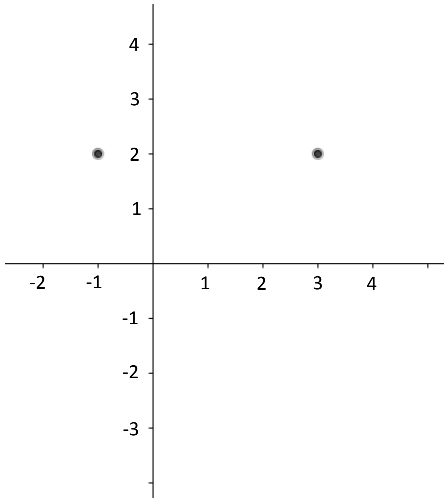
אלגברה – פונקציה ריבועית

שאלה 1

להלן מערכת צירים ובה מסומנות שתי נקודות:



להלן ביטויים אלגבריים של פונקציות. בדקו האם הגרף שלהן עובר דרך שתי הנקודות. בכל מקרה הסבירו כיצד קבעתם.

א. $f(x) = x^2$

ב. $g(x) = x^2 - 2$

ג. $h(x) = x^2 - 2x - 1$

ד. $r(x) = (\mathrm{x} - 3)^2$

ה. $p(x) = (\mathrm{x} - 3)^2 + 2$

ו. $q(x) = -(\mathrm{x} + 1)^2 + 2$

ז. $k(x) = -(\mathrm{x} - 1)^2 + 6$

פתרונות והערות

ניתן לגשת לשאלה זו בכמה דרכים: הצבת שיעורי (2,3) ו- (-1,3) או בעזרת שיקולים של תכונות והזזות של פונקציות. למשל, ידוע כי ציר הסימטריה של הגרף של $f(x) = x^2$ הוא ציר ה- y, לכן הגרף לא יכול לעבור דרך שתי הנקודות. הגרף של $p(x) = (\mathrm{x} - 3)^2 + 2$ הוא הזזה שלוש יחידות ימינה של הגרף של $f(x) = x^2$ והזזה למעלה בשתי יחידות, לכן הוא עובר דרך (2,3) אך אינו יכול לעבור דרך הנקודה השנייה. מומלץ לדון עם התלמידים בדרכי פתרונות שונים בהתאם לרמת הכיתה.

שאלה 2

נתונות שלוש נקודות במערכת צירים: A(0,0), B(2,4), C(-2,4).

א. סמנו את שלוש הנקודות על מערכת הצירים, והעבירו ביניהן קטעים על מנת ליצור משולש.

ב. הסבירו מדוע המשולש שנוצר הוא שווה שוקיים.

ג. חשבו את היקף המשולש.

ד. חשבו את שטח המשולש.

ה. דרך קדקודי המשולש עובר גרף של פונקציה ריבועית. מצאו את הביטוי האלגברי שלה.

פתרונות והערות

א. בעזרת משפט פיתגורס (אפילו מבלי לחשב את אורכי הצלעות) ניתן לראות כי הצלע המחברת את A ו- B והצלע שמחברת את A ו- C שוות.

ב. $2\sqrt{20}+8$ יחידות אורך.

ג. 8 יחידות שטח. חשוב להדגיש בפני התלמידים כי אורכי הבסיס והגובה של המשולש מחושב על בעזרת שיעורי הנקודות של הקדקודים.

ח. על ידי ניחוש או על ידי זיהוי הערכים של שיעורי הנקודות, ניתן לגלות כי הפונקציה היא $f(x)=x^2$.

שאלה 3

להלן ביטויים אלגבריים של פונקציות ריבועיות. ציינו בכל מקרה באלו רביעים עובר הגרף של כל אחת מהן.

א. $f(x) = x^2 + 2$

ב. $h(x) = x^2 + 2x$

ג. $s(x) = -x^2 + 2x + 2$

ד. $d(x) = -x^2 + 2$

פתרונות והערות

שאלה זו מיועדת לתרגל את המיומנות של שרטוט סקיצות של גרפים. כמו כן, תלמידים יכולים להיווכח כי מה ש"נראה" כגרף שאינו עובר ברביע מסוים עלול להטעות שכן יש לדמיין את המשכו של הגרף. ניתן גם לדון בסוגיה של אי-הימצאות של הגרף ברביע מסוים על ידי הצבת מספרים, למשל הגרף של $f(x)$ אינו יכול לעבור דרך הרביע הרביעי כי אין אשפרות להציב ערך שלילי בפונקציה ולקבל כתוצאה ערך שלילי.

א. רביעים ראשון ושני.

ב. רביעים ראשון, שני ושלישי.

ג. כל הרביעים.

ד. כל הרביעים.

שאלה 4

נתונה "משפחה" של פונקציות ריבועיות מהצורה $f(x) = x^2 + c$. בכל אחד מהמקרים הבאים מצאו את הערכים המתאימים c:

א. הגרף עובר דרך (0,0).

ב. הגרף עובר דרך (1,2).

ג. הגרף עובר דרך (0,2).

ד. תנו דוגמא לשני ערכים של c, כך שגרף הפונקציה לא יחתוך את הגרף של $y = 4$.

ה. הראו כי כאשר $c = -4$, גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בשתי נקודות.

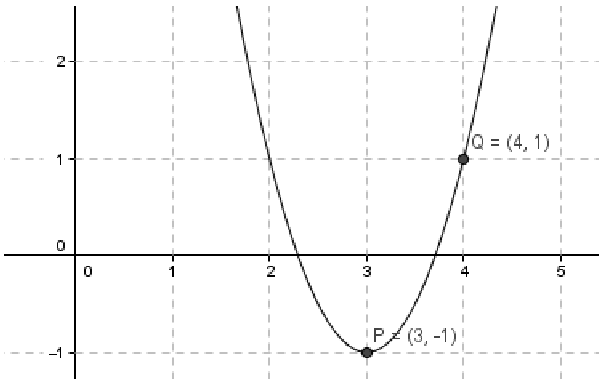
פתרונות והערות

שאלה זו מיועדת לתרגל הצבת נקודות הן בפרמטרים של הפונקציה והן בערי הפונקציה עצמה.

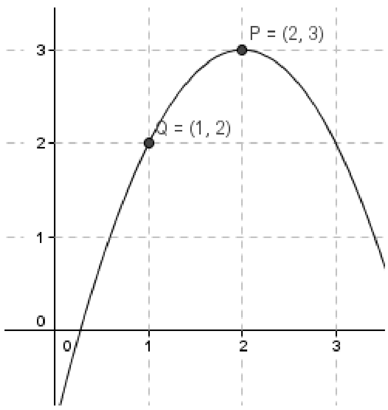
שאלה 5

נתונים גרפים של שלוש פונקציות ריבועיות. בכל גרף מסומנים שיעורי קדקוד הפרבולה, ושיעורים של נקודה נוספת בגרף. עבור כל אחד מהגרפים, התאימו את הביטוי האלגברי מבין הבאים: $f(x) = 2(x-3)^2 - 1$, $g(x) = 0.5(x+2)^2 - 1$, $h(x) - (x-2)^2 + 3$

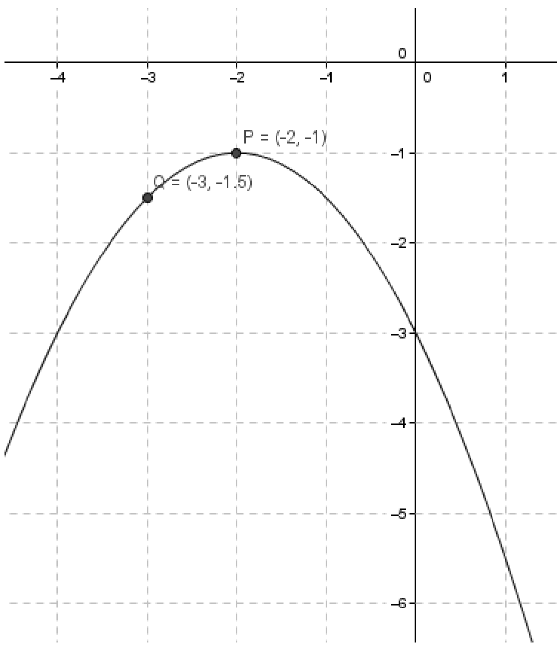
א.



