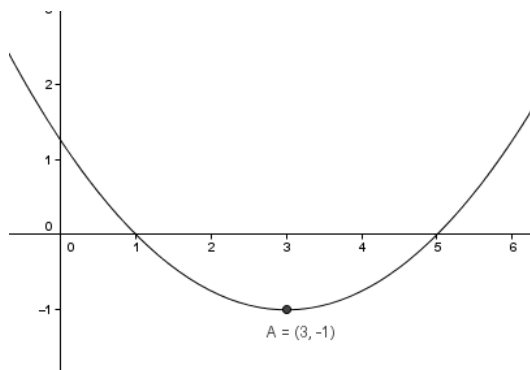
פתרונות והערות

א. סעיף זה מאפשר תרגול במשמעויות של סימוני פונקציות. למשל, התרגום של התכונה הראשונה $f(-3) = f(1)$ לייצוג הגרפי הוא ששיעורי ה- y של שתי הנקודות בהן שיעורי ה- x שלהן הם (-3) ו- 1 הם זהים. לכן, ניתן לקבוע כי ציר הסימטריה של הפונקציה הוא $x = -1$. נקודת הקיצון, $(-1, 0)$, חייבת להיות מינימום, כי אחרת גרף הפונקציה יחתוך את הגרף של $f(x) = x$.

ב-ג. הנתונים עליהם יש להתבסס לצורך שרטוט הסקיצה של גרף הפונקציה הם נקודת המינימום והאזור הנמצא מעל הגרף של $f(x) = x$. ניתן לשרטט גרפים שונים שמקיימים אילוצים אלה. דרך אחת למצוא ביטוי אלגברי לגרף כזה היא על ידי הזזה של יחידה אחת ימינה של גרף הפונקציה $f(x) = x^2$, על מנת לקבל $f(x) = (x + 1)^2$. ניתן לבדוק כי בפונקציה זו אכן מתקיים ש- $f(-3) = f(1)$. תנאי זה ימשיך להתקיים עבור כל פונקציה ריבועית מהצורה $f(x) = a(x + 1)^2$ בה $a \neq 0$.

ד. כל "העלאה" של גרף הפונקציות מהצורה $f(x) = a(x + 1)^2$ תוביל לגרף של פונקציה שמקיימת את שני התנאים הראשונים. במלים אחרות, הפונקציות שמקיימות את שני התנאים הראשונים הן מהצורה $f(x) = a(x + 1)^2 + c$ בהן $c \neq 0$.

שאלה 7



נתון גרף של פונקציה שביטויה האלגברי
הוא $f(x) = a(x - m)^2 + n$. מינימום
של הפונקציה הוא בנקודה $(3, -1)$.

א. מצאו את ערכי m ואת n , והסבירו
כיצד מצאתם.

ב. מצאו את ערכו של a .

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של
גרף הפונקציה עם ציר ה- y .

פתרונות והערות

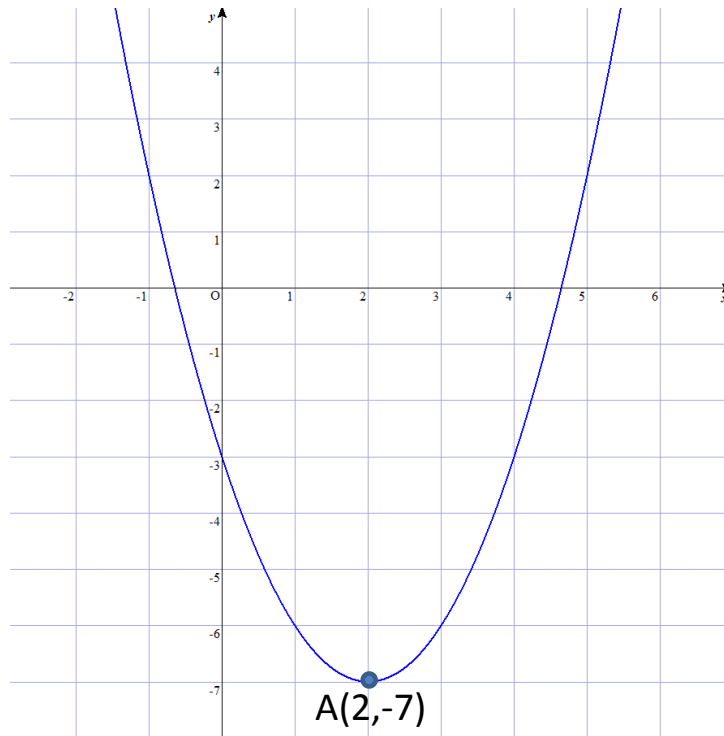
א. הגרף הנתון הוא הזזה של הגרף של $f(x) = x^2$, 3 יחידות ימינה ויחידה אחת למטה.
מכאן ש: $n = -1$; $m = 3$, והמשוואה היא $f(x) = a(x - 3)^2 - 1$.

ב. כדי למצוא את הערך של a , נציב, למשל, את שיעורי הקדקוד $(3, -1)$ בביטוי האלגברי
 $-1 = a(3 - 3)^2 - 1$. ההצבה הזאת אינה מאפשרת לקבוע את הערך של a , ולכן יש
להיעזר באחת משתי הנקודות הידועות האחרות, למשל $(1, 0)$. במקרה זה, נקבל את
המשוואה $0 = a(1 - 3)^2 - 1$ שפתרונה הוא $a = \frac{1}{4}$. ולכן הביטוי האלגברי של
הפונקציה הוא: $f(x) = \frac{1}{4}(x - 3)^2 - 1$.

ג. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y ניתן למצוא על ידי כתיבת הביטוי
האלגברי כך: $\frac{1}{4}x^2 - \frac{6}{4}x + \frac{9}{4} - 1 = 0$. $f(x) = \frac{1}{4}(x - 3)^2 - 1$. וכאן ששיעורי נקודות
החיתוך של הגרף עם ציר ה- y הם $(0, \frac{5}{4})$.

שאלה 8

להלן גרף של פונקציה ריבועית.



א. מצאו לפחות שני נימוקים שונים כדי להראות שהגרף הנתון אינו הגרף של הפונקציה $f(x) = x^2 + 4x - 3$

ב. מצאו את הביטוי האלגברי של הפונקציה שהגרף שלה משורטט לעיל.

ג. הראו כי לגרף הפונקציה המשורטטת ולגרף הפונקציה שבסעיף א יש רק נקודה אחת משותפת.

פתרונות והערות

- א. בדרך כלל נוטים להסתכל בחיתוך עם ציר ה- y כאפיון מזהה. במקרה זה, זה לא עוזר, כי הפונקציה הנתונה אכן עוברת בנקודת החיתוך שנראית בגרף. נימוקים אפשריים:
- ניתן להציב 1, תוצאה ההצבה היא 2, אך הנקודה (1,2) איננה על הגרף הנתון. גם הצבה של נקודות אחרות מראות כי זה אינו הגרף המתאים.
 - ציר הסימטריה של גרף הפונקציה הנתונה הוא -2, ואילו ציר הסימטריה של הגרף הנתון הוא מספר חיובי.

ב. כדי למצוא ייצוג אלגברי של הגרף הנתון, נשים לב שזוהי הזזה אפשרית של הגרף של הפונקציה הפרבולה $f(x) = ax^2$ 2 יחידות ימינה ו-7 יחידות למטה, ולכן ייצוגה:
 $f(x) = a(x - 2)^2 - 7$. על מנת לברר את הערך של a נציב את שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה- y (0, -3): $-3 = a(0 - 2)^2 - 7$. פתרון משוואה זו מראה כי $a = 1$ ואת הפונקציה ניתן לייצג כך: $f(x) = (x - 2)^2 - 7$. פישוט של ביטוי זה נותן $f(x) = x^2 - 4x - 3$.

ג. למשוואה $x^2 + 4x - 3 = x^2 - 4x - 3$ יש רק פתרון אחד והוא $x = 0$, כלומר הנקודה היא נקודת החיתוך עם ציר ה- y .

שאלה 9

הוכיחו כי בפונקציה הריבועית $f(x) = ax^2 + bx + c$:

א. ציר הסימטריה הוא ציר ה- y אם ורק אם $b = 0$

ב. לגרף הפונקציה שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x ואחת מהן היא ראשית הצירים, אם ורק אם $c = 0$ ($b \neq 0$)

ג. אם $a = b = c$ (שונים מאפס) אז אין לגרף הפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים.

פתרונות והערות

שלושת הסעיפים בשאלה זו מאפשרים עיסוק בדיון בהוכחות במסגרת אלגברה, תוך יישום של תהליכי הוכחה דומים לאלה בהם התלמידים עוסקים בגיאומטריה. במסגרת הביטוי "אם ורק אם", ניתן לעסוק בהבדל בין משפט והמשפט ההפוך לו וכיצד זה מתבטא בתהלים ההוכחה (מה נלקח כנתון ומה צריך להוכיח). המשפטים אינם מורכבים והם די מיידיים להוכחה.

א. יש להוכיח כי:

- אם ציר הסימטריה הוא ציר ה- y אזי $b = 0$

הוכחה: משוואת ציר ה- y היא $x = 0$, ומכיון ששיעור ה- x של ציר הסימטריה הוא נתון על ידי $x = -\frac{b}{2a}$, מתקבל כי $-\frac{b}{2a}$ חייב להיות אפס, וזה קורה כאשר $b = 0$.

- אם $b = 0$ אזי ציר הסימטריה הוא ציר ה- y

הוכחה: אם $b = 0$, אזי גם $-\frac{b}{2a} = 0$, אך $-\frac{b}{2a}$ מציין את שיעור ה- x של הקדקוד של גרף הפונקציה, ואם הוא אפס אז משוואת ציר הסימטריה היא $x = 0$.

ב. יש להוכיח כי:

- אם $c = 0$ אזי לגרף הפונקציה שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x ואחת מהן היא ראשית הצירים.

הוכחה: אם $c = 0$, אזי נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x על ידי פתרון המשוואה $ax^2 + bx = 0$. על מנת לפתור, נכתוב $ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$ ולכן או $x = 0$ או $(ax + b) = 0$, כלומר, $x = -\frac{b}{a}$. במלים אחרות, תמיד יש לגרף שתי נקודות חיתוך עם הצירים ואחת מהן היא ראשית הצירים (כי אם נציב $x = 0$ ב- $f(x) = ax^2 + bx$ נקבל $f(0) = 0$).

- אם לגרף הפונקציה שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x ואחת מהן היא ראשית הצירים, אזי $c = 0$.

הוכחה: לפונקציה שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x : $(0,0)$ ו- $(k,0)$ ($k \neq 0$).

