מכון ויצמן למדע
תוכנית רוטשילד ויצמן

עקמומיות של עקומה במישור האוקלידי בדיסציפלינה והקשרה להוראת המתמטיקה בחט״ע

עבודת גמר לתואר שני
בהוראת המתמטיקה

בהנחית פרופ׳ דמיטרי נוביקוב
מוגשת למחלקה להוראת המדעים
ע״י יפעת משה תורג׳מן

נובמבר 2013 חשון תשע״ד

תוכן עניינים:

1. מבוא

האימרה "גיאומטריה היא אלגברה היא גיאומטריה" מתארת פריצת דרך משמעותית בקשר שבין אלגברה לגיאומטריה, שהתפתחה במאה ה-17 הודות לעבודתם של שני מתמטיקאים צרפתיים, פייר דה פרמה (1601-1665) ורנה דקארט (1596-1650). הם הראו כי כל אחד מן התחומים האלה יכול להפוך למשנהו אם משתמשים בקואורדינטות (שיעורים במערכת הצירים). כלומר, כל בעיה בגיאומטריה ניתנת לפתרון באמצעות חישובים אלגבריים ולבעיות באלגברה ניתנת משמעות גיאומטרית תוך שימוש במונחים של משטחים ועקומים.

עובדה זאת ממחישה את הרעיון שבמתמטיקה אין גבולות ברורים בין תחומים הנראים לכאורה נפרדים. בעיות במתמטיקה, שנראות כאלו הן שייכות לתחום מסוים, עשויות למצוא את פתרונן באמצעות שיטות מתחום אחר. במתמטיקה היוונית יש עקבות לקשרים כאלה, למשל בין משפט פיתגורס למספרים אי רציונליים.

לכאורה, קשרים אלה עלולים להראות כאילו הם הופכים את אחד משני התחומים למיותר, משום שאם ניתן להמיר את כל הבעיות בגיאומטריה בבעיות אלגבריות , לשם מה נחוצה לנו הגיאומטריה?

התשובה לכך היא שלכל אחד מן התחומים הללו יש נקודת ראות אופיינית משלו, נקודה זאת יכולה להיות מועילה ובעלת עוצמה, משום שלפעמים טוב יותר לחשוב באופן גיאומטרי ולפעמים עדיפה חשיבה אלגברית.

דוגמה לכך היא אופן הצגתם של העקומים המישוריים.

עד המאה ה-17 תיארו את העקומים באמצעים גיאומטריים בלבד בהתאם לתפיסה היוונית, שראתה בעקומים עצמים גיאומטריים. לעומת זאת, דאקרט התייחס אליהם כאל ביטוי חזותי של איזושהי נוסחה אלגברית.

הוא קבע כי ניתן לתאר את הקו הישר באמצעות משוואה לינארית מהצורה $ax + by = 0$ כאשר המקדמים $c -$ a, b ו הם גדלים קבועים. ועוד שחתכי החרוט הם העקומים הפשוטים ביותר אחרי הקווים הישרים, וניתן לתאר אותם באמצעות משוואה ממעלה שנייה מהצורה: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ כאשר המקדמים a, b, c, d, e, f הם גדלים קבועים.

ייתכן שכאן באה לכלל ביטוי התרומה החשובה ביותר של המושג קואורדינאטות. כפי שאמר אייזק ניוטון בשנת 1707: "בני זמננו התקדמו הרבה מעבר (ליוונים), כשקלטו אל תוך הגיאומטריה את כל הקווים הניתנים לביטוי באמצעות משוואות".

פרמה הרחיב את הרעיון של דקארט לשלושה ממדים. הוא תיאר משטחים כמו אליפסואידות ופרבולואידות שצורתן נקבעת על-ידי משוואות ריבועיות בשלושה משתנים, x, y ו $z -$.

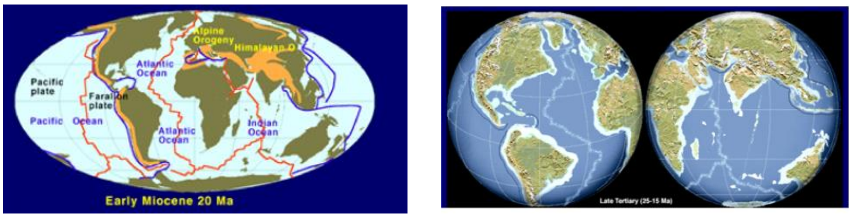
יאקוב ברנולי פיתח את הרעיון של תיאור נקודות במישור האוקלידי באמצעות קואורדינאטות קוטביות. הוא הראה כי לעיתים ניתן לתאר בצורה פשוטה יותר עקומים שהמשוואות שלהם בקואורדינטות קארטזיות מסובכות למדי וזאת באמצעות שימוש בקואורדינאטות קוטביות. למשל, המשוואה $r = \theta$ המתאימה לספירלה ארכימדית.

שימוש בחדו"א לחקר בעיות בגיאומטריה היא פריצת דרך משמעותית נוספת בחקר בעיות בגיאומטריה, שהתפתחה במאה ה-18 והתמקדה בחקר תכונות גאומטריות לוקליות, רעיון זה הוביל להתפתחות תיאוריה מתמטית הנקראת "גיאומטריה דיפרנציאלית", שהמושג המרכזי בה הוא מושג עקמומיות.

כידוע, החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי -הקלקולוס (calculus), שמקובל לקרוא לו בקיצור חדו"א, התפתח בשלהי המאה ה-17,בערך בשנת 1680, ע"י שני מתמטיקאים, אייזק ניוטון (Newton)האנגלי ו גוטפריד לייבניץ (Leibniz) הגרמני , באופן בלתי תלוי זה בזה כל אחד לחוד.

דוגמאות לפתרון בעיות בגיאומטריה באמצעות שימוש במושג העקמומיות:

- קרל פרידריך גאוס (1777-1855) בשנת 1828השתמש בעקמומיות של משטחים כדי להראות ששטח פני הכדור אינם ניתנים לפרישה אל המישור מבלי שהמרחקים על המשטח יתעוותו. כלומר, לא ניתן להכין מפה מישורית של פני כדור הארץ המשמרת מרחקים.



תמונה 1: מפת פרישת שטח פני כדור הארץ,

- ברנהרד רימן (1826-1866) בשנת 1854 נשא הרצאה בנושא יסודות הגיאומטריה בפני סגל הפקולטה למתמטיקה בגוטינגן בגרמניה. ההרצאה דנה בנושא: ההשערות שעליהן מונחים יסודות הגיאומטריה. הוא הראה כיצד העקמומיות מאפיינת את התכונות הגיאומטריות הגלובליות של המרחב. הוא הסביר באמצעות רעיון זה את ההבדל שבין הגיאומטריה האוקלידית שהתפתחה בתקופת המתמטיקה היוונית לגיאומטריות הלא איקלידיות שהתפתחו במאה ה-19.

תמונה 2: העקמומיות מאפיינת תכונות גיאומטריות של המרחב.

רימן ניבא את היישום של מושג עקמומיות בפיסיקה (ארבל, 2009 עמ' 209). ואכן אלברט איינשטיין השתמש במושג עקמומיות בתורת היחסות, והציג משוואות הקושרות את העקמומיות לצפיפות של החומר (סטיוארט איאן, 2007, עמ' 192-206).

מהאמור לעיל נובע כי מושג ה- "עקמומיות" מסייע בחקר בעיות בגיאומטריה. בעבודה זאת אבחן את הקשר שבין מושג ה- "עקמומיות" של עקומה במישור האוקלידי בדיסציפלינה להוראת המתמטיקה בחטיבה העליונה תוך התמקדות בשאלות הבאות:

- מהי גיאומטריה? ומהי הגיאומטריה של המישור האוקלידי?
- מהו המבנה האלגברי של המישור האוקלידי?
- מהו עקום במישור האוקלידי?
- מהי עקמומיות של עקום רגולרי במישור האוקלידי?
- כיצד ניתן לקשר בין מושג העקמומיות בדיסציפלינה להוראת המתמטיקה בחט"ע?

