העשרה מתמטית

π והיקף המעגל

תקציר

היחס הקבוע בין היקף המעגל לקוטרו עורר סקרנות בעולם העתיק. π היא האות הראשונה של המילה היקף ביוונית (פריפריה, אך יש אומרים פרימטרון), ומכאן הסימון ליחס הקבוע. המאמר עוסק במספר π - באפיונו ובנסיונות שנעשו לחשב את ערכו במהלך ההיסטוריה, בבבל, בסין וביוון. נוסף לכך מוצגות ההתייחסויות של מקורות יהודיים למספר, בתנ״ך ובכתבי הרמב״ם. ניתן להתאים את החומר לתלמידים, החל מסוף כיתה ח׳, שלמדו על מספרים אירציונליים ומשפט פיתגורס.

המספר π

יחס בין היקף ורוחב

נעמיד את הריבוע על קדקדו, ונבחר בתור ״רוחב״ את האלכסון (ציור 1), שהוא המרחק הגדול ביותר בין שתי נקודות על ההיקף. מה יהיה היחס בין היקף ל״רוחב״?

לפי משפט פיתגורס:

$$2a^2 = k^2$$

$$a^2 = \frac{k^2}{2}$$

$$a = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

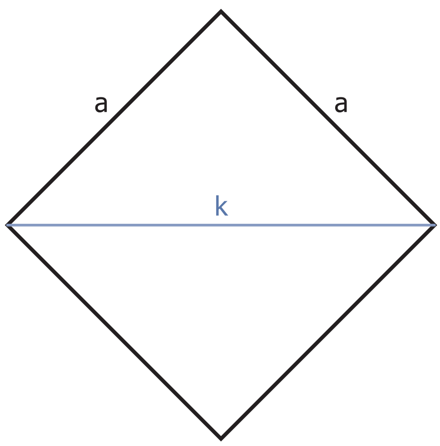
לכן ההיקף הוא:

$$4a = 4 \cdot \left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} \cdot k$$

והיחס בין ההיקף לרוחב הוא:

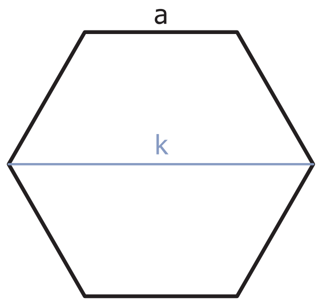
$$\frac{4a}{k} = \frac{(2\sqrt{2} \cdot k)}{k} = 2\sqrt{2} \approx 2.82$$

כלומר, היחס קבוע ללא תלות באורך ה״רוחב״.



ציור 1

נבחר דוגמה נוספת, המשושה המשוכלל (המשושים והחישוב לעיל חשובים להמשך הפעילות).
נגדיר את הרוחב כאורך האלכסון הארוך במשושה (ציור 2).

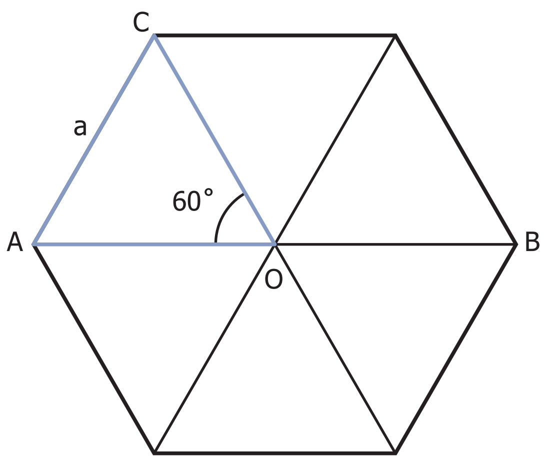


ציור 2

נחשב את היחס בין ההיקף לאלכסון הארוך במשושה. נוכיח כי אם אורך צלעו של משושה הוא a אזי אורך האלכסון הוא 2a.

בציור 3 חילקנו את המשושה לשישה משולשים שווי שוקיים, חופפים. כיוון שסכום הזוויות במרכז הוא 360°, $\sphericalangle AOC = 60^\circ$. כיוון שמשולש AOC הוא שווה שוקיים $\sphericalangle C = \sphericalangle A$.

לכן, כל אחת מזוויות אלו שווה גם היא 60°. מכאן שהמשולש AOC הוא שווה צלעות. אם כך $OA = a$, $AB = 2a$. לכן, היחס בין ההיקף לאלכסון הוא $3 = \frac{6a}{2a}$. יחס זה גדול מהיחס בין היקף ו"רוחב" בריבוע.