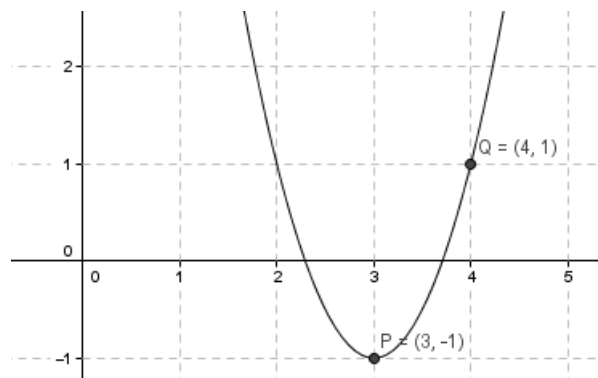
לכן ניתן לכתוב את הביטוי האלגברי של הפונקציה בעזרת מידע זה, כך
 $f(x) = a(x - 0)(x - k)$, ולאחר פישוט: $f(x) = ax^2 - akx$, כלומר
 ביטוי מהצורה $f(x) = ax^2 + bx + c$ בו $c = 0$.

ג. הוכחה: אם $a = b = c \neq 0$, אזי ניתן לכתוב את הביטוי האלגברי של הפונקציה, למשל,
 כך: $f(x) = ax^2 + ax + a$. כדי למצוא את נקודות החיתוך, יש לפתור את המשוואה
 $ax^2 + ax + a = 0$, אך במשוואה זו הדיסקרימיננטה היא $\sqrt{a^2 - 4a^2}$, והיא תמיד
 שלילית. כלומר אין פתרון למשוואה, ולכן אין נקודות חיתוך עם הצירים.

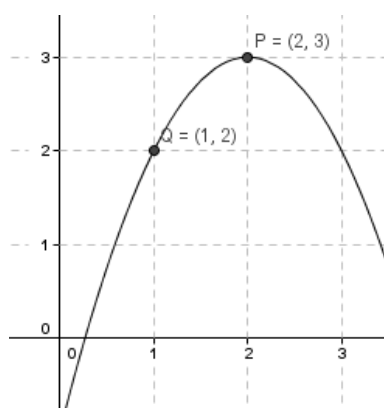
שאלה 10

נתונים גרפים של שלוש פונקציות ריבועיות. בכל גרף מסומנת נקודת הקיצון ושיעוריה ושיעורים של נקודה נוספת על הגרף. עבור כל אחד מהגרפים, מצאו את הביטוי האלגברי של הפונקציה בצורה $f(x) = ax^2 + bx + c$.

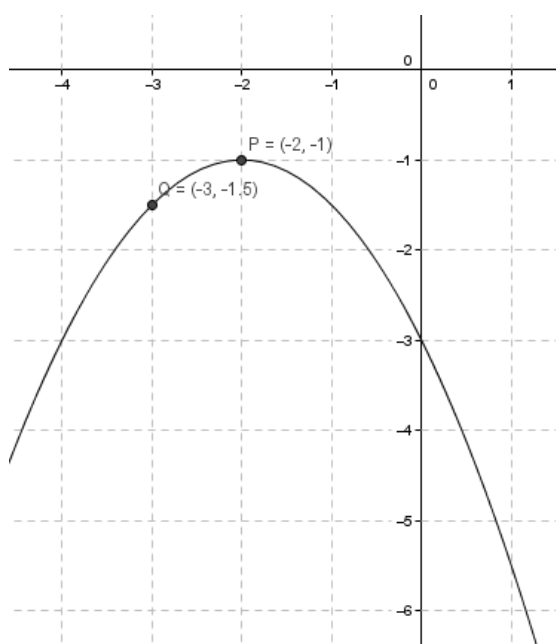
א.



ב.



ג.



פתרונות והערות

גרף של כל פונקציה ריבועית נתונה יכול להיחשב כהזזה מסוימת (ימינה או שמאלה ולמעלה או למטה) של גרף הפונקציה הריבועית $f(x) = ax^2$. אם נתונים שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה (שיעורי הקדקוד של הפרבולה), ניתן לרשום את הפונקציה המוזזת באופן הבא:
 $f(x) = a(x - m)^2 + n$, (m, n) הם שיעורי הקדקוד, השיעור הראשון מציין את היחידות ואת הכיוון של ההזזה האופקית והשיעור השני את היחידות והכיוון של ההזזה האנכית של הקדקוד (ושל כל הפונקציה). בגרפים נתונים שיעורי הקדקוד של הפרבולה ולכן כל מה שנותר לחשב הוא הערך של a וזאת עושים על ידי הצבת השיעורים של הנקודה השנייה הנתונה ופתרון משוואה כתואר להלן.

א. $f(x) = a(x - 3)^2 - 1$, מציבים את שיעורי הנקודה (4,1) ומתקבל המשוואה $1 = a(4 - 3)^2 - 1$, ועל ידי פתרון מוצאים כי $a = 2$. לכן, הביטוי האלגברי של הפונקציה הוא: $f(x) = 2x^2 - 12x + 17$. ניתן למצוא את נקודות החיתוך עם ציר ה- x ולהיווכח כי הן אכן מתאימות (באומדן ראייה) למה שמסומן בגרף.

ב. $f(x) = -x^2 + 4x - 1$

ג. $f(x) = -0.5x^2 - 2x - 3$

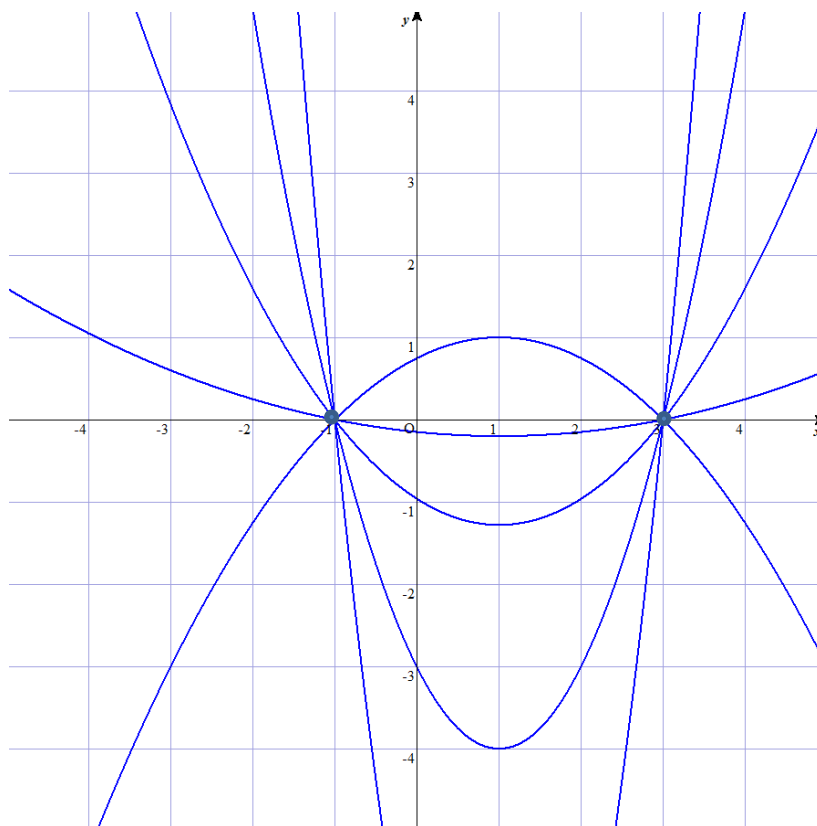
שאלה 11

נתונה הפונקציה הריבועית $f(x) = ax^2 + bx + c$ וידוע כי שיעורי נקודות החיתוך של הגרף שלה עם ציר ה- x הן $P(-1,0)$ ו- $Q(3,0)$.

- א. הציעו ערכים אפשריים ל- a , b ו- c . הסבירו כיצד מצאתם.
- ב. הציעו ערכים אחרים ל- a , b ו- c כאשר הערך של a הוא הנגדי לערכו בסעיף א.
- ג. הציעו ערכים אחרים ל- a , b ו- c כאשר הפעם הערך של a הוא פי 3 מערכו בסעיף א.
- ד. ידוע שגרף הפונקציה עובר דרך הנקודה $(0,1)$. מצא את הערכים של a , b ו- c .
- ה. u הוא מספר כלשהו (חיובי או שלילי). האם תמיד קיימת פונקציה ריבועית העוברת בנקודות P ו- Q , ובנקודה $(0, u)$? אם כן, כתבו את הביטוי האלגברי שלה, ואם לא הסבירו.

פתרונות והערות

- א. רצוי לדון עם התלמידים תחילה על כך שיש יותר מפונקציה ריבועית אחת שאלה נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x . יהיו תלמידים שיראו מיד שיש לפחות שתיים (אחת בה הקדקוד הוא מקסימום והשנייה בה הוא מינימום). ניתן להשתכנע גם חזותית על די התבוננות בשרטוט הבא:



- ישנן דרכים שונות למצוא את הערכים של המקדמים a , b ו- c . למשל:
- ניסוי וטעיה. ניתן לשחרר עם ערכי המשתנים כך שהנוסחה לפתרונות המשוואה הריבועית יהיו $x = -1$ ו- $x = 3$. אפשרות זו עלולה להיות מייגעת וגם לא להניב תוצאות גם לאחר מספר רב של ניסיונות.
 - ניתן להסתמך על כתיבת הביטוי האלגברי ש לפונקציה ריבועית על בסיס השורשים שלה, כך: $f(x) = a(x - 3)(x + 1)$, לקבוע כרצוננו את הערך של a (בתנאי שהוא שונה מאפס), ולפשט. כל ביטוי שיתקבל ייצג פונקציה ריבועית בה P ו- Q הן נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x .
 - אם P ו- Q הן נקודות החיתוך עם ציר ה- x , אזי ציר הסימטריה חייב להיות $x = 1$. מכאן, ששיעור ה- x של הקדקוד של כל פרבולה (שאלה נקודות החיתוך שלה עם הציר) יהיה 1. את שיעור ה- y של הקדקוד ניתן לקבוע כרצוננו. מכאן ניתן להמשיך כמו בפתרון לשאלה 10 לעיל.
 - אם ציר הסימטריה חייב להיות $x = 1$, אזי $\frac{-b}{2a} = 1$. במילים אחרות חייב להתקיים הקשר $-b = 2a$. ניתן לבחור ערך עבור a (שונה מאפס), למשל 1 ואז נקבע הערך של b (במקרה שבחרנו, זה יהיה -2). את הערך של c ניתן למצוא על ידי המצבה בנוסחת המשוואה הריבועית של הערכים של a , של b ושל שיעור ה- x של נקודת החיתוך.
- רצוי שתלמידים יתנסו בדרכים אלה, בין אם הן מוצעות על ידם בין אם המורה מציע אותם. העיסוק בדרכים חלופיות אלה מהווה סיכום ושילוב של נושאים רבים שנלמדו.
- ב. ניתן להראות בדרכים שונות כי החלפת הערך של a בנגדי לו, כך שלמשוואה יהיו אותם השורשים גוררת החלפת b ו- c בנגדיים שלהם. למשל, על ידי פישוט שלשני הביטויים $a(x - p)(x + q)$ ו- $-a(x - p)(x + q)$ והשוואת המקדמים. ניתן להיווכח כי אכן אם מחליפים את ערכי המקדמים בערכים הנגדיים שלהם בנוסחה לפתרון משוואה ריבועית, אכן מתקבלים אותם השורשים.
- ג. ניתן לעשות ניתוח דומה לזה של הסעיף הקודם.
- ד. לפני שמתחילים לפתור, רצוי להסב את תשומת לב התלמידים לגרף. על פי הנתונים, רואים כי לגרף יהיה מקסימום, כלומר שערך המקדם a יהי שלילי. ניתן לפתור בדרך דומה לזו של שאלה 10 לעיל, ולקבל כי הפונקציה היא: $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$.
- ה. ברור כי u יכול להיות כל מספר חוץ מאפס (כי במקרה זה תהיינה שלוש נקודות על ישר אחד ואין פרבולה שעוברת דרכן). במקרה זה, $c = u$, $b = \frac{2u}{3}$, $a = -\frac{u}{3}$.

