מכון ויצמן למדע

מדרשת פיינברג – המחלקה להוראת המדעים

אוקטובר 2013

פתירות משוואות

של מעלות נמוכות

מנחה: פרופ' סרגיי יעקובנקו

מגיש: סרג'י לייקין

תוכן עניינים

היסטורית עם עלות השחר של מתמטיקה הגיעו לצורך ידע לפתור משוואות. המחקר של משוואות פולינומיאליות ופתרונות שלהם היה אולי המטרה העיקרית של "אלגברה הקלסית".

ארבע הפעולות החשבון עוד בימים של יוון העתיקה הביאו את המתמטיקה לשדה של מספרים רציונליים.

נסמן ב- $P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n$, את פולינום המתוקן ממעלה n.

מעל $\mathbb{Q}$ משוואה היחידה מהסוג $P(x)=0$ אשר פתירה היא לינארית, כלומר $P_1(x)=0$. כל השאר $P_n(x)=0$ דורשות ידע במושג $\sqrt[n]{a}$ לפחות עבור כל $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, וגם יוצאת מהשדה $\mathbb{Q}$.

יוונים גם כן הגיעו לעובדת הקיום של שורש ריבועי. מספרים היו כל הגדלים אשר אפשרי היה לקבלם על-ידי בניה על-ידי סרגל ומחוגה. כך הייתה אפשרות לבנות שורש ריבועי מכל מספר רציונלי (למשל, על-ידי ממוצע ההנדסי).

כבר שורש מסדר שלוש לא ניתן לקבל בשיטה כזו.

שיטה יותר מודרנית: מניחים כי אנו יודעים לפתור משוואה (*) $x^n=a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. מבדילים בין שני תחומים האפשריים לחיפוש פתרון: $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$.

על $\mathbb{R}$ למשוואה (*) יש פתרון אחד כאשר $k\in\mathbb{N}$, $n=2k-1$, וכאשר $k\in\mathbb{N}$, $n=2k$ תלוי ב- a יש אפס, אחד או שני פתרונות.

על $\mathbb{C}$ למשוואה (*) יש n פתרונות סימטריים כלפי ראשית הצירים.

תלמידי כיתה ז' יודעים לפתור משוואות ממעלה ראשונה ($P_1(x)=0 \Leftrightarrow x=-a_1$); בכיתה ט' תלמידים מתחילים להכיר פתרון של משוואה ממעלה שניה, יחד עם ידע במספרים מרוכבים תלמידי 5 יח"ל כיתה י"ב משלימים את התאוריה של משוואות ריבועיות.

השאלה שמופיעה כאן: האם ניתן פתרון של כל משוואה $P_n(x)=0$ להביא לפתרון של משוואה (*).

התשובה: במקרה של $n=2$ – כן.

נביע עתה פתרון על-ידי הצבה $x=y-\frac{b}{2}$ למשוואה $x^2+bx+c=0$:

$\left(y-\frac{b}{2}\right)^2+b\left(y-\frac{b}{2}\right)+c=0 \Leftrightarrow y^2=\frac{b^2-4c}{4} \Leftrightarrow y^2=\frac{b^2-4c}{4}$; בתנאי שאנו יודעים להוציא

שורש ריבועי מתקבלים שני פתרונות : $y=\pm\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}$ ולאחר הצבה החוזרת $x=-\frac{b}{2}\pm\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}$.

על פתרון כללי של משוואות ממעלה שלישית ויותר בביה"ס לא מדברים.

נדבר על איך אפשר ללמד את הנושא בביה"ס.