ב.



ג.



שאלה 6

א. הציבו שני מספרים שונים במקום c בביטוי האלגברי $f(x) = x^2 + c$ על מנת לקבל שתי פונקציות ריבועיות שונות. האם יש לגרפים של שתי הפונקציות נקודות משותפות? הסבירו.

ב. הציבו שני מספרים שונים במקום a בביטוי האלגברי $f(x) = ax^2$ על מנת לקבל שתי פונקציות ריבועיות שונות. האם יש לגרפים של שתי הפונקציות נקודות משותפות? הסבירו.

פתרונות והערות

שאלה זו מאפשרת העלאת שיקולים אלגבריים וגרפיים על מנת להצדיק או להסביר את אותה הטענה. לפני שניגשים לפתור שאלה זו, מומלץ לדון עם התלמידים על כמה נקודות משותפות יכולות להיות לגרפים של שתי פונקציות ריבועיות שונות, ולבקש מהם להציע דוגמאות גרפיות לכל מקרה.

א. תלמידים יוכלו להעלות את הטיעון כי שינוי במקדם c, מעלה או מוריד (תלוי אם הגדלנו או הקטנו את המקדם) את כל גרף הפונקציה "במקביל" לפונקציה המקורית $f(x) = x^2$. ולכן, לא יתכן שיהיו לשני הגרפים נקודות משותפות. ניתן להצדיק זאת גם אלגברית על ידי השוואה (הרכבת משוואה) של שני הביטויים האלגבריים $x^2 + c = x^2 + d$. הפתרון היחיד למשוואה זו הוא $c = d$, שמשמעותו היא שאין נקודות משותפות אלא אם כן שתי הפונקציות זהות.

ב. מהסתכלות בביטוי האלגברי, כי הגרפים של שתי הפונקציות עוברות דרך ראשית הצירים. נשאלת השאלה האם יתכן שיש עוד נקודת חיתוך בין שני הגרפים. אך, למשוואה למשל $3x^2 = 2x^2$ יש רק פתרון אחר והוא $x = 0$, כלומר אין נקודת חיתוך אחרת.

שאלה 7

להלן משוואות ריבועיות אותן ניתן לפתור ללא השימוש בנוסחה $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. פתרו אותן, והסבירו את הדרך לפיה פתרתם (הקפידו למצוא את שני הפתרונות של המשוואה או לחילופין ציינו למה למשוואה אין פתרון). השתמשו בנוסחה רק במקרים בהם אינכם יודעים לפתור אחרת.

א. $x^2 - 48 = 1$

ב. $(x-2)^2 = 16$

ג. $(x-3)(x+1) = 0$

ד. $x^2 - 2x = 0$

ה. $(x-2)^2 - 1 = 24$

ו. $(x-2)^2 = x^2$

ז. $(x+2)^2 = 4x + 4$

פתרונות והערות

מטרת השאלה היא לתרגל פתרון בעיות על ידי בחינת הביטויים, זיהוי ביטויים ותבניות מוכרות והישענות על טכניקות פשוטות.

א. מהסתכלות על המשוואה רואים כי $x^2 = 49$, לכן $x = \pm 7$.

ב. $(x-2) = \pm 4$ לכן $x = -2$ או $x = 6$.

ג. $x = 3$ או $x = -1$.

ד. $x = 0$ או $x = 2$.

ה. $(x-2) = \pm 5$, לכן $x = 7$ או $x = -3$.

ו. $-4x + 4 = 0$, כלומר $x = 1$. לחילופין, אפשר לטעון $x - 2 = \pm x$ ומכאן $2x = 2$

ז. $x = 0$

<u>שאלה 8</u>

דני בחר מספר. אחר כך הוא כפל את המספר שבחר במספר שהוא גדול ממנו ב- 7. ואז אמר: התוצאה שקיבלתי היא 30. רחל אמרה: בחרת במספר 3! דני טוען שבחר במספר אחר. הייתכן? הסבירו.

<u>פתרונות והערות</u>

לשאלה זו מספר מטרות. תחילה היא מאפשר בדיקה של חישוב מנטאלי (בחרתי מספר 3, כפלתי אותו במספר שהוא גדול ממנו ב- 7, כלומר כפלתי ב- 10 וקיבלתי 30). אמנם הבדיקה נכונה, אך הטענה שאולי קיים מספר אחר בעל אותה תכונה. לכן יש לעודד תרגום ממילים לביטויים ולהיווכח כי אכן מדובר במשוואה ריבועית אשר לה שני פתרונות, 3 הוא אחד מהם והשני הוא 10-. ניתן לחולל מספר שאלות מסוג זה ולתת אותם לתלמידים. בכיתה מתקדמת יותר אפשר לבקש מהתלמידים שימציאו שאלות דומות, כולל מצבים בהם לא יתכן שיהיה פתרון שני.

שאלה 9

מקיפים מגרש מלבני בגדר. אורך המגרש גדול ב- 12 מטר מרוחבו. סמנו ב- x את אורך הצלע הארוכה במלבן.

א. רשמו תבניות לרוחב המלבן ולהיקפו.

ב. ידוע כי שטח המלבן הוא 45 מ"ר. מה אורכי צלעותיו?

ג. רשמו תבניות לאורך ולהיקף של אותו מבלן אם נסמן ב- y את אורך הצלע הקצרה במלבן.

ד. מצאו את צלעות המלבן בעזרת התבניות של הסעיף הקודם אם ידוע כי השטח הוא 45 מ"ר.

ה. מצאו את אורך האלכסון של המלבן.

פתרונות והערות

א. רוחב המלבן הוא $x-12$ והיקפו $4x-24$.