שאלה 12

א. הציבו שני מספרים שונים במקום c בביטוי האלגברי $f(x) = x^2 + x + c$ על מנת לקבל שתי פונקציות ריבועיות שונות. האם יש לגרפים של שתי הפונקציות נקודות משותפות? הסבירו.

ב. הציבו שני מספרים שונים במקום c בביטוי האלגברי $f(x) = x^2 + bx + 3$ על מנת לקבל שתי פונקציות ריבועיות שונות. האם יש לגרפים של שתי הפונקציות נקודות משותפות? הסבירו.

ג. הציבו שני מספרים שונים במקום a בביטוי האלגברי $f(x) = ax^2 + x + 3$ על מנת לקבל שתי פונקציות ריבועיות שונות. האם יש לגרפים של שתי הפונקציות נקודות משותפות? הסבירו.

ד. הציבו שני מספרים שונים במקום a בביטוי האלגברי $f(x) = ax^2 + ax$ על מנת לקבל שתי פונקציות ריבועיות שונות. האם יש לגרפים של שתי הפונקציות נקודות משותפות? הסבירו.

פתרונות והערות

שאלה זו מאפשרת העלאת שיקולים אלגבריים וגרפיים על מנת להצדיק או להסביר את אותה הטענה. לפני שניגשים לפתור שאלה זו, מומלץ לדון עם התלמידים על כמה נקודות משותפות יכולות להיות לגרפים של שתי פונקציות ריבועיות שונות, ולבקש מהם להציע דוגמאות גרפיות לכל מקרה.

א. תלמידים יוכלו להעלות את הטיעון כי שינוי במקדם c , מעלה או מוריד (תלוי אם הגדלנו או הקטנו את המקדם) את כל גרף הפונקציה "במקביל" לפונקציה המקורית. ולכן, לא יתכן שיהיו לשני הגרפים נקודות משותפות. ניתן להצדיק זאת גם אלגברית על ידי השוואה (הרכבת משוואה) של שני הביטויים האלגבריים הבאים $x^2 + x + d = x^2 + x + c$. הפתרון היחיד למשוואה זו הוא $c = d$, שמשמעותו היא שאין נקודות משותפות אלא אם כן שתי הפונקציות זהות.

ב. מהסתכלות בביטוי האלגברי, כאשר משתנה רק הערך של המקדם b , רואים כי הגרפים של שתי הפונקציות עדיין חותכות את ציר ה- y באותה נקודה. נשאלת השאלה האם יתכן שיש עוד נקודת חיתוך בין שני הגרפים. אך, למשוואה $x^2 + dx + 3 = x^2 + bx + 3$ יש רק פתרון אחר והוא $x = 0$, כלומר אותה נקודת חיתוך עם ציר ה- y , ורק היא.

ג. השיקולים לפתרון הם זהים לאלה של הסעיף הקודם.

ד. לגרפים של כל הפונקציות מהצורה $f(x) = ax^2 + ax = ax(x + 1)$ יש אותן שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x , $(0,0)$ ו- $(-1,0)$, ללא כל קשר לערך של a ($a \neq 0$).

שאלה 13

להלן ארבעה זוגות של פונקציות. ציינו בעבור כל זוג, האם לגרפים שלהם יש נקודות משותפות? הסבירו.

א. $f(x) = (x - 10)^2$ ו- $g(x) = (x + 10)^2$

ב. $h(x) = x^2 + 4x + 4$ ו- $l(x) = -x^2 + 4x - 4$

ג. $p(x) = x^2 + 5x + 6$ ו- $q(x) = 2x^2 + 10x + 12$

ד. $t(x) = x^2 + 8x - 1$ ו- $s(x) = 8x - 1$

פתרונות והערות

בפתרון שאלה זו רצוי לעודד שיקולים מילוליים, גרפיים ואלגבריים ככל שזה ניתן.

א. בהסתכלות בביטויים האלגבריים רואים כי כאשר $x > 0$, הערכים של $g(x)$ תמיד גדולים מהערכים של $f(x)$. כאשר $x < 0$, הערכים של $g(x)$ תמיד קטנים מהערכים של $f(x)$. לכן, יתכן רק ערך אחד עבורו הפונקציות שוות והוא כאשר $x = 0$, וזאת יכולים לראות מהתבוננות בביטויים עצמם. ניתן גם לפתור את המשוואה הבאה $x^2 - 20x + 100 = x^2 + 20x + 100$, ולמצוא כי הפתרון היחיד הוא $x = 0$. אפשר גם לשרטט את שני הגרפים, האחד הוא הזזה 10 יחידות ימינה של $f(x) = x^2$ והשנייה 10 יחידות שמאלה, ולראות היכן הגרפים נחתכים (רק פעם אחת).

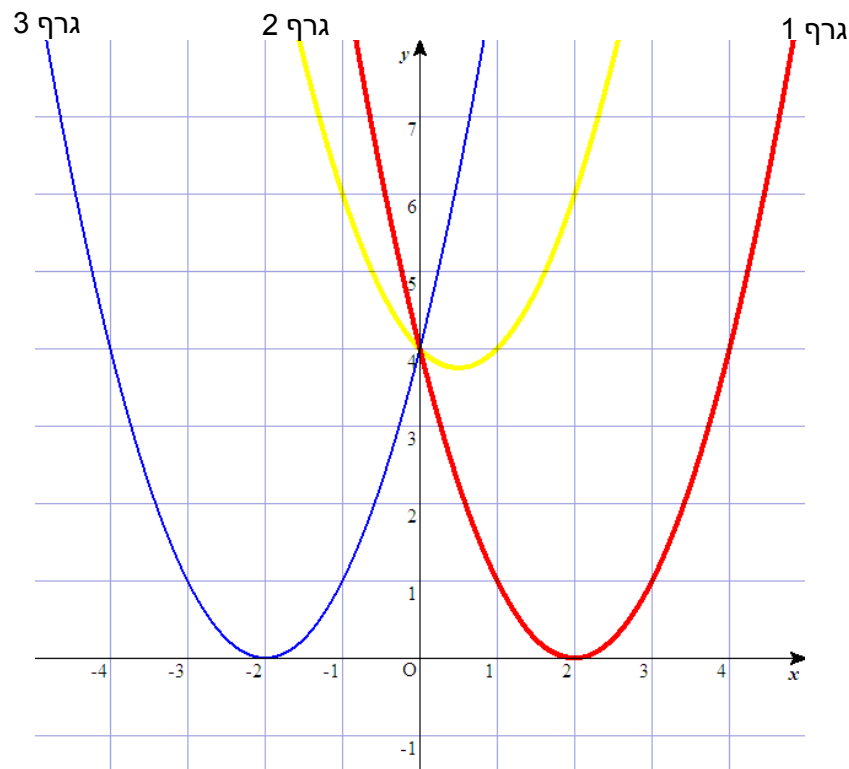
ב. ההשוואה בין $h(x)$ ו- $l(x)$ מראה כי, בגלל שיש להם איבר אמצעי זהה $4x$, הפונקציות תהיינה שוות כאשר $-x^2 - 4 = x^2 + 4$. אך אין מספר שווה לנגדי שלו.

ג. מהסתכלות בביטויים האלגבריים, רואים כי $q(x) = 2p(x)$, ולכן השורשים של הפונקציה האחת יהיו גם השורשים של השנייה ואלה שתי הנקודות המשותפות. ניתן לדון עם התלמידים במסקנה הכללית לגבי הכפלת כל המקדמים של פונקציה באותו מספר.

ד. ניתן לראות כי הערכים של $t(x)$ הם הערכים של $s(x)$ ועוד מספר שמועלה בריבוע (כלומר, תמיד חיובי, אלא אם כן הוא אפס). לכן הערכים של $t(x)$ יהיו תמיד גדולים יותר מהערכים של $s(x)$ אלא אם כן $x = 0$. ולכן יש להם רק נקודה אחת משותפת והיא $(0,1)$. אם נשרטט את הגרפים, נראה את נקודת ההשקה ואת הפרבולה תמיד מעל הגרף של הישר.

שאלה 14

להלן שלושה גרפים של פונקציות שהביטוי האלגברי שלהן הוא: $f(x) = x^2 + bx + 4$



- א. הראו כי נקודת החיתוך של כל הגרפים של הפונקציות מהצורה הזו היא $(0, 4)$.
- ב. הנקודות $(2, 0)$ ו- $(-2, 0)$ הם קדקודים של הגרפים 1 ו-3 בהתאמה. מצאו את הערך של b בעבור שתי פונקציות אלה.
- ג. מה יכולים להיות הערכים של b אם לגרף הפונקציה יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x ? נקודה אחת?
- ד. מצאו את נקודות החיתוך של הישר $y = 1$ עם כל אחד מהגרפים שבשרטוט.
- ה. מצאו ערך של b כך שגרף הפונקציה לא יעבור ברביע הרביעי.
- ו. הסבירו מדוע עבור כל ערך של b , גרף הפונקציה עוברת ברביע השני.

פתרונות והערות

סעיפים א ו- ב ניתנים לפתור על ידי הצבה וחישוב. בסעיף ב, יהיו תלמידים שיזהו את הביטוי של ריבוע של סכום שני איברים ויסיקו ממנו את הערך של b .

ג. בדיקת הדיסקרימיננטה $\sqrt{b^2 - 16}$ מראה את שני המקרים בהם גרף לגרף הפונקציה יש רק נקודת חיתוך אחת עם ציר ה- x והם גרף 1 ו גרף 3. כאשר $b^2 > 16$ (כלומר, כאשר $b > 4$ או $b < -4$), לגרף יהיו שתי נקודות חיתוך עם הציר.

ד. עם גרף 1: $(1,1)$ ו- $(3,1)$, עם גרף 2 אין נקודות חיתוך ועם גרף 3: $(-1,1)$ ו- $(-3,1)$. ניתן למצוא על ידי פתרון משוואות ובדיקת התוצאות בגרפים.

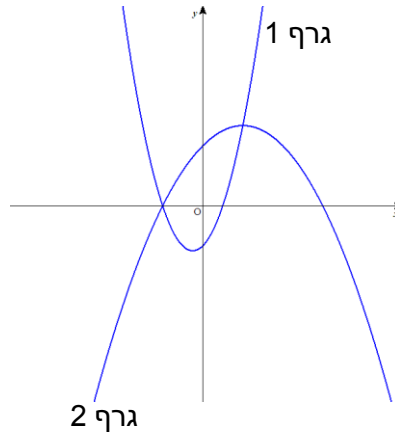
ה. שלושת הגרפים המשורטטים מקיימים תנאי זה. דוגמא נוספת, ניתן להזיז את גרף 3 יחידה אחת למטה, ולקבל גרף של פונקציה שאינו עובר דרך הרביע הרביעי. ניתן גם לדון עם התלמידים ניתוח כללי, למשל, ברביע הרביעי, שיעור ה- x של נקודות הוא תמיד חיובי ושיעור ה- y הוא תמיד שלילי. התבוננות בביטוי $x^2 + bx + 4$, מעלה כי כאשר $b \geq 0$, אין אפשרות לקבל תוצאה שלילית בהצבה של x חיובי, כלומר הפונקציה לא תעבור ברביע הרביעי. ניתן להראות כי זה גם נכון עבור $b \geq -4$. בעזרת כלים טכנולוגיים ניתן להראות כיצד "נע" הגרף כאשר משנים את הערכים של b .