ציור 3

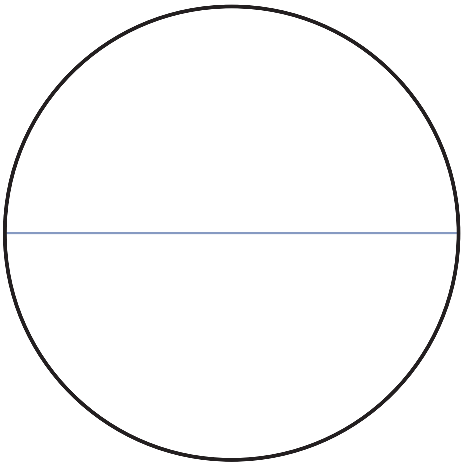
הגדרת π

מכאן ואילך נתרכז במעגל, כל המעגלים דומים!

במעגל יש רק רוחב "טבעי" אחד והוא הקוטר (ציור 4). העובדה שבמעגל היחס בין ההיקף לקוטר הוא קבוע היתה "ידועה" כבר בימי קדם, אבל מהות המספר שמבטא יחס זה (אי-רציונליות) התבררה רק אחר כך. היחס הקבוע בין היקף המעגל לקוטרו, מסומן באות π. נהוג לסמן את היקף המעגל באות (circumference) c, ואת הקוטר בעזרת הרדיוס - 2r. בסימונים אלו אנו מקבלים את השויון:

$$\pi = \frac{c}{2r}$$

או את השויון $c = 2\pi r$



ציור 4

המתמטיקאי האנגלי ויליאם ג'ונס (W. Jones ,1675-1749), היה, כפי הנראה, הראשון שהשתמש באות π כקיצור למילה היונית (perimetron - פרימטרון), לסימון היחס הקבוע בין היקף המעגל לקוטרו.

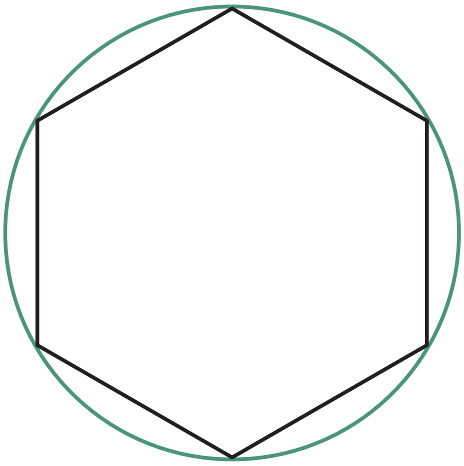
אנו יכולים לקרוא במשנה, מסכת עירובין, פרק א', משנה ה':

"כל שיש בהקיפו שלושה טפחים, יש בו רוחב טפח."

למרות שהמשנה קובעת לכאורה את היחס כ- 3, (ערך שהופיע גם בתנ"ך כפי שנראה להלן), היה ידוע כבר לפני תקופת המשנה שהיחס הוא רק "בערך" 3. על מהות ה"בערך" הזה שקדו מתמטיקאים כ- 2000 שנה. נתאר במאמר נסיונות לחישוב ערכו של π בבבל, בסין העתיקה על-ידי לי-הוי וביוון על ידי ארכימדס. ארכימדס קדם כרונולוגית לעמיתו הסיני, אבל נציג את שיטתו אחרי השיטה של לי-הוי משום שהיא משוכללת יותר מבחינה מתמטית. בהמשך נביא התייחסות לערכו של π במקורות יהודיים.

בבל העתיקה

בבבל העתיקה כתבו בחרט על לוחות חימר. שברי לוחות רבים נשתמרו עד ימינו, ובהם לוחות העוסקים בנושאים מתמטיים. באחד מלוחות אלו, שנכתבו לפני כ- 4000 שנה, מופיע חישוב היחס בין היקף משושה משוכלל החסום במעגל, והיקף המעגל (ציור 5).



ציור 5

תוצאת החישוב בלוח היא מספר שבסימנים של ימינו נכתב $57/60 + 36/60^2$, או 0.96. (צורת הכתיב עם 60 ו- 60^2 במכנה, קשורה לכך שהבסיס שבו חישבו וספרו הבבלים היה בסיס 60.)

לא ידוע לנו בבטחון כיצד הגיעו הבבלים לתוצאה זו, אך מתוך התוצאה נוכל להסיק את הערך של π שבו הם השתמשו.

ראינו לעיל, שכאשר מחלקים משושה משוכלל לשישה משולשים, מקבלים משולשים חופפים, שווי-צלעות. כלומר, אורך צלע המשושה שווה לאורך הרדיוס של מעגל החוסם.

לכן, היחס בין היקף המשושה להיקף המעגל החוסם הוא $6r/c$. ומתוך השוויון $c = 2\pi r$ נקבל:

$$\frac{6r}{c} = \frac{6r}{2\pi r} = \frac{3}{\pi}$$

לפי הבבלים יחס זה הוא 0.96. כלומר, $\frac{3}{\pi} = 0.96$

מכאן אנו מקבלים $\pi = \frac{3}{0.96} = 3.125$

ואכן, הערך 3.125 (או $3\frac{1}{8}$) הוא הערך של π המופיע אצל הבבלים.