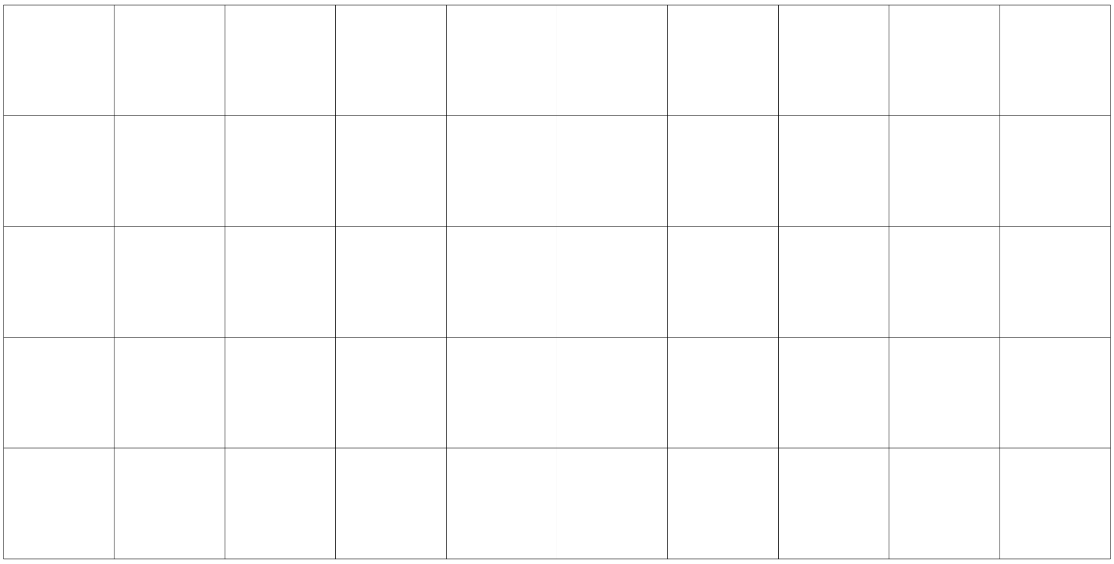
ב. 3 ו- 15.

ג. מטרת התרגיל הזה היא להמחיש את האפשרות של בחירת משתנה ולהיווכח (בסעיף הבא) כי הפתרון המתקבל אינו מושפע מכך: y , $y+12$

ה. $\sqrt{234}=3\sqrt{26}$

<u>שאלה 10</u>

א. אפשר ליצור מלבנים שונים שהיקפם 24 ס"מ. שרטטו שניים כאלה על קווי המשבצת (אורך צלע כל משבצת הוא ס"מ). רשמו את אורכי הצלעות ואת שטחם בסמ"ר.



ב. אם אחת מצלעות המלבן היא 1 ס"מ, מה אורך הצלע השנייה ומה שטח המלבן?

ג. אם המלבן הוא ריבוע, מה אורך הצלע ומה השטח שלו?

ד. אם אורך אחת הצלעות של המלבן הוא x, רשמו ביטוי אלגברי לאורך הצלע השנייה ולשטח של המלבן.

ה. אם שטח המלבן הוא 35 סמ"ר, מה אורכי הצלעות שלו?

<u>פתרונות והערות</u>

ב. הצלע השנייה היא 11 ס"מ, ושטח המלבן הוא 11 סמ"ר.

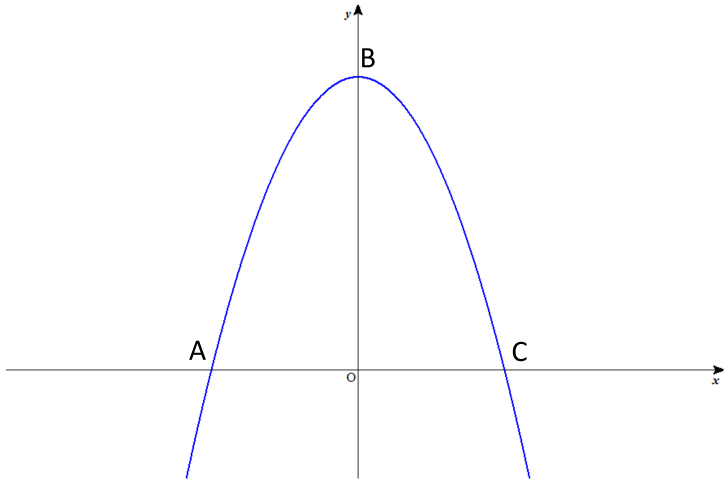
ג. אם המלבן הוא ריבוע, אורך כל צלע הוא 6 ס"מ (כי $24 \div 4 = 6$), ולכן שטחו הוא 36 סמ"ר.

ד. הצלע השנייה היא $\frac{24-2x}{2} = 12 - x$, והשטח הוא $x(12 - x)$.

ה. ניתן למצוא את הצלעות על ידי פתרון המשוואה $x(12 - x) = 35$, ולקבל כי הצלעות הן 7 ו- 5. ניתן גם לראות כי 35 הוא אחד פחות מ- 36 (המקרה של הריבוע בו $x^2 = 36$, לכן מתקיים כי $x^2 - 1 = 35$, ולכן $(x + 1)(x - 1) = 35$, ומכאן שהצלעות הן 5 ו- 7.

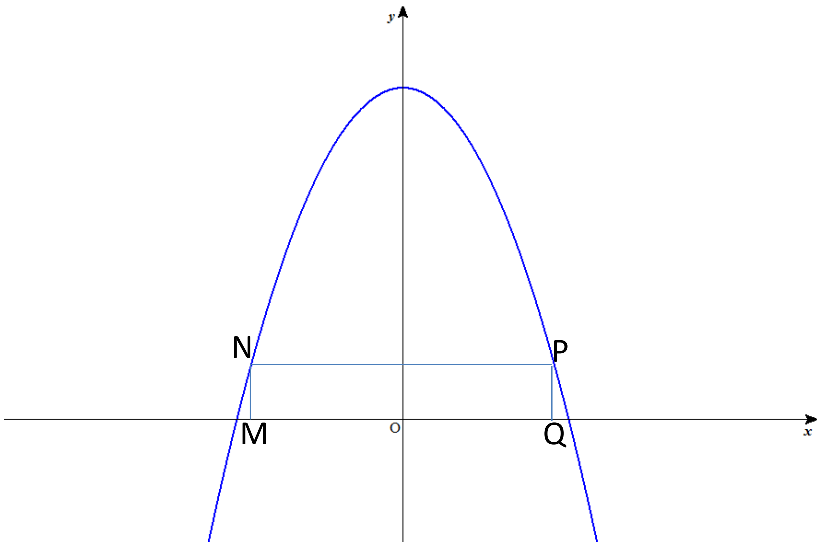
שאלה 11

להלן הגרף של הפונקציה $f(x) = 4 - x^2$



א. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו- C (נקודות החיתוך עם הצירים).

ב. בשרטוט שלעיל חסמו את המלבן MNPQ כך:



סמנו את הקטע OQ ב- x, וכתבו ביטויים אלגבריים לאורכי שתי הצלעות של המלבן (זכרו כי P ו- Q שהם קדקודים של המלבן נמצאים על הגרף של הפונקציה הנתונה).