2. המישור האוקלידי

2.1 התפתחות הגיאומטריה של המישור באספקלריה היסטורית

הגיאומטריה של המישור התפתחה בתקופת המתמטיקה היוונית החל מהמאה השישית לפנה"ס.

אוּקְלִידֵס, שפעל במחצית הראשונה של המאה השלישית לפנה"ס (365 לפנה"ס- 275 לפנה"ס), כתב את הספר יסודות , העוסק בגיאומטריה של המישור ובהיבטים מסוימים בגיאומטריה של המרחב, הכולל שלוש עשרה כרכים. מאפייניה העיקריים הם:

<u>שימוש בשרטוטים</u>- שרטוטים המכילים את הצורות היסודיות בלבד - קווים ישרים ומעגלים.

<u>מיבנה לוגי</u>- לכל אמירה חייבת להיות הצדקה המסתמכת על אמירות קודמות ומצביעה על הדרך שבה היא נובעת מהן. תהליך זה מתחיל ברשימה של הגדרות ומאמירות ההתחלתיות שאי-אפשר להוכיחן,

המאמירות ההתחלתיות כוללות חמש הנחות ("פוסטולטים") וחמש אקסיומות (הנקראות "מושגים מוסכמים"). אצל אריסטו יש אבחנה חדה בין שני הסוגים. האקסיומות צריכות להיות נכונות כמובן מאליו לכל אדם, בעוד שהפוסטולטים הם הנחות המיוחדות למקצוע. כפי שמתואר בטבלה הבאה:

<u>הפוסטולטים והאקסיומות בגיאומטריה של אוקלידס:</u>

הפוסטולטים ההנחות הבסיסיות (שנחשבו כאמיתות)	**האקסיומות ה"מושגים מוסכמים"**
• דרך כל שתי נקודות אפשר להעביר קטע ישר אחד בלבד. • כל קטע אפשר להמשיך ללא גבול כקו ישר. • בהינתן קטע ישר, ניתן להעביר מעגל שמרכזו בנקודת קצהו האחת, ורדיוסו שווה לקטע הנתון. • כל הזוויות הישרות שוות זו לזו. • אם ישר חותך שני ישרים באופן כזה שסכום הזוויות הפנימיות בצד מסוים קטן מכפליים זווית ישרה, אז שני הישרים חותכים זה את זה באותו צד.	• שני גדלים השווים לגודל שלישי, שווים ביניהם. • אם מוסיפים גדלים שווים לגדלים שווים, הסכומים שווים. • אם מחסרים גדלים שווים מגדלים שווים, ההפרשים שווים. • דברים המתלכדים זה עם זה, שווים זה לזה. • השלם גדול מחלקו.

אציין את ההדגשים הבאים:

i. <u>ביקורת על עבודתו של אוקלידס</u>

בשלהי המאה ה-19 דוד הילברט ציין כי קיימים פגמים לוגיים במערכת האקסיומות של אוקלידס, וייתכן כי פגמים אלה נבעו משימוש בדימויים וויזואלים של עצמים גיאומטריים שהובילו להשתמש בהנחות מסוימות לגבי תכונותיהם מבלי לציין אותן כאקסיומות. למשל, קו הוא משהו ארוך וצר. הילברט הכין רשימה של 21 אקסיומות ודן בתפקידן בגיאומטריה האוקלידית בספרו "יסודות הגיאומטריה" בשנת 1899.

ii. <u>התפתחותן של גיאומטריות לא אוקלידיות</u>

במהלך ההיסטוריה נעשו ניסיונות רבים להגיע אל הפוסטולט החמישי כמסקנה מהנחות פשוטות יותר, ניסיונות אלה הובילו לניסוחם של פסוקים השקולים לפוסטולט זה. למשל,

- דרך נקודה מחוץ לישר, באותו מישור, ניתן להעביר רק מקביל אחד לישר נתון.
- סכום הזוויות במשולש שווה לשתי זוויות ישרות.

במאה ה-19 נעשו נסיונות לשנות את הפוסטולט החמישי, נסיונות אלה הובילו להתפתחותן של גיאומטריות המכונות בשם "הגיאומטריות הלא אוקלידיות "-הגיאומטריה היפרבולית והגיאומטריה האליפטית.

הגיאומטריה היפרבולית התפתחה בעקבות שינוי הפוסטולט החמישי באופן הבא:

דרך נקודה מחוץ לישר באותו מישור ניתן להעביר אינסוף ישרים המקבילים לישר הנתון.

מכאן משמעות השם היפרבולית, ביוונית היפרבולה פירושה יתר על המידה.

גאוס, ניקולאי לובצ'בסקי הרוסי (1793-1856) ויאנוש בויאי ההונגרי (1802-1860) פיתחו את התיאוריה של גיאומטריה זו .

הגיאומטריה האליפטית התפתחה בעקבות שינוי הפוסטולט החמישי באופן הבא:

דרך נקודה מחוץ לישר באותו מישור אין אפילו מקביל אחד לישר הנתון.

מכאן משמעות השם אליפטית, ביוונית אליפסיס פירושו מעט.

רימן פיתח את התיאוריה של גיאומטריה זאת. והראה כיצד העקמומיות מאפיינת את התכונות הגלובליות של הגאומטריה האוקלידית ושל הגיאומטריות הלא אוקלידיות.

iii. <u>הגיאומטריה באספקלריה אלגברית</u>

בשנים 1869-1870 פליקס קליין אפיין את הגיאומטריה כחבורה של שמורות, השמורות הן טרנספורמציות המשמרות את המושגים הגיאומטריים הרלוונטיים לאותה הגיאומטריה.

כשם שהקואורדינאטות קושרות בין גיאומטריה לאלגברה, כך השמורות קושרות בין גיאומטריה לתורת החבורות. כל גיאומטריה מגדירה חבורת שמורות תואמת, ולהיפך, כל חבורת שמורות מגדירה גיאומטריה מתאימה. הוא תיאר זאת בתוכניתו הנקראת תוכנית ארלנגן, שצמחה מתוך חשיבה מחודשת על הגיאומטריה האוקלידית.

באמצעות מושג "האורך" מגדירים את השמורות של הגאומטריה האוקלידית כהעתקות שאינן משנות מרחקים בין נקודות והן נקראות תנועות קשיחות. העתקות המשמרות מרחקים בין נקודות אינן משנות זוויות.

אוסף ההעתקות של המישור האוקלידי למישור האוקלידי , שאינן משנות מרחקים בין נקודות, הינו חבורה הנקראת החבורה האוקלידית. כלומר, אורך קטע הוא התכונה הגאומטרית שאינה משתנה כשמבצעים את אחת ההעתקות מהחבורה.

החבורה האוקלידית כוללת העתקות מסוגים מסוימים: הזזות- שמעתיקות את המישור על ידי הזזתו בכיוון מסוים, סיבובים- המעתיקים אותו על ידי סיבוב סביב נקודה קבועה כלשהי ושיקופים- המשקפים אותו בקו קבוע מסוים.

לסיכום:

החבורה האוקלידית כוללת את השמורות המגדירות את הגאומטריה האוקלידית. אותו דבר חל על גיאומטריות מסוגים אחרים. למשל, הגיאומטריה האליפטית היא תורת השמורות של חבורת התנועות הקשיחות במרחב בעל עקמומיות חיובית. והגיאומטריה ההיפרבולית היא תורת השמורות של חבורת התנועות הקשיחות במרחב בעל עקמומיות שלילית.

2.2 המבנה האלגברי של המישור האוקלידי

<u>הגדרה</u>-מרחב אוקלידי הינו מרחב וקטורי מעל השדה F המוגדרת בו מכפלה סקלארית.