שימו לב, כמו בריבוע, היחס אינו תלוי באורך הצלע של המשושה.

חידה 1: בבלי עשיר רצה לבנות בריכה שקוטרה 50 מ׳ ולגדר אותה, כדי שילדים לא יפלו לתוכה. הוא חישב את אורך הגדר שיזדקק לה, והשתמש בערך של π שהיה ידוע לו (3.125). האם יצליח למנוע את הסכנה?

סין העתיקה

כפי שאמרנו, לא ידוע לנו איך חישבו הבבלים את ערך π, אך הסינים השאירו אחריהם חישובים של π. לפני כ- 2000 שנה חישבו בסין את היחס בין היקף מצולע חסום במעגל לקוטר, ובכך הגיעו ישירות לקירובים של π. המתמטיקאי הסיני לי-הוי (Li-Hui), שחי לפני כ- 1700 שנה, התחיל ממשושה משוכלל חסום במעגל, והכפיל בכל שלב את מספר הצלעות של המצולע, כדי להתקרב להיקף המעגל. כך הוא קיבל מצולעים בני 12, 24, 48 ו- 96 צלעות. את אורך צלעות המצולעים הוא חישב בעזרת "משפט פיתגורס", ואנו נלך בעקבותיו.

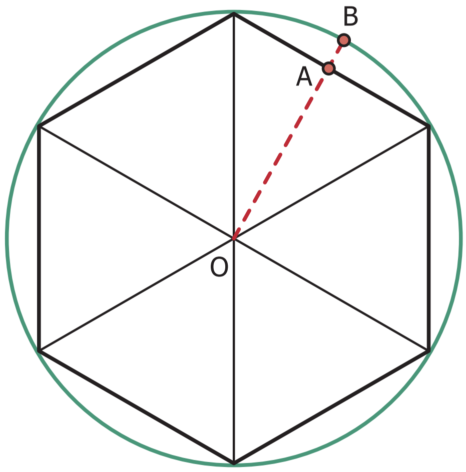
חישוב π על פי לי–הוי

ראינו כבר כי היחס אינו תלוי באורך הרדיוס ולכן נפשט ונעסוק במעגל שרדיוסו הוא 2 יחידות החוסם משושה משוכלל. ראינו גם שאורך צלע המשושה הוא גם כן 2 יחידות. לכן, היחס בין היקף המשושה לקוטר המעגל (שהוא האלכסון הגדול של המשושה) הוא $\frac{6 \cdot 2}{4} = 3$ וזהו הקירוב הראשון לערך של π.

בשלב הבא נבנה מצולע משוכלל בן 12 צלעות, על-ידי "הרמת" נקודת האמצע של כל צלע כך שהקדקוד החדש יונח על המעגל (ציור 6).

בצעד הראשון עלינו לחשב בכמה "הרמנו" את נקודת האמצע A (שהיא הופכת לקדקוד החדש B).

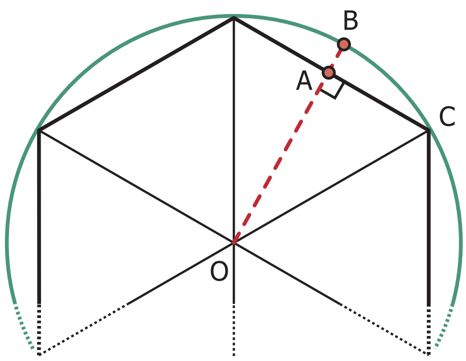
כלומר, עלינו לחשב את המרחק AB שהוא ההפרש $OB - OA = 2 - OA$.



ציור 6

נחשב בעזרת משפט פיתגורס את המרחק OA במשולש ישר הזווית OAC (ציור 7):

$$OA = \sqrt{OC^2 - CA^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

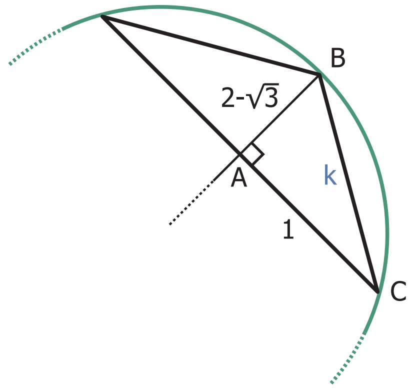


ציור 7

לכן המרחק AB, שיש "להרים" את נקודת האמצע, כך שתונח על המעגל הוא $2 - \sqrt{3}$.