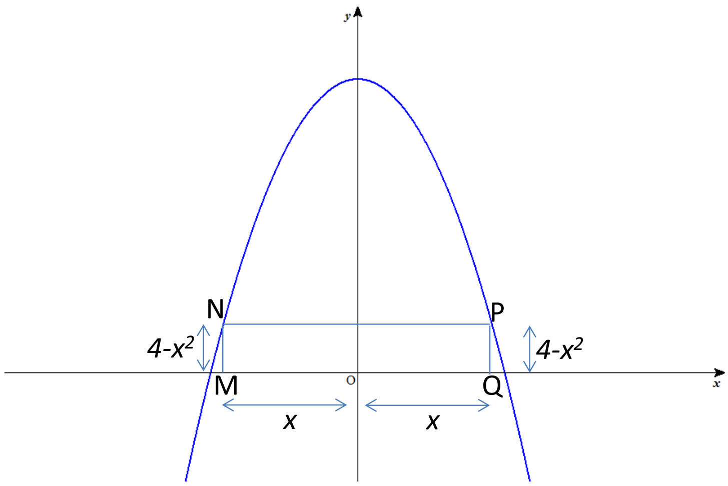
ג. כתבו ביטוי אלגברי להיקף המלבן.

ד. מצאו את אורכי צלעות המלבן ואת שיעורי הקדקודים שלו, אם ידוע כי היקפו הוא 10 ס"מ.

פתרונות והערות

א. (2,0), (-2,0) ו- (0,4).

ב.



ג. $4x + 8 - 2x^2$

ד. $x = 1$, M(-1,0), N(-1,3), P(1,3), Q(1,0). יש להעיר את תשומת לב התלמידים כי המלבן בשרטוט איננו בקנה מידה מתאים.

שאלה 12

להלן טבלאות ערכים של פונקציות קוויות וריבועיות. רשמו על כל טבלה לאיזה סוג פונקציה היא מתאימה וכתבו את הביטוי האלגברי שלה.

א.

x	$f(x)$
1	2
2	4
3	6

ב.

x	$f(x)$
1	1
2	4
3	9

ג.

x	$f(x)$
1	2
2	5
3	10

ד.

x	$f(x)$
1	5
2	5
3	5

ה.

x	$f(x)$
1	0.5
2	2
3	4.5

ו. הפונקציה $g(x)$ מתקבלת מחיבור הערכים של שתי הפונקציות בסעיפים ד ו- ה למעלה. השלימו את הטבלה ומצאו את ביטוייה האלגברי. האם היא פונקציה קווית? האם היא ריבועית? הסבירו.

x	$g(x)$
1	
2	
3	

<u>פתרונות והערות</u>

רצוי להרגיל את התלמידים להסתכל על אפיונים שונים של הטבלאות, למשל על ההפרשים בין ערכי הפונקציה עבור הפרש קבוע בערכי המשתנה x, או לחילופין להיווכח איזו פעולה חשבונית יכולה להעתיק את ערכי המשתנה לערכי הפונקציה (על ידי ניחוש או ניסוי וטעיה).

א. $f(x) = 2x$

ב. $f(x) = x^2$

ג. $f(x) = x^2 + 1$

ד. $f(x) = 5$

ה. $f(x) = 0.5x^2$

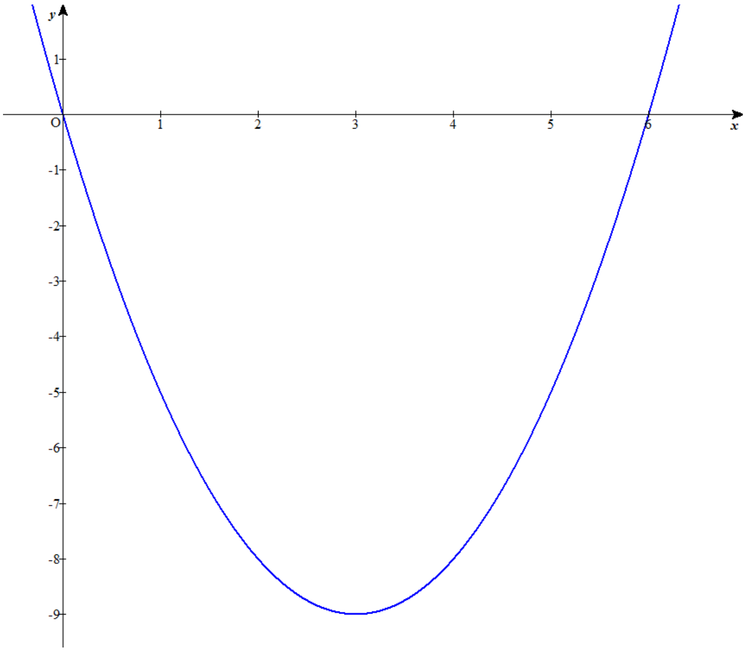
ו. $f(x) = 5 + 0.5x^2$

x	$f(x)$
1	5+0.5
2	5+2
3	5+4.5

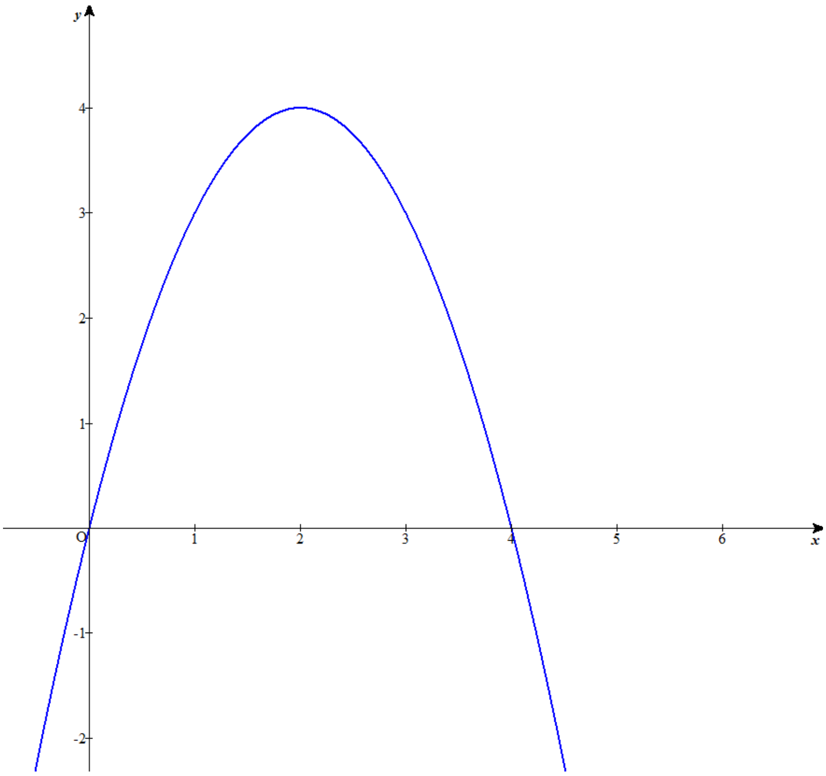
שאלה 13

להלן גרפים של ארבע פונקציות ריבועיות אשר הביטוי האלגברי שלהן הוא מהצורה $f(x) = x^2 + bx$ או $f(x) = -x^2 + bx$. מצאו את הערך של b בכל מקרה.

