שינויים בתפיסת מושג המשוואה ודרכי פתרונה בסביבת למידה טכנולוגית (case-study)

מוגש על ידי חנה שטיין

תמצית

לימוד האלגברה מזוהה (אצל מורים ותלמידים רבים) עם אופרציות בביטויים סימבוליים, התמחות בפתרון משוואות וטכניקות לפתרון בעיות, וחלק גדול מספרי הלימוד של אלגברה בעולם אכן משקפים ראייה זו. גם לפי תכנית הלימודים במתמטיקה של משרד החינוך והתרבות (ה'תש"ן), שני שלישים מזמן הלימוד בכתה ח' מוקדש לפתרון תבניות פסוק ובעיות, ולטכניקות אלגבריות.

חשיבות העיסוק בביטויים האלגבריים, וחשיבות לימוד הפרוצדורות הפועלות עליהם, אינם מוטלים בספק מבחינת העבודה המתמטית, אבל לאחרונה נשמעים יותר ויותר קולות הטוענים כי האלגברה היא הרבה מעבר לכך. הטענה היא כי במקום להתמקד במיומנויות ובמניפולציות הנעשות על הביטויים האלגבריים, צריך לשים את הדגש על סיטואציות, שהצורך להתמודד עמן ידרבן, וייתן הֶקשר ומשמעות ללימוד המיומנויות המתמטיות הנחוצות. לדוגמה, מציאת חוקיות והכללה של מבנים (patterns), שימוש במודלים מתמטיים לייצוג והבנת יחסים כמותיים, חקר וניתוח של תופעות השתנות בהקשרים שונים וכדומה. כמו כן נשמעות טענות כי יש להדגיש את חשיבותם של התהליכים המתמטיים בלמידה, למשל: הנמקות, השערות, רפלקציה, חקר, קישור בין ייצוגים שונים של מושגים מתמטיים, שיח מתמטי, בחירת כלים מתאימים, ועוד.

לכלים ממוחשבים יש כוח היכול להפוך חשוב ומרכזי בעיצובם ובקידומם של התהליכים האלה. השימוש בכלים טכנולוגיים מרחיב את תחום הבעיות היכולות להיות נגישות לתלמידים, מאפשר לבצע פרוצדורות שגרתיות במהירות וביעילות, ובכך מפנה זמן ליכולת המשגה (קונספטואליזיצה), ולתרגום סיטואציות למודל מתמטי (מתמטיזציה). הטכנולוגיה מאפשרת עיסוק ברעיונות מתמטיים מופשטים, וגישה לרעיונות אלה מהיבטים שונים על ידי מעבר דינאמי בין, ובתוך ייצוגים מתמטיים שונים (גרפיים, אלגבריים ונומריים -ראה פירוט בסעיף סביבת למידה טכנולוגית עמוד 28). כל אלה מאפשרים יצירת סביבה לימודית, שבה התלמידים עסוקים בלמידת מתמטיקה משמעותית.

בעקבות כל האמור לעיל, ובמטרה לשנות ולשפר את תכניות הלימוד הקיימות במתמטיקה בבתי הספר, נוצר הצורך ביצירת סטנדרטים חדשים להוראת מתמטיקה בסביבה טכנולוגית. סטנדרטים כאלה אפשר למצוא לדוגמה ברשימת העקרונות והסטנדרטים של איגוד מורי המתמטיקה בארה"ב (NCTM, 2000).

בשנת 1993 החל במחלקה להוראת המדעים שבמכון ויצמן למדע – פרוייקט **מתימ**חשב. הפרוייקט מתמקד בפיתוח של חומרי לימוד במתמטיקה לחטיבה העל-יסודית, ובמחקר שהינו חלק מפיתוח זה. הפרוייקט מהווה "מעגל פיתוח ומחקר" של לימוד מתמטיקה, תוך מתן תפקיד מרכזי לשימוש בכוחם של כלים ממוחשבים (Hershkowits. et al, in press).

