סריגים ושברים פשוטים: משפט פיק

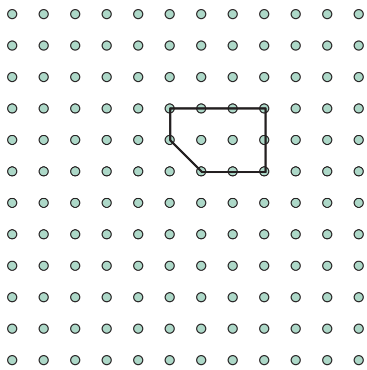
תקציר

המאמר מציג גישה חזותית לנושאים בסיסיים בתורת המספרים על-ידי שילוב של נושאים מתחומים שונים מאריתמטיקה ועד גיאומטריה (שברים פשוטים, שטח של משולש, סכום זוויות במצולע, חפיפת משולשים ותכונות אלכסונים במקבילית, סימון נקודות במישור הקרטזי, שיפוע של קו ישר). במרכז המאמר עומד משפט פיק הנותן נוסחה לשטח מצולע בסריג על-ידי ספירת נקודות סריג על צלעות המצולע ובתוכו.

מבוא

כאשר נתון סריג ריבועי, אזי **מצולע בסריג** הוא מצולע אשר קודקודיו הם נקודות הסריג (איור 1). נגדיר יחידת אורך כמרחק בין שתי נקודות סריג סמוכות.

המשפט של פיק (Pick) אומר: השטח של מצולע בסריג נתון על-ידי $\frac{1}{2}B + I - 1$; כאשר I הוא מספר נקודות הסריג בתוך המצולע (Interior), ו- B הוא מספר נקודות הסריג על צלעות המצולע (Boundary). לדוגמה, עבור המצולע באיור 1, $I = 2$, $B = 9$ ולכן השטח הוא $\frac{1}{2} \cdot 9 + 2 - 1 = 5\frac{1}{2}$ (ביחידות שטח). קל לאשר זאת מתוך השרטוט.



איור 1

משפט זה מפתיע כי הוא מציע לחשב שטח (כמות רציפה) על-ידי ספירה של נקודות (כמות בדידה). הוכחת המשפט מופיעה בנספח למאמר.

המתמטיקאי גאורג אלכסנדר פיק נולד בוינה ב- 1859 ונרצח במחנה הריכוז טרזינשטט כנראה ב- 1943. במרבית שנותיו עבד באוניברסיטה הגרמנית של פראג בצ׳כיה. מספרים כי אלברט איינשטיין נהג לדון על וללמוד עם פיק. ברובע היהודי בפראג מונצח שמו על קיר, בו חקוקים שמות היהודים הצ׳כים שנרצחו בשואה. במאמר שפרסם פיק ב-1899 הוא מספר כיצד הגיע למשפט זה, מה מקור ההשראה וכיצד הוא התבסס עליו כדי להוכיח משפט בתורת המספרים. על-ידי כך הוא מראה קישור מופלא ומפתיע בין תחומים כה רחוקים כמו סריגים ושטחים בגיאומטריה ומשפט בסיסי של תורת המספרים.
להלן ציטוט מדברי פיק עצמו, בתרגום חופשי לעברית.

תרומה גיאומטרית לתורת המספרים
מאת גיאורג פיק (Georg Pick)

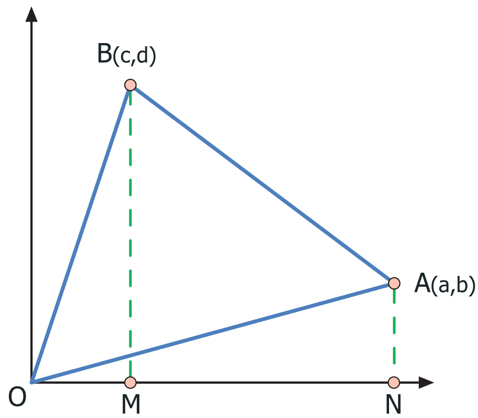
מאז זמנו של גאוס (Gauss) שימש הסריג המישורי, לעיתים קרובות, למטרות חזותיות והיוריסטיות. בהשוואה לכל היישומים הנ״ל, לשורות הבאות יש מטרה הרבה יותר צנועה - לנסות לבנות כבר מההתחלה, אלמנטים מתורת המספרים על בסיס גיאומטרי. דבר זה מושג על-ידי שימוש בנוסחה של שטח של מצולע שמסורטט בסריג. למרות פשטות הנוסחה, נראה, שעד עתה איש לא שם לב אליה.

ובכן, פיק זקף לזכות המתמטיקאי הדגול גאוס, את הרעיון המקורי לדוגמה מיוחדת זאת של גישה בינתחומית.
כיישום ראשון, פיק משתמש בסריגים ובנוסחה שלו לשטח, כדי להוכיח את:

המשפט הבסיסי של תורת המספרים השלמים

לשני מספרים שלמים a, b יש תמיד גורם משותף m אשר ניתן לרישום בצורה $m = a\alpha - b\beta$, כאשר α ו-β אף הם מספרים שלמים.