המרחב הלינארי R^n עם המכפלה הסקלרית נקרא <u>המרחב האוקלידי ה-n-ממדי</u>.

לדוגמא:

המרחב הוקטורי $R^2 = \{(x, y): x, y \in R\}$ מעל השדה R, המוגדרת בו מכפלה סקלארית הינו המישור האוקלידי.

בכדי להבין את מאפייני המבנה האלגברי של המישור האוקלידי אציין את ההבהרות הבאות:

- הגדרותיהם של מבנים אלגבריים ושל מושגים בסיסיים באלגברה הרלוונטיים להגדרת המרחב האוקלידי.
- הגדרות של מושגים אלגבריים במרחב האוקלידי באמצעות המכפלה הסקלארית.

2.2.1 הגדרות של מבנים אלגבריים

- **<u>חבורה חיבורית</u>**-קבוצה G היא חבורה חיבורית אם מוגדרות עליה פעולה בינארית,

חיבור, כך שהיא סגורה תחת הפעולות. ולכל a, b, c ב-G מתקיימות האקסיומות הבאות:

שם	חיבור	כפל
קומוטטיביות (חילוף)		
אסוציאטיביות (צרוף)	$(a + b) + c = a + (b + c)$	
קיום איבר נייטרלי	$a + 0 = a = 0 + a$	
קיום איבר הופכי	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$	

- **<u>שדה</u>** - קבוצה F היא שדה אם מוגדרות עליה שתי פעולות בינריות, חיבור וכפל,

כך שהיא סגורה תחת שתי הפעולות הנ״ל. ולכל a, b, c ב- F מתקיימות האקסיומות הבאות:

שם	חיבור	כפל
קומוטטיביות (חילוף)	$a + b = b + a$	$ab = ba$
אסוציאטיביות (צרוף)	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a\,b)c = a(b\,c)$
קיום איבר נייטרלי	$a + 0 = a = 0 + a$	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
קיום הופכיים	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$	$a\,a^{-1} = a^{-1}a \ \text{ if } a \neq 0$
דיסטריביוטיבות (פילוג)	$(a + b)c = ac + bc$	$a(b + c) = ab + ac,$

והאקסיומה: $0 \neq 1$

- **<u>מרחב וקטורי (מרחב לינארי)-</u>** קבוצה V היא מרחב וקטורי מעל השדה F,

אם מתקיימים התנאים הבאים:

א. היא חבורה חיבורית אבלית, כלומר מתקיימות האכסיומות הבאות:

שם	**חיבור**
קומוטטיביות (חילוף)	$a + b = b + a$
אסוציאטיביות (צרוף)	$(a + b) + c = a + (b + c)$
קיום איבר ניטרלי	$a + 0 = a = 0 + a$
קיום הופכיים	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$

ב. מוגדרת פעולת בין איברי V ואיברי השדה, כפל בסקלר שתוצאתה איבר ב- V שמקיימת שלכל

a,b ב F ו- v,w ב-V :

$a(v+w) = av + aw$	$(ab)v = a(bv)$
$(a+b)v = av + bv$	$1_F \cdot v = v$

- **<u>מכפלה סקלארית -</u>** יהיו $a, b \in V$ שני וקטורים, קבוצה V היא מרחב וקטורי מעל השדה F פעולה

בינארית המסומנת ע"י $< a, b > \in R$ המקיימת את התכונות הבאות:

א. <u>"סימטריות"</u> - לכל $a, b \in V$ מתקיים: $< a, b > = < b, a >$

ב. <u>"לינאריות"-</u> לכל $a, b, c \in V$ מתקיים: $< a + b , c > = < a, c > + < b, c >$

ג. <u>"הומוגניות"-</u> לכל $a, b \in V$ ולכל $\lambda \in F$ מתקיים: $< \lambda a, b > = \lambda < a, b >$

ד. <u>"חיוביות"-</u> לכל $a \in V$ <u>מתקיים</u> $< a, a > \geq 0$

ו- $< a, a > = 0$ אם ורק אם $a = 0$

נקראת מכפלה סקלארית של שני הוקטורים.

לדוגמא: <u>המכפלה הסקלארית במרחב R^n</u>

יהיו $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ו- $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ וקטורים ב-R^n,

המכפלה הסקלארית של a ו- b שסימנה $a \cdot b$ היא המספר הממשי הנתון על ידי הנוסחה:

$$a \cdot b \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n$$

צ"ל שהמכפלה הסקלארית ב-R^n מקיימת את התכונות המוזכרות לעיל.

א. "סימטריות" - לכל $a, b \in R^n$ מתקיים: $a \cdot b = b \cdot a$

הוכחה:

יהיו $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),\ b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ וקטורים כלשהם ב- R^n ולכן מתקיים כי:

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i = b \cdot a$$

ב. "לינאריות"- לכל $a, b, c \in R^n$ מתקיים: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

הוכחה

יהיו $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),\ b = (\beta_1, \dots, \beta_n),\ c = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ וקטורים כלשהם ב- R^n.

מהגדרת פעולת חיבור וקטורים ב-R^n נובע כי: $a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$

ולכן מתקיים:

$$(a + b)c = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_1 + \beta_1)\gamma_1 = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i\gamma_i + \beta_i\gamma_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\gamma_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i\gamma_i$$

$$= a \cdot c + b \cdot c$$

$$a \cdot (b + c) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\beta_i + \gamma_i) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i\beta_i + \alpha_i\gamma_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\gamma_i$$

$$= a \cdot c + b \cdot c$$

ג. "הומוגניות"- לכל $a, b \in R^n$ ולכל $\lambda \in R$ מתקיים: $(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b)$

$$a \cdot (\lambda b) = \lambda(a \cdot b)$$

הוכחה

יהיו $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ו- $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ וקטורים ב-R^n ו- $\lambda \in R$, אזי מתקיים:

$$(\lambda a) \cdot b = (\lambda\alpha_1, \dots, \lambda\alpha_n) \cdot (\beta_1, \dots, \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\alpha_i)\beta_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda(\alpha_i\beta_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i = \lambda(a \cdot b)$$

$$a \cdot (\lambda b) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot (\lambda\beta_1, \dots, \lambda\beta_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\lambda\beta_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i = \lambda(a \cdot b)$$

ד. "חיוביות"- לכל $a \in R^n$ $a \cdot a \geq 0$ כמו כן, $a \cdot a = 0$ אם ורק אם $a = 0$.

הוכחה

יהי $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ וקטור כלשהו. מהגדרת המכפלה הסקלארית נובע כי: $a \cdot a = \sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2$,

בהיותם ריבועים של מספרים ממשיים הם מספרים אי שליליים ${\alpha_1}^2, \dots, {\alpha_n}^2$, ולכן גם סכומם אי-שלילי,

כלומר $a \cdot a \geq 0$.

השוויון $a \cdot a = 0$ מתקיים רק כאשר כל המחוברים שבסכום שבאגף ימין של $a \cdot a = \sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2$ שווים לאפס.

כלומר $a \cdot a = 0$ אם ורק אם $a = (0, \dots, 0)$.

2.2.2 האלגברה של המרחב האוקלידי

באמצעות ה**מכפלה הסקלארית** ניתן להגדיר את מושג **הנורמה,** באמצעות הנורמה ניתן להגדיר את מושג ה**מטריקה**. באמצעות המטריקה ניתן להגדיר את מושג ה**איזומטריה**. באמצעות האיזומטריה ניתן להגדיר את **החבורה האוקלידית** ו**צורות חופפות** במרחב האוקלידי.

באמצעות המושגים הנ"ל ניתן להגדיר את המושגים הבאים: זווית בין שני וקטורים, ניצבות של ישרים ואוריינטציה של המרחב הוקטורי. כפי שיפורט להלן.

- **נורמה**- פונקציה $R^n \to R$, המסומנת ב: $\|\ \|$, המקיימת שלוש תכונות:

  א. חיובית: $\| x \| \geq 0$ לכל $x \in R^n$. ובנוסף $\| x \| = 0$ אס"ם $x = 0$.