נציב למשוואה $P_3(y)=0$ את $y=x-\frac{a}{3}$ ונקבל $\left(x-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(x-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(x-\frac{a}{3}\right)+c=0 \Leftrightarrow$

$$x^3-\cancel{ax^2}+\frac{a^2x}{3}-\frac{a^3}{27}+\cancel{ax^2}-\frac{2a^2x}{3}+\frac{a^3}{9}+bx-\frac{ab}{3}+c=0 \Leftrightarrow x^3+\frac{3b-a^2}{3}x+\frac{2a^3-9ab+27c}{27}=0$$

;

נסמן $p=\frac{3b-a^2}{3}$ ו - $q=\frac{2a^3-9ab+27c}{27}$ ונקבל $x^3+px+q=0$. כאן נחפש את הפתרון

של המשוואה כסכום $x=\alpha+\beta$ ונציב אותו למשוואה : $(\alpha+\beta)^3+p(\alpha+\beta)+q=0 \Leftrightarrow$

$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\beta+p)(\alpha+\beta)+q=0$. מכל הסכומים $\alpha+\beta$ ניתן למצוא $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ כך ש– $\alpha\beta=-\frac{p}{3}$,

ומתקבלת מערכת משוואות $\begin{cases}\alpha^3\beta^3=-\frac{p}{27}^3\\ \alpha^3+\beta^3=-q\end{cases}$ אשר יודעים לפתור בעזרת משוואה ריבועית (כאן בעצם

נוסחאות וייטה) : $\alpha^3,\beta^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q}{4}^2+\frac{p}{27}^3}$ וכתוצאה מתקבלת נוסחה הידועה

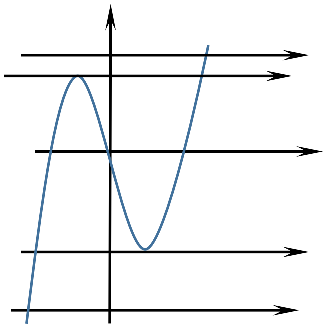
כנוסחת קרדנו : $(1)\quad x^3+px+q=0 \Leftarrow x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$.

הערה I : כידוע קיימים שלושה שורשים מסדר שלוש ממספר מרוכב . על התאמה בינם נדון לאחר חקירה עבור כמות פתרונות ממשיים של המשוואה .

נחקור את המשוואה משתי בחינות : כמה פתרונות ממשיים שונים יש למשוואה לפי המקדמים p ו־q;

כיצד ניתן להיעזר בנוסחת קרדנו (או בשיטה אחרת) לקבלת שלושת הפתרונות (לאו דווקא ממשיים) .

קודם כל לפי ידע הבסיסי בשימוש בנגזרת לחקירת פונקציית פולינום , ניתן לראות כי כאשר $p\ge 0$ למשוואה יש שורש ממשי אחד . נבחר עתה $p<0$.



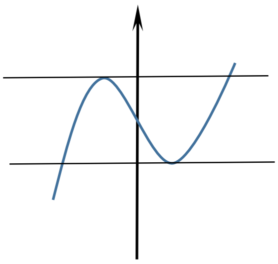
קל לראות גרפית כי הפעם יש שלוש אפשרויות לתשובה לשאלה עבור מספר השורשים הממשיים.

כדי להגיע לאיזשהו אילוץ נעצור על מצב הבודד (הגבולי) של שני פתרונות ממשיים . לפי צורת המשוואה סכום השורשים חייב להיות 0 . אם ישנם שני פתרונות ממשיים , אז אחד מהם הוא כפול . נסמן אותו ב- a

ונקבל : $(x-a)^2(x+2a)=x^3-3a^2x+2a^3=0$. קל לראות כי עם מקדמים כאלו הביטוי בתוך השורש

הריבועי במשוואה (1) (נקרא לו דיסקרימיננטה) מתאפס. גם להפך : אם $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0 \Leftrightarrow p^3=-\frac{27q^2}{4}$

(נזכיר : $p<0$) נוכל לסמן $q=2a^3$ ולקבל מכך $p=-3a^2$, כלומר דיסקרימיננטה שווה ל -0 אם ורק אם למשוואה יש בדיוק שני שורשים ממשיים .



שוב נתבונן בפונקציה $f(x)=x^3+px+q$ ($p<0$) .

רואים כי קיימים שני מספרים k_1 ו– k_2 עבורם למשוואה $x^3+px+q=k$ יש בדיוק שני פתרונות ממשיים.

