כיצד יוצרים בעיות

מאת: שמואל אביטל ושלמה ליבסקינד, המחלקה להכשרת מורים, הטכניון, חיפה

בבחינת המיון של הטכניון, משנת תשכ"ג, הופיעה הבעיה:

1. **הוכח כי לכל** n טבעי קיים:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$$

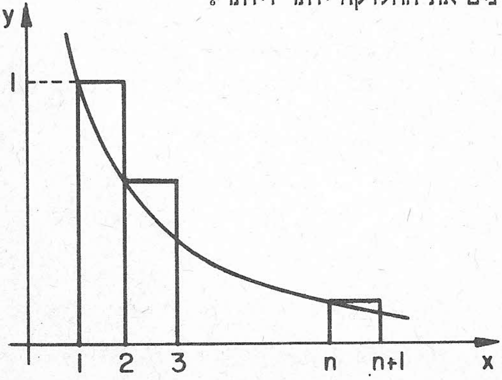
בבחינת הבגרות משנת תשכ"ו הופיעה הבעיה:

2. הוכח באמצעות אינדוקציה מתמטית כי הסכום $1+3^x+9^x$ מתחלק ב 13 בשביל כל x השווה לאחד מאיברי הסדרה $(3n-2)$, ... , 7 , 4 , 1 .

שתי הבעיות כשלעצמן אין בהן ענין מיוחד. ההוכחה של כל אחת מהן בעזרת משפט האינדוקציה המתמטית היא שגרתית למדי. אולם המתבונן בכל אחת מהן ישאל את עצמו, ובצדק, כיצד נוצרת בעיה כזאת. מה היה הגירוי המקורי שהעלה אותה במוחו של מכין הבעיה? בעלי לשון הרע יאמרו אולי: הוא מצא אותה בספר רוסי ישן, אבל השאלה במקומה עומדת; כיצד עלתה בעיה זאת בדעתו של המתמטיקאי שיצר אותה לראשונה?

כאשר שאלנו את עצמנו שאלה זאת חיפשנו נקודת אחיזה. כלומר, בדקנו את האסוציאציות שהביטויים המתמטיים המופיעים בשאלות מעוררים במוחנו. ברור, שבמקרה זה הידע הקודם של השואל קובע את התשובה.
אסוציאציות ממין זה אינן נוצרות בחלל ריק, אלא הן תלויות בהיסטוריה הקודמת של החושב, ולפיכך השאלה מקבלת צורה כאילו סובייקטיבית:
היכן נתקלים אנחנו בביטויים מסוג זה? כאן עלתה בדעתנו תשובה, אשר לא רק שהיא עונה לשאלות ששאלנו, אלא שהיא יכולה לשמש מקור לא אכזב ליצירת בעיות נוספות לשימוש בכיתה.
נטפל בנפרד בשתי השאלות ששמשו לנו נקודת מוצא.

היכן, פרט לפרק על סדרות, נתקלים אנו בשימוש בסכום של איברי סדרה?
ברור שזה קורה ביחידה על ההגדרה והשימוש של האינטגראל המסויים של פונקציה, כי הרי ניתן לראות את האינטגראל המסויים כגבול של סכומי מלבנים, כאשר מעדנים את החלוקה יותר ויותר.



ציור 1

מסתבר שאת הסכום $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$ אפשר לקבל מהתבוננות בגרף הפונקציה $f: x\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x>0$. נתבונן בגרף ובשטחי המלבנים אשר אורך בסיסם יחידה אחת והם בנויים על האורדינטות $f(1)=\frac{1}{\sqrt{1}}$, $f(2)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ וכו' (ראה ציור 1).

הפונקציה מונוטונית יורדת בכל תחום ההגדרה שלה, ולפיכך הסכום הנ"ל גדול מהשטח שמתחת לעקום בין $x = 1$ ו- $x = n + 1$.

כלומר: $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big]_{1}^{n+1} = 2(\sqrt{n+1}-1)$$

וזה בדיוק הנדרש בבעיה הנ"ל.

ברור עתה כי דרך זו יכולה להיות מקור למספר רב של בעיות שהתלמיד יוכל להוכיחן בעזרת אינדוקציה מתמטית. אם נסתכל למשל בפונקציה $g : x \to \frac{1}{x^{1/3}}$ נקבל

$$1 + \frac{1}{2^{1/3}} + \frac{1}{3^{1/3}} + \dots + \frac{1}{n^{1/3}} > \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x^{1/3}} = \frac{3}{2}x^{2/3}\Big]_{1}^{n+1} = \frac{3}{2}[(n+1)^{2/3}-1]$$

כלומר מתקבלת הבעיה: הוכח כי לכל n טבעי קיים:

$$\frac{1}{2^{1/3}} + \frac{1}{3^{1/3}} + \dots + \frac{1}{n^{1/3}} > \frac{3}{2}[(n+1)^{2/3}-1]$$

נוכל גם להכליל בעיה זו:

לכל $-1 < \alpha < 0$ הפונקציה $f : x \longrightarrow x^{\alpha}$ היא מונוטונית יורדת.

לכן נקבל על-פי השיטה הנ"ל $$\int_{0}^{n} x^{\alpha}dx > \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} > \int_{1}^{n+1} x^{\alpha}dx$$

ומכאן אפשר מייד לקבל שתי בעיות:

א) לבדוק האם ייתכן כי: $1 + 2^{\alpha} + 3^{\alpha} + \dots + n^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

ב) לבדוק האם ייתכן כי: $1 + 2^{\alpha} + 3^{\alpha} + \dots + n^{\alpha} > \frac{1}{\alpha+1}[(n+1)^{\alpha+1}-1]$

מה קורה כאשר $\alpha > 0$ או $\alpha \leq -1$?