ו. כל גרף "צוחק", כלומר גרף בו הקדקוד הוא מינימום, חייבת לעבור דרך הרביע השני. בנוסף ניתן להראות כי עבור כל ערך של b , תמיד יהיה אפשר למצוא הצבה של מספר שלילי שתוצאה חיובית.

שאלה 15

להלן הגרפים של שתי פונקציות ריבועיות

$$f(x) = -0.25(x+2)(x-6) \quad \text{ו-} \quad f(x) = (x-1)(x+2)$$



- א. התאימו לכל גרף את הביטוי האלגברי שלו והסבירו את בחירתכם בעזרת שני נימוקים לפחות.
ב. באיזה גרף נמצאת הנקודה $(12, -21)$? הסבירו כיצד מצאתם.
ג. מצאו את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
ד. מצאו את שיעורי הקדקודים של שני הגרפים.
ה. מצאו את אורך הקטע המחבר את שני הקדקודים.

פתרונות והערות

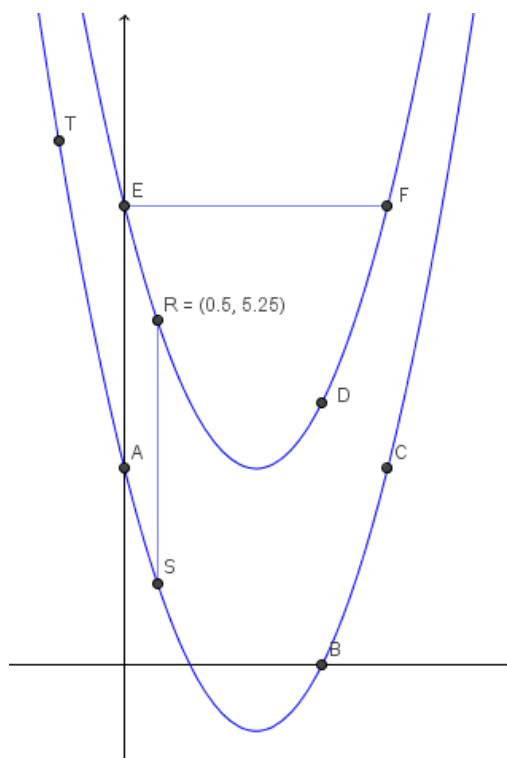
- א. את ההתאמה ניתן לבצע על ידי:
- הסתכלות בשורשים
- בדיקת הסימן של המקדם a
- מציאת נקודת החיתוך עם ציר ה- y
- ב. מהסתכלות בלבד ניתן לקבוע בוודאות כי הנקודה נמצאת על גרף 2, וניתן לאשר זאת על ידי הצבה.
- ג. מהסתכלות הן בגרף והן בגורם $(x+2)$ המשותף לשני הביטויים האלגבריים, ניתן לראות כי הנקודה $(-2, 0)$ נמצאת על שני הגרפים. מה שנותר הוא להשוות את הגורמים הנוספים, כלומר לפתור: $-0.25(x-6) = x-1$ ולמצוא כי הנקודה השנייה היא $(2, 4)$.
- ד. את שיעורי הקדקודים ניתן למצוא, למשל, על ידי מציאת ציר הסימטריה, שהוא $x = -0.5$ עבור גרף 1, ו- $x = 2$ עבור גרף 2. לכן הקדקודים הם: $(-0.5, -2.25)$ ו- $(2, 4)$ בהתאמה.
- ה. בעזרת משפט פיתגורס, ניתן למצוא כי אורך הקטע הוא 6.73 (בקירוב).

שאלה 16

שתיים מתוך ארבע הפונקציות הבאות משורטטות בגרף:

$$f(x) = (x - 2)^2 - 1 \quad g(x) = x^2 - 4x + 7$$

$$h(x) = (x + 2)^2 - 1 \quad k(x) = (x - 2)^2 + 7$$



בכל סעיף נמקו את תשובותיכם.

- א. התאימו כל אחד שמשני הגרפים לביטוי האלגברי שלו (מתוך הרשימה).
- ב. מצאו את שיעורי ארבע הנקודות A, B, C, D אם ידוע כי הישר BD מקביל לציר ה- y וישר AC מקביל לציר ה- x .
- ג. ידוע כי הקטע RS מקביל לציר ה- y . מצאו את אורכו.
- ד. מעבירים דרך נקודה T ישר מקביל לציר ה- y . ישר זה חותך את גרף הפרבולה העליונה בנקודה U (לא מסומנת בסרטוט). האם אפשר לקבוע את אורך הקטע TU? אם כן, מה אורכו? אם לא נמקו.
- ה. ידוע כי הקטע EF מקביל לציר ה- x . מצאו את אורכו.
- ו. מצאו את שטח המשולש BCD.
- ז. הוכיחו כי מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

פתרונות והערות

- א. שני הגרפים הם הזזה ימינה של הפונקציה $f(x) = x^2$, ולכן הפונקציה $h(x)$ נפסלת. הפונקציות $g(x)$ ו- $k(x)$ מוזזות כלפי מעלה, ולכן אחת מהן מתאימה לגרף העליון, ופונקציה $f(x)$ מוזזת למטה, ולכן מתאימה לגרף התחתון. הבחירה בין $g(x)$ ו- $k(x)$ מבוססת על הנקודה $R(0.5, 5.25)$ שמתאימה רק לגרף של $g(x)$.
- ב. $A(0, 3)$ על פי $f(x)$, $B(3, 0)$ על פי $f(x)$, $C(4, 3)$ סימטרית לנקודה A יחסית לישר $x = 2$. $D(3, 4)$ על פי $g(x)$.
- ג. כל נקודה בגרף של פונקציה $g(x)$ היא הזזה אנכית של נקודה (בעלת אותו שיעור ה- x) בגרף של $f(x)$. לכן אורך הקטע $RS=4$. זאת ניתן לראות כי אורכו כערך הקטע EA , אותו ניתן לחשב כהפרש של המקדמים החופשיים של שתי הפונקציות. כמו כן, ניתן לחשב את אורך הקטע כהפרש בין שיעורי ה- y של הנקודות R ו- S , אחד מהם נתון ואת השני ניתן למצוא על ידי הצבה.
- ד. משיקולים זהים לאלה שבסעיף הקודם, אורך הקטע הוא 4.
- ה. EF הינו הזזה אנכית של הקטע AC , שאורכו 4.
- ו. אורך הבסיס $BD=5$. הגובה לבסיס זה הינו המרחק האופקי ל- C - יחידה אחת. לכן שטח המשולש הוא 2.5 יחידות שטח.
- ז. קל לבדוק שהשיפועים של AB ושל DC שניהם -1, ולכן $ABCD$ טרפז. על פי משפט פיתגורס $AD = BC = \sqrt{10}$.

שאלה 17

נתונות שתי פונקציות ריבועיות: $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 2x^2 + 7$.

א. הראו בשתי דרכים שונות כי הגרפים של הפונקציות לא נחתכים.

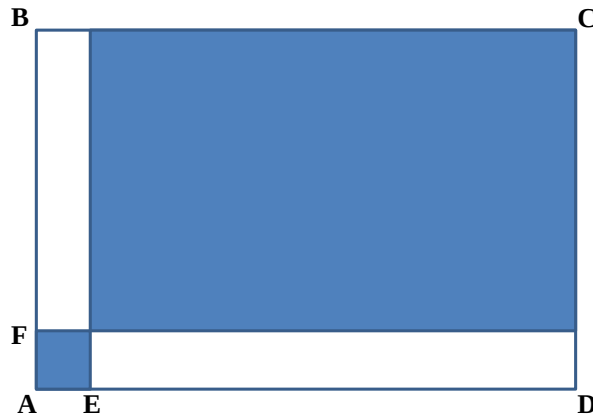
ב. שנו רק את המקדם 2 בפונקציה $f(x)$, כך שלשתי הפונקציות יהיו נקודות חיתוך. הראו כי שינוי זה לא מאפשר שתהיה רק נקודת חיתוך אחת.

ג. עבור אלו שינויים של המקדם 2 בפונקציה $f(x)$ יהיו לשתי הפונקציות נקודות חיתוך ועבור אלו שינויים לא יהיה נקודות חיתוך? הסבירו.

ד. מצא מקדם לפונקציה $f(x)$ כך שיעורי ה- x של נקודות החיתוך של שתי הפונקציות יהיו 1 ו-1-.

שאלה 18

במלבן שבשרטוט נתון כי האורך של AB הוא 20 ס"מ והאורך של BC הוא 30 ס"מ. כמו כן, נתון כי אורך הקטע AF שווה לאורך הקטע AE.



- שני ילדים משחקים את המשחק הבא: הראשון בוחר אורך עבור AE, מחשב את השטח הצבוע ורושם את התוצאה כנקודות לזכותו. השחקן השני רושם לזכותו נקודות את תוצאת חישוב השטח הנותר (הלא צבוע). המנצח הוא השחקן שקיבל את מירב הנקודות.
- א. השחקן הראשון בחר באורך קטע של 13 ס"מ עבור AE. חשבו את הנקודות שיקבלו הוא ויריבו.
- ב. לאחר בחירת אורך קטע, השחקן הראשון קיבל 292 נקודות. באיזה אורך קטע הוא בחר? כמה נקודות קיבל השחקן השני?
- ג. האם יתכן מצב שבו בחירת השחקן הראשון תוביל לתיקו? אם כן, מתי, אם לא הסבירו.
- ד. עבור אלו ערכים של AE מובטח הניצחון לשחקן הראשון?
- ה. מה הוא מספר הנקודות הגדול ביותר שיכול לקבל השחקן השני?
- ו. האם יתכן כי החלקים הצבועים יהיו שניהם ריבועיים? הסבירו.

פתרונות והערות

בעיה זו מתאימה לנושא בעיות מילוליות הניתנות לפתרון בעזרת משוואות ריבועיות, כמו כן, היא משלבת ידע בסיסי בגיאומטריה (חישובי שטחים, תכונות של ריבועים ומלבנים, למשל בסעיף ו).

השרטוט שניתן כדי לאייר את המצב המדגים בחירה של אורך קטע כך שסכום השטחים הצבועים הוא גדול באופן בולט לעין מסכום השטחים הלא צבועים, ולכן בחירה זו יזכה את השחקן הראשון ביותר נקודות מאלה של יריבו. רצוי לדון עם התלמידים על מצבים שונים ולבחון אותם "על פי העין" על מנת (א) להבין היטב את המצב ולהתיידד עמו, ו- (ב) ליצור

את הצורך בחישוב, כדי שהתלמידים ייווכחו כי לא תמיד ברור כיצד בחירות שונות של אורך קטע משפיעות על גודל השטחים.