לפי טענה שהוכחנו קודם בשני המקרים מתקבל $0=\frac{p^3}{27}+\frac{(q-k)^2}{4}$; מכאן $k_{1,2}=q\pm\sqrt{-\frac{4p^3}{27}}$;

מובן כי עבור $q-\sqrt{-\frac{4p^3}{27}}<k<q+\sqrt{-\frac{4p^3}{27}}$ למשוואה $x^3+px+\underbrace{q-k}_{q*}=0$ יש שלושה פתרונות ממשיים.

נסדר את אי השוויון אחרון : $-\sqrt{-\frac{4p^3}{27}}<k-q<\sqrt{-\frac{4p^3}{27}}$, לפי הגדרת ערך המוחלט : $|k-q|<\sqrt{-\frac{4p^3}{27}}$,

לאחר עליה בריבוע : $(k-q)^2<-\frac{4p^3}{27}\Leftrightarrow\frac{(q*)^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$; קיבלנו כי למשוואה $x^3+px+q*=0$ יש

שלושה פתרונות ממשיים אם ורק אם הדיסקרימיננטה שלילית .

המשך הערה I : כל לבדוק כי חזקה השלישית של מספר מרוכב צמוד לנתון היא צמודה לחזקה השלישית של

המספר הנתון ; מכאן שלושת הפתרונות של המשוואה $\alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ צמודים בהתאמה לשלושת

הפתרונות של המשוואה $\beta^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$, ובכדי להגיע לפתרונות ממשיים חייבים לקחת α ו– β

צמודים אחד לשני .

עכשיו נחקור את המשוואה מבחינת קבלת הפתרונות . לו למשוואה יש שני שורשים ממשיים , אז כבר קבענו כי אחד מהם שורש כפול , כלומר אין למשוואה פתרונות מדומים ; במקרה של שורש ממשי אחד יש שתי אפשרויות : או $x_1=\sqrt[3]{-q}\in\mathbb{R}$, $x_{2,3}=\frac{\sqrt[3]{-q}}{2}\left(1\pm i\cdot\sqrt{3}\right)$ (במקרה $p=0$) , או פתרון אחד ממשי ושני מרוכבים צמודים (במקרה $p>0$), אשר מגיעים עליהם על-ידי חילוק פולינומים ($\frac{x^3+px+q}{x-x_1}$) ופתרון משוואה ריבועית . מקרה של שלושה פתרונות ממשיים מתקבל כאשר הדיסקרימיננטה שלילית , כלומר לפתרון המשוואה נצטרך להוציא שורש מסדר שלוש ממספר מרוכב . נוח לבצע פעולה זו על-ידי שימוש בנוסחה דה מואבר . יש

גם דרך לפתרון ללא שימוש כלשהו במספרים מרוכבים. בטריגונומטריה החל מכיתה י"א ידועה נוסחה של סינוס (או קוסינוס) של זוית משולשת: $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$. אם נסמן $\sin\alpha = x$ נקבל משוואה מהצורה (1), כאשר $p=-\frac{3}{4}$ ו $q=\frac{\sin 3\alpha}{4}$. אך במשוואה כלשהי המקדם השני הוא כלשהו.

על-ידי הצבה נוספת נסדר $p=-\frac{3}{4}$ ונבדוק מהם התנאים לשימוש בשיטה הזו. נציב $x=ay$ ונקבל:

$\left(ay\right)^3 + pay + q = 0 \Leftrightarrow y^3 + \underbrace{\frac{p}{a^2}}_{p'} y + \underbrace{\frac{q}{a^3}}_{q'} = 0$ (3). נזכיר כי במקרה של שלושה פתרונות ממשיים מתקיים

$p<0$, ואז מהשוויון $\frac{p}{a^2}=-\frac{3}{4}$ נקבל $a=\pm\sqrt{-\frac{4p}{3}}\in\mathbb{R}$. הרי אנו רוצים לשמור על היחס בין הסימנים של

p ו- q, אז נסתפק ב– $a=\sqrt{-\frac{4p}{3}}$. קיבלנו: $\sin 3\alpha = 4q' = \frac{4q}{a^3} = -\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}}$, כדי לקבל $\alpha\in\mathbb{R}$ נצטרך

תוצאה של הסינוס בתחום $\left[-1\,,1\right]$. נסדר את האילוץ: $-1\le -\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}}\le 1 \Leftrightarrow \left|-\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}}\right|\le 1 \Leftrightarrow$