  ב. הומוגנית: $\| \lambda x \| = \lambda \| x \|$ לכל $x \in R^n$, $\lambda \in R$

  ג. אי שוויון המשולש: $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

  נקראת נורמה.

לדוגמא: הנורמה במרחב האוקלידי R^n

יהי $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ וקטור ב- R^n. השורש הריבועי האי שלילי $\sqrt{a \cdot a}$ מכונה הנורמה של a וסימנו $\|a\|$,

כלומר: $\|a\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i{}^2}$

- צ"ל שהנורמה ב-R^n מקיימת את התכונות הבאות:

  א. חיוביות: $\|a\| \geq 0$ ו- $\|a\| = 0$ אם ורק אם $a = 0$.

הוכחה

$\|a\| \geq 0$ שכן על פי ההגדרה $\|a\|$ היא השורש הריבועי האי שלילי $\sqrt{a \cdot a}$.

ומכיוון שלכל a ממשי $a^2 = 0$ אם ורק אם $a = 0$, נובע כי $\|a\| = 0$ אם ורק אם $\|a\|^2 = a \cdot a = 0$ ומתכונות המכפלה הסקלארית זה נכון אם ורק אם $a = 0$.

  ב. הומוגנית: לכל $a \in R^2$ ולכל סקלר $\lambda \in R$ מתקיים: $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$

הוכחה

יהי $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ אז $\|\lambda a\| = \|(\lambda\alpha_1, \dots, \lambda\alpha_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_i)^2} = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i{}^2 = |\lambda|\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i{}^2} =$ $|\lambda| \cdot \|a\|$

  ג. אי שוויון המשולש: לכל $a, b \in R^n$ מתקיים האי שוויון: $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

הוכחה

להוכחת אי שוויון המשולש אשתמש באי שוויון קושי שוורץ,

אי שוויון קושי שוורץ: לכל $a, b \in R^n$ מתקיים האי שוויון: $\langle a, b \rangle \leq \|a\| \cdot \|b\|$

הוכחה: יהיו $a, b \in R^n$ ו- $\lambda \in R$, מהתכונות של המכפלה הסקאלרית נובע ש-

$\langle a-\lambda b, a-\lambda b\rangle \geq 0$, והרי $\langle a-\lambda b, a-\lambda b\rangle = \|a\|^2 - 2\lambda\langle a,b\rangle + \lambda^2\|b\|^2$ ולכן מתקבל האי שוויון $\|a\|^2 - 2\lambda\langle a,b\rangle + \lambda^2\|b\|^2 \geq 0$.

הדיסקרימיננטה של המשוואה הריבועית הזאת היא שלילית $D = \langle a,b\rangle^2 - \|a\|^2\|b\|^2 \leq 0$

ולכן $\langle a,b\rangle \leq \|a\| \cdot \|b\|$ והשוויון מתקבל במקרה $a = \lambda b$ בלבד.

וכעת הוכחת אי שוויון המשולש,

$$\|a+b\|^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + 2(a\cdot b) + b\cdot b = \|a\|^2 + 2(a\cdot b) + \|b\|^2$$

ומאי שוויון קושי שורץ נובע כי

$$\|a\|^2 + 2(a\cdot b) + \|b\|^2 \leq \|a\|^2 + 2\|a\|\cdot\|b\| + \|b\|^2 = (\|a+b\|)^2$$

ולכן : $\|a+b\|^2 \leq (\|a+b\|)^2$

נוציא את השורש הריבועי האי שלילי ונקבל $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ כנדרש.

<u>מטריקה</u>-במרחב אוקלידי $V = R^n$ מעל R. נגדיר מושג של מרחק או מטריקה באמצעות

פונקציה $d: R^n \times R^n \to R$ מזוגות של נקודות ב- R^n אל R. המקיימת את התכונות הבאות :

אי שליליות : $d(x,y) \geq 0$ לכל $x,y \in V$ ובנוסף, $d(x,y) = 0$ אס"ם $x = y$.

סימטריה : $d(x,y) = d(y,x)$ לכל $x,y \in V$.

אי שוויון המשולש : $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ לכל $x,y,z \in V$.

לדוגמא : <u>המטריקה במרחב R^n</u>

לכל $x,y \in V = R^n$, $d(x,y) = \|x-y\| = \langle x-y, x-y\rangle^{1/2}$

נראה שלכל $x,y,z \in V = R^n$ מתקיים אי שוויון המשולש $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

כלומר : $\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\|$

הוכחה

נסמן $a = x-y \Rightarrow x = a+y$

$b = y-z \Rightarrow z = y-b$

ונקבל $\|x-z\| = \|a+y-(y-b)\| = \|a+b\|$

נציב $a = x-y$, $b = y-z$, $\|x-z\| = \|a+y-(y-b)\| = \|a+b\|$

באי השוויון הבא : $\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\|$

$$\Longrightarrow \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

קיבלנו את אי שוויון המשולש . (הוכחנו את נכונותו לעיל)

<u>איזומטריה</u>- העתקה $A: R^n \to R^n$ המקיימת: $d(x,y) = d\big(f(x), f(y)\big)$ לכל $x, y \in R^n$

לדוגמא: <u>איזומטריה במרחב R^n</u>

יהא V מרחב אוקלידי. העתקה $A: V \to V$ היא איזומטריה לינארית.

ונקראת תנועה אוקלידית אם ורק אם מתקיים: (התנאים הבאים שקולים)

- המרחק בין כל שתי נקודות נשמר לאחר ההעתקה, כלומר:

  $d(\big(A(x), A(y)\big) = d(x,y), \quad \forall x, y \in V$

- אם פעולתה על כל וקטור שומרת על אורכו: $||Ax|| = ||x||, \quad \forall x \in V$
- A שומרת מכפלה סקאלרית $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$

הערה: ההרכבה $A°B$ של שתי תנועות אוקלידיות $A: V \to V$ ו- $B: V \to V$ גם היא תנועה אוקלידית.

באמצעות המושגים המוגדרים לעיל ניתן להגדיר את המושגים הבאים:

- **<u>זווית בין שני וקטורים</u>**- זווית בין שני וקטורים שונים מאפס מוגדרת כמספר $\alpha \in [0, \pi]$ באמצעות

  הנוסחה: $\cos\alpha = \frac{\langle a,b \rangle}{||a|| \cdot ||b||} \qquad a, b \neq o,$

  הערה: מאי שוויון קושי שוורץ נובע כי לכל $a, b \in R^n$ מתקיים האי שוויון: $\left|\frac{\langle a,b \rangle}{||a|| \cdot ||b||}\right| \leq 1$

- **<u>ניצבות של וקטורים</u>** - שני וקטורים ייקראו ניצבים אם המכפלה הסקלארית שלהם מתאפסת:

  $, a \perp b \Leftrightarrow \langle a, b \rangle = 0$

- **<u>צורות חופפות</u>**- שתי קבוצות F_1 ו- F_2 של מרחב אוקלידי נקראות חופפות אם קיימת איזומטריה של המרחב, המעבירה F_1 על F_2 עובדה זו מסומנת על ידי $F_1 \sim F_2$. צורות חופפות נחשבות שקולות, יחס החפיפה הינו יחס שקילות והוא מושג מרכזי בגיאומטריה.

- **<u>*אוריינטציה של מרחב וקטורי V*</u>** - בחירה של מחלקת שקילות של בסיסים. לכל מרחב וקטורי יש שתי אוריינטציות, אחת חיובית ואחת שלילית.

  האוריינטציה הקנונית של המרחב R^n מוגדרת על ידי בסיס סטנדרטי $e_1, e_2, \dots, e_n$ כאשר

  $e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)^T$ (1 נמצא במקום ה- i ו- T מסמן מעבר מוקטור שורה לוקטור עמודה).

  האוריינטציה הקנונית היא אוריינטציה חיובית.

