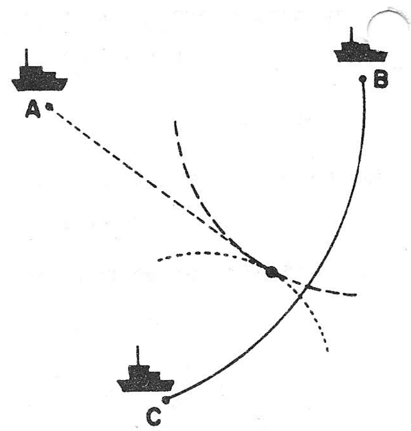
פגישת האוניות*

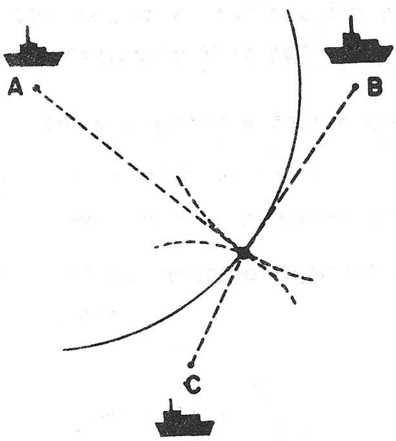
מעובד ע"י: אברהם הרכבי

"הילכו שניים יחדיו
בלתי אם נועדו"
(עמוס ג',ג')

שלוש אוניות עוגנות בנקודות A, B, C כל אחת במרחק 100 מייל זו מזו. האוניות מפליגות במהירויות של 100, 60 ו 40 קשר (מייל לשעה) בהתאמה.
היכן תהיה נקודת הפגישה המוקדמת ביותר של השלוש?



ציור 1



ציור 2

הקשתות (ציור 1) מראות את מיקומן האפשרי של שלוש האוניות כעבור שעת נסיעה. אין נקודה משותפת לשלוש הקשתות אבל מכיון שהאוניה המפליגה מ A נוסעת במהירות הגדולה ביותר היא תגיע לנקודת הפגישה של B ו C (על הקו BC: 40 מייל מ C ו 60 מייל מ B) קדם יותר ושם תמתין.

זה הזמן המינימלי לפגישה המשולשת, כי אם בוחרים כל נקודה אחרת, לפחות לאחת מהאוניות האיטיות דרושה יותר משעה להגיע אליה.

אם נשנה את מהירות האוניה המפליגה מ A ל 80 קשר, הבעיה משתנה: המהירות של האוניה המהירה היא, כעת, לא מספיק גדולה כדי לאפשר פגישה של שתי האוניות המפליגות מ B ומ C על הקו הישר המחבר את נקודת מוצאן. לכן נקודת הפגישה תהיה בתוך המשולש (ציור 2) ושלושתן יגיעו אליה באותו רגע. מרחקי נקודת המפגש מהנקודות A, B ו C נמצאים ביחס 40:60:80 בהתאמה. (מה הזמן המינימלי במקרה זה?).

---

*מאמר זה מבוסס על:

Walker R.: The captain's meeting, <u>The Mathematical Gazette</u>, Dec, 1978, Vol. 62, 422, pp. 263-267.

בשני המקרים קיימת נקודה יחידה שבה מתקיימת הפגישה המוקדמת ביותר.
כיצד נתייחס לשאלה במקרה שהאוניות אינן נמצאות בקודקודי משולש שווה צלעות?

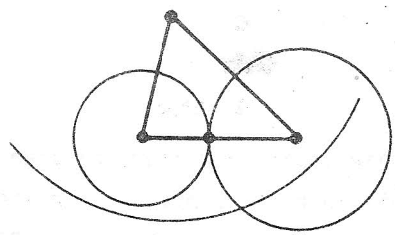
גם אם האוניות אינן נמצאות בקודקודי משולש שווה צלעות ומפליגות במהירויות שונות (אפילו לא קבועות) קיימת רק נקודה אחת אופטימאלית (הפגישה המוקדמת של השלוש). נקודה זאת נמצאת בתוך המשולש הנקבע על ידי נקודות המוצא של האוניות, או על אחת מצלעותיו.

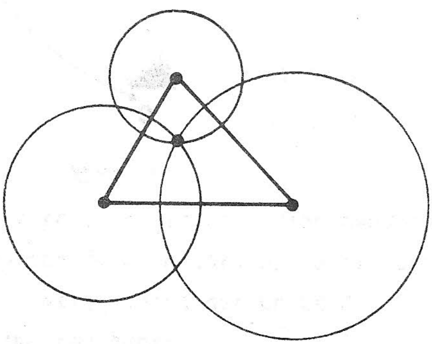
נסביר זאת: נסמן ב P את נקודת המוצא של אוניה כלשהי, ואת המרחק המכסימלי שהיא יכולה לעבור בזמן t ב d(t). אם כך מקומה של האוניה הוא בתוך העיגול או על המעגל שמרכזו ב P ורדיוסו d(t). במקרה שיש שלוש אוניות יש שלושה מעגלים כאלו. לפני התחלת ההפלגה רדיוסי המעגלים שווים לאפס והם הולכים וגדלים במשך זמן ההפלגה עד אשר ברגע מסוים T יש לשלושת העיגולים, בפעם הראשונה, נקודה משותפת.

קיימות שתי אפשרויות לפגישה בזמן מסוים T:

א. שני מעגלים משיקים בנקודה הנמצאת בתוך העיגול השלישי. במקרה זה נקודת הפגישה נמצאת על הישר המחבר את שני מרכזי המעגלים המשיקים (ציור 3).

ב. לכל שני עיגולים יש איזור משותף, אבל רק נקודת חיתוך אחת לשלושת המעגלים (ציור 4).


ציור 3


ציור 4

נראה עתה כיצד ניתן בעזרת משפט מתמטי מתחום הגיאומטריה הקומבינטורית** להכליל את הבעיה למפגש של n אוניות הנוסעות במהירויות שונות זו מזו:

<u>משפט Helly</u>: אם קבוצה סופית של איזורים מישוריים קמורים היא כזאת שלכל שלושה מהם יש נקודה אחת משותפת; אז לפחות נקודה אחת משותפת לכל האיזורים בקבוצה.
(על הגדרת המונח איזור מישורי קמור ועל הוכחת המשפט ראה בנספח).
נסתכל על כל קבוצה אפשרית של שלוש אוניות מתוך n האוניות, נמצא לה את נקודת הפגישה האופטימלית ונחשב את זמן הפגישה.

**Hadwiger H., Debrunner H. and Klee V., <u>Combinatorial Geometry in the Plane.</u> Holt, Reinhart and Winston (1964); pp. 7, 60.