בהיעדר קיומו של מסמך רשמי בארצנו, המחייב סטנדרטים והדגשים העוסקים ב**מה** ללמד **ואיך** ללמד, פותחו במסגרת פרוייקט **מתימ**חשב סטנדרטים פנימיים המשמשים כקו המנחה

את מפתחי החומרים. המטרות והרציונאל של הפרוייקט הן ברוח הנאמר לעיל (ראה פירוט בסעיף פרוייקט **מתימ**חשב בעמוד 34).

כחברת צוות פרוייקט **מתימ**חשב, כשותפה בכתיבת חומרי הלימוד לכתה ח', וכמורה המלמדת בחטיבת הביניים לפי תכנית הקורס של **מתימ**חשב, בחרתי להתמקד במסגרת עבודה זו, בדרכים בהן נבנה ונתפס מושג המשוואה ובגישות לפתרונה, אצל תלמידי כתה ח' הלומדים אלגברה מתחילתה (כתה ז'), לפי תוכנית הקורס של **מתימ**חשב. בקורס זה באות לידי ביטוי שתי גישות שונות להוראת האלגברה:

הגישה הפונקציונאלית רואה את הביטוי האלגברי (תבנית מספר), כמתאר תופעה של השתנות, ומארגנת את הלימוד סביב מושג הפונקציה כאובייקט מרכזי. חוקרים רבים מתארים תכניות לימודים המבוססות על גישה זו:
(Chazan, 1999; Heid 1996; Hershkowitz et al, in press; Kaput, 1989; Kieran et al, 1996; Schwartz & Yerushalmy, 1992; Yerushalmy & Schwartz,1993).
הגישה הפונקציונאלית מאפשרת התבוננות במשוואה כהשוואה בין שתי פונקציות (משוואות מהצורה: $f(x) = g(x)$ או $f(x) = (c)$, הניתנות להצגה באופן סימבולי, גרפי או נומרי. מציאת פתרון המשוואה יכול להיעשות בעזרת ייצוגים שונים של פונקציה והבנת הקשרים ביניהם. לפי תפיסה זו, האות בביטוי היא ארגומנט היכול לקבל ערכים מספריים שונים והמייצג גודל **המשתנה** מעל תחום מסוים (Usiskin, 1988). (ראה פירוט בסעיף גישות לפתרון משוואות עמוד 16).

הגישה האלגברית הקונבנציונאלית רואה את הביטוי האלגברי כישות סטטית. המשוואה מוצגת כתבנית פסוק ונתפסת כישות שיש לפתור אותה כדי למצוא את המספר המקיים את השוויון. במקרה זה, האות בביטוי עומדת בדרך כלל במקום מספר "**נעלם**" שהוא גודל בלתי ידוע. פתרון המשוואה נעשה כמעט ורק במסגרת הייצוג הסימבולי, וההתמחות בפתרון משוואות כוללת רשימה ארוכה של טכניקות, פרוצדורות או אלגוריתמים מתאימים.

לפי תכנית הלימודים (משרד החינוך, תש"ן), צריכים התלמידים ללמוד לפתור משוואות ולהתמחות באלגוריתמים של פתרון משוואות ליניאריות במהלך כתה ח'. צוות פרוייקט **מתימ**חשב במכון ויצמן למדע (Hershkowitz et al., in press) רואה בגישה הפונקציונאלית, כגישה המתאימה להבניית מושג המשוואה, ובשימוש במחולל גרפים או בגיליון אלקטרוני כיוצרים הזדמנות מתאימה לביסוס הרחבת המושג. לכן, פיתח צוות הפרוייקט את חומרי הלימוד ללימוד האלגברה בכלל, ומושג המשוואה בפרט -לפי הגישה הפונקציונאלית. המשוואה היא מודל למצב של השוואה – כלומר, סיטואציה בה משתוות שתי תופעות גידול (פונקציות שהן לאו דווקא ליניאריות). התלמידים מתנסים בפתרון משוואות בעזרת טבלה, הילוך על גרף ובעזרת שיקולים שונים נוספים, תוך הבנת המשמעות הנומרית והגרפית של הפתרון. בניית מושג המשוואה בגישה הפונקציונאלית, נעשה לפני גיבוש פורמאלי של פרוצדורות לפתרון משוואות בגישה אלגברית קונבנציונאלית. כך הופך מושג המשוואה ופתרונה, לרחב ועמוק יותר מאשר זה המתקבל בדרך המדגישה את הפתרון הסימבולי – אלגוריתמי בלבד, המאפשר לתלמידי כתה ח' לפתור רק משוואות ליניאריות.