א- סעיף זה מיועד להתנסות בחישוב מספרי. החישוב מהווה גם הכנה לבניית הביטוי הסימבולי שיאפשר לנתח את כלל המצבים של הבעיה.
אם הבחירה של אורך הקטע הוא 13 ס"מ, שטח הריבוע הצבוע הוא 169 סמ"ר ושטח המלבן הצבוע הוא (20-13)(30-13), כלומר, בסך הכול השטח הצבוע הוא 288 סמ"ר. היריב יקבל 312 נקודות (600-288).

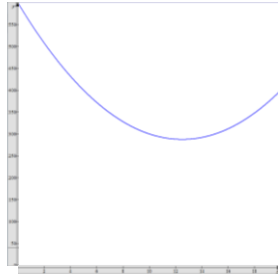
ב- יתכן ויהיו תלמידים שינסו לנחש תחילה את האורך ולבדוק את הניחוש, מומלץ להקדיש כמה דקות לכך כדי לתרגל את החישוב ואולי כי יתכן שתלמידים מסוימים יגיעו לאחד הפתרונות ותלמידים אחרים לפתרון השני וזה יצור ענין מיוחד. כמו כן, יהיו תלמידים שינסו לבסס את הניחוש על ידי השוואה בין תוצאת החישוב של הסעיף הקודם ולתוצאה המובאת בסעיף זה, ולהסיק מממנו ערכים אפשריים של האורך. ההתנסות כזו עם מספרים לצורך "ניחוש" פתרון עשויה לתמוך בהבנה טובה של הבעיה וכהקדמה לטיפול/למודל האלגברי שיבוא, הן בעזרת משוואות והן בעזרת פונקציות ואשר יבהירו את הבעיה בשלמותה.
המשוואה הריבועית המתקבלת אותה יש לפתור היא: $x^2 + (30 - x)(20 - x) = 292$.
למשוואה זו שני פתרונות אפשריים לאורך: 11 ס"מ ו- 14 ס"מ.

ג- ניתן לייצג מצב של תיקו על ידי אחת משלוש האפשרויות: השוואה של השטח הצבוע ל- 300 (חצי שטח המלבן), השוואה של השטח הלא צבוע ל-300 (חצי משטח המלבן) או השוואה של השטח הצבוע לשטח הלא צבוע. תתקבלנה בהתאמה שלוש משוואות:
$$x^2 + (30 - x)(20 - x) = 300$$
$$(30 - x)x + (20 - x)x = 300$$
$$x^2 + (30 - x)(20 - x) = (30 - x)x + (20 - x)x$$
$$x = 15 \text{ ו- } x = 10$$

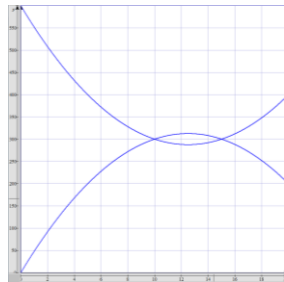
בכל מקרה, יתקבלו שני הפתרונות $x = 10$ ו- $x = 15$.

ד- על מנת להבטיח ניצחון לשחקן הראשון יש להפוך את אחת המשאות שהתקבלו בסעיף הקודם לאחד מאי-השוויונות הבאים:
$$x^2 + (30 - x)(20 - x) < 300$$
$$(30 - x)x + (20 - x)x > 300$$
$$x^2 + (30 - x)(20 - x) > (30 - x)x + (20 - x)x$$

לחילופין ניתן לבחון את הפונקציה $f(x) = 2x^2 - 50x + 600$ (המייצגת את השטח הצבוע התלוי באורך AE שנבחר), את שורשיה (שכבר חושבו בסעיף ג' לעיל) ואת חתום ההגדרה. לגבי תחום ההגדרה, יהיו תלמידים שיצינו $0 \leq x \leq 30$ כי $AE \leq 30$. אך בדיקת האיור מראה כי $AE \leq 20$. לכן, גרף הפונקציה הוא:



ניתן לבחון את מצבי הניצחון של שני השחקנים (כמו כן, מצבי תיקו) גם בעזרת הגרפים של הפונקציה המתארת את מספר הנקודות של השחקן השני ולהשוות ביניהן:



ה- מספר הנקודות הגדול ביותר שיכול לקבל השחקן השני הוא כאשר הפונקציה $g(x) = 600 - (2x^2 - 50x + 600) = -2x^2 + 50x$ מקבלת את הערך הגדול ביותר, כלומר בקדקוד הפרבולה. זה קורה אם השחקן הראשון בוחר $AE=12.5$, מצב שמקנה לו 287.5 נקודות והשחקן השני זוכה ב- 312.5 נקודות. העובדה שנקודת הקיצון מתקבלת כאשר $AE=12.5$ נובעת גם מסעיפים קודמים. ראינו בסעיף ב' ש- $f(11) = f(14)$. בגלל הסימטריות של הפרבולה ניתן להסיק שנקודת הקיצון היא באמצע המרחק בין 11 ל- 14.

ו- לא יתכן – כי למשוואה $20-x=30-x$ אין פתרון.

שאלה 19

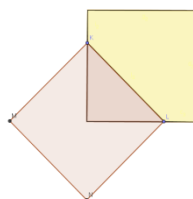
למלי מגרש ריבועי מגודר ששטחו 64 מ"ר. בחלקו היא רוצה לגדל כרוב ובחלקו השני בקר. על מנת שהבקר לא יאכל את הכרוב, עליה להוסיף גדר פנימית בין החלקים. היא מתלבטת בין שתי אפשרויות: גדר במקביל לצלע, או במקביל לאלכסון הריבוע (ראו ציור).



- א. מה הוא האורך המקסימלי של הגדר בשני המקרים?
- ב. אם מלי רוצה לחלק את השטח לשני חצאים, באיזו אפשרות כדאי לה לבחור על מנת לחסוך בגדר?
- ג. אם השטח לגידול כרוב יהיה שמינית משטח השדה, באיזו אפשרות כדאי לבחור כדי לחסוך בגדר?
- ד. עבור איזו חלוקת שטח, אורך הגדר בשני המקרים שווה?
- ה. בחלוקה השנייה נוצרים משולש ומחומש. מה אורך הגדר אם שטח המחומש הוא 46 מ"ר?

פתרונות והערות

- א. צלע הריבוע 8 מטרים. זהו אורך הגדר המרבי במקרה הראשון. במקרה השני, אורך האלכסון הריבוע הוא $8\sqrt{2} \approx 11.31$ מטר.
- ב. על פי החישוב למעלה – מקביל.
- ג. גדר מקבילה לצלע תהייה תמיד באורך 8 מ'. גדר באלכסון צריכה לעבור בין אמצעי הצלעות, ואורכה יהיה $4\sqrt{2} \approx 5.66$ מ'. האלכסון עדיף.
- ד. עבור רבע משטח המגרש, כלומר 16 מ"ר. ניתן להראות זאת בעזרת חישובי פיתגורס, אבל יש דרך פשוטה יותר, המוצגת בשרטוט הבא:

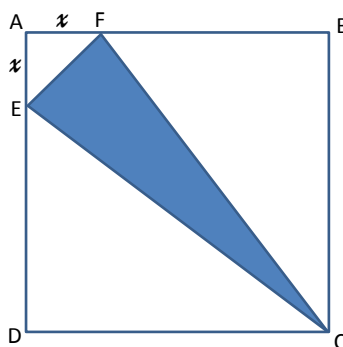


אם אורך הגדר כאורך צלע הריבוע, הרי ששטח הריבוע המסובב כשטח המגרש, ושטח המשולש המגודר בדיוק רבע משטח הריבוע.

ה. אם שטח המחומש 46 מ"ר, אזי שטח המשולש 18 מ"ר. על פי השיקולים בסעיף הקודם, אותו משולש הוא רבע מריבוע ששטחו 72 מ"ר וצלעו $\sqrt{72} \approx 8.49$ מ"ר.

שאלה 20¹

אורך צלע הריבוע ABCD היא 10 ס"מ. בריבוע חסום משולש ECF, כך ש- $AE = AF = x$.



- מצאו ביטוי אלגברי לפונקציה המבטאת את שטח המשולש כפונקציה של x .
- מהו תחום הפונקציה?
- באיזה מקרה יהיה שטח המשולש שווה ל- 49.5 סמ"ר?
- מהו השטח הגדול ביותר האפשרי, ומתי הוא מתקבל?

פתרונות והערות

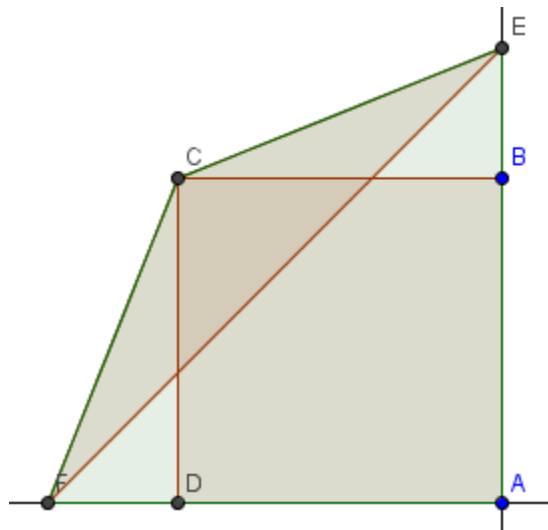
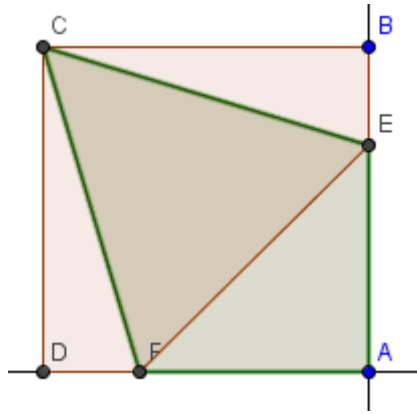
א. יש דרכים רבות להראות ששטח המשולש הוא $10x - \frac{1}{2}x^2$. דרך אחת היא להחסיר משטח הריבוע את השטח של שלושה משולשים ישרי זווית (EDC, EAF, ו-FBC). למשולשים EDC ו-FBC יש ניצבים שאורכם 10 ו- $10 - x$, ולמשולש EAF שני ניצבים שווים שאורכם x . לכן, ביטוי לשטח המסומן הוא:

$$100 - 10(10 - x) - \frac{1}{2}x^2 = 10x - \frac{1}{2}x^2$$

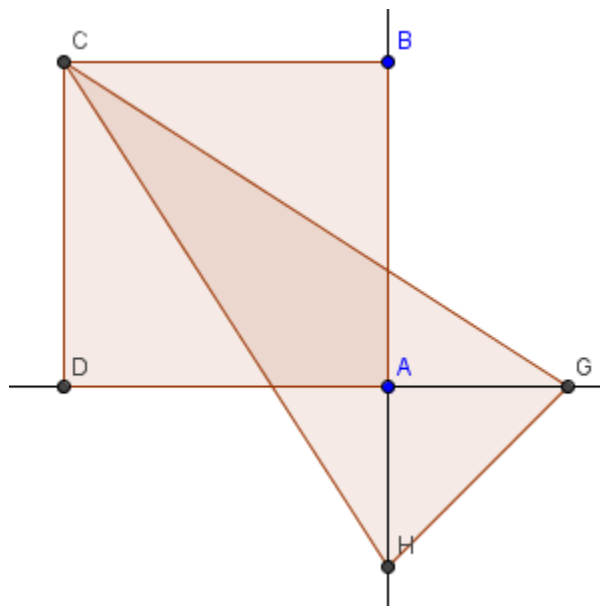
דרך אחרת להראות שהשטח הוא $10x - \frac{1}{2}x^2$ היא להתבונן בדלתון EAFC, אשר אורכי אלכסוניו AC ו-EF הם $10\sqrt{2}$ ו- $x\sqrt{2}$ בהתאמה. לכן שטחו $10x$. משטח זה של החסיר את שטח המשולש EAF שהוא $\frac{1}{2}x^2$. היתרון בדרך זו, היא שניתן להרחיבה למצב בו $x > 10$.