$\frac{9q^2\cdot 3}{4p^2\cdot(-p)}\le 1 \Leftrightarrow \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\le 0$. אך יצאנו מהנחה כי הדיסקרימיננטה היא שלילית. זאת אומרת

שלושת הפתרונות הממשיים מתקבלים עבור כל משוואה בעלת דיסקרימיננטה שלילית על-ידי הנוסחה:

$$x=\sqrt{-\frac{4p}{3}}\cdot\sin\left(\frac{1}{3}\left(\arcsin\left(-\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}}\right)+2\pi k\right)\right)\ ,\ \ k=0,1,2.$$

נראה עכשיו איך מכאן ניתן להגיע לפתרון הכללי של משוואה ממעלה רביעית.

נציב $y=x-\frac{a}{4}$ למשוואה $P_4\left(y\right)=0$: $\left(x-\frac{a}{4}\right)^4+a\left(x-\frac{a}{4}\right)^3+b\left(x-\frac{a}{4}\right)^2+c\left(x-\frac{a}{4}\right)+d=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^4-\cancel{ax^3}+\frac{3a^2x^2}{8}-\frac{a^3x}{16}+\frac{a^4}{256}+\cancel{ax^3}-\frac{3ax^2}{4}+\frac{3a^2x}{16}-\frac{a^3}{64}+bx^2-\frac{abx}{2}+\frac{a^2b}{16}+cx-\frac{ac}{4}+d=0$$

$$x^4+\frac{3a(a-2)+8b}{8}x^2+\frac{16c-8ab+3a^2-a^3}{16}x+\frac{a^4-4a^3+16a^2b-64ac+256d}{256}=0$$

נסמן $p=\frac{3a(a-2)+8b}{8}$, $q=\frac{16c-8ab+3a^2-a^3}{16}$ ו – $r=\frac{a^4-4a^3+16a^2b-64ac+256d}{256}$

ונקבל (2) $x^4+px^2+qx+r=0$. נניח כי ארבעה הפתרונות המרוכבים של המשוואה (2) הם x_1 , x_2 , x_3 ו– x_4, קיבלנו : $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=x^4+px^2+qx+r$. לאחר פתיחת סוגריים מתקבלת מערכת משוואות (3)

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=p \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-q \\ x_1x_2x_3x_4=r \end{cases}$$

. נסמן עתה

$$\begin{cases} y_1=(x_1+x_2)(x_3+x_4) \\ y_2=(x_1+x_3)(x_2+x_4) \\ y_3=(x_1+x_4)(x_2+x_3) \end{cases}$$

; לפי שורה הראשונה של המערכת (3)

$$\begin{cases} y_1=-(x_1+x_2)^2=-(x_3+x_4)^2 \\ y_2=-(x_1+x_3)^2=-(x_2+x_4)^2 \\ y_3=-(x_1+x_4)^2=-(x_2+x_3)^2 \end{cases}.$$

נתבונן במשוואה (4) $y^3+ay^2+by+c=0$ בעלת שורשים y_1 , y_2 ו– y_3 ונמצא קשר בין הפרמטרים a , b , c לבין p , q , r . קודם כל לפי נוסחאות ויאטה :

$$\begin{cases} a=-(y_1+y_2+y_3) \\ b=y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3 \\ c=-y_1y_2y_3 \end{cases};$$

$$a=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+(-x_4)^2=$$
$$=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)=0-2p=-2p \quad ;$$

$$c=(x_1+x_2)^2(x_1+x_3)^2(x_1+x_4)^2=((x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4))^2=$$
$$=(x_1^3+x_1^2(x_2+x_3+x_4)+x_1(x_2x_3+x_2x_4+x_{3.}x_4)+x_2x_3x_4)^2=$$
$$=(x_1^3+x_1^2(-x_1)+x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_{3.}x_4+x_2x_3x_4)^2=(x_1^3-x_1^3-q)^2=q^2 \quad ;$$

קבלת נוסחה לפרמטר b דורשת קצת יותר טכניקה אלגברית.