הגישות השונות להוראת ולמידת מושג המשוואה, והשיטות בהן משתמשים התלמידים לפתרונה, יכולות ללמד על הדרך בה נתפס המושג. חוקרים מבדילים בין שתי דרכים בסיסיות שונות לתפיסה של מושגים מתמטיים:

התפיסה המבנית (structural approach) - לפיה המושג המתמטי נתפס כ**אובייקט** שניתן לזהותו ולעשות עליו מניפולציות כאובייקט אחד, מבלי להיכנס לפרטים שמהם הוא מורכב.

התפיסה האופרציונאלית או הפרוצדוראלית (operational / procedural approach) - לפיה המושג המתמטי נתפס כתהליך(process) כלומר - כפרוצדורה שקיומה תלוי בסדרת פעולות שיש לבצע. (Dubinsky, 1991; Even, 1998; Grey & Tall ,1994; Kieran, 1992; Sfard, 1991; Sfard & Linchevski, 1994; Yerushalmy & Schwartz, 1993).

יש הטוענים כי קיימת התפתחות או היררכיה בין שתי התפיסות: התפיסה הפרוצדוראלית מתגלה באופן טבעי קודם (מבחינת ההתפתחות ההיסטורית והקוגניטיבית של הפרט) ורק אחר כך מתגבשות הפרוצדורות למושגים מבניים יעילים וחסכוניים. לעומתם, יש הטוענים כי המושג המתמטי יכול להתפרש לפעמים כתהליך ולפעמים כאובייקט, כך שלמעשה הוא נתפס באופן דואלי - כתהליך וכאובייקט. תפיסה שלמה של המושג דורשת יישום של שתי התפיסות במקביל, ומעבר דינאמי מתפיסה אחת לשנייה. (ראה פירוט בסעיף תפיסות של מושגים מתמטיים עמוד 11) .

מטרת מחקר זה היא ללמוד על תהליכים ושינויים בתפיסת מושג המשוואה ותהליכי פתרונה לאורך שנת הלימודים השמינית. על מנת לנסות ולהבין תהליכים אלה, עקבתי אחר עבודתן של זוג תלמידות העובדות יחד. בחרתי במחקר אורך (ניתוח שרשרת פעילויות), כיוון שמחקר מסוג זה מאפשר לעקוב אחר שינויים תהליכיים ומבניים, שחלו אצל התלמידות לאורך טווח זמן גדול יחסית, ולאורך פעילויות ומצבים שונים בלמידה.

עבודתן של שתי התלמידות, שלמדו לפי תוכנית הקורס של **מתימ**חשב לכתה ח', תועדה לאורך פעילויות ומצבים שונים (פעילויות בכיתה, בחדר המחשב, עבודות כתובות שנעשו בבית ובזמן מבדק), שבהם העיסוק במשוואה נעשה בגישה פונקציונאלית ו/או קונבנציונאלית. בחלק מן הפעילויות שנערכו בכתה, מובאים הדים מן הכיתה כולה (בדיון כיתתי ובשני מבדקים), כך שהמחקר שהוא איכותני בעיקרו, מכיל גם מרכיבים כמותיים.

המעקב אחרי שתי הבנות התנהל מן היום הראשון ללימודים (ספטמבר 99) ועד תום העיסוק בפתרון משוואות ואי-שוויונים ממעלה ראשונה במשתנה אחד (מרץ 2000).

הנתונים שנאספו נותחו בשני מסלולים: ראשית ניתחתי כל פעילות בנפרד, ולכן כל פעילות מופיעה כיחידת ניתוח נפרדת (פרק IV יחידות 1-8). לאחר מכן ערכתי ניתוח אורכי המתייחס לכל יחידות הניתוח (פרק V - הדיון), על פי שאלות המחקר המפורטות להלן.