עתה נחשב את אורך הצלע במצולע החדש
ובאמצעותו נמצא את הערך המקורב השני של π.
כפי שרואים בציור 8, אורך הצלע BC הוא:

$$k = \sqrt{1^2 + (2-\sqrt{3})^2} = ... = \sqrt{8-4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 1.035$$



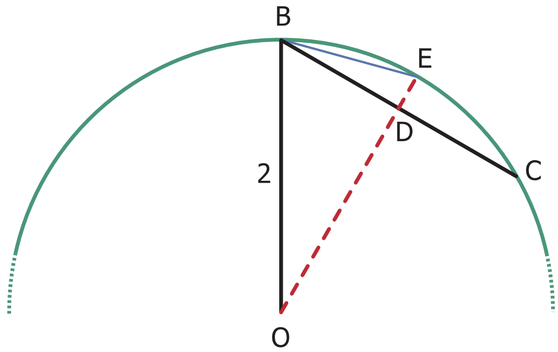
ציור 8

היקף המצולע הוא 12k, והקוטר הוא 4, לכן נקבל:

$$\frac{12k}{4} = 3k \approx 3.105$$

והוא קירוב שני ל- π.

נמשיך לחשב קירוב ל- π על-ידי מצולע משוכלל בן 24 צלעות. בציור 9 מופיע חלק מהמעגל החוסם את המצולע המשוכלל בעל 12 צלעות.



ציור 9

$OB = 2$; על סמך החישוב לעיל: $BC \approx 1.035$
נחשב בכמה יש "להרים" את D, אמצע הצלע BC, כדי ליצור קדקוד "חדש" E (כלומר נחשב את המרחק DE), ונמצא את אורך הצלע החדשה BE:

א. חישוב אורך DE

נתון: $BC \approx 1.035$ ולכן: $BD = \frac{1}{2}BC \approx 0.5175$

במשולש OBD:

$$OD = \sqrt{2^2 - (0.5175)^2} = 1.9319$$

$$DE = 2 - OD = 2 - 1.9319 = 0.0681$$

ב. חישוב אורך BE במשולש EBD

$$BE = \sqrt{(0.5175)^2 + (0.0681)^2} = 0.5220$$

ג. עתה נחשב את היחס בין היקף המצולע וקוטר המעגל החוסם
במצולע יש 24 צלעות ולכן היקפו הוא: $24 \cdot 0.522 = 12.528$

הקוטר הוא 4, לכן הקירוב השלישי ל- π הוא: $\frac{12.528}{4} = 3.132$

בצורה דומה המשיך לי-הוי ובנה מצולעים משוכללים בני 48 ו- 96 צלעות. הערכים המתקבלים מוצגים בטבלה.

מספר הצלעות	6	12	24	48	96
היחס: $\frac{\text{היקף}}{\text{קוטר}}$	3	3.105	3.133	3.139	3.141

הערה: ההבדל בין התוצאה שאליה הגיע לי-הוי (3.133) עבור 24 צלעות ותוצאת התירגול שלנו נובע ממידת הדיוק שלוקחים בחישובי הביניים.

לי-הוי סיכם את חישוביו וכתב שלצרכים מעשיים היחס בין ההיקף לקוטר הוא 3.14. הוא הוסיף וכתב שיחס זה, שאליו הגיע, קטן במקצת מהערך האמיתי של π.
ואמנם, המצולע חסום במעגל, ולכן היקפו תמיד קטן מההיקף האמיתי של המעגל. מכאן שהיחס המתקבל קטן מערכו של π.

יוון העתיקה – ארכימדס (Archimedes)

המתמטיקאי היווני ארכימדס (287-212 לפנה"ס, בערך) זכה לתואר "המתמטיקאי המקורי ביותר של העת העתיקה". גם הוא השתמש בטכניקת החישוב שתיארנו.

ארכימדס חי כ- 600 שנה לפני לי-הוי בעיר סירקוז (Syracuse) באי סיציליה. הוא היה ממציא פורה, ובין היתר המציא את "בורג ארכימדס", מתקן לשאיבת מים שפעולתו מוצגת בבול בציור 10.

(הערה: בגן המדע במכון ויצמן יש בורג כזה פעיל).

ציור 10

דגם הבורג מופיע על בול איטלקי (ציור 10) משנת 1983. בורג העלאת מים, הנראה בבול בחתך רוחב, מיוחס לארכימדס. הבורג, ששימש בעיקר לצרכי השקאה, הותקן מקורת עץ מעוגלת, שמסביבה חוברו פיסות עץ בצורת לולייניות. המערכת כולה היתה נתונה בתוך גליל. היא הוצבה במים באלכסון והונעה באמצעות הרגל. המים טיפסו לאורך הבורג ונשפכו בקצהו העליון.