$$p = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = x_1\left(x_2 + x_3 + x_4\right) + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -x_1^2 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4;$$

$$\begin{aligned} p^2 &= x_1^4 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2 - 2x_1^2\left(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4\right) + 2x_2x_3x_4\left(x_2 + x_3 + x_4\right) = \\ &= x_1^4 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2 - 2x_1^2\left(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4\right) + 2x_2x_3x_4\left(-x_1\right) = \\ &= x_1^4 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2 - 2x_1^2\left(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4\right) - 2x_1x_2x_3x_4 \quad ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \left(x_1 + x_2\right)^2\left(x_1 + x_3\right)^2 + \left(x_1 + x_3\right)^2\left(x_1 + x_4\right)^2 + \left(x_1 + x_2\right)^2\left(x_1 + x_4\right)^2 = \\ &= x_1^4 + 2x_1^3\left(x_2 + x_3\right) + x_1^2\left(x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3\right) + 2x_1x_2x_3\left(x_2 + x_3\right) + x_2^2x_3^2 + \\ &+ x_1^4 + 2x_1^3\left(x_2 + x_4\right) + x_1^2\left(x_2^2 + x_4^2 + 4x_2x_4\right) + 2x_1x_2x_4\left(x_2 + x_4\right) + x_2^2x_4^2 + \\ &+ x_1^4 + 2x_1^3\left(x_3 + x_4\right) + x_1^2\left(x_3^2 + x_4^2 + 4x_3x_4\right) + 2x_1x_3x_4\left(x_3 + x_4\right) + x_3^2x_4^2 = \\ &= x_1^4 + 2x_1^3\left(x_2 + x_3\right) + x_1^2\left(x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3\right) - 2x_1x_2x_3\left(x_1 + x_4\right) + x_2^2x_3^2 + \\ &+ x_1^4 + 2x_1^3\left(x_2 + x_4\right) + x_1^2\left(x_2^2 + x_4^2 + 4x_2x_4\right) - 2x_1x_2x_4\left(x_1 + x_3\right) + x_2^2x_4^2 + \\ &+ x_1^4 + 2x_1^3\left(x_3 + x_4\right) + x_1^2\left(x_3^2 + x_4^2 + 4x_3x_4\right) - 2x_1x_3x_4\left(x_1 + x_2\right) + x_3^2x_4^2 = \\ &= 3x_1^4 + 4x_1^3\left(x_2 + x_3 + x_4\right) + 2x_1^2\left(x_2 + x_3 + x_4\right)^2 - 2x_1^2\left(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4\right) - 6x_1x_2x_3x_4 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2 = \\ &= 3x_1^4 + 4x_1^3\left(-x_1\right) + 2x_1^2\left(-x_1\right)^2 - 2x_1^2\left(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4\right) - 6x_1x_2x_3x_4 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2 = \\ &= x_1^4 - 2x_1^2\left(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4\right) - 6x_1x_2x_3x_4 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2 = \\ &= x_1^4 - 2x_1^2\left(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4\right) - 2x_1x_2x_3x_4 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2 - 4x_1x_2x_3x_4 = p^2 - 4r \quad ; \end{aligned}$$

קיבלנו כי שורשי המשוואה (5) $y^3 - 2py^2 + \left(p^2 - 4r\right)y + q^2 = 0$ תלויים רק במקדמים של המשוואה (2) אשר פתרונותיה אנו מחפשים, נוסף לכך לו היינו מחליפים מקום של חלק מ– x_1 , x_2 , x_3 ו–x_4 (או כולם), אז הפתרונות של המשוואה (5) y_1 , y_2 ו–y_3 או נשארים במקום, או גם מחליפים מקום , למשל יחד עם החלפת x_1 ב– x_2 ולהפך y_1 שומר את שמו ו–y_2, y_3 מתחלפים.