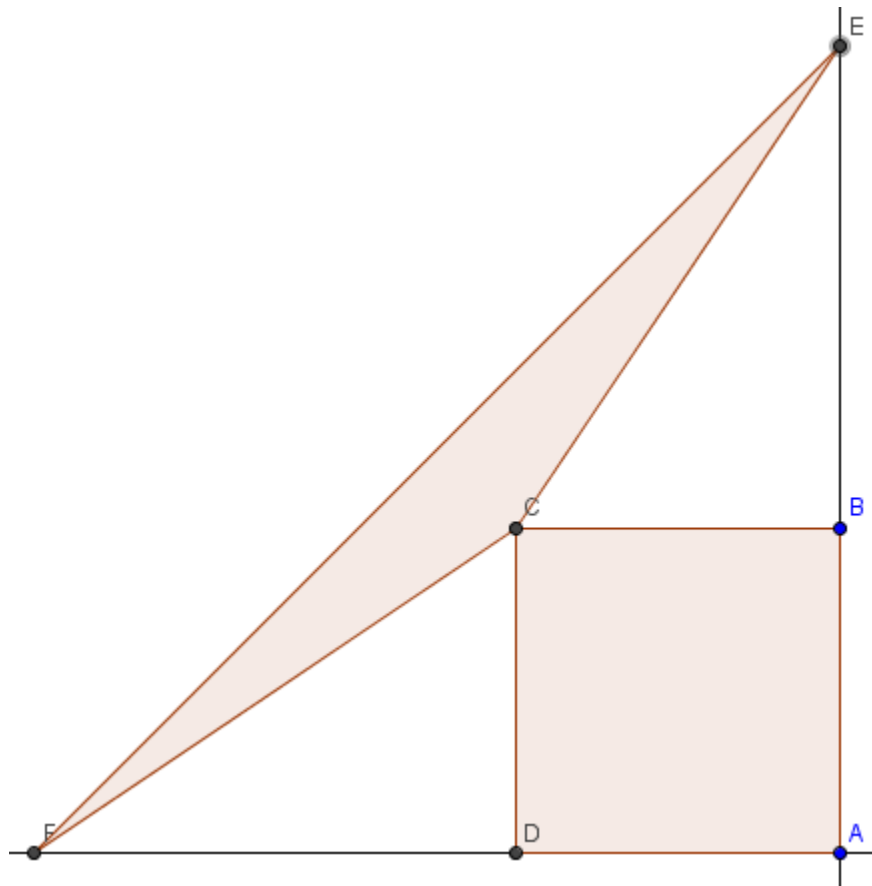
ב. בנשי השרטוטים הבאים, מובא אותו מצב, אך "מסובב" על מנת להדגים כיצד ייראה מצב בו מאפשרים למשולש להמשיך לגדול אל מעבר לתחום $x \leq 10$.

¹ בהשראת שאלה ז.30 (עמוד 131) מתוך הספר "שאלון אלגברי" (מהדורה מורחבת), הוצאת חידוש בע"מ. את הספר במלואו ניתן למצוא ב:



ניתן לקיים דיון מעניין בשאלה האם אנחנו רשאים להתייחס לערכים גדולים מ-10 כאל תחום ההגדרה של הבעיה. יתרה מזאת, האם המשתנה יכול להיות גדול מ-20 או קטן מאפס? ניתן ל"מתוח" את המצב הגיאומטרי ולהיווכח כי המשולש עדיין קיים במצבים האלה. הפונקציה נותנת ערך שלילי במקרים האלה, אבל בערך מוחלט זהו אכן השטח.





כלומר, אם מבינים את התנאי בתור "הנקודה F היא על הקטע AB", אזי תחום התחום הוא $0 \leq x \leq 10$. אבל אין סיבה לא להרחיב למצב שנקודה F נמצאת על המשך הצלע לכיוון B. אפשר אפילו להרחיק לכת ולאפשר ל-F להימצא על המשך הצלע לכיוון A (x שלילי) או לאפשר ל- x לגדול מעבר ל-20, ולקבל שטח משולש שלילי.

ג. פתרון המשוואה הריבועית מראה כי שטח המשולש שווה ל-49.5 סמ"ר כאשר $x = 9$ או $x = 11$. שני פתרונות אלה מזמינים תלמידים לתהות שוב לגבי תחום ההצבה שייקבע (האם הוא יכלול את 11?).

ד. הפונקציה מקבלת ערך מקסימאלי של 50 כאשר $x=10$. שוב, ניתן לשאול אם לא כדאי לקחת בחשבון ערכים מחוץ לתחום $0 \leq x \leq 20$. אם נאפשר משולשים עבורם x מחוץ לתחום זה, ערך הפונקציה יהיה שלילי, אבל שטח המשולש המתקבל יהיה גדול כרצוננו, כלומר לא יהיה מקסימום.

שאלה 21²

היקפו של גיליון נייר מלבני הוא 70 ס"מ. על גיליון זה הודפסה תמונה מלבנית באופן שנותרו שוליים ברוחב 2 ס"מ מכל צד (וגם מלמעלה ומלמטה).

א. מה היו ממדי הגיליון אם שטח התמונה 180 סמ"ר?

ב. מה היו ממדי הגיליון אם שטח התמונה 50 סמ"ר?

ג. מה היו ממדי הגיליון אם שטח התמונה 200 סמ"ר?

ד. מהו שטח התמונה הגדול ביותר שניתן להדפיס על גיליון מלבני שהיקפו 70 ס"מ תוך השארת שוליים כמתואר? הסבירו.

ה. מהו שטח התמונה הקטן ביותר שניתן להדפיס על גיליון מלבני שהיקפו 70 ס"מ תוך השארת שוליים כמתואר? הסבירו.

פתרונות והערות

היקף התמונה המלבנית הוא 54 ס"מ, שכן כל אחת מצלעות התמונה קצרה ב- 4 ס"מ מצלע הגיליון. במילים אחרות, סכום האורכים של שתי צלעות סמוכות של התמונה הוא 27 ס"מ (חצי היקף). השאלות הבאות דנות בשאלה של מכפלת שני מספרים (שטח המלבן) כאשר סכומם קבוע וידוע (27). אם נסמן את אורך אחת הצלעות ב- x , שטח התמונה יהיה $x(27 - x)$. אם נסמן ב- x צלע של הגיליון (ולא של התמונה המודפסת), הרי ששטח התמונה המודפסת יהיה $-x^2 + 35x - 124 = (x - 4)(31 - x)$. אפשר לעבוד גם פונקציה זו, אבל החישובים יהיו פחות נוחים.

א. אם שטח התמונה 180 סמ"ר, אז אורך צלע התמונה מקיימת את המשוואה הבאה:
 $x(27 - x) = 180$ אשר פתרונותיה 12 ו-15. אמנם שני פתרונות, אך הם קובעים רק מלבן אחד אפשרי. במצב הזה ממדי הגיליון הם 16×19 .

ב. פתרונות המשוואה $x(27 - x) = 50$ הם 2 ו-25, וממדי הגיליון הם 6×29 .

ג. למשוואה $x(27 - x) = 200$ אין פתרונות. שטח התמונה לא יכול להיות 200 סמ"ר אם היקף הגיליון הוא 70 ס"מ.

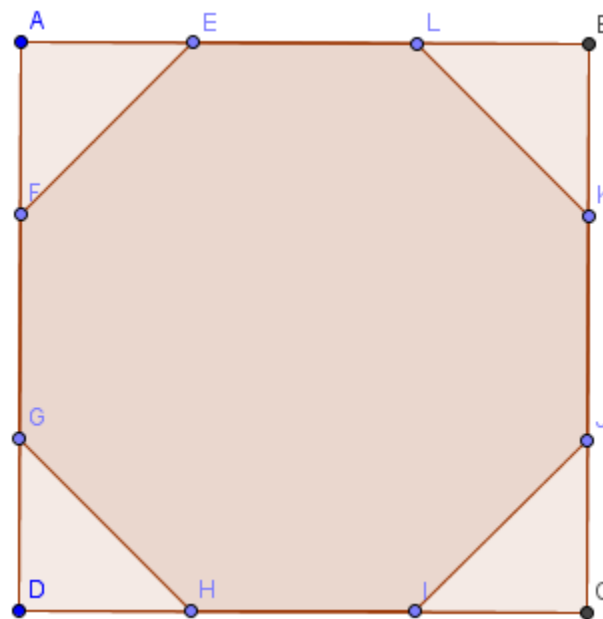
ד. שטח מלבן בעל היקף נתון הוא הגדול ביותר כאשר אורכי צלעותיו שווים, כלומר הוא ריבוע. במקרה שלפניו אפשר להביא טיעון יותר ממוקד - לפונקציה $f(x) = x(27 - x)$, אשר מתאפסת ב- 0 וב-27, יש מקסימום כאשר $x = 13.5$. המקסימום הוא $13.5^2 = 182.25$, וזהו שטח התמונה המקסימאלי.

² בהשראת שאלה מתוך הספר "שאלון אלגברי" (מהדורה מורחבת), הוצאת חידוש בע"מ. את הספר במלואו ניתן למצוא ב:

ה. פונקצית השטח $f(x) = x(27 - x)$ מקבלת ערך מינימאלי של 0 כאשר $x = 0$ או $x = 27$, אבל מצבים אלה לא באמת מתאימים לתנאי הבעיה שבה x הוא אורך צלע של תמונה מלבנית. כאשר אורך אחת הצלעות הוא 0, אין מלבן. מדויק יותר לומר שלפונקציה השטח לא קיים ערך מינימאלי, וזאת במובן שבהינתן מלבן שהיקפו 54 ס"מ, ולא משנה כמה שטחו קטן, תמיד אפשר למצוא מלבן אחר שהיקפו 54 ס"מ ושטחו קטן יותר. את זאת נעשה על ידי הקטנת הצלע הקטנה (אם אורך הצלע חיובי, תמיד יש מספר חיובי קטן יותר), והגדלת הצלע הארוכה באותה מידה. במושגים של פונקציות וגרפים, לכל נקודה מעל ציר ה- x של הגרף של הפונקציה $f(x) = x(27 - x)$ יש נקודה קרובה יותר לציר ה- x שעדיין לא נוגעת בו. עשוי להתפתח דיון סביב היבטים פסיקאליים של השאלה. אם x הוא אורך צלע של תמונה מלבנית מודפסת, הרי שיש אילוצים על ערכי x האפשריים שנובעים מרזולוציית המדפסת ומתכונות צמיגות של הדיו.