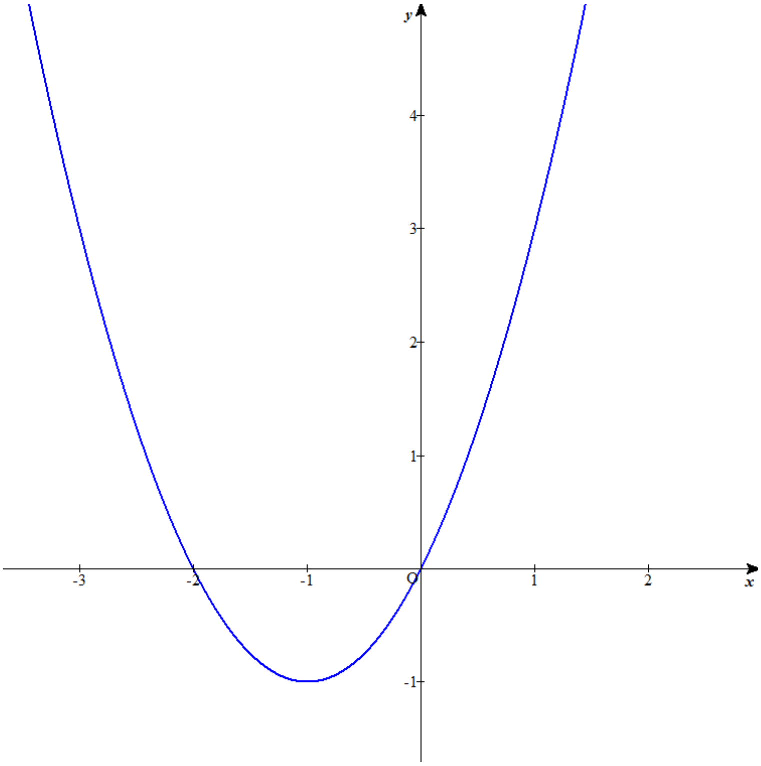
א.



ב.



ג.

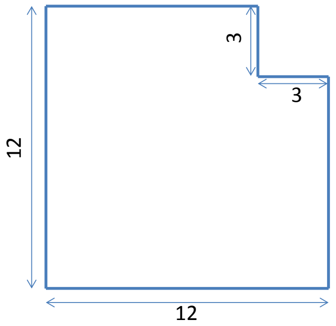


פתרונות והערות

תלמידים יוכלו לבנות את הביטויים האלגבריים על ידי הצבת נקודות וזיהוי כיוון הפרבולה בעזרת הצורה $(x-0)(x-x_1)$. אם התרגיל קשה מדי לתלמידים, ניתן להציג את הביטויים האלגבריים: $f(x)=x^2-6x$, $f(x)=-x^2+4x$ ו- $f(x)=x^2+2x$ ולבקש לשייך כל אחד מהגרפים לביטוי האלגברי המתאים לו.

<u>שאלה 14</u>

בשרטוט משושה שנבנה מ"גזירת" ריבוע קטן מאחת הפינות של ריבוע גדול.

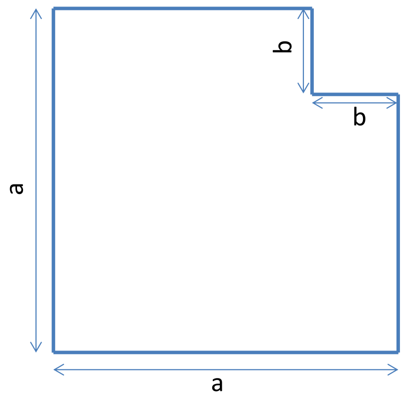


א. חשבו את אורך הצלעות במשושה אשר אורכן איננו מצוין בשרטוט. חשבו את היקף המשושה.

ב. חשבו את שטח המשושה.

ג. חיים חישב את שטח המשושה כך: 3×(12-3)+3×(12-3) + (12-3)×(12-3). חשב ובדוק שהחישוב אכן מתאים לתוצאה שקיבלת בסעיף הקודם. הסבירו כיצד חישב חיים.

ד. להלן משושה אחר:

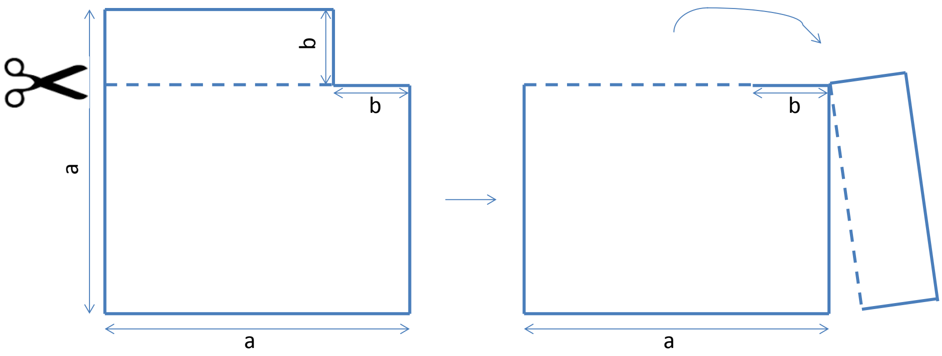


מצאו ביטוי אלגברי המבטא את ההיקף שלו.

ה. דני מצא כי שטח המשושה (המשורטט בסעיף הקודם) $a^2 - b^2$. הסבירו בעזרת השרטוט מדוע הביטוי של דני נכון.

ו. הילה מצא ביטוי אחר לשטח: $(a-b)^2 + 2(a-b)b$. הסבירו מדוע הביטוי של הילה נכון (היעזרו בסעיף ג).

ז. רנה חתכה את הצורה והרכיבה ממנה מלבן, ככה:



כתבו ביטויים אלגבריים לצלעות המלבן המתקבל, וכתבו ביטוי אלגברי לשטחו.

<u>פתרונות והערות</u>

שאלה זו מיועדת לתרגל את נוסחאות הכפל בהקשר גיאומטרי, ולהיווכח כי ביטויים שנראים מאוד שונים בהתחלה הם זהים (לאחר פישוט).

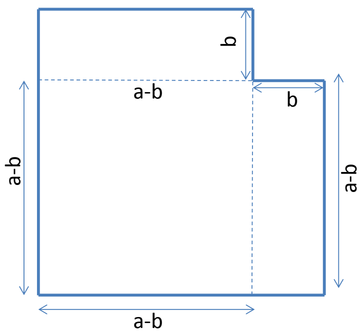
א. צלעות המשושה הן, 12, 12, 9 (12 פחות 3), 9, 3, ו- 3. לכן ההיקף הוא 48. רצוי להעיר את תשומת ליבם של הילדים כי זה בדיוק ההיקף של הריבוע שצלעותיו 12, כי ניתן להרכיב/להשלים את הריבוע על ידי הזזה של שתי הצלעות שאורכן 3.

ב-ג. רצוי לבקש מהתלמידים דרכים שונות לחישוב. ואם הם מתקשים להציע דרכים שונות רצוי לבנות אותן ביחד. למשל, ניתן לחשב על ידי חיסור שטחו של הריבוע הקטן (9) משטחו של הריבוע הגדול (12). ניתן, לפרק את המשושה לשלוש צורות: ריבוע שצלעותיו 9 ושני מלבנים שצלעותיו 3 ו- 9. לכן החישוב הוא 81+27+27. ניתן גם לפרק את הצורה לשני מלבנים (ראה סעיף אחרון להלן). החישובים האלה מהווים הקדמה לחישוב האלגברי הכללי בסעיפים הבאים, אשר בעזרתם חוזרים על טכניקה אלגברית.

ד. 4a. מחשבים על ידי: a+a+(a-b)+b+b+(a-b).