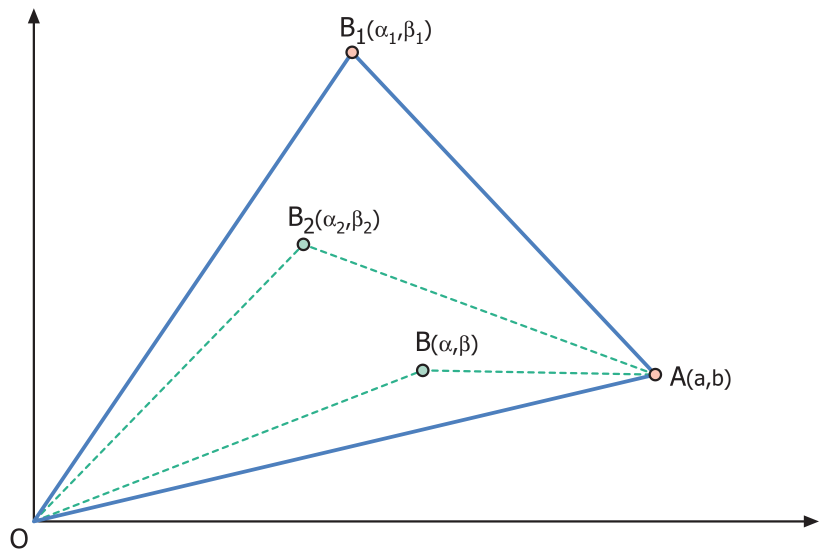
לשם השלמת ההוכחה דרושה, נוסף על הנוסחה של פיק, התוצאה ששטח משולש, שקודקודיו הם כדוגמת אלה הנראים באיור 2, הוא $\frac{1}{2}(ad - bc)$. תוצאה זו מתקבלת בחיבור השטח של משולש OBM לשטח של הטרפז MBAN, ולאחר מכן חיסור שטח המשולש OAN. כלומר, $\left(\frac{cd}{2} + \frac{(b+d)(a-c)}{2} - \frac{ab}{2}\right)$.



איור 2

להלן עיקרי ההוכחה של פיק ל"משפט הבסיסי של תורת המספרים".

אנו מייצגים את הזוג (a,b) על-ידי נקודה המתאימה A בסריג, ומונים את נקודות הסריג על הישר OA. קיימות $m + 1$ נקודות, כאשר m יכול להיות 1. m מחלק את a ואת b (למשל, עבור A(15, 6) יש ארבע נקודות סריג על OA: (0, 0) , (5, 2) , (10, 4) , (15, 6), כלומר $m = 3$, ואכן 3 מחלק את 15 ואת 6).
עתה נבחר נקודת סריג אחרת כלשהי $B_1(\alpha_1, \beta_1)$. (איור 3).



איור 3

על צלעות המשולש OAB_1 יש לפחות $m + 2$ נקודות סריג ($m + 1$ שעל OA ועוד B עצמה). אם יש נקודות סריג נוספות בתוך המשולש או על צלעותיו, נבחר אחת מהן וניצור משולש חדש OAB_2, כאשר השיעורים של B_2 הם (α_2, β_2). אחרי מספר סופי של חזרות על התהליך הנ"ל, נקבל משולש OAB עם בדיוק m+2 נקודות סריג על צלעותיו, ואף נקודת סריג אחת בתוכו. אם השיעורים של B הם (α, β), אזי השטח של המשולש ניתן על-ידי: $\frac{1}{2}(a\beta - b\alpha)$
מהנוסחה של משפט פיק נובע כי $B = m + 2$, $I = 0$ ולכן $\frac{1}{2}B + I - 1 = \frac{m}{2}$, שטח המשולש שווה ל- $\frac{m}{2}$, וההוכחה הושלמה.

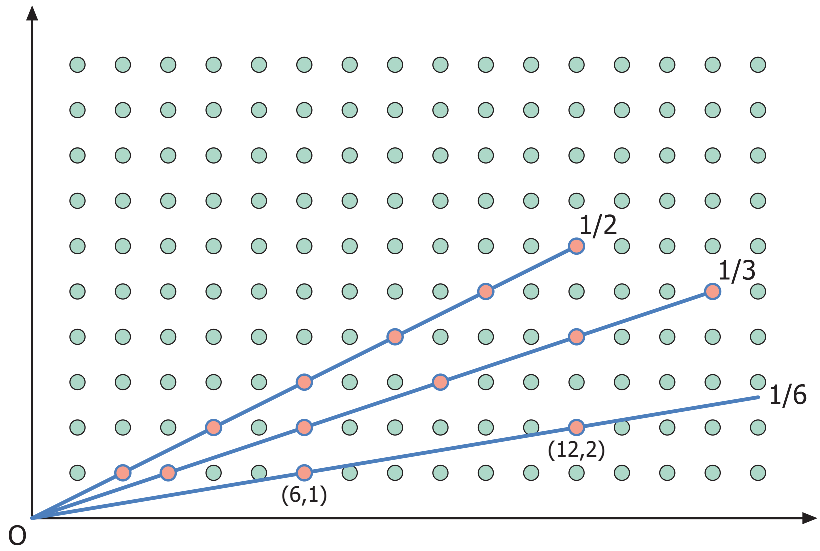
גיאומטריה וסדרת פארי (Farey)