  יהא $V_1, V_2, \dots, V_n$ בסיס של R^n כלשהו. האוריינטציה המוגדרת על ידי הבסיס הזה היא סימן הדטרמיננטה של מטריצת וקטורי הבסיס, מטריצה זאת מסומנת ב- A.

  מטריצה A נתונה על ידי $A = \begin{bmatrix} V_{1_1} & V_{1_2} & \cdots & V_{1_n} \\ V_{2_1} & V_{2_2} & \cdots & V_{2_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n_1} & V_{n_2} & \cdots & V_{n_n} \end{bmatrix}$, כאשר $Ae_i = V_i$.

ולכן בסיס $V_1, V_2, \dots, V_n$ של מרחב R^n מייצג אוריינטציה קנונית אם ורק אם הדטרמיננטה של מטריצת וקטורי הבסיס חיובית $det\begin{bmatrix} V_{1_1} & V_{1_2} & \cdots & V_{1_n} \\ V_{2_1} & V_{2_2} & \cdots & V_{2_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n_1} & V_{n_2} & \cdots & V_{n_n} \end{bmatrix} > 0$

3. עקומים מישוריים

3.1 המוטיבציה להגדרה פורמאלית

"עקום" הוא מושג בסיסי בגיאומטריה. בעקבות התפתחות מושג ה-"קואורדינאטות" במאה ה-17 משוואות בשני נעלמים הפכו למייצגים של עקומים מישוריים, ולמרות זאת לא הייתה עדין הגדרה פורמאלית למושג זה.

אוקלידס בספר יסודות כינה את העקום בשם "קו" והגדירו באופן אינטואיטיבי "אורך חסר רוחב".

פרבר (1999) מציג הגדרה אינטואיטיבית למושג זה באופן הבא:

"באופן אינטואיטיבי ניתן לתאר את העקום כמסלול של תנועה רציפה של נקודה".

בהגדרה זאת יש לציין את ההדגשים הבאים:

- מושג של עקום אינו בהכרח מתאר את התנועה של הנקודה כפונקציה של זמן.
- מסלולים חופפים ובעלי אותו כיוון תנועה מייצגים עקומים שקולים.
- התנועה של חלקיק המתוארת באמצעות עקום נמשכת באינטרוול סגור.

החל מהמחצית השנייה של המאה ה-19, בין השנים 1870-1930, התעוררו שאלות בחשבון הדיפרנציאלי בדבר טבעם של עקומים במישור. למשל:

- האם עקום יכול לתאר תנועה רציפה של נקודה שהיא עד כדי-כך לא-סדירה של מעשה המהירות משתנה בפתאומיות בכל לרגע נתון?
- האם עקום במישור ממלא אזור שלם במישור בעל שטח מסוים?
- האם עקום חותך את עצמו בכל נקודה?
- האם קיים עקום שאורכו אינסופי הכולא שטח סופי?

בכדי לעסוק בשאלות חקר טבעם של עקומים מישוריים יש צורך בהגדרה פורמאלית של המושג "עקום מישורי".

ג'ורדָן בשנת 1887 ניסח את ההגדרה המתמטית הפורמאלית הראשונה של מושג זה. עבורו עקום מתאר את המסלול של נקודה הנעה בצורה רציפה. והגדירו באופן הבא:

- **עקום ז'ורדן** הוא העתקה רציפה $\gamma\colon\ [\mathrm{a,b}] = \mathrm{I} \subseteq \mathrm{R} \to \mathrm{R}^2$

  העתקה γ **רציפה** בנקודה $\mathrm{t_0} \in [\mathrm{a,b}]$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שאם $|\mathrm{t}-\mathrm{t_0}| < \delta$
  אז הנורמה $\|\gamma(\mathrm{t}) - \gamma(\mathrm{t_0})\| < \varepsilon$. (הגדרה ע"פ ויירשטראס).

- **עקומים שקולים-** שני עקומי ז'ורדן $\gamma_1\colon [a_1,b_1] \to R^2 \gamma_2\colon [a_2,b_2] \to R^2$

  נקראים שקולים אם קיימת פונקציה $\varphi\colon [a_1,b_1] \to [a_2,b_2]$ חד- חד ערכית עולה ועל

  ואיזומטריה $A\colon R^2 \to R^2$ של המישור כך שלכל $t \in [a_1,b_1]$ מתקיים:

  $$\gamma_1\,(t) = A\big(\gamma_2\big(\varphi(t)\big)\big)$$

  אציין כי עקום בהיבט גאומטרי הינו מחלקת שקילות של עקומות זורדן ביחס השקילות הנ"ל.

- **פרמטריזציה של עקום**- הצגה של עקום בצורה אנליטית כזוג של שתי פונקציות ממשיות רציפות:

  $\mathrm{X}\colon \mathrm{I} = [\mathrm{a,b}] \to \mathrm{R}$ ו- $\mathrm{Y}\colon \mathrm{I} = [\mathrm{a,b}] \to \mathrm{R}$

  כך שלכל $\mathrm{t} \in [\mathrm{a,b}]$ $\gamma(\mathrm{t}) = \big(\mathrm{X(t)},\mathrm{Y(t)}\big)$

  אציין כי פרמטריזציה של עקום הינה איבר במחלקת השקילות המגדירה את העקום.

- **עקום חלק-** עקום נקרא חלק אם קיימת פרמטריזציה $t \in [a,b]$, $\gamma(t) = \big(X(t), Y(t)\big)$ כך שהפונקציות $X:[a,b] \to R$ ו- $Y:[a,b] \to R$ הן פונקציות חלקות C^2 (בעלות 2 נגזרות רציפות).

- **נקודה רגולרית** – נקודה $A \in \gamma$ של עקום היא רגולרית אם קיימת פרמטריזציה של העקום כך ש- $\gamma(t_0) = A$ וקיים הגבול : $\gamma'(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{\gamma(t_0)-\gamma(t)}{\Delta t}$ והוא שונה מווקטור האפס.
גבול זה נקרא וקטור משיק ומסומן ב- $T(t) = \gamma'(t)$

$$\gamma'(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\gamma(t_0)-\gamma(t)}{\Delta t} = \lim_{t\to\infty} \frac{(X(t_0),Y(t_0))-(X(t),Y(t))}{\Delta t} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{X(t_0)-X(t)}{\Delta t}, \frac{Y(t_0)-Y(t)}{\Delta t}\right) = (X'(t_0), Y'(t_0))$$

- **עקום רגולרי-** עקום γ הוא רגולרי אם כל הנקודות שלו הן רגולריות.

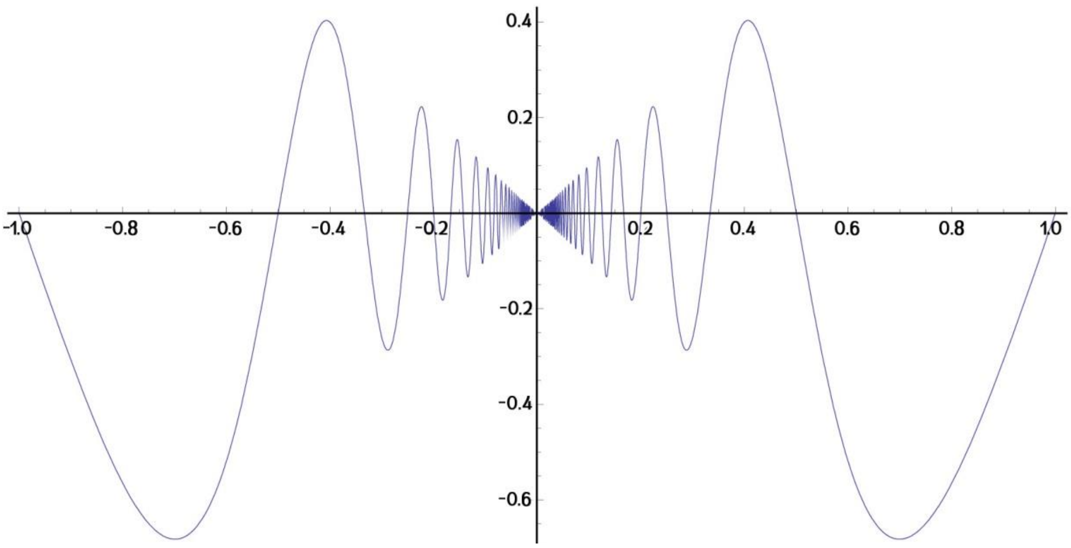
3.2 דיון בהגדרת העקום

בהתבוננות בהגדרות השונות של המושג "עקום" המובאות לעיל עולות השאלות הבאות :
מה המשותף לכל ההגדרות הנ"ל? והאם קיים הבדל עקרוני ביניהן?
לשם כך אציע שלוש דוגמאות של העתקות מאינטרוול למישור הממשי R^2 ,
ואדון בשאלה : אילו מבין הדוגמאות מתארות עקומים מישוריים?
ולהלן תיאור הדוגמאות :

דוגמא ראשונה

העתקה $\gamma: [-1,1] \to R^2$ המוגדרת באופן הבא : $\gamma(t) = \begin{cases} (t, t\sin\frac{\pi}{t}) & t \neq 0 \\ (0,0) & t = 0 \end{cases}$

התיאור הגרפי של ההעתקה הנ"ל מובא בתמונה הבאה :



תמונה 3: תיאור גרפי של הדוגמה הראשונה

נראה כי העקומה גזירה ברציפות אינסוף פעמים בקטע $[-1,0) \cup (0,1]$
ורציפה בקטע $[-1,1]$ ובפרק הבא נראה כי אורך העקומה הוא אינסופי

הוכחה

לכל $t \in [-1,1]$ מתקיים: $\gamma(t) = (t, t\sin\frac{\pi}{t})$ לפיכך:

$$\gamma'(t) = \left(1, \sin\frac{\pi}{t} + t\cos\frac{\pi}{t}\cdot\left(-\frac{\pi}{t^2}\right)\right) = \left(1, \sin\frac{\pi}{t} - \frac{\pi}{t}\cos\frac{\pi}{t}\right)$$

$$\gamma''(t) = \left(0, \cos\frac{\pi}{t}\cdot\left(-\frac{\pi}{t^2}\right) + \frac{\pi}{t^2}\cos\frac{\pi}{t} + \frac{\pi}{t}\sin\frac{\pi}{t}\cdot\left(-\frac{\pi}{t^2}\right)\right) = \left(0, -\frac{\pi^2}{t^3}\sin\frac{\pi}{t}\right)$$

ובאופן כללי כל הנגזרות קיימות והן מהצורה: $\left(0, A(t)\sin\frac{\pi}{t} + B(t)\cos\frac{\pi}{t}\right)$

כאשר $A(t), B(t)$ הם פולינומים מהצורה: $A(t) = \sum_{K\geq 1}\frac{a_K}{t^K}$ והמקדמים a_K הם מספרים ממשיים.

לפיכך: $\lim_{t\to 0}\gamma(t) = \lim_{t\to 0}\left(t, t\sin\frac{\pi}{t}\right) = (0,0) = \gamma(0)$ ולכן העקומה רציפה בקטע $[-1,1]$.

העקומה גזירה ברציפות אינסוף פעמים בקטע $[-1,0) \cup (0,1]$,

דוגמא שנייה

העתקה $[0,1]\times[0,1] \to [0,1] :\gamma$ רציפה ועל. דוגמא לכך ניתנה ב-1890 על ידי המתמטקאי ג׳וזפה פאנו (1932-1858) ודוגמא נוספת ניתנה ב-1891 על ידי המתמטקאי דויד הילברט (1943-1862).

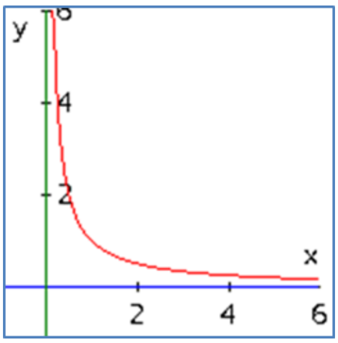
הערות:

- דוגמא של עקום רציף שעובר דרך כל נקודות הריבוע נקראת עקום פאנו,
- גאורג קנטור (1918-1845) הוכיח שקיימת התאמה חד-חד-ערכית ועל בין קבוצת הנקודות על הקטע $[0,1]$ לנקודות הריבוע $[0,1]\times[0,1]$.
- אוג׳ו נטו (1919-1848) הוכיח שלא קיים עקום ז׳ורדן שהוא גם רציף וגם חד-חד-ערכי ועובר דרך כל נקודות הריבוע.

דוגמא שלישית

העתקה $\gamma: (0,6] \to R^2$ המוגדרת באופן הבא: $\gamma(t) = \begin{cases} \left(t, \frac{1}{t}\right) & t \neq 0 \\ (0,0) & t = 0 \end{cases}$

התיאור הגרפי של ההעתקה הנ״ל מובא בתמונה שלהלן:



תמונה 4: תיאור גרפי של הדוגמא השלישית

דיון בשאלה: "אילו מבין שלוש הדוגמאות המובאות לעיל מתארות עקומים מישוריים?"

	האם הדוגמא מתארת את ההגדרה האינטואיטיבית: " אורך חסר רוחב"?	**האם הדוגמא מתארת את ההגדרה האינטואיטיבית: "מסלול של תנועה רציפה של נקודה"?**	**האם הדוגמא מתארת את הגדרת ז'ורדן?**
דוגמא 1	**לא**	**לא**	**כן**
דוגמא 2	**לא**	**כן**	**כן**
דוגמא 3	**כן**	**לא**	**לא**

המסקנות העולות מדיון זה הן:

- ההבדל העקרוני בין ההגדרות השונות נובע באופן תפיסת המושג "עקום מישורי" - התפיסה סטטית לעומת התפיסה הדינאמית.
- התרגום משפת היום- יום לשפה מתמטית, למשל, תרגום הביטוי "תנועה רציפה" לשפה מתמטית מוביל להבדל בין ההגדרה האינטואיטיבית להגדרה הפורמאלית.
- המשותף לכל ההגדרות השונות הוא התייחסות גלובלית למושג "עקום מישורי".
- התפתחות החדו"א הוביל לחקר מקומי בסביבת נקודה מסוימת שנמצאת על עקום רגולרי.
- השימוש בחדו"א לחקר תכונותיהם של עקומים מישוריים רגולרים מאפשר חקירה מקומית-נקודתית, המסייעת לחקר תכונותיהם הגלובליות של העקומים המישוריים. למעשה, שימוש בחדו"א מאפשר מעבר מחקר לוקאלי לחקר גלובלי.

בעבודה זאת אתמקד בשימוש בחדו"א לחקר תכונותיהם של עקומים מישוריים **רגולריים**.

4. שימוש בחדו"א להגדרת מושגים ראשוניים

בכדי להגדיר את מושג "עקמומיות" של עקום רגולרי במישור האוקלידי יש צורך להיעזר במושגים בסיסיים המוגדרים באמצעות החדו"א ומובאים להלן.

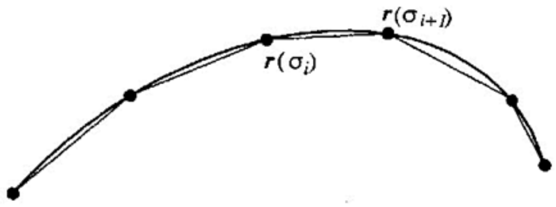
4.1 אורך קשת

הגדרה: יהי $\gamma:[a,b]\to R^2$ עקום חלק C^1, ותהי $P: a=t_o<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$

חלוקה של הקטע $[a,b]$, אורכו של הקטע הארוך ביותר בחלוקה P יקרא בשם פרמטר החלוקה של P, ויסומן ב-Δ.

הנקודות $\gamma(t_i)$, $0<i<n$ מחלקות את העקום לקשתות.

אם נחבר כל נקודה $\gamma(t_i)$ עם הנקודה $\gamma(t_{i+1})$ נקבל קו שבור החסום ע"י העקום ומסומן ב-L_Δ. (Δ פרמטר החלוקה של P) ואורכו שווה ל: $L_\Delta=\sum_{i=1}^{n}\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|$. כפי שמתואר בתמונה הבאה:



תמונה 5: קו שבור החסום ע"י העקום

אורך הקשת של העקום מוגדר כ: $L=\sup L_\Delta$, כאשר Δ עובר את כל החלוקות של הקטע $[a,b]$.

טענה: $\gamma:[a,b]\to R^2$ חלק C^1 הנתון בפרמטריזציה: $\gamma(t)=\big(X(t),Y(t)\big)\quad a\le t\le b$

אורך הקשת L של עקום הוא: $L=\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt=\int_a^b\sqrt{(X'(t))^2+(Y'(t))^2}\,dt$

אורך הקשת אינו תלוי בפרמטריזציה.

להוכחת הטענה נשתמש בהגדרות הבאות:

- תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[a,b]$ ותהי $P: a=t_o<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$ חלוקה של הקטע $[a,b]$.

  בכל אחד מקטעי החלוקה נבחר נקודה כלשהי שנסמנה ב- σ_i

  $t_{i-1}<\sigma_i<t_i$ $\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(\sigma_i)(t_i-t_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}f(\sigma_i)\Delta t_i$ נקרא סכום רימן (של f) השייך לחלוקה P.

- תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[a,b]$ נאמר שסכומי רימן של f שואפים לגבול I כאשר פרמטר החלוקה שואף לאפס. ונרשום: $\lim_{\lambda\to 0}\sigma=I$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם פרמטר החלוקה של P $\Delta<\delta$ אז <u>לכל</u> סכום רימן השייך לחלוקה כזאת מתקיים $|\sigma-I|<\varepsilon$.

  במקרה זה נאמר כי f אינטגרבילית לפי רימן ב-$[a,b]$.

  הגבול I יקרא אינטגרל רימן של f ב-$[a,b]$, ונסמן: $I=(R)\int_a^b f(x)dx$

הוכחת חלק א' של הטענה:

$$L_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(X(t_i)-X(t_{i-1})^2+(Y(t_i)-Y(t_{i-1})^2}=$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(X'(t_i)^2+(Y'(t_i)^2}\cdot(t_{i+1}-t_i) = \int_a^b \sqrt{(X'(t_i)^2+(Y'(t_i)^2}\,dt$$

(ע״פ משפט ערך הממוצע בחדו״א קיימת נקודה σ_i בקטע $[t_{i-1},t_i]$ כך ש:

$$(X(t_i)-X(t_{i-1})) = X'(\sigma_i)((t_i-t_{i-1}) \approx X'(t_i)(t_i-t_{i-1})$$

וקיימת נקודה ε_1 בקטע $[t_{i-1},t_i]$ כך ש:

$$(Y(t_i)-Y(t_{i-1})) = Y'(\varepsilon_1)((t_i-t_{i-1}) \approx Y'(t_i)(t_i-t_{i-1})$$

וכאשר $\max(t_i-t_{i-1})\to 0$ אז $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i-t_{i-1}) \to \int_a^b f(t)dt$).

הוכחת חלק ב' של הטענה:

יהי $\gamma_2:[a_2,b_2]\to R^2$ ו- $\gamma_1:[a_1,b_1]\to R^2$ שני עקומי ז'ורדן שקולים,

לכן קיימת פונקציה $\varphi:[a_1,b_1]\to[a_2,b_2]$ חד- חד ערכית עולה ועל

ואיזומטריה $A: R^2\to R^2$ של המישור כך שלכל $t\in[a_1,b_1]$ מתקיים:

$$\gamma_1(t) = \big(X_1(t),Y_1(t)\big) = A(\gamma_2(\varphi(t)))$$

ולכל $t\in[a_1,b_1]$ קיים $v\in[a_2,b_2]$ כך ש: $v=\varphi(t)$ ומתקיים:

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}\frac{\partial X_2}{dv}\\ \frac{\partial Y_2}{dv}\end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial X_1}{dt}\\ \frac{\partial Y_1}{dt}\end{pmatrix}\cdot\ \varphi'$$

$$\Longrightarrow L = \int_{a_2}^{b_2} \sqrt{\big(X_2{}'(v)\big)^2+\big(Y_2{}'(v)\big)^2}\,dv = \int_{a_1}^{b_1} \sqrt{\big(X_1{}'(t)\big)^2+\big(Y_1{}'(t)\big)^2}\ \varphi'(t)\ dt$$

דוגמאות:

- נחשב את אורך המעגל שרדיוסו R הנתון בשתי פרמטריזציות שונות,
  - <u>פרמטיזציה א'- (קואורדינטות פולריות):</u>

$$\gamma(t) = \big(X(t),Y(t)\big) \quad t\in[o,2\pi] \text{ לכל}$$

$$X(t) = R\cos t,\quad Y(t) = R\sin t$$

$$L = \int_o^{2\pi} \sqrt{\big(X'(t)\big)^2+\big(Y'(t)\big)^2}\,ds = \int_o^{2\pi} R\sqrt{\sin^2 t+\cos^2}\,dt = 2\pi R$$

  - <u>בפרמטיזציה ב'- (פרמטיזציה טבעית):</u>

$$\gamma(s) = \big(X(s),Y(s)\big)\ ,\qquad s\in[o,2\pi R]$$

$$X(s) = R\cos\frac{s}{R}\quad ,Y(s) = R\sin\frac{s}{R}$$

$$L = \int_o^{2\pi R} \sqrt{\big(X'(s)\big)^2+\big(Y'(s)\big)^2}\,ds = \int_o^{2\pi R} 1ds = 2\pi R$$

- אורך העקומה $\gamma: [-1,1] \to R^2$ המוגדרת באופן הבא: $\gamma(t) = \begin{cases} (t, t\sin\frac{\pi}{t}) & t \neq 0 \\ (0,0) & t = 0 \end{cases}$

הוא אינסופי.

הוכחה

די להוכיח כי אורך העקומה בקטע $[0,1]$ הוא אינסופי,

נגדיר את הסדרות הבאות: $a_n = \frac{1}{2n+\frac{1}{2}}$ ו- $b_n = \frac{1}{2n}$, ונציין את ההדגשים הבאים:

- $a_n = \frac{1}{2n+\frac{1}{2}} \to 0$ ו- $b_n = \frac{1}{2n} \to 0$

- לכל $n \in N$ מתקיים: $\sin\frac{\pi}{a_n} = \sin\left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = 1$

  לפיכך: $\gamma(a_n) = \left(a_n, a_n\sin\frac{\pi}{a_n}\right) = (a_n, a_n)$

- לכל $n \in N$ מתקיים: $\sin\frac{\pi}{b_n} = \sin(2\pi n) = 0$ ולפיכך: $\gamma(b_n) = \left(b_n, b_n\sin\frac{\pi}{b_n}\right) = (b_n, 0)$

- לכל $n \in N$: $0 < a_{n+1} < b_{n+1} < a_n < 1$

  נימוק: $0 < a_{n+1} = \frac{1}{2_n+2\frac{1}{2}} < b_{n+1} = \frac{1}{2_n+2} < \frac{1}{2_n+\frac{1}{2}} = a_n < 1$

לפיכך: $L(\gamma) \geq \sum_{n=1}^{\infty} L\left(\gamma\Big|_{a_{n+1}}^{a_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} L\left[\left(\gamma\Big|_{a_{n+1}}^{b_{n+1}}\right) + L\left(\gamma\Big|_{b_{n+1}}^{a_n}\right)\right]$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty}\left[d\big(\gamma(a_{n+1}), \gamma(b_{n+1})\big) + d\big(\gamma(b_{n+1}), \gamma(a_n)\big)\right] =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[d\big((a_{n+1}, a_{n+1}), (b_{n+1}, 0)\big) + d\Big((b_{n+1}, 0), (a_n, a_n)\Big)\right]$$

מאי שויון המשולש נקבל:

$$a_{n+1} = d\big((a_{n+1}, a_{n+1}), (a_{n+1}, 0)\big) \leq d\big((a_{n+1}, a_{n+1}), (b_{n+1}, 0)\big) + d\big((b_{n+1}, 0), (a_{n+1}, 0)\big)$$

$$a_n = d\Big((a_n, a_n), (a_n, 0)\Big) \leq d\Big((a_n, a_n), (b_{n+1}, 0)\Big) + d\big((b_{n+1}, 0), (a_n, 0)\big)$$

ומהעברת אגפים נקבל:

$$d\big((a_{n+1}, a_{n+1}), (b_{n+1}, 0)\big) \geq a_{n+1} - d\big((b_{n+1}, 0), (a_{n+1}, 0)\big)$$

$$d\Big((b_{n+1}, 0), (a_n, a_n)\Big) \geq a_n - d\big((b_{n+1}, 0), (a_n, 0)\big)$$

ולכן $L(\gamma) \geq \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{n+1} - d\big((b_{n+1}, 0), (a_{n+1}, 0)\big) + a_n - d\big((b_{n+1}, 0), (a_n, 0)\big)\right]$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{n+1} + a_n - |b_{n+1} - a_{n+1}| - |b_{n+1} - a_n|\right]$$

מהעובדה כי: $0 < a_{n+1} < b_{n+1} < a_n < 1$

נובע כי הביטוי: $-|b_{n+1} - a_{n+1}| - |b_{n+1} - a_n| = -(b_{n+1} - a_{n+1}) - a_n - b_{n+1}$

$$= -b_{n+1} + a_{n+1} - a_n + b_{n+1} = a_{n+1} - a_n$$

לפיכך $\Rightarrow L(\gamma) \geq \sum_{n=1}^{\infty}[a_{n+1} + a_n + a_{n+1} - a_n] = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{2n+\frac{5}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n+5} \to \infty$

אורך העקומה הוא אינסופי.

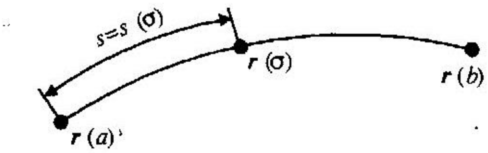
4.2 פרמטריזציה טבעית ופרמטר אורך הקשת

הגדרה: יהי $\gamma: [a,b] \to R^2$ עקום חלק הנתון בפרמטריזציה $a \leq t \leq b$ $\gamma(t) = \big(X(t), Y(t)\big)$

ו-$L = \int_b^a \| \gamma'(t)\| dt$

נגדיר פונקציה $S: [a,b] \to [O,L]$ באופן הבא: לכל $a \leq \sigma \leq b$, $S(\sigma) = \int_a^\sigma \|\gamma'(t)\| dt$

כפי שמתואר בשרטוט הבא:



תמונה 6: פרמטריזציה טבעית ופרמטר אורך הקשת

- עקומה **בפרמטריזציה טבעית** היא עקומה המקיימת $\|\gamma'(t)\| = 1$ לכל $t \in [a,b]$
- פרמטר σ יקרא **פרמטר אורך הקשת** אם לכל $\sigma \in [a,b]$, $S(\sigma) = \sigma$

  פרמטר זה יסומן ב- s (מכאן נובע $[O,L]$, $[a,b]$ מתלכדים)

הקשר שבין המושגים " פרמטריזציה טבעית" ו- "פרמטר אורך הקשת" מנוסח בטענה הבאה:

טענה: הצגה פרמטרית של עקום היא פרמטיזציה טבעית אם ורק אם הפרמטריציה נתונה באמצעות פרמטר אורך הקשת.

הוכחה:

יהי $\sigma \in [O,L]$ פרמטר אורך הקשת

$$\sigma = S(\sigma) = \int_0^\sigma \|\gamma'(t)\| dt = \|\gamma'(t)\| \cdot \sigma \quad \Leftrightarrow$$

$\sigma = \|\gamma'(t)\| \cdot \sigma$ אם ורק אם $\|\gamma'(t)\| = 1 \Leftrightarrow$

העקום נתון בפרמטריזציה טבעית $\Leftrightarrow$

דוגמאות לחישוב פרמטריזציה טבעית:

- <u>פרמטריזציה טבעית של ישר:</u>

ישר הנתון ע"י המשוואה: $y = mx + n$ ניתן להצגה פרמטרית $\gamma(t) = (t, mt + n)$,

ולכן: $\gamma'(t) = (1, m)$ $S(\sigma) = S(x) = \int_o^x \|\gamma'(t)\|dt = \int_o^x \sqrt{1+m^2}dt = \sqrt{1+m^2} \cdot x$

מהעובדה $S(x) = \sqrt{1+m^2}\ x$ נובע ש: $X(s) = \frac{s}{\sqrt{1+m^2}}$

לפיכך הפרמטריזציה הטבעית תהיה $\gamma(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{ms}{\sqrt{1+m^2}} + n\right)$.

- <u>פרמטריזציה טבעית של פרבולה:</u>

פרבולה $y = ax^2$ ניתנת להצגה פרמטרית $\gamma(t) = (t, at^2)$,

ולכן: $\gamma'(t) = (1, 2ax)$

$$S(\sigma) = S(x) = \int_o^x \|\gamma'(t)\|dt = \int_o^x \sqrt{1+(2at)^2}\,dt = \frac{1}{2a}\int_o^{2ax} \sqrt{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{4a}\left(2ax\sqrt{1+(2ax)^2} + \operatorname{arcsinh}(2ax)\right)$$

נובע מכך שלא ניתן למצוא פרמטריזציה טבעית לעקומה,

משום שלא קיים ביטוי פשוט לפונקציה ההופכית X(s).

- <u>פרמטיזציה טבעית של מעגל:</u>

$$\gamma(s) = (X(s), Y(s)), \qquad s \in [o, 2\pi R]$$

$$X(s) = R\cos\frac{s}{R}, \quad Y(s) = R\sin\frac{s}{R}$$

$$X'(s) = -\sin\frac{s}{R}, \quad Y'(s) = \cos\frac{s}{R}$$

יש להראות כי לכל $s \in [o, 2\pi R]$ מתקיים $\|\gamma'(s)\| = 1$

$$\|\gamma'(s)\| = \sqrt{(X'(s))^2 + (Y'(s))^2} = \sqrt{\left(\sin\frac{s}{R}\right)^2 + \left(\cos\frac{s}{R}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

4.3 משיק ונורמל

הגדרה : וקטור משיק לעקום רגולרי $a \le t \le b$ $\gamma(t) = \big(X(t), Y(t)\big)$ בנקודה $\gamma(t)$ הוא הוקטור

$$T(t) = \gamma\prime(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\big(X(t_0), Y(t_0)\big) - \big(X(t), Y(t)\big)}{\Delta t} = \lim_{t\to\infty} \frac{X(t_0) - X(t)}{\Delta t}, \frac{Y(t_0) - Y(t)}{\Delta t} = \big(X'(t_0), Y'(t_0)\big)$$

כאשר העקום נתון בפרמטריזציה טבעית : $\gamma: [0, L] \to R^2$, לכל $s \in [0, L]$

וקטור המשיק לעקום בנקודה $\gamma(s)$ הוא וקטור היחידה $\gamma\prime(s)$,

וניתן לתאר אותו בעזרת זווית α -הזווית שהמשיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x ,