כאמור, מטרת המחקר היא לבדוק כיצד משתנה ומתגבשת תפיסתן של זוג התלמידות את מושג המשוואה ואת הדרכים לפתרונה לאורך שנת הלימודים השמינית.

את מטרת המחקר פרטתי לשאלות המחקר הבאות:

1. **כיצד באים לידי ביטוי השינויים בתפיסת מושג המשוואה ופתרונה אצל זוג התלמידות הנחקר?**
בדקתי כיצד השינוי בא לידי ביטוי בתחומים הבאים: א. דימוי מושג המשוואה (תפיסת המשוואה כתהליך או כאובייקט, בגישה פונקציונאלית או אלגברית קונבנציונאלית) ב. ייצוגים שהם ביטוי לדימוי מושג המשוואה ג. תפיסת תפקיד האות ד. שיטות ואסטרטגיות לפתרון משוואות.

2. מהם הגורמים המשפיעים על תפיסת מושג המשוואה ועל הגישות לפתרונה?
בדקתי את קיומם והשפעתם של הגורמים הבאים: א. מיקומה של הפעילות ברצף הנלמד ב. סוג המשימה ג. סוג המשוואה ומידת מורכבותה ד. שימוש במחשב.
3. **האם למידת האלגוריתמים האלגבריים לפתרון משוואות, והמאמצים המושקעים בפיתוח מיומנות אלגברית, יוצרים העדפה לעבודה בגישה האלגברית הקונבנציונאלית? מה נשאר מהגישה הפונקציונאלית לאורך זמן הלימוד?**

ממצאים עיקריים העולים מן המחקר

א. מניתוח עבודתן של הבנות עולה, כי למיקומה של הפעילות ברצף הלימוד, ולסוג הפעילות – היה תפקיד חשוב בהשפעה על תפיסתן של הבנות את המשוואה, ועל שיטות הפתרון בהן השתמשו (שאלת מחקר ראשונה ושנייה): העיסוק במשוואות/מצבי השוואה נעשה בתחילת השנה בגישה פונקציונאלית, דרך סיטואציות בעיה העוסקות בתופעות של השתנות לאו דווקא ליניאריות. בשלב זה של הלימוד תפסו שתי הבנות את המשוואה באופן מבני כהשוואה בין שתי תופעות גידול. הפתרונות נמצאו באופן גרפי, נומרי, או סימבולי. לאחר כחודשיים, נלמד האלגוריתם לפתרון משוואות ליניאריות 'פעולות על אגפים', והפתרונות נמצאו באופן סימבולי. נמצא כי בשלב זה, בו העיסוק במשוואה היה בגישה אלגברית קונבנציונאלית – התקשו הבנות לעבור ולראות את המשוואה גם בייצוגה הגרפי ובמהותה הפונקציונאלית. יחד עם זאת, על פי עבודתן של הבנות במבדק שנערך בתום תקופת המחקר, אפשר לראות, כי שתיהן מסוגלות לראות את המשוואה, הן כהשוואה בין שתי תופעות גידול דינאמיות - גם כאשר התבניות נטולות הקשר של סיטואציה פונקציונאלית, והן בגישה אלגברית קונבנציונאלית (שאלת מחקר שלישית). עבודתן מתאפיינת בשלב זה ביכולת לנוע בין ייצוגים שונים של המשואה, ובשימוש במגוון שיטות פתרון.   יכולת כזו נמצאה גם אצל שאר תלמידי הכתה (על פי ממצאי אותו המבדק, וגם על פי ממצאי מחקר נוסף, שנערך כחצי שנה לאחר תום מחקר זה - בקרב תלמידי אותה כתה). כך שלמעשה ניתן להניח כי העיסוק במשוואה בשתי הגישות, תרמה ליכולתם של התלמידים לתפוס את מושג המשוואה באופן רחב ומעמיק יותר, מאשר ניתן היה לתפסה באמצעות גישה אחת בלבד.