ה. החישוב מבוסס על ידי הפרשי שטחי הריבועים.

ו. רצוי לעבוד עם התלמידים על הפירוק הגיאומטרי כדי להסביר את החישוב:



ז. הביטוי שרנה תקבל הוא (a+b)(a-b) שהוא הפירוק לגורמים של הביטוי $a^2 - b^2$.

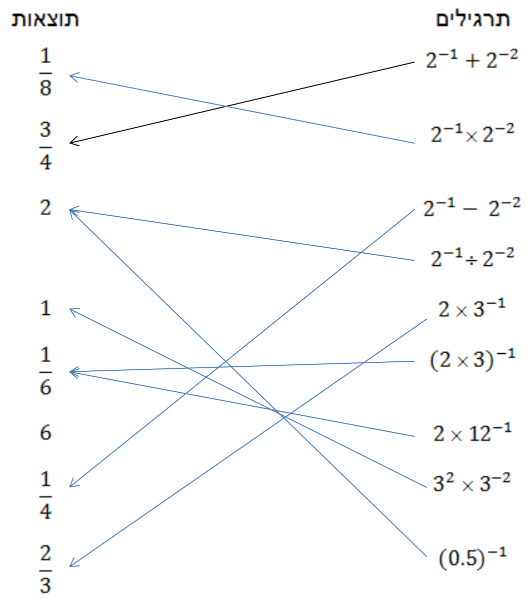
שאלה 15

התאימו לכל תרגיל חישוב את תוצאתו (לשני תרגילים שונים יכולים להיות אותה תוצאה. כמו כן, יש תוצאות שלא מתאימות לאף תרגיל).

תרגילים	תוצאות
$2^{-1}+2^{-2}$	$\frac{1}{8}$
$2^{-1}\times 2^{-2}$	$\frac{3}{4}$
$2^{-1}-2^{-2}$	2
$2^{-1}\div 2^{-2}$	
2×3^{-1}	1
$(2\times 3)^{-1}$	$\frac{1}{6}$
2×12^{-1}	6
$3^{2}\times 3^{-2}$	$\frac{1}{4}$
$(0.5)^{-1}$	$\frac{2}{3}$

פתרונות והערות

שאלה זו מיועדת לתרגל חישוב של חזקות עם מעריך שלילי ולעמת את התלמידים עם שגיאות אפשריות. כמו כן, יש הזדמנות לחזור על חישובים פשוטים עם שברים.



שאלה 16

היעזרו בנוסחאות הכפל כדי לחשב את התרגילים הבאים:

א. $(\sqrt{12}+\sqrt{3})^2$

ב. $(\sqrt{12}-\sqrt{3})^2$

ג. $(\sqrt{32}+\sqrt{2})^2$

ד. $(\sqrt{32}-\sqrt{2})^2$

פתרונות והערות

א. $(\sqrt{12}+\sqrt{3})^2 = (\sqrt{12})^2 + 2\sqrt{12}\times\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 12 + 2\sqrt{36} + 3 = 27$. ניתן גם לפתור כך: $(\sqrt{12}+\sqrt{3})^2 = (\sqrt{4}\sqrt{3}+\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3}+\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{3})^2 = 27$.

ב. $(\sqrt{12}-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{12})^2 - 2\sqrt{12}\times\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 12 - 2\sqrt{36} + 3 = 3$. ניתן גם לפתור כך: $(\sqrt{12}-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{4}\sqrt{3}-\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$.

ג. $(\sqrt{32}+\sqrt{2})^2 = (\sqrt{32})^2 + 2\sqrt{32}\times\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 32 + 2\sqrt{64} + 2 = 50$. ניתן גם לפתור כך: $(\sqrt{32}+\sqrt{2})^2 = (\sqrt{16}\sqrt{2}+\sqrt{2})^2 = (4\sqrt{2}+\sqrt{2})^2 = (5\sqrt{2})^2 = 50$.

ד. $(\sqrt{32}-\sqrt{2})^2 = (\sqrt{32})^2 - 2\sqrt{32}\times\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 32 - 2\sqrt{64} + 2 = 18$. ניתן גם לפתור כך: $(\sqrt{32}-\sqrt{2})^2 = (\sqrt{16}\sqrt{2}-\sqrt{2})^2 = (4\sqrt{2}-\sqrt{2})^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18$.

שאלה 17

א. חשבו את התרגילים הבאים בעזרת מחשבון: 31^2, 53^2.

ב. בדקו את תוצאת התרגילים של הסעיף הקודם בעזרת הנוסחה $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ג. עדי חישב 32×32 בדרך הבאה: 30 כפול 30 הם 900, ו- 2 כפול 2 הם 4, לכן 32×32=904.
בדיקה במחשבון מראה כי התוצאה של עדי איננה נכונה. מה התוצאה הנכונה וכיצד אפשר להסביר את הטעות של עדי בעזרת הנוסחה $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

ד. חשבו את התרגילים הבאים בעזרת הנוסחה $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$: 18^2, 99^2.

ה. חשבו את התרגיל הבא בעזרת מחשבון: $\frac{99^2-98^2}{99+98}$.

ו. בדקו את התוצאה של התרגיל הקודם בעזרת הנוסחה $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

פתרונות והערות

א-ב. $53^2 = (50+3)^2 = 50^2 + 2\times50\times3 + 3^2 = 2809$.

ג. טעותו של עדי נובעת מלשכוח לחבר את האיבר האמצעי של הנוסחה. לפי החישוב שלו: $32^2 = 30^2 + 2^2 = 904$, אך החישוב הנכון היה צריך להיות (לפי הנוסחה):
$32^2 = 30^2 + 2\times30\times2 + 2^2 = 904 + 120 = 1024$.

ד. $18^2 = (20-2)^2 = 20^2 - 2\times20\times2 + 2^2 = 324$
$99^2 = (100-1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$

ה-ו. $\frac{99^2-98^2}{99+98} = \frac{(99+98)(99-98)}{99+98} = 1$

שאלה 18

נתון ריבוע שאורך צלעו x ס"מ. מאריכים את אורך הצלע ב- 5 ס"מ.

א. שרטטו ציור מתאים וסמנו בו את השטח שהתווסף. מאלו צורות הוא מורכב?

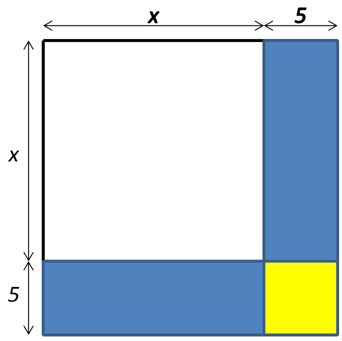
ב. כתבו ביטוי אלגברי לשטח של הריבוע החדש.

ג. בכמה גדל שטח הריבוע (ביחידות סמ"ר) כפונקציה של אורך הצלע המקורי x.

ד. אם השטח גדל ב- 125 סמ"ר, מה היה השטח של הריבוע המקורי?

פתרונות והערות

א. בשרטוט מודגשים השטחים שהתווספו: שני מלבנים באורך x ורוחב 5, וריבוע בעל צלע של 5.



ב. $(x+5)^2$, מאלגברה יודעים כי הביטוי הזה שווה ל- $x^2+2\times x\times 5+5^2$, וממנו רואים את שלושת השטחים שהתווספו.