כפי שהגדרנו y_1 , y_2 ו–y_3 מתקבל :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\left(x_3 + x_4\right) = \pm\sqrt{y_1} \\ x_1 + x_3 = -\left(x_2 + x_4\right) = \pm\sqrt{y_2} \\ x_1 + x_4 = -\left(x_2 + x_3\right) = \pm\sqrt{y_3} \end{cases} \Rightarrow 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2x_1 = \pm\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2} \pm \sqrt{y_3}$$

באותה הדרך : $\forall i \in \{1,2,3,4\}: 2x_i = \pm\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2} \pm \sqrt{y_3}$. יחד עם החלפת סימנים לפני השורשים מתקבלים שמונה מספרים . ארבעה מהם הם x_1 , x_2 , x_3 ו–x_4, וארבעה שנותרו הם נגדיים ל– x_1 , x_2 , x_3 ו–x_4.

קיימת לפחות גישה אחת נוספת לפתרון המשוואה (2) $x^4+px^2+qx+r=0$, גם היא מבוססת על פתרון של משוואות ממעלה 3 ו–2 . הנה עוד דרך נוספת : נציג את הביטוי באגף השמאלי של (2) כמכפלת שני טרינומים ריבועים : (6) $x^4+px^2+qx+r=\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right)$; לאחר פתיחת סוגריים נקבל :

$x^4+px^2+qx+r=x^4+\left(a+c\right)x^3+\left(ac+b+d\right)x^2+\left(ad+bc\right)x+bd$; ולפי נוסחאות ויאטה :

$\begin{cases} a+c=0 \\ b+d=p+a^2 \\ a\left(d-b\right)=q \\ bd=r \end{cases}$; כאן לאחר חיבור וחיסור של השורות 2 ו-3 מתקבל $\begin{cases} 2b=p+a^2-\dfrac{q}{a} \\ 2d=p+a^2+\dfrac{q}{a} \end{cases}$ ולאחר הכפל של

השורות האחרונות $4r=\left(p+a^2-\dfrac{q}{a}\right)\left(p+a^2+\dfrac{q}{a}\right) \Rightarrow 4ra^2=\left(pa+a^3-q\right)\left(pa+a^3+q\right) \Rightarrow$

$4ra^2=a^2\left(a^2+p\right)^2-q^2 \Rightarrow a^2\left(a^4+2a^2p+p^2-4r\right)-q^2=0 \Rightarrow (7)\quad a^6+2pa^4+\left(p^2-4r\right)a^2-q^2=0$.

התקבלה משוואה ממעלה שלישית כלפי a^2 , אשר אנו יודעים לפתור . כל שלושת הפתרונות של a^2 חוסמים את שלושה מקרים בחלוקה של x_1 , x_2 , x_3 ו–x_4 לזוגות , כדי לפרק לגורמים כמו ב– (6) , ובבחירת אחד הפתרונות של $a^2=m\in\mathbb{C}$, השני נותן c (נזכיר : $c=-a$) .

הערה Π : ניתן לראות כי המקדמים של המשוואות (5) ו– (7) שונים רק בסימן . המבט במערכת (3) נותן הסבר לקשר זה : לפי נוסחאות ויאטה חייב להתקיים $y=-a^2$.

עבור $n\geq 5$ על–ידי רופיני , נילס אבל וגלואה הוכח כי הפתרון המדויק (ברדיקלים) הוא בלתי אפשרי ;

כ–70 שנים לפני גלואה (1763) לורד צ'ירנהאוס הצליח להעביר את משוואה $P_5\left(y\right)=0$ לצורה : $x^5+x+c=0$.

מאז הפסיקה אלגברה לעסוק בחיפוש עבור "נוסחאות מפורשות" לשורשים של משוואות, והמשיכה ללמוד את המשוואות עצמן, כוללות אלה עם משתנים מרובים. כך הופיעה גיאומטריה אלגברית .

ביבליוגרפיה

1. Alekseev V.B.,(2001), Abel's Theory, Moscow, Russia

2. Dmitry Fuchs, Serge Tabachnikov Mathematical Omnibus Thirty Lectures on Classic Mathematics 2007 , University of California

3. Jean-Pierre Escofier Galois Theory , Institute Mathematiques de Rennes (2000)

4. Nezbailo T. G. (2007) Theory of Finding Roots of Algebraic Equations , *Sankt Peterburg , Russia*

5. Oliver Nash On Klein's Icosahedral Solution of the Quintic , Dublin (2000)