ב. מניתוח עבודת התלמידות נמצא כי לאורך זמן המחקר, תופסות שתי התלמידות את מושג המשוואה באופן דואלי כתהליך-אובייקט (שאלת מחקר ראשונה). השוני בין שתי הבנות מתבטא ב"מידת המיזוג" בין שתי התפיסות ובמידת ה"הישענות" שלהן על תפיסה מסוימת בהבנת מושג המשוואה, ובדרכי הפתרון. על פי תוצאות מחקר זה, לא נמצאה התפתחות היררכית לאורך המחקר בין תפיסה פרוצדוראלית של מושג המשוואה – לתפיסה מבנית (או להיפך), אלא "הרחבה" של המושג וקיום תלות הדדית בין שתי התפיסות - ייתכן והדבר קשור למבנה פרקי הלימוד ולסדר ביניהם. כמו כן, לא נמצא קשר בין עבודה בגישה פונקציונאלית או קונבנציונאלית – לתפיסה פרוצדוראלית או מבנית: במספר מקרים, נמצאו (אצל אחת הבנות) דרכי פתרון המעידות על תפיסה פרוצדוראלית של המשוואה, גם כאשר מכלול הפעילות היה בגישה פונקציונאלית, וגם כאשר היה בגישה קונבנציונאלית.

ג. נמצא כי השימוש בכלי הממוחשב (גיליון אלקטרוני ומחולל גרפים בפעילויות שבגישה הפונקציונאלית, ו CAS בפעילויות שבגישה הקונבנציונאלית), תיגבר את יכולתן של הבנות במספר תחומים (שאלת מחקר שנייה): הוא אפשר 1) פעולות ומעברים דינאמיים בין ייצוגים מתמטיים שונים של מושג המשוואה, 2) הרחבת מגוון שיטות פתרון, 3)

היכרות עם סוגים שונים של תופעות גידול, ופתרון תבניות פסוק מורכבות – לאו דווקא ליניאריות. השפעתה של הסביבה הטכנולוגית על אופי עבודתן של הבנות הייתה כה גדולה, עד כי ניתן לומר כי גם העבודה בסביבת "נייר ועפרון" – הפכה לסביבה דינאמית או סביבה 'טכנולוגית וירטואלית'. הדבר בא לידי ביטוי ביכולתן של הבנות לנוע בקלות בין הייצוגים (גם ללא שימוש אקטיבי במחשב), לתאר את המשתנים, התבניות, והמשוואות הסימבוליות באופן דינאמי, וליישם שיטות פתרון גרפיות (ולא רק סימבוליות) בסביבת נייר ועיפרון.

ד. בתשובה לשאלת המחקר השנייה – נמצא כי העבודה עם הכלי הממוחשב, ועם מגוון ייצוגים קשורים במקביל, איפשרו לשתי הבנות (ולשאר תלמידי הכיתה) שימוש במגוון שיטות לפתרון משוואות (גרפיות, סימבוליות ונומריות). הם הצליחו להתמודד גם עם תבניות פסוק ריבועיות ומעריכיות, וכן יכלו לשקול ולבחור בכל מקרה (על פי ההקשר, סוג המשוואה, סוג המשימה, והעדפתם האישית), את הייצוג/הגישה היעילים/המועדפים עליהם לפתרון .

ה. העבודה בגישה פונקציונאלית, איפשרה לתלמידות לראות את האות כמייצגת משתנה דינאמי שעליו נבנית תופעת הגידול, ואת המשוואה כמתארת מצב השוואה מסוים בתוך כלל התופעה (שאלת מחקר ראשונה). בגישה זו, פתרון המשוואה נתפס כמקרה פרטי מתוך מקרים אפשריים רבים בתהליך. לכן מתקיימת מעין דואליות של 'משתנה-נעלם' שבה משמעות האות כנעלם (כלומר, המקרה הפרטי), כלולה במסגרת של משמעותה כמשתנה. דואליות זו לא נצפתה בפעילויות שבגישה הקונבנציונאלית.