שאלה 22³

בשרטוט הבא נתון כי ABCD ריבוע, וכי כל המשולשים הם שווה שוקיים וחופפים.



א. הוכיחו כי כל זוויות המתומן EFGHIJKL שוות.

ב. נתון כי אורך צלע הריבוע הוא 10 יחידות אורך. עינת ודלית חישובו מה צריך להיות אורך צלע המתומן על מנת שיהיה משוכלל. הן החליטו לסמן ב- x את הקטע AE, ולכן גילו ש- $EL = 10 - 2x$. מכאן נפרדו דרכיהן: דלית מצאה כי על ידי יישום משפט פיתגורס במשולש LBK, מתקבל כי $LK = \sqrt{2}x$. וכיוון שחייב להתקיים כי $LK = LE$, היא פתרה את המשוואה המתאימה. מצאו את אורך צלע המתומן על פי דרכה של דלית.

ג. עינת רשמה ש- $LK = 10 - 2x$ והשתמשה אף היא במשפט פיתגורס, אך היא רשמה אותו כך: $x^2 + x^2 = (10 - 2x)^2$. מצאו את אורך צלע המתומן על פי דרכה של עינת. האם עינת ודלית קיבלו תוצאות זהות?

ד. רון בחר לסמן דווקא את אורך צלע המתומן ב- x . הציעו כיצד הוא פתר את הבעיה.

³ שאלה זו פותחה בהשראת המאמר:

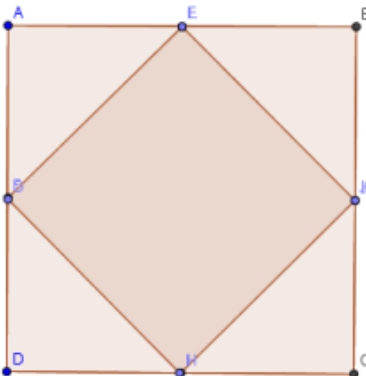
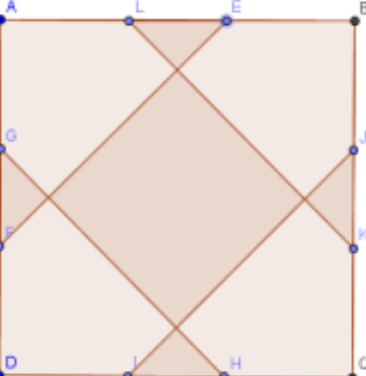
Farrell, M.A. & Ranucci, E.R. (1973). On the Occasional Incompatibility of Algebra and Geometry. *Mathematics Teacher* 66, pp. 491-497.

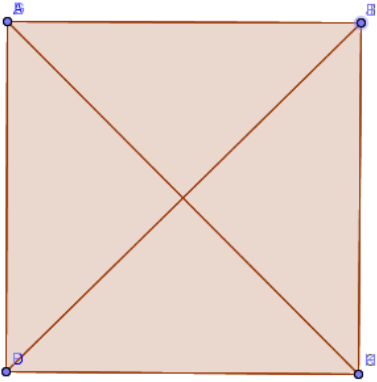
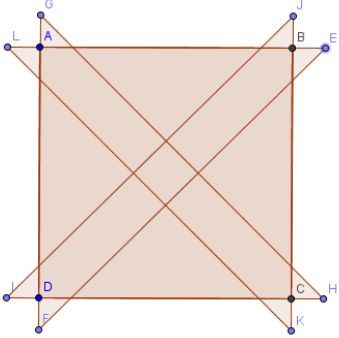
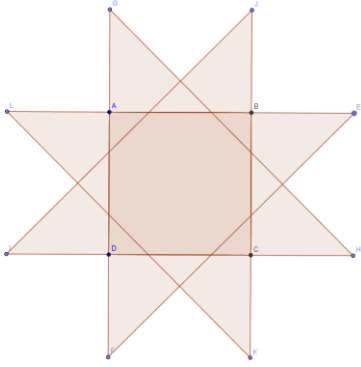
פתרונות והערות

א. כיוון שארבעת המשולשים הם חופפים והם שווה שוקיים וישרי זווית, שתי הזוויות השווה הן בנות 45° . זוויות המתומן הן צמודות לזוויות המשולש וכן הן כולן בנות 135° .

ב. דלית תפתור את המשוואה $\sqrt{2}x = 10 - 2x$ ותגלה ש- $x = \frac{10}{2+\sqrt{2}} \approx 2.93$. מכאן תסיק שאורך צלע המתומן $10 - 2x \approx 4.14$.

ג. עינת תפתור את המשוואה הריבועית $x^2 + x^2 = (10 - 2x)^2$ ותקבל שני פתרונות: $x = 10 \pm \sqrt{50}$. אחד הפתרונות הוא זהה לפתרון של דלית: $2\sqrt{50} - 10 \approx 4.14$. לפי הפתרון השני, $x = 10 + \sqrt{50} \approx 17.07$ מתקבל אורך צלע שלילי (!) עבור המתומן: $-24.14 \approx -10 - 2\sqrt{50}$. פתרון זה גדול בערכו המוחלט מהפתרון הראשון בדיוק ב- 20 יחידות אורך. הכיצד? יש מי שיבטל פתרון זה כלא מתאים לתנאי הבעיה, אבל דווקא מעניין לברר האם יש לו משמעות בכל זאת. על מנת לפענח מצב זה נדרש הרבה דמיון. שימוש בתוכנה של גיאומטריה דינאמית יכול לעזור. אם נבנה את המתומן באופן כזה שקדקודיו יכולים לצאת מהריבוע, נוכל לעקוב אחר המתרחש.

	אם נגרור את הקדקוד E ימינה לכיוון קדקוד L, כאשר E מגיע למרכז צלע הריבוע הוא מתלכד עם L, ואז מתקבל מתומן שארבע מצלעות נעלמות (בעלות אורך 0). המתומן בעצם הפך לריבוע.
	כאשר ממשיכים לגרור את קדקוד E ימינה מ"עבר" ל-L, (זזה שמאלה) המתומן כבר איננו מצולע, כי הוא חותך את עצמו, אבל עדיין יש לו שמונה צלעות - ארבע ארוכות וארבע קצרות. כיוון שהקדקוד E חלף על פני הקדקוד L, האורך של צלע LE ייחשב שלילי.

	כאשר קדקוד E מתלכד עם B מקבלים שוב צורת ריבוע. הפעם מחצית צלעות של המתומן בעלות אורך 10, או -10, אם לדייק (FG, HI, וכו') ומחציתן בנות אורך $10\sqrt{2}$ (GH, EF, וכו').
	כאשר ממשיכים לגרור את E ימינה מתקבל מתומן עוד יותר מוזר.
	אם נגרור את E די רחוק, נקבל לבסוף מעין מתומן משוכלל שכל "צלעותיו" בנות 24.14 יחידות אורך $(10 + 2\sqrt{50})$ כפי שחזה פתרון המשוואה.

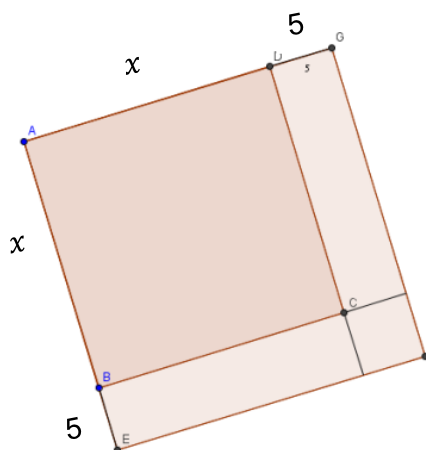
ד. כאשר רון יציב את צלעות משולש AEF במשפט פיתגורס, הוא יקבל את המשוואה הבאה: $2\left(\frac{10-x}{2}\right)^2 = x^2$. למשוואה זו יש אותם שני פתרונות כמו למשוואה של עינת: $-10 \pm 2\sqrt{50}$.

שאלה 23⁴

- נתון ריבוע שאורך צלעו x ס"מ. מאריכים את אורך הצלע ב-5 ס"מ.
- א. מה שטח הריבוע החדש?
- ב. בטאו בכמה גדל שטח הריבוע (ביחידות סמ"ר) כפונקציה של אורך הצלע המקורי x .
- ג. הראו בשרטוט בכמה גדל השטח. נסו לקשר בין השרטוט לבין הביטוי שמצאתם בסעיף הקודם.
- ד. מה תחום ההגדרה של הפונקציה כפי שבא לידי ביטוי בבעיה זו?
- ה. רקפת מצאה ריבוע ששטחו בדיוק הוכפל (פי 2) כאשר היא האריכה את הצלע ב-5 ס"מ. מה היה אורך הצלע המקורית שלה?
- ו. מצאו עבור אילו ריבועים יגדל השטח פי 2, עבור אילו יגדל פחות מפי 2, ועבור אילו יגדל יותר מפי 2. בחקירתכם אתם יכולים להשתמש בפונקציה ההפרש שביטאתם בסעיף ב.

פתרונות והערות

- א. $(x + 5)^2$
- ב. $(x + 5)^2 - x^2 = 10x + 25$
- ג. בשרטוט ניתן לראות שהתווספו לריבוע המקורי שני מלבנים ששטח כל אחד מהם $10x$, וריבוע אחד ששטחו 25.

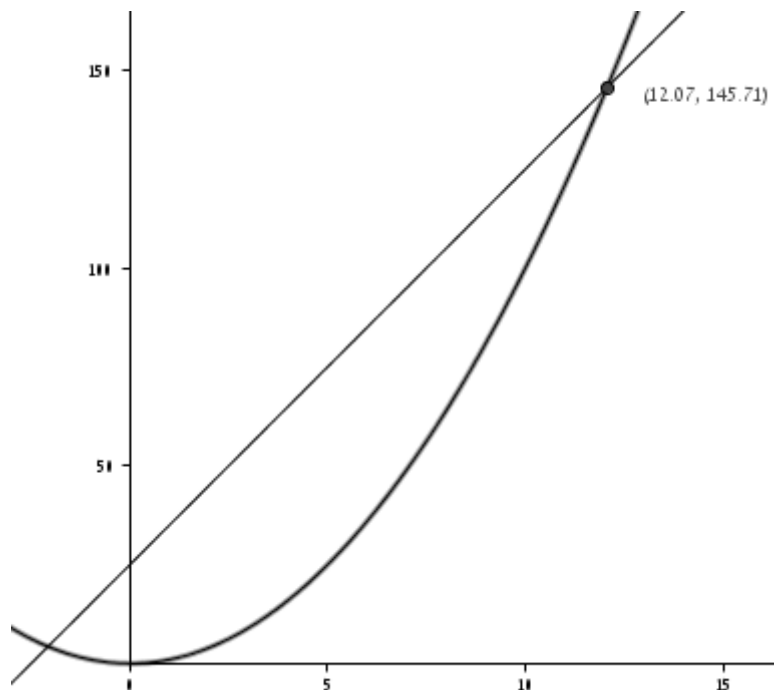


⁴ שאלה זו והנגזרות ממנה בהמשך, פותחו בהשראת המאמר "הרפתקאות הנדסיות בעזרת מושג הפונקציה" מאת רנה הרשקוביץ ואברהם הרכבי, שבבים, עלון למורי מתמטיקה, תיק מס' 24. ניתן למצוא ב: http://stwww.weizmann.ac.il/menu/Disciplines/disciplines1_5a_he.html

ד. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = 10x + 25$ הוא כל המספרים, אבל בהקשר של הבעיה, x מציין אורך צלע של ריבוע ולכן התחום במקרה זה $x > 0$.