ג. שטח הריבוע גדל ב- $(x+5)^2-x^2=10x+25$

ד. $10x+25=125 \quad \Rightarrow \quad x=10$, ולכן השטח המקורי היה 100 סמ"ר.

שאלה 19

א. נתונה המשוואה הריבועית $x^2 + bx + 9 = 0$. מצאו שני ערכים של b, כך שלמשוואה יהיה פתרון יחיד, ושני ערכים עבורם אין למשוואה פתרון.

ב. בנו משוואה ריבועית כלשהי כך ששני פתרונותיה יהיו שליליים.

ג. בנו שתי משוואות ריבועיות שונות, כך שלשתיהן יהיו אותם שני פתרונות.

פתרונות והערות

שאלה זו מיועדת לטפח שיטות עבודה שונות ולאפשר לתלמידים למצוא תשובות שונות שהן כולן נכונות עבור המשימה שניתנה.

א. דרך אפשרית לפתרון היא להציב מספרים שונים במקום b ולחשב בעזרת הנוסחה את הפתרונות. דרך שיטתית יותר היא לבחון את הנוסחה ולהיווכח כי הדיסקרימיננטה במקרה זה היא תמיד $\sqrt{b^2 - 36}$, ולכן עבור כל מספר גדול מ- 6 אשר נציב במקום b יתקבלו שני פתרונות שונים למשוואה. אם נציב $b = 6$, נקבל פתרון יחיד. רצוי לדון בכך עם התלמידים כדי שיתרגלו להסתכל על נוסחה ולנתח אותה.

ב. גם בסעיף זה התלמידים יוכלו לעשות ניסוי וטעיה. כמו כן, יוכלו להשתמש בביטוי $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ כדי להרכיב משוואה ריבועית כמבוקש.

ג. בנוסחה $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$, שינוי הערכים של a בלבד יובילו למשוואות שונות בעלות אותם שורשים. בכיתות מתקדמות אפשר לקשור עובדה זו לגרפים של פונקציות ריבועיות שונות בעלות אותן נקודות חיתוך עם ציר ה- x.

שאלה 20

את המשוואות הבאות ניתן לפתור "בראש" – נסו את כוחכם!

א. $\sqrt{x}+1=6$

ב. $\sqrt{x+1}=6$

ג. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}=6$

ד. $\sqrt{x}-1=6$

ה. $\sqrt{x-1}=6$

ו. $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)=6$

פתרונות והערות

א. 25

ב. 35

ג. 8

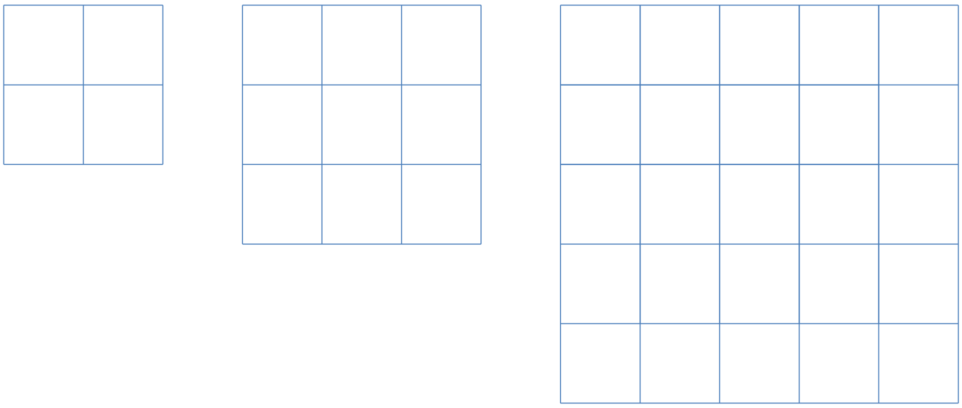
ד. 49

ה. 37

ו. 7. בעיה זו שונה מהאחרות בכך שאי אפשר לבדוק את הפתרון על ידי הצבה.

שאלה 21

א. ספרו (או חשבו) את מספר המשבצות שיש בכל אחד מהריבועים הבאים:



ב. כמה משבצות יש בריבוע בו יש n משבצות בכל שורה ובכל טור?

ג. כמה משבצות מתווספות כאשר מגדילים ריבוע של 7×7 לריבוע של 8×8?

ד. כמה משבצות מתווספות כאשר מגדילים ריבוע של $n\times n$ לריבוע של $(n+1)\times(n+1)$?

ה. אם בשלב מסוים התווספו 61 משבצות, כמה משבצות היו בשלב הקודם?

פתרונות

א. 4, 9, 25

ב. n^2

ג. 64-49=15

ד. $(n+1)^2-n^2=2n+1$

ה. $2n+1=61 \Rightarrow n=30$, ולכן בשלב הקודם היו 900 משבצות.

שאלה 22

המתמטיקאי אנגלי אמר שגילו הוא x בשנה x^2. ידוע כי הוא חי במאה ה-19, באיזה שנה הוא נולד?

פתרונות והערות

שאלה זו היא סוג של חידה ורצוי לתת לתלמידים להתנסות תחילה עם כל מיני מספרים כדי לוודא שהבינו את שאלה. אנו מציעים לאפשר שימוש במחשבון. בשלב שני רצוי לעזור לתלמידים לחפש ממה להתחיל. כיוון שהמתמטיקאי חי במאה ה- 19, יש לחפש מספרים ריבועיים גדולים מ- 1800 וקטנים מ- 1900. לאחר כמה ניסיונות בעזרת המחשבון, ניתן למצוא כי המספר הריבועי היחיד בין 1800 ל- 1900 הוא 1849, שהוא הריבוע של 43. לכן הוא נולד בשנת 1806. המתמטיקאי שאמר זאת על עצמו היה אוגוסטוס דה מורגן. אפשר לעודד את התלמידים למצוא מאה אחרת בו המתמטיקאי היה יכול לטעון את אותה טענה. לשם כך כדי לבנות את טבלת הריבועים עד 44 (כי $45^2 = 2025$ וזה כבר מעבר לזמננו...).

שאלה 23

זורקים קוביית משחק רגילה עליה רשומים המספרים 1, 2, 3, 4, 5, 6 ואת התוצאה רושמים במקום b בביטוי האלגברי של הפונקציה $f(x) = x^2 - b$.

א. מה ההסתברות שלגרף הפונקציה הריבועית יהיו שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x?

ב. מה ההסתברות שהפונקציה תעבור דרך ראשית הצירים?

ג. אם גרף הפונקציה (שהתקבל לאחר זריקת הקובייה) עובר דרך הנקודה (4,11), איזה מספר יצא בזריקה?

ד. בזריקת הקובייה התקבל המספר 3, רשמו ארבע נקודות על גרף הפונקציה שהתקבלה.