השלכות יישומיות לגבי הסביבה הלימודית

א. **לימוד בגישה פונקציונאלית ובגישה קונבנציונאלית:** ממצאי המבדק שנערך בתום תקופת המחקר, וממצאי המחקר שנערך כחצי שנה לאחר תום מחקר זה (Friedlander & Stein, 2000), מלמדים כי התלמידים ידעו להתבונן במשוואה, ולפעול עליה בגישה פונקציונאלית ובגישה קונבנציונאלית במקביל. הם היו מסוגלים ליישם מגוון של שיטות פתרון, וידעו להציג את מושג המשוואה בייצוגים שונים, נעו ביניהם, וקישרו בין התוצאות שהתקבלו. מכאן ניתן להניח כי העיסוק במשוואה באופן המשלב בין שתי הגישות, תורם להבנת מושג המשוואה ופתרונה באופן מעמיק ורחב יותר – לעומת ההבנה המושגת בלימוד גישה אחת בלבד. לכן חשוב לכלול במסגרת קורס באלגברה, פעילויות המשלבות לימוד בשתי הגישות.

ב. **דואליות תהליך-אובייקט:** הבנה מלאה של משמעות מושג המשוואה מתאפשרת עם היכולת לתפוס את המושג באופן דואלי כתהליך וכאובייקט. במחקר זה נמצא כי הדיאלקט/התלות בין שתי התפיסות, ומידת ההישענות על תפיסה מסוימת שונה מתלמיד לתלמיד (לדוגמה, גילי נשענת במקרים רבים על התהליך ועל המקרים הלוקאליים (נומריים) - כדי לבנות את האובייקט הגלובאלי, ואצל נועה הדגש הוא על האובייקט - ובמסגרתו היא מתייחסת לתהליך). לכן, למידה המאפשרת לפרש את מושג המשוואה באופן דואלי כמושג מבני-פרוצדוראלי, יכולה לתרום להבנה טובה יותר ולהרחבת משמעות המושג, כאשר כל תלמיד יכול לנוע בין שתי התפיסות, לפי הבנתו וצרכיו.

ג. **דואליות בתפיסת האות כמשתנה - נעלם:** מציאת פתרון משוואה (חיפוש הערך המסוים המקיים את השוויון) מדגיש בדרך כלל את תפיסת האות כנעלם. הממצאים

מלמדים כי העיסוק במשוואה בגישה פונקציונאלית, תמך בתפיסת האות כמשתנה דינאמי, כשהמשוואה מייצגת מקרה פרטי בתוך כלל התופעה, ופתרונה נתפס כשלב אחד מיני רבים בתהליך (ולא כ'נעלם' בעל ערך יחיד). לכן, בהתאמה לנאמר על ידי קירן ואחרים (Kieran et al, 1996), מתקבל כי חשוב לכלול במסגרת קורס באלגברה, פעילויות בהן האות מוצגת במשמעות של משתנה רב ערכי, לפני הטיפול בסיטואציות בהן האות מייצגת נעלם בעל ערך יחיד, במטרה לאפשר לתלמידים לראות את הנעלם בתוך קונטקסט רחב יותר של משתנים ולא כשני דברים מנוגדים. סדר למידה כזה יכול להקל על התלמידים גם בהבנת משמעות פתרון האי-שוויון הכולל תחום של ערכים.

ד. **השימוש בכלי הטכנולוגי:** כפי שתואר בראשית פרק זה, אחד העקרונות שהנחו את פיתוח חומרי הלמידה הוא כי שימוש נכון בכלים טכנולוגיים מעשיר ומגביר לימוד מתמטיקה נכון (המעביר את הדגש ממניפולציות סימבוליות – להבנת מושגים, יחסים ומבנים מתמטיים, תכנון דרכי פתרון וכד'). מן המחקר עולה, כי השימוש בכלי הממוחשב אכן תיגבר את יכולתן של הבנות לעבור באופן דינאמי בין ייצוגים מתמטיים שונים של מושג המשוואה, הרחיב את מגוון שיטות הפתרון שעמדו לרשותן, ואיפשר להן להתמודד גם עם תבניות פסוק לא ליניאריות. עוד נמצא כי השפעתו של הכלי הטכנולוגי באה לידי ביטוי גם בפעילויות בהן לא נעשה שימוש אקטיבי במחשב, וכי הסביבה הטכנולוגית תרמה גם ליצירת סביבת 'נייר ועפרון' דינאמית. ממצאים אלה תומכים בבניית קורסים מבוססי מחשב.