פיק המשיך במאמרו להוכיח, באותם אמצעים גיאומטריים, מספר תכונות בסיסיות של סדרות פארי. נלך בעקבותיו ולאורך הדרך נוסיף מספר הוכחות משלנו. למעשה, נוכיח את כל התכונות הבסיסיות של סדרות פארי (ראו המאמר על סדרות פארי בקובץ זה), תוך שימוש בגישה הגיאומטרית של פיק. חשוב לשים לב שבכל מה שיבוא להלן, אנו משתמשים רק בתוצאה של השלב הראשון בהוכחה של נוסחת פיק (ראו בנספח). כלומר, שהשטח של משולש יסודי בסריג, שאין בו נקודות סריג בתוכו ועל צלעותיו פרט לקודקודים, הוא $\frac{1}{2}$.

סדרות פארי מסדר n טבעי (F_n) הן סדרות של כל השברים המצומצמים בין 0 ל-1, אשר המכנה שלהם אינו גדול מ- n, והם מסודרים בסדר עולה. לדוגמה, F_6 היא:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}$$

אנו מייצגים את השבר $\frac{a}{b}$ (מצומצם או לא מצומצם) על-ידי נקודת הסריג (b, a) (דוגמאות באיור 4).

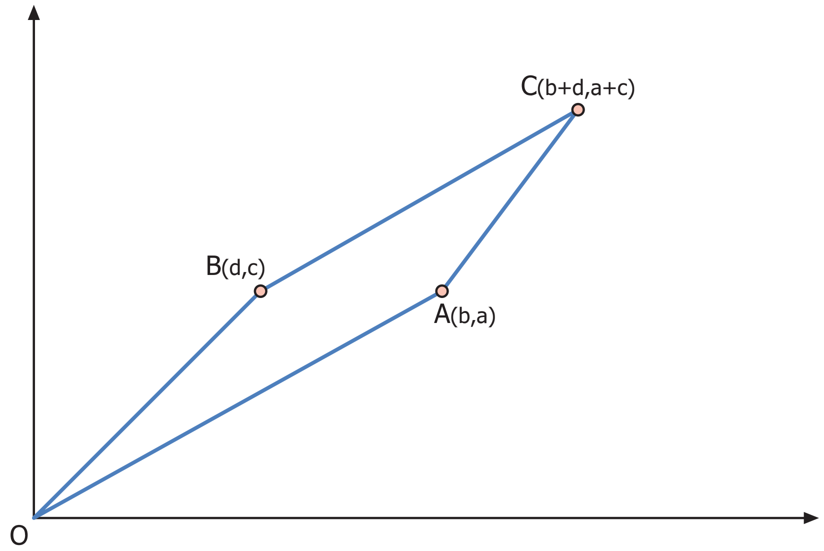


איור 4

הסיבה לייצוג $\frac{a}{b}$ על-ידי (b, a) ולא על-ידי (a, b) היא לצורך נוחיות חזותית: השיפוע של הישר מראשית הצירים O ל-(b, a) הוא בדיוק $\frac{a}{b}$, ומכאן ששברים המסודרים בסדר עולה מיוצגים על-ידי ישרים ששיפועיהם מסודרים בסדר עולה (איור 4). נשים לב לכך ששברים שקולים מיוצגים על-ידי נקודות על אותו ישר העובר דרך ראשית הצירים. אם נקודת הסריג P מייצגת שבר מצומצם, אז אין נקודות סריג בין O ל- P על הישר OP. נקודה P מסוג זה נכנה "ניתנת לראייה" (מראשית הצירים). מכיוון שכל השברים ב- F_n מצומצמים, כל הנקודות המתאימות להם "ניתנות לראייה".
נתחיל עם שתי תוצאות פשוטות:

I. **אם $\frac{a}{b}$ ו- $\frac{c}{d}$ הם שני איברים סמוכים ב- F_n, אזי $b + d > n$.**

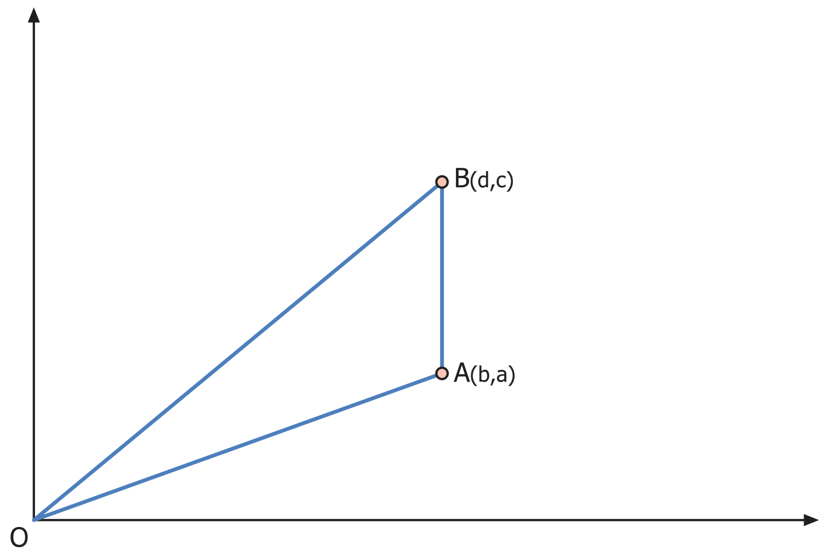
באמצעות שימוש בסריג לייצוג שברים, ברור מאליו, מתוך איור 5, כי $\frac{a+c}{b+d}$ (שהוא הקודקוד הרביעי (C) של המקבילית המוגדרת על-ידי OA ו- OB), נמצא בין $\frac{a}{b}$ ו- $\frac{c}{d}$. מכאן שאם $b + d \leq n$, יהיה קיים ב-F_n שבר הנמצא בין השניים, וזה סותר את ההנחה שהם סמוכים.



איור 5

II. אם $n > 1$ וגם $\frac{a}{b}$ ו- $\frac{c}{d}$ שברים סמוכים ב-F_n, אזי $b \neq d$.

נניח בדרך השלילה כי $b = d$. מכיוון שהשברים סמוכים ב- F_n, לא ייתכנו שום נקודות סריג בתוך המשולש OAB או על צלעותיו (איור 6). כלומר, משולש OAB הוא יסודי ושטחו $\frac{1}{2}$. אבל מכיוון שאין נקודות סריג בין A ו- B, $AB = 1$, לכן הגובה מ- O ל- AB חייב אף הוא להיות 1, ולכן $b = d$ אפשרי רק עבור המקרה הטריוויאלי $n = 1$.

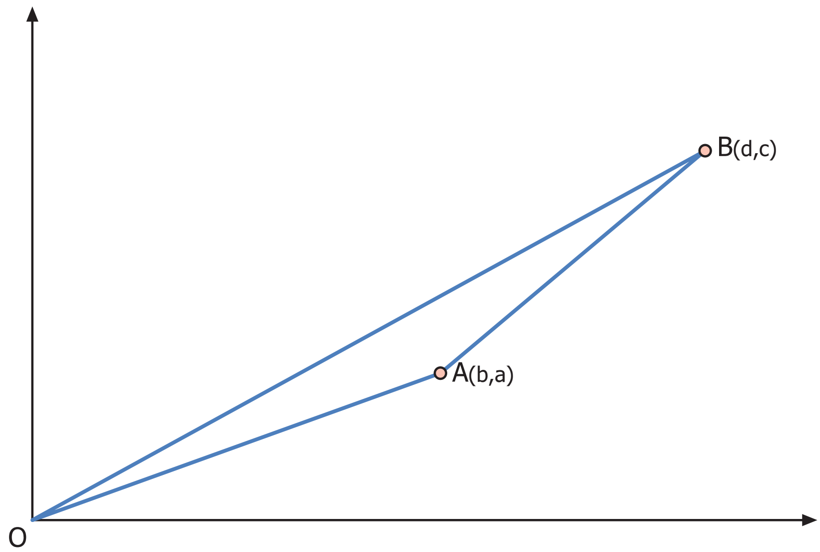


איור 6

ונמשיך עם תכונות נוספות.

III. אם $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ הם שני שברים סמוכים ב-F_n, אזי $bc - ad = 1$

כמו לעיל, המשולש OAB הוא יסודי (איור 7) ומכאן ששטחו הוא $\frac{1}{2}$. התוצאה מתקבלת בעזרת נוסחת השטח.