גם בימינו משתמשים ברעיון של ארכימדס בתחומים שונים: ייצור יין, מערכות ביוב וניתוחי מעקפים של הלב. בניתוחי לב "בורג ארכימדס" מותקן במשאבה המזרימה באופן אחיד דם לגוף, בזמן שמפסיקים את פעולת הלב לצורך הניתוח.

סיפורים רבים מסופרים על ארכימדס. למשל, איך בעת המלחמה ברומאים בנה מתקני מלחמה משוכללים ביותר, כגון מערכת מראות קעורות שריכזו את קרני השמש והציתו את אניות הרומאים. ארכימדס תרם רבות לפיתוח המתמטיקה, ובין השאר נראה שהיה הראשון לנסח נוסחאות לקביעת נפחים של כדור, גליל וחרוט.

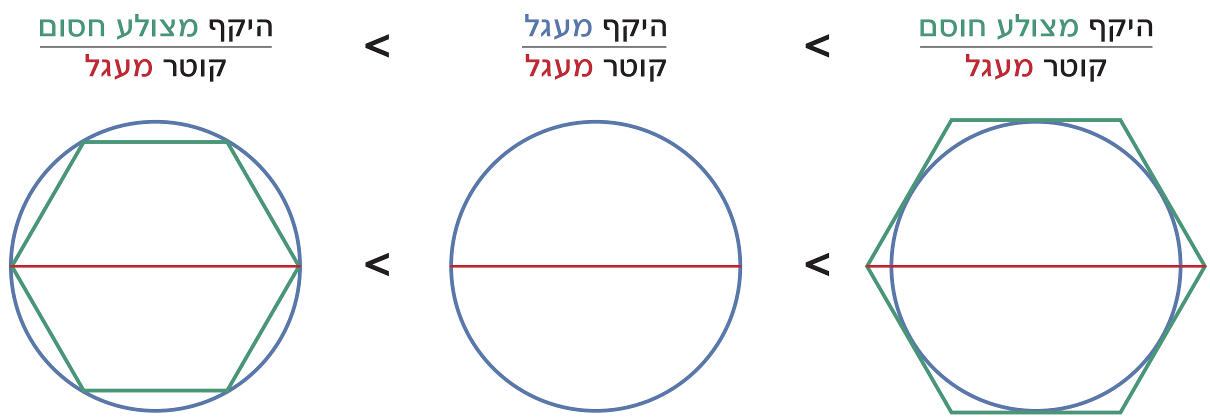
שיטת ארכימדס לחישוב π

בשיטתו של לי-הוי אנו יודעים שהערך שקיבלנו קטן מהערך של π, אך איננו יודעים בכמה. ארכימדס עשה שימוש לא רק במצולעים חסומים במעגל, אלא גם במצולעים חוסמים. הוא חסם מצולע במעגל, וחסם את המעגל במצולע משוכלל בעל אותו מספר צלעות. לאחר מכן, הכפיל בכל שלב את מספר צלעות המצולע, ובכך התקרב להיקף המעגל גם מבפנים וגם מבחוץ. בדרך זו אנו "כולאים" את π בין שני ערכים, אחד גדול ממנו ואחד קטן ממנו, ומתקרבים ל- π כל הזמן משני הכיוונים. הדרך מאפשרת, תיאורטית, לחשב את ערך π בכל מידת דיוק שנרצה.

גם ארכימדס ביצע זאת עם מצולעים בני 6, 12 ,24, 48 ו- 96 צלעות. אנו נדגים את הדרך עם משושה משוכלל.

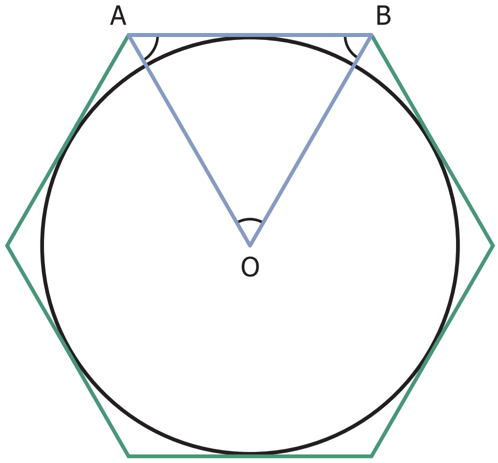
מתוך הדיון על שיטת לי-הוי אנו כבר יודעים שכאשר חוסמים משושה משוכלל במעגל הקירוב שנקבל לערך π הוא 3. כעת נחסום מעגל שרדיוסו 2 יחידות, שוב כדי להקל על החישובים, במשושה משוכלל (ציור 11).