ה. **שימוש בייצוגים:** נמצא כי היכולת לעבוד עם מגוון ייצוגים והבנת הקשרים ביניהם, מאפשרת לתלמידים בטווח הארוך של לימוד הנושא, ולאחריו - לשקול ולבחור את הגישה/הייצוג היעילים/המועדפים עליהם ביותר למציאת הפתרון (זאת, על פי ניתוח יחידה 8, ומן הראיון עם 12 התלמידים במחקר הנוסף של (Friedlander & Stein, 2000). המודעות כי ניתן לייצג משוואה ופתרונה במספר דרכים, נותנת בידי התלמידים כוח מתמטי. מכאן, שיש לזמֵן לתלמידים אפשרות לעבוד עם מגוון ייצוגים, מתוך מטרה שיהיו מסוגלים לנצל את יתרונותיו של כל אחד מהם.

כיוונים אפשריים למחקר עתידי

א. ממצאי מחקר זה מעידים כי ההתמקדות בפיתוח מיומנויות אלגבריות קונבנציונאליות, לאחר לימוד מושג המשוואה ופתרונה בגישה פונקציונאלית - לא גרעה מיכולתם/העדפתם של התלמידים לעבודה בגישה פונקציונאלית, וכי לאורך זמן המחקר תרמו שתי הגישות (הפונקציונאלית והקונבנציונאלית) לתפיסה רחבה של מושג המשוואה ופתרונה. יחד עם זאת, בהגיעם לחטיבה העליונה, ממשיכים התלמידים בלימוד מתמטיקה בעיקר בגישה קונבנציונאלית. בדרך כלל הלימוד נעשה ללא תמיכת כלים טכנולוגיים, כאשר הדגש מושם על המיומנויות האלגבריות הדרושות לפתרון אלגוריתמי של משוואות. דרוש מחקר נוסף כדי לברר האם בתנאים כאלה תפיסת המשוואה בגישה פונקציונאלית נשמרת אצל התלמידים רק כאשר דרך הלמידה תומכת בתפיסה כזו – או שאולי תפיסה זו תעמוד להם גם בהמשך לימודיהם – גם אם ההוראה נעשית בגישה שונה.

ב. במחקר אורך זה, נבחן האופן בו נתפסים המשוואה ותהליך פתרונה – אצל שתי בנות שלמדו לפי תוכנית הקורס **מתימ**חשב, ובנוסף, נרשמו "הדים" בחלק מהפעילויות - משאר תלמידי הכיתה. במחקר הנוסף שתואר קודם (Friedlander & Stein, 2000)

רואיינו שישה זוגות תלמידים מאותה כיתה. ממצאי המחקרים מראים, כי לתלמידים אלה תפיסה רחבה של מושג המשוואה: הם ידעו להציג את מושג המשוואה בייצוגים שונים, נעו ביניהם, והיו מסוגלים ליישם מגוון של שיטות פתרון בגישה קונבנציונאלית ובגישה פונקציונאלית. כדי לבדוק אם תופעה זו היא ייחודית לאותה כיתה, או טיפוסית לתלמידים הלומדים על פי תוכנית הקורס **מתימ**חשב (או תוכנית דומה לה), יש צורך במחקר נוסף מקיף.

ג. בכל הפעילויות שנותחו בעבודה זו, התמקדתי בתהליכים ושינויים שחלו בתפיסת מושג המשוואה – כפי שבאו לידי ביטוי בעבודתן של שתי הבנות (כזוג, או כאשר עבדו בנפרד). כמו כן בחנתי את קיומם והשפעתם של מספר גורמים - על תפיסת מושג המשוואה ועל הגישות לפתרונה. במחקר זה לא נבחנה השפעתה של העבודה המשותפת, והאינטראקציה בין שתי הבנות - על תפיסתן את מושג המשוואה. לכן, עולה השאלה אם אכן הייתה השפעה כזו, ואם כן – כיצד היא באה לידי ביטוי בתפיסת מושג המשוואה ותהליכי פתרונה.