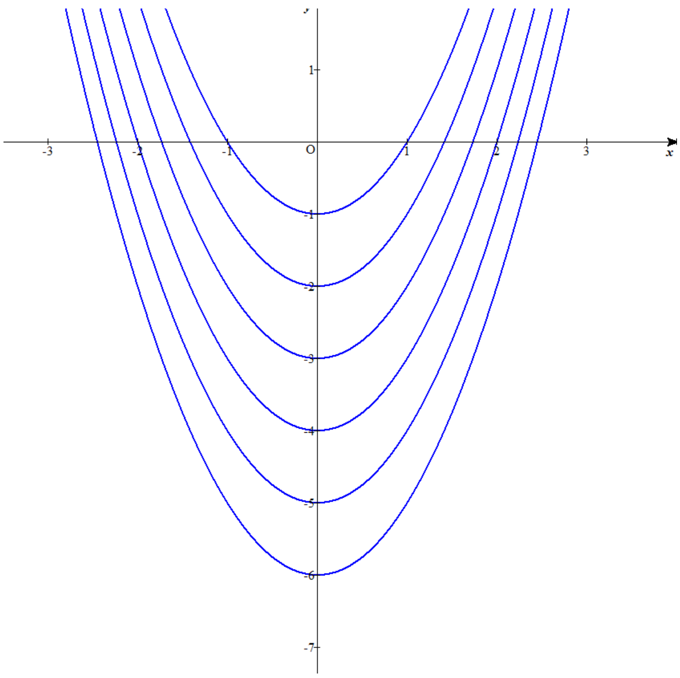
ה. הסבירו מדוע לא יתכן שאותה נקודה תשתייך לשני גרפים שונים שמתקבלים מזריקת הקובייה?

ו. רועי טוען כי לא משנה מה יצא בקובייה, גרף הפונקציה המתקבל לא יחתוך את הישר y=-7. האם הוא צודק? הסבירו.

ז. הסבירו מדוע ההסתברות שהפונקציה שהתקבלה (לאחר זריקת הקובייה) תחתוך את הישר y=-1.5 היא $\frac{5}{6}$.

פתרונות והערות

בשאלה זו נעשה קישור בין מושגים פשוטים בהסתברות לבין סוגיות בייצוג פונקציות ריבועיות מהצורה $f(x) = x^2 + c$ תוך הישענות ראייה גרפית של הפונקציות ועל הזזות.
ניתן להתחיל עם התלמידים בשרטוט של ששת המצבים האפשריים:



א. לכל הגרפים (שהם הזזה כלפי מטה של הפונקציה $f(x) = x^2$) חותכים את ציר ה- x בשתי נקודות. ניתן לראות זאת גם בביטוי האלגברי מהצורה $x^2 - \mathrm{c} = 0$, זאת משוואה שתמיד יש לה שני פתרונות. לכן ההסתברות היא 1.

ב. ההסתברות היא אפס.

ג. 5. ניתן למצוא אותו על ידי הצבת הנקודה בביטוי של הפונקציה ואז על ידי פתרון המשוואה $4^2 - b = 11$.

ד. למשל, (4,13), (1,-2), (0,-3).

ה. כיוון שכל גרף הוא הזזה אנכית של גרף אחר, אין נקודות חיתוך ביניהם. כלומר, נקודה השייכת לגרף של פונקציה אחת לא יכולה להשתייך לגרף של אחרת. זאת ניתן לראות גם מהביטויים האלגבריים, כי למשוואה $x^2 - \mathrm{c} = x^2 - d$ אין פתרון אלא אם כן, $c = d$, כלומר כאשר מדובר באותה פונקציה.

ו. רועי צודק. הנקודה בעל שיעור ה- y הקטן ביותר היא (0,-6), לכן הישר y=-7, לא יחתוך אף אחד מהגרפים שיתקבלו.

ז. גרף הפונקציה הוא פרבולה שמוזזת כלפי מטה. מספר יחידות ההזזה נקבע בזריקת הקובייה. אם גודל ההזזה הוא יחידה אחת, מינימום הגרף יהיה בנקודה (0,-1), ולכן הגרף לא יחתוך את הישר, כל הזזה אחרת (2, 3, 4, 5, או 6) תוריד את קדקוד הפרבולה את מתחת לישר, ולכן יהיו שתי נקודות חיתוך. לסיכום – 5 מתוך 6 הטלות קובייה יוצרות שתי נקודות חיתוך.

<u>שאלה 24</u>

הטבלה הבאה מופיעה על אריזה של קרקרים (ג' פירושו גרם, מ"ג פירושו מיליגרם שהוא אלפית הגרם).

קריקר עם שיבולת שועל

הרכב תזונתי	פרוסה	100 גרם
קלוריות (קק״ל)	20	310
חלבון	0.8 ג׳	12.0 ג׳
פחמימות	4.0 ג׳	62.0 ג׳
שומן	0.1 ג׳	1.5 ג׳
סיבים תזונתיים	1.1 ג׳	17.5 ג׳
כולסטרול	0 ג׳	0 ג׳
נתרן	20.0 מ״ג	300 מ״ג
סידן	6.5 מ״ג	100 מ״ג
מגנזיום	23.0 מ״ג	350 מ״ג

לאחר הפתיחה רצוי לשמור במיכל אטום
רכיבים: שיבולת שועל וסיבים משיבולת-שועל, קמח חיטה מלאה, קמח חיטה, סוכרים, מלח, שמן חמניות, סידן.
משקל נקי: 200 גרם
כשר פרווה בהשגחת הרבנות, ערד

א. כמה קלוריות (ביחידות קק"ל) יש בפרוסה אחת?

ב. כמה קלוריות יש ב- 100 גרם קרקרים?

ג. מה המשקל הנקי (תכולה ללא אריזה) של קופסת הקרקרים?

ד. כמה פרוסות בקופסה? כיצד מצאתם?

ה. מה משקל של כל פרוסה?

פתרונות והערות

שאלת אוריינות זו מיועדת לתרגל קריאת מידע מטבלאות. המידע יכול להיות נגיש מקריאה ישירה של נתונים (במקרה זה יש לדעת היכן לחפש את נתונים המבוקשים) או מחישוב מידע שאינו מפורש בטבלה אך ניתן "לגזור אותו" מהנתונים המפורשים.

א. 20 (קריאה ישירה מהשורה הראשונה בטבלה).

ב. 310 (קריאה ישירה מהשורה הראשונה בטבלה).

ג. 200 גרם. נתון זה רשום בשורה שלפני האחרונה.

ד. בפרוסה בודדת יש 20 קק"ל ובחבילה כולה יש 620 קק"ל. מכאן שיש $620:20=31$ פרוסות בחבילה, ומשקל כל אחת הוא $200:31\approx 6.5$ גרם.

<u>שאלה 25</u>

התאימו ביטויים מהטור הראשון לביטויים שווים בטור השני והסבירו מדוע הם שווים.

$(x-2)(x-3)$	x^2+6x+9
$(x-3)(x+3)$	a^2+9+6a
$x(x-9)$	$-x^2-6x-9$
$(a-3)^2$	$9-6a+a^2$
$(a+3)^2$	x^2-9x
$-(x+3)^2$	x^2-9
$(x+3)^2$	x^2+5x+6
	x^2-5x+6

<u>פתרונות</u>

$(x-2)(x-3)$	x^2+6x+9
$(x-3)(x+3)$	a^2+9+6a
$x(x-9)$	$-x^2-6x-9$
$(a-3)^2$	$9-6a+a^2$
$(a+3)^2$	x^2-9x
$-(x+3)^2$	x^2-9
$(x+3)^2$	x^2+5x+6
$(x+2)(x+3)$	x^2-5x+6