בציור רואים כי מתקיימים אי-השוויונים הבאים:



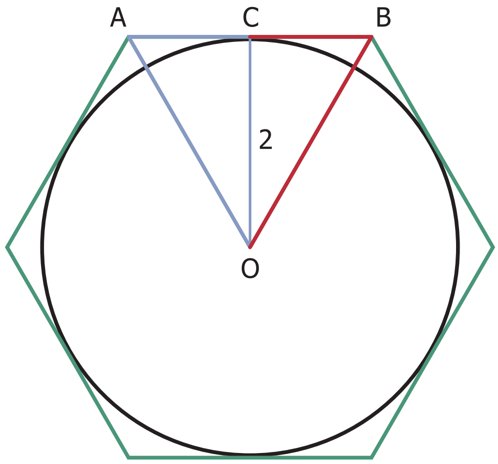
ציור 11

הערה: החישובים שלנו שונים מאלו של ארכימדס, אשר עשה שימוש בטריגונומטריה.
נתבונן במשולש OAB (ציור 12).
$\sphericalangle O = 60^\circ$, $AO = BO$, $\sphericalangle B = \sphericalangle A = 60^\circ$.
מכאן שהמשולש AOB שווה צלעות ו- $AB = OB$.



ציור 12

כעת, נסתכל על המשולש ישר הזווית OCB (ציור 13).
כיון שמשולש AOB הוא שווה צלעות, מתקבל שאורך
הצלע CB הוא מחצית הצלע OB.



ציור 13

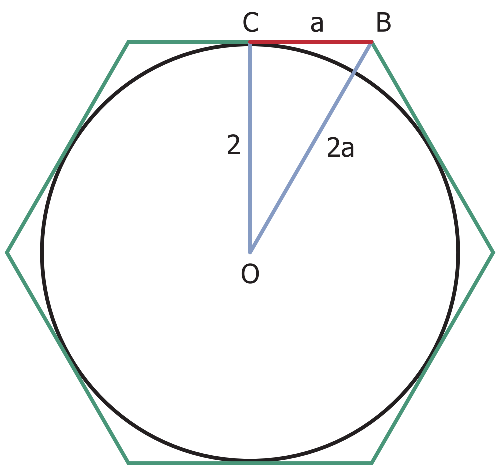
נמצא מה אורך הצלע CB (ציור 14)
נסמן את אורך הצלע CB באות a ואז $OB = 2a$.
בעזרת משפט פיתגורס נוכל למצוא מהו a.

$$2^2 + a^2 = (2a)^2$$

או: $$4 + a^2 = 4a^2$$

לכן: $$4 = 3a^2$$

מכאן $$\frac{2}{\sqrt{3}} = a$$



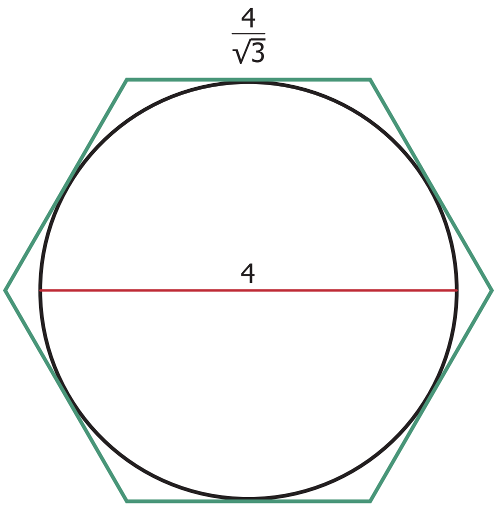
ציור 14

עתה נחשב את הערך המקורב של π שמתקבל בעזרת המשושה החוסם (ציור 15)

אורך צלע המשושה הוא 2a, כלומר $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

היחס בין היקף המשושה החוסם לקוטר המעגל הוא: $\frac{6 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)}{4} = \frac{6}{\sqrt{3}} \approx 3.46$

כך, בעזרת משושה חוסם וחסום מקבלים $3 < \pi < 3.46$



ציור 15

בדרך דומה הגיע ארכימדס, בעזרת מצולע בן 96 צלעות להערכה הבאה של π.

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

שימו לב, ארכימדס חסם את π על-ידי שברים פשוטים בלבד, כי לא עמדו לרשותו שברים עשרוניים.
בכתיב עשרוני שלנו הערכתנו היא $3.1408 < \pi < 3.1429$.
הישגו של ארכימדס מרשים ביותר, בייחוד אם נזכור שלא עמדו לרשותו כלי החישוב של ימינו, וגם שיטת הסימון המתמטי בזמנו היתה מסורבלת ביותר.
בטכניקה שפיתח ארכימדס השתמשו רבים אחריו. אחד החישובים המדהימים בוצע ע"י המתמטיקאי הצרפתי ויאטה (Viéte 1540-1603), שהשתמש במצולע בן 393,216 צלעות והצליח לחשב את ערך π בדיוק של 10 ספרות.
שימו לב ש $393{,}216 = 6 \cdot 2^{16}$. כלומר, ויאטה ביצע 16 שלבים בשיטת ארכימדס.