איור 7

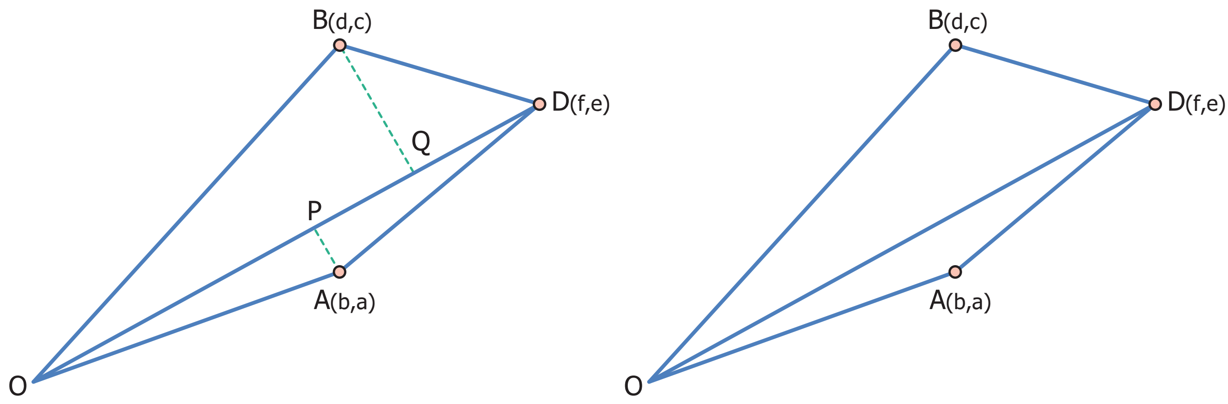
התכונה הבסיסית השנייה של F_n היא:

IV. אם $\frac{c}{d} < \frac{e}{f} < \frac{a}{b}$ הם שלושה שברים סמוכים ב-F_n, אז $\frac{a+c}{b+d} = \frac{e}{f}$.

למרות שאפשר להסיק תכונה זו מהתכונה הראשונה, אשר הוכחה כבר בשנת 1816 על-ידי המתמטיקאי קושי (Cauchy), מעניין שאנו יכולים להשתמש בגישה של פיק להוכיח תכונה זו באופן ישיר, ואפילו בלי נוסחת שטח המשולש. במקום זאת, אנו משתמשים במעט גיאומטריה אויקלידית בסיסית. וזוהי תרומתנו המקורית לנושא.

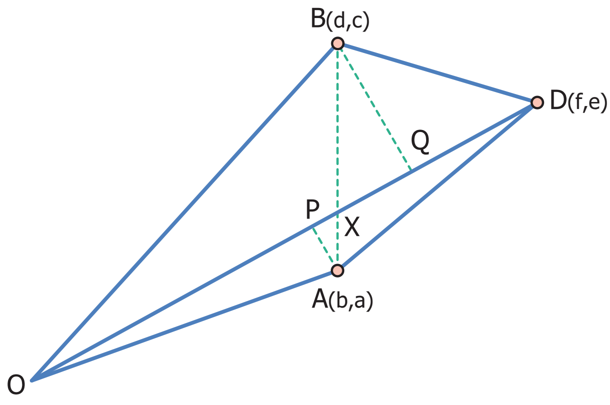
הרעיון להוכחה נרמז בעצם הייצוג של $\frac{a+c}{b+d}$ במונחים של $\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}$, ייצוג שהוא לגמרי טבעי בסריג, כפי שכבר ראינו באיור 5. עלינו להוכיח (איור 8) כי D(f, e) נמצאת על האלכסון של המקבילית המוגדרת על-ידי O, A ו- B. יש לשים לב כי (f, e) אינה חייבת להתלכד עם (b+d, a+c). מכיוון שהשבר $\frac{a+c}{b+d}$ עלול להיות לא מצומצם (ראו את המשפט הבא). למשל, ב- F_6, $\frac{1}{6} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$, ואכן $\frac{1}{5} = \frac{1+1}{6+4}$ אבל $\frac{2}{10}$ אינו מצומצם.

מכיוון שהשברים סמוכים ב- F_n. אנו יודעים כי השטח של כל אחד משני המשולשים OAD ו- OBD (איור 8) חייב להיות שווה ל- $\frac{1}{2}$. לכן הגבהים לבסיס המשותף OD חייבים להיות שווים באורכם. כלומר BQ = AP.



איור 8

אם מסרטטים את הישר AB החותך את OD ב- X, כמו באיור 9, מתקבלים המשולשים QBX ו- PAX. לשני המשולשים זוויות שוות ולכן הם דומים, אך גם הראינו כי BQ = AP, לכן נובע שהם גם חופפים.



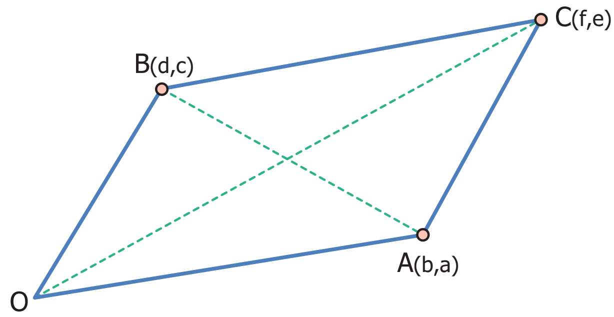
איור 9

מכאן נובע כי BX = AX, אך, AB הוא אלכסון במקבילית המוגדרת על-ידי O, A ו- B, והאלכסונים במקבילית חוצים זה את זה, מכאן ש- OXD מתלכד עם האלכסון האחר. כלומר D(f,e) נמצא על הישר המחבר את ראשית הצירים לנקודה (b+d, a +c).

תוצאה נוספת שהוכחה על-ידי פיק באמצעות גיאומטריה אוקלידית טהורה, מבטאת תנאי מספיק לכך ש- $\frac{a+c}{b+d}$ מצומצם.

V. **אם $\frac{a}{b}$ ו- $\frac{c}{d}$ סמוכים ב-F_{n-1} ומופרדים על-ידי $\frac{e}{f}$ ב-F_n, אז $e = a + c$ ו- $f = b + d$.**

מכיוון ש- $\frac{a}{b}$, ו- $\frac{c}{d}$ סמוכים ב- F_{n-1}, המשולש OAB (איור 10), הוא יסודי ושטחו $\frac{1}{2}$. באופן דומה, מכיוון ש- $\frac{a}{b}$ ו-$\frac{e}{f}$ סמוכים ב-F_n, שטחו של המשולש OAC גם הוא $\frac{1}{2}$. אף שטחו של המשולש OBC הוא $\frac{1}{2}$.
לכן המשולשים OBC ו- OAB הם שווי-שטח ובסיסם משותף (OB), כלומר הגבהים מ-A ו-C ל-OB הם שווים.
זה גורר ש-AC מקביל ל-OB. באופן דומה, BC מקביל ל-OA, ומכאן OABC היא מקבילית. על כן C אינה רק (f, e) אלא אף (b + d, a + c).



איור 10

אנו טוענים שההוכחות הגיאומטריות, שהובאו כאן, הן יותר אלגנטיות מההוכחות האלגבריות הרגילות (המשתמשות לעיתים קרובות באינדוקציה).

בשלות מתמטית מתבטאת לאו דווקא בידע, היא יכולה להתבטא גם בדרך בה נוצרים קשרים חדשים סביב נושאים ידועים. קשרים כאלה קורים, פעמים רבות, כאשר משלבים שיטות מתחומים שונים במתמטיקה (כמו במקרה זה אלגברה, הנדסה אוקלידית, הנדסה אנליטית ותורת המספרים). כתוצאה מכך, מפתיע להיווכח איזו מתמטיקה מעניינת ניתן לפתח ולחקור עם כלים בסיסיים ביותר.

רשימת מקורות

בנימין וייס, 1991 "ריבוע העיגול", על"ה 9, עמ' 4-9.

Beck A., Bleicher M.N. and Crowe D.W. (1976). *Excursions into Mathematics*, 4th reprint of the 1969 edition. New York: Worth.

Blatter, C. (1997). Another proof of Pick's area theorem. *Mathematics Magazine*, 70, 200.

Bruckheimer M. and Arcavi A. (1995). Farey series and Pick's area theorem, *The Mathematical Intelligencer*, 17, 64-67.

Coxeter H.S.M. (1969). *Introduction to Geometry*, 2nd edition, New York: Wiley.

DeTemple D. and Robertson J.M. (1974). The equivalence of Euler's and Pick's theorems, *Mathematics Teacher* 67, 222-226.

Grünbaum, B. and Shephard, G.C. (1993). Pick's theorem, *American Mathematics Monthly*, 100, 150-160.

Hardy G.H. and Wright E.M. (1945). *An Introduction to the Theory of Numbers*, 2nd edition, Clarendon Press.

Liu A.C.F. (1979). Lattice points and Pick's theorem, *Mathematics Magazine* 52, 232-235.

Pick G. (1899). Geometrisches zur Zahlenlehre, *Zeitschrift des Vereines 'Lotos'* 19, 311-319.

נספח: הוכחת משפט פיק

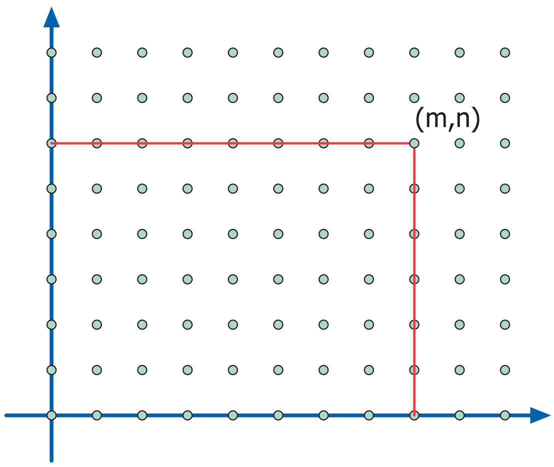
משפט פיק הוכח בדרכים שונות (ראו, למשל, Grünbaum and Shephard, 1993). בנספח זה נביא אחת ההוכחות. ההוכחה אינה מסובכת, אך דורשת מספר שלבים. לפני שנביא את ההוכחה נתייחס להוכחה מעניינת שהוצעה על ידי בלאטר (Blatter, 1997). ההוכחה מבוססת על מודל פיזיקלי בהולכת חום. בעקבותיה נציע הסתכלות לא פורמלית ל"הצדקת" הנוסחה עבור מצולע קמור שקודקודיו נקודות סריג. נתייחס לכל נקודת סריג פנימית למצולע כ"תורמת" יחידת שטח שנמצאת סביבה; כל נקודת סריג על הצלעות "תורמת" $\frac{1}{2}$ יחידת שטח (רק את החלק בצד שבפנים). אם נשאיר זאת כך, כלומר $I + \frac{1}{2}B$, אנו מייחסים לתרומת הקודקודים אותה תרומת שטח כמו כל נקודה אחרת על הצלעות $(\frac{1}{2})$. אך, רואים כי כל קודקוד תורם פחות מחצי. על מנת לקזז את העודף שייחסנו לכל קודקוד, נוריד אותו - מה נוריד? ובכן, יחידת שטח 1: אם נסתכל על הזוויות החיצוניות של המצולע, הן ביחד "תורמות" סיבוב שלם סביב נקודה, כלומר יחידת שטח אחת. ולכן הנוסחה היא: $I + \frac{1}{2}B - 1$.

הוכחת משפט פיק

נוכיח את משפט פיק בשני שלבים. בשלב הראשון מוכיחים אותו בעבור מלבן כלשהו ומשולש כלשהו, ובשלב השני בעבור מצולע כלשהו.

שלב ראשון - מלבן כלשהו

תחילה "נמקם" את המלבן שבסריג במערכת צירים קרטזית. בלי הגבלת הכלליות הצמדנו אותו לצירים (איור 11).



איור 11

לפי משפט פיק השטח הוא $A = \frac{1}{2}B + I - 1$

B הוא מספר נקודות הסריג על הצלעות, במקרה זה: $2(m+1) + 2(n-1)$

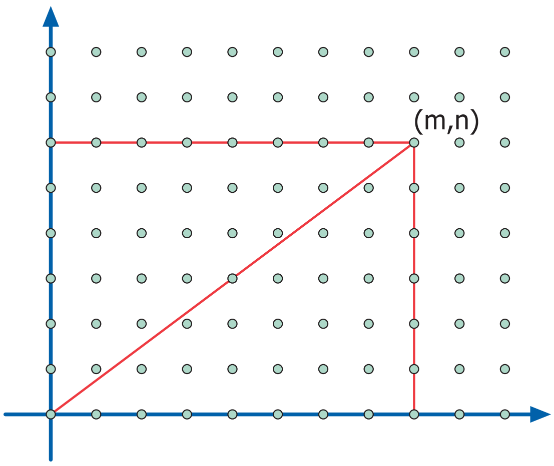
I הוא מספר נקודות הסריג בתוך המלבן, במקרה זה: $(m-1)(n-1)$

לכן, לפי משפט פיק השטח צריך להיות

$$A = \frac{1}{2}\left[2(m+1) + 2(n-1)\right] + (m-1)(n-1) - 1$$
$$= m + n + mn - m - n + 1 - 1$$
$$= mn$$

כלומר, נוסחת פיק אכן נותנת שטח של מלבן כלשהו.

ומה אם נחצה את המלבן לשני חלקים על ידי שרטוט אלכסון (איור 12)?



איור 12

לפי משפט פיק שטח המלבן: $A = m + n + I - 1$

אך I, מספר נקודות הסריג שבתוך המלבן הוא: $I = 2I_1 + S$

I_1 מספר הנקודות בתוך כל אחד משני המשולשים הזהים ו- S מספר הנקודות על האלכסון (ללא הקדקדים).

לכן: $$A = m + n + 2I_1 + S - 1 \qquad (1)$$

אם נפעיל את נוסחת פיק לאחד המשולשים נקבל:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}(m+n+S+1) + I_1 - 1$$
$$= \frac{1}{2}(m+n+S) + I_1 - \frac{1}{2}$$

אך זה בדיוק השטח של חצי המלבן המבוטא ב- (1)

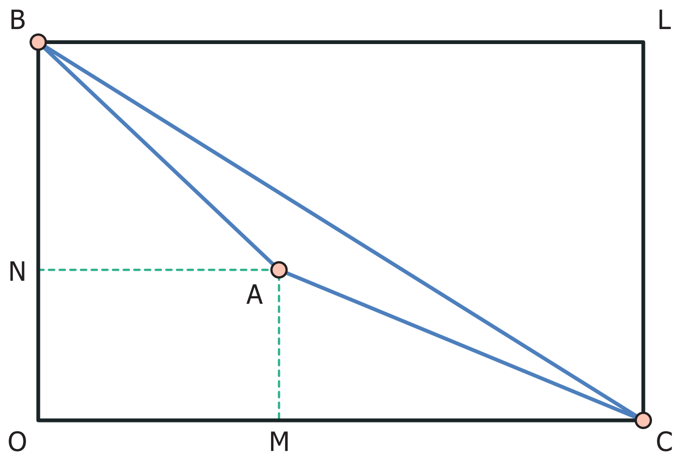
$$A_\Delta = \frac{1}{2}A$$

ולכן, נוסחת פיק נכונה עבור כל משולש ישר זווית.

ומה לגבי משולש כלשהו בסריג?

בעצם צריך להוכיח רק שעבור משולש יסודי שאין בו נקודות סריג בפנים, או על צלעותיו פרט לקודקודים, שטחו הוא $\frac{1}{2}$ ומכיוון שכל משולש ניתן לחלקו למשולשים יסודיים, ההוכחה תושלם.

באיור 13 המשולש ABC הוא יסודי, "נמקם" אותו בתוך המלבן ה"סריגי" הקטן ביותר. כל אחד מצלעותיו (BO -ו OC, CL, BL) עוברת דרך קודקוד אחד של המשולש.



איור 13

אחת מצלעות המשולש חייבת להיות אלכסון במלבן. "נמקם" מלבן זה בתוך סריג קרטזי שבו:
O(0, 0) , B(0, s) , L(q, s) , C(q, 0) , M(p, 0) , N(0, r) , A(p, r)

נבטא את השטר (S) של המשולש היסודי ABC באופן הבא:

$$S(ABC) = S(OBC) - S(AMC) - S(BNA) - S(OMAN)$$

$$= \frac{1}{2}qs - \frac{(q-p)r}{2} - \frac{(s-r)p}{2} - pr$$

$$= \frac{qs - ps - qr}{2}$$

עלינו להראות כי $qs - ps - qr = 1$. נעשה זאת על-ידי חישוב נקודות הסריג הפנימיות במשולשים ובמלבן.

מספר נקודות הסריג הפנימיות של המלבן OBLC הוא $(q-1)(S-1)$.

במשולש OBC יש $\frac{(q-1)(s-1)}{2}$ נקודות סריג פנימיות (כי אין נקודות סריג על האלכסון).

מספר נקודות הסריג הפנימיות במשולש AMC הוא: $\frac{(q-p-1)(r-1)}{2}$

מספר נקודות הסריג הפנימיות במשולש BNA הוא: $\frac{(p-1)(s-r-1)}{2}$

כיוון שהמשולש ABC יסודי אין בו נקודות פנימיות (I) ולכן מתקיים השוויון:

$$I(OBC) - I(AMC) - I(BNA) = pr$$

כאשר pr הוא מספר נקודות הסריג בתוך המלבן OMAN ועל הצלעות AN, AM.
פישוט משוואה זו אכן נותן $qs - ps - qr = 1$.

שלב שני - מצולע כלשהו

נוכל לפרק כל מצולע בסריג למשולשים יסודיים. אם קיימים F משולשים יסודיים כאלה, אזי שטח המצולע יהיה $\frac{1}{2}F$ (שטח כל משולש יסודי הוא $\frac{1}{2}$).

כאמור, כאן יש תוצאה מעניינת בפני עצמה, כי בכל דרך שנפצל את המצולע למשולשים יסודיים, תמיד נקבל F כאלה. מכאן, ניתן להמשיך ולהשלים את ההוכחה בדרכים שונות. נציע את היפה ביותר לדעתנו.
נסתכל על סכום הזוויות של כל F המשולשים היסודיים, והוא 180F מעלות. ננסה למצוא סכום זה בדרך אחרת, עלינו להוכיח כי אנו מחפשים את הסכום של כל הזויות שנוצרות ב"תוך" המצולע. נניח כי יש במצולע B נקודות על הצלעות, נוכל להתייחס אליו כאל מצולע בעל B צלעות, כאשר בין חלק מצלעותיו הזווית היא בת 180 מעלות. סכום הזוויות הפנימיות של מצולע כזה הוא $180(B-2)$. נניח כי יש I נקודות סריג בתוך המצולע, סביב כל אחת מאלה יש זוית של 360 מעלות ולכן הסכום הכולל של הזויות הוא

$$180(B-2) + 360I$$

וזה חייב להיות אותו סכום שמצאנו בדרך אחרת.
לכן $180(B-2) + 360I = 180F$

מכאן $F = B - 2 + 2I$

אך השטח של המצולע הוא $\boxed{\frac{1}{2}F = \frac{1}{2}B + I - 1}$

והוכחנו את משפט פיק לכל מצולע.