ה. רקפת הגדילה את השטח ב- x^2 סמ"ר. נפתור את המשוואה: $10x + 25 = x^2$ ונקבל (בתחום החיובי) $x = 5 + \sqrt{50} \approx 12.07$ ביחידות ס"מ.

ו. עלינו להשוות את פונקציית גידול השטח $f(x) = 10x + 25$ לפונקציית השטח המקורי x^2 . הגרף מתאר את שתי הפונקציות. כאשר צלע הריבוע x קטן מ- 12.07 ס"מ הגידול בשטח קטן מהשטח המקורי, כלומר, השטח גדל בפחות מפי 2. כאשר צלע הריבוע x גדול מ- 12.07 ס"מ הגידול בשטח גדול מהשטח המקורי, כלומר השטח גדל ביותר מפי 2.

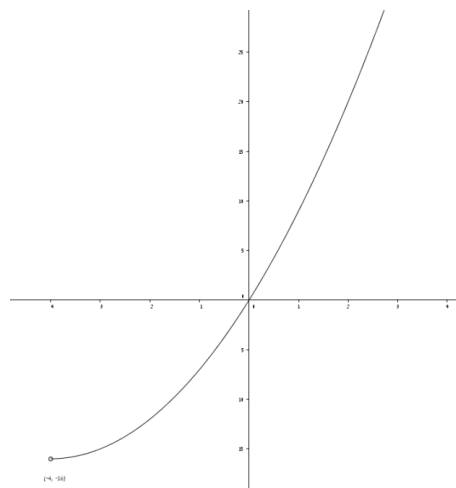


שאלה 24

- נתון ריבוע שאורך צלעו 4 ס"מ. מאריכים את אורך הצלע ב- x ס"מ.
- א. מה שטח הריבוע החדש?
- ב. כתבו ביטוי לגידול שטח הריבוע (ביחידות סמ"ר) כפונקציה של x .
- ג. מה תחום ההגדרה של הפונקציה בבעיה זו?
- ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. דן מצא ערך של x שבדיוק מכפיל (פי 2) את שטח הריבוע המקורי. בכמה הוא הגדיל את אורך הצלע?
- ו. אביטל מצאה ערך של x שמקטין פי 2 את שטח הריבוע המקורי. מהו הערך של x ? האם לדעתכם ערך זה מתאים לתיאור הבעיה?

פתרונות והערות

- א. $(4 + x)^2$
- ב. $(4 + x)^2 - 16 = 8x + x^2$
- ג. ניתן להתייחס להארכה שלילית של קטע כאל קיצור. במקרה זה נית לקצר את הקטע עד איפוסו, כלומר, תחום ההגדרה של הפונקציה בבעיה זו הוא $-4 < x < \infty$.
- ד.



- ה. $(4 + x)^2 = 32$ ומתקבל $x = 1.657$ ס"מ.
- ו. $(4 + x)^2 = 8$ ומאן ש- $x = -1.172$ ס"מ. אורך הצלע המתקבל לאחר הקיצור הוא 2.828 ס"מ.

שאלה 24

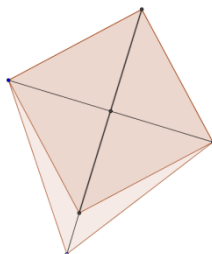
נתון ריבוע שאורך אלכסוניו 8 ס"מ.

- א. מה שטח הריבוע?
- ב. האריכו את אחד האלכסונים של הריבוע ב- x ס"מ תוך שמירה על הזווית הישרה ביניהם. איזה מרובע התקבל? מה שטחו?
- ג. בטאו בכמה גדל השטח (ביחידות סמ"ר) כפונקציה של x .
- ד. מה תחום ההגדרה של הפונקציה בהקשר של הבעיה הזאת?
- ה. שי מצא ערך של x שמכפיל (פי 2) את שטח הריבוע המקורי. בכמה הוא הגדיל את אורך האלכסון?
- ו. לירן מצאה ערך של x שמקטין פי 2 את שטח הריבוע המקורי. מהו ערך זה של x ?

פתרונות והערות

א. שטח הריבוע הוא מחצית המכפלה של אורך אלכסוניו, כלומר, 32 סמ"ר.

ב. דלתון ששטחו $\frac{1}{2}8(8+x) = 32 + 4x$



ג. $f(x) = 4x$

- ד. כיוון שניתן גם לקצר את האלכסון, יתכנו ערכים שליליים והתחום הוא $-8 < x < \infty$. נשים לב כי כאשר $x < -4$ הדלתון המתקבל הוא קעור. גם עבור דלתונים קעורים ניתן לחשב את שטחו כמחצית מכפלת האורך של האלכסונים.
- ה. ניתן לפתור בעזרת משוואה. שיקול ישיר יותר: שטח דלתון הוא חצי מכפלת האלכסונים. אלכסון אחד נשאר קבוע (8 ס"מ), כך שאת האלכסון השני יש להאריך פי 2.
- ו. על פי אותו שיקול האלכסון הפעם קטן ל- 4 ס"מ (במקרה זה הדלתון הפך למשולש).

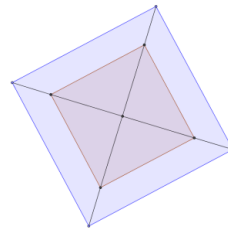
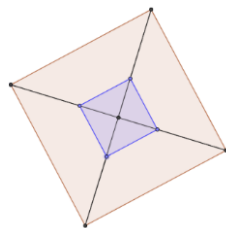
שאלה 25

נתון ריבוע שאורך אלכסוניו 6 ס"מ.

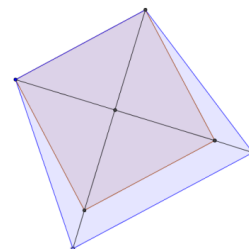
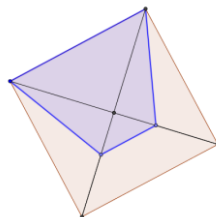
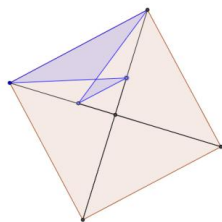
- א. מה שטח הריבוע?
- ב. האריכו את שני האלכסונים של הריבוע ב- x ס"מ תוך שמירה על הזווית הישרה בין האלכסונים. איזה מרובע התקבל? מה שטחו?
- ג. ניצן טוען שכשהוא מאריך את אלכסוני הריבוע הוא מקבל דלתון. נועה טוענת שהיא מקבלת טרפז שווה שוקיים. גלית טוענת שהיא מקבלת ריבוע. הראו כיצד כל אחד מהם האריך את אלכסוני הריבוע תוך שמירה על הזווית הישרה ביניהם. האם תוכלו למצוא דרך נוספת להאריך את האלכסונים?
- ד. הוכיחו ששטח המרובע המתקבל מהארכת אלכסוני הריבוע (תוך שמירה על הזווית הישרה ביניהם) לא תלוי באופן שבו מאריכים את האלכסונים.
- ה. בטאו בכמה גדל השטח (ביחידות סמ"ר) כפונקציה של x .
- ו. בכמה אחוזים יש להגדיל את אורכי האלכסונים כך שהשטח יגדל ב פי 2?
- ז. בכמה אחוזים יש להקטין את אורכי האלכסונים כך שהשטח יקטן ב פי 2?

פתרונות והערות

- א. שטח הריבוע הוא מחצית מכפלת אורך אלכסוניו: 18 סמ"ר.
- ב. אם מאריכים באופן סימטרי למרכז הריבוע מתקבל ריבוע, גדול או קטן מהריבוע המקורי, על פי הסימן של x .

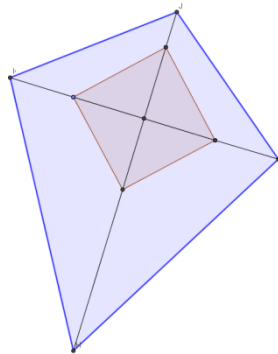


אם מקבעים צלע אחת מתקבל טרפז שווה שוקיים.

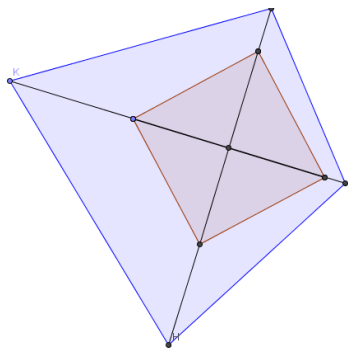


נשים לב שכאשר $x < -3$ מתקבל טרפז ששוקיו נחתכים! צורה כזאת לא תמיד נחשבת מצולע.

אם מותחים אלכסון אחד באופן סימטרי למרכז ואלכסון שני באופן לא סימטרי, מתקבל דלתון שאינו ריבוע.



אם מאריכים באופן לחלוטין לא סימטרי לא מתקבל דלתון או טרפז, אלא מרובע כללי בעל אלכסונים שווים ומאונכים זה לזה.



ג. קל להוכיח שמרובע כזה (גם אם הוא קעור, וגם אם צלעותיו נחתכים!), השטח הוא חצי מכפלת האלכסונים.

ד. $6x + \frac{1}{2}x^2$

ה. דרך אחת לענות על שאלה זו היא לפתור משוואה ריבועית שמתארת את העובדה שהשטח גדל בדיוק כשטח הריבוע המקורי: $6x + \frac{1}{2}x^2 = 18$, אך יש פתרון יותר אלגנטי. ראינו בסעיף ג שניתן לקבל ריבוע, כלומר לשמור על דמיון. כדי להכפיל פי 2 שטח של ריבוע יש להגדיל את צלעו (ולכן גם את אלכסונו) פי $\sqrt{2} = 1.414$, כלומר להגדיל את האלכסון ב-41.1%.

ו. דרך אחת לענות על שאלה זו היא לפתור משוואה ריבועית שמתארת את העובדה שהשטח קטן בדיוק כמחצית שטח הריבוע המקורי: $6x + \frac{1}{2}x^2 = -9$, אך גם כאן יש פתרון הרבה יותר אלגנטי. ראינו בסעיף ג שניתן לקבל ריבוע, כלומר לשמור על דמיון. כדי לקבל חצי שטח יש לחלק את צלעו (ולכן גם את אלכסונו) ב $\sqrt{2}$, כלומר לכפול ב-0.707, כלומר להקטין את האלכסון ב-29.3%.