חידה 2: ארכימדס בנה בריכה עגולה בקוטר 50 מטר. הוא ביקש מעוזרו להזמין גדר מסביב לבריכה. בחישוב שעשה העוזר, לשם מציאת אורך הגדר, הוא השתמש בגבול התחתון $\left(3\frac{10}{71}\right)$ של π. האם יוכל ארכימדס להיכנס דרך הפרצה בגדר?

π במקורות יהודיים

π בתנ״ך

גם במקורות יהודיים אנו מוצאים התייחסות ל- π. בספר מלכים א׳ פרק ז׳ פסוק כ״ד, בתיאור בנין בית המקדש, אנו קוראים את הפסוק הבא:

״ויעש את הים מוצק, עשר באמה משפתו עד [אל] שפתו עגל סביב וחמש באמה קומתו, וקוה [וקו] שלשים באמה יסב אתו סביב.״

בפסוק זה מתוארת בריכת נחושת עגולה (הים) שגובהה חמש אמה, היקפה שלושים אמה וקוטרה עשר אמה. מכאן שהיחס בין ההיקף לקוטר כנראה נלקח כ- 3. שימו לב למילה ״קוה״ בפסוק זה. בספר דברי הימים ב׳, פרק ד׳, מופיע אותו פסוק בדיוק להוציא שני השינויים שמצויינים לעיל בין סוגריים, אחד מהם המילה ״קו״. ההבדל הזה הביא את הרב מתתיהו מונק זצ״ל למחשבה הבאה.

בגימטריה קוה = 111, ו- קו = 106. היחס בין המספרים הוא 1.0472 = 111/106. כאשר נכפול את היחס הזה ב- 3 (הערך ״המופיע״ בתנ״ך) נקבל 3.1416 = 1.0472 · 3.

כלומר, ערך מדויק של π עד ל- 4 ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

מסקנתו של הרב מונק היתה שמידת דיוק זו היתה ידועה כבר בתקופת התנ״ך, אבל השתמשו ב- 3 ל״עמי הארץ״, והדיוק הנ״ל רק נרמז.

π בכתבי הרמב״ם

עד עכשיו ראינו קירובים שונים של π. אף אחד מהם אינו הערך המדויק של π. לפי מיטב ידיעתנו, הרמב״ם, שחי במאה ה- 12, היה הראשון שכתב שאי אפשר לחשב את ערכו המדויק של π. אם כך, נרמז על כך ש- π מספר עשרוני אינסופי לא מחזורי, כלומר אירציונלי.

במשנה, במסכת עירובין, פרק א׳, משנה ה׳ כתוב: ״כל שיש בהיקפו שלשה טפחים, יש בו רוחב טפח.״ (כלומר, עיגול שהיקפו שלושה טפחים קוטרו טפח.) בפירושו לקטע זה מהמשנה כותב הרמב״ם:

> יש לך לדעת כי יחוס אלכסון העגולה אל המסבב אותה בלי ידוע ואי אפשר לדבר בו לעולם באמת וחסרון זה ההשגה אינה מאתנו במחשבת הכת הנקראת בהלי״ה אבל הוא בטבעי זה הדבר בלי ידוע ואין במציאותו שיושג אבל ידוע זה בקירוב וכבר חברו חכמי התשבורת לזה חבורים לידע יחוס האלכסון אל המסבב בקירוב ודרך המופת בזה הקירוב אשר עליו סומכין חכמי החכמות הלמודיות הוא יחוס הא׳ לשלשה ושביעית וכל עגולה שיהיה באלכסון שלה אמה יהיה בהיקפה שלש אמות ושביעית בקירוב ולפי שזה לא יושג לעולם אלא בקירוב לקחו הם בחשבון הגדול ואמרו כל שיש בהיקפו שלשה טפחים יש בו רחב טפח וסמכו על זה במה שהוצרכו אליו מן המדידה בתורה:

ובתרגום של השורות הראשונות מכתב רש״י לכתב ימינו:

״יש לך לדעת, כי יחוס אלכסון העגולה אל המסבב אותה בלי ידוע, ואי אפשר לדבר בו לעולם באמת. וחסרון זו ההשגה אינה מאתנו... אבל הוא בטבעי זה הדבר בלי ידוע, ואין במציאותו שיושג, אבל ידוע זה בקירוב...״

הרמב״ם מסביר כאן שאי-אפשר לבטא את היחס בין היקף המעגל לקוטרו בצורה מדויקת וסופית. אי-אפשרות זו אינה בגלל מוגבלות שלנו, אלא בגלל טבעו של היחס.

ממשיך הרמב"ם וכותב: (ראו במקור שורה רביעית ואילך)
"ודרך המופת בזה הקירוב, אשר עליו סומכין חכמי החכמות הלמודיות, הוא יחוס האחד לשלושה ושביעית וכל עגולה שיהיה באלכסון שלה אמה, יהיה בהיקפה שלש אמות ושביעית בקירוב. ולפי שזה לא יושג לעולם אלא בקירוב לקחו הם בחשבון הגדול ואמרו: כל שיש בהיקפו שלושה טפחים, יש בו רחב טפח..."

הרמב"ם מסביר שהקירוב שלקחו המתמטיקאים הוא $3\frac{1}{7}$, אך כיוון שגם זה רק קירוב, אמרו החכמים, שבהערכה רגילה אפשר לקחת גם יחס של 3.
האי הרציונליות של π, הוכחה רק לקראת סוף המאה ה- 18 על-ידי המתמטיקאים למברט (Lambert) ולז'נדר (Legendre).

סיכום

במאמר הכרנו את המספר π כיחס בין היקף המעגל וקוטרו. סקרנו מספר נסיונות שנעשו לחשב את ערכו. הראינו, שהעובדה שלא הגיעו לחישוב מדויק של ערך π, הביאה את הרמב"ם, וייתכן שהיה הראשון בכך, להעלות את ההשערה, שאי אפשר לחשב את ערכו המדויק של המספר. כיום, בעזרת שימוש במחשב אפשר לחשב את ערך π בכל מידת דיוק שנרצה. הקירובים במחשב מתבססים על כלים מתמטיים מתקדמים באנליזה ואלגברה. נכון לדצמבר 2002, המדען היפני Yasuma Kanada ואחרים, חישבו בעזרת מחשב באוניברסיטת טוקיו, את 1,241,100,000,000 ספרותיו הראשונות של π. הטבלה להלן לקוחה מהאתר http://www.cecm.sfu.ca/~jborwein/pi-slides.pdf) (נבדק במרץ 2006).

Modern π Calculations

Name	Year	Correct Digits
Miyoshi and Kanada	1981	2,000,036
Kanada-Yoshino-Tamura	1982	16,777,206
Gosper	1985	17,526,200
Bailey	Jan. 1986	29,360,111
Kanada and Tamura	Sep. 1986	33,554,414
Kanada and Tamura	Oct. 1986	67,108,839
Kanada et. al	Jan. 1987	134,217,700
Kanada and Tamura	Jan. 1988	201,326,551
Chudnovskys	May 1989	480,000,000
Kanada and Tamura	Jul. 1989	536,870,898
Kanada and Tamura	Nov. 1989	1,073,741,799
Chudnovskys	Aug. 1991	2,260,000,000
Chudnovskys	May 1994	4,044,000,000
Kanada and Takahashi	Oct. 1995	6,442,450,938
Kanada and Takahashi	Jul. 1997	51,539,600,000
Kanada and Takahashi	Sep. 1999	206,158,430,000
Kanada-Ushiro-Kuroda	Dec. 2002	1,241,100,000,000

למספר π תפקיד חשוב בתחומים שונים במתמטיקה (תיק π, 1996). למשל,

נוסחה של אוילר בתורת המספרים: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

אי-שויון של Viéte בטריגונומטריה: $n \cdot \sin(\frac{\pi}{n}) < n \cdot \tan(\frac{\pi}{n})$

בניסיון לחישוב מקורב של האינטגרל $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ הגיע Wallis לנוסחה: $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \ldots$

רשימת מקורות

חומר רב על ההיסטוריה של π ניתן למצוא בספר

Beckmann, P. (1970). *A History of π*, The Golem Press, Boulder, Colorado, USA.

אינפורמציה נוספת על המתמטיקה בסין וביפן אפשר למצוא בספר

Mikami, Y. (1974). *The Development of Mathematics in China*, 2nd ed., Chelsea N.Y.

על ארכימדס ראו

Heath, T.L. (editor) (1953). *The works of Archimedes*. Dover, N.Y.

תיאור החישוב שנערך ע"י הרב מונק זצ"ל מופיע במאמר של שמעון בולג, "מדע ואמונה", בתוך הספר תורה ומדע בהוצאת אנשי מדע שומרי תורה, כרך ו', סיון תשמ"ד.

תיק π (1996), תיק למנחה - פרויקט "מנור", הוכן על-ידי ג'וזפין שמש במחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

תשובות לחידות

תשובה לחידה 1:

לבבלי יחסרו כ-83 ס"מ, ולכן איננו מונע את סכנת הטביעה מילדיו ואפילו מחמורו.

תשובה לחידה 2:

הפרצה בגדר תהיה בערך ברוחב 3.7 ס"מ. לכן, ארכימדס לא יוכל לעבור דרכה, ואף חתולו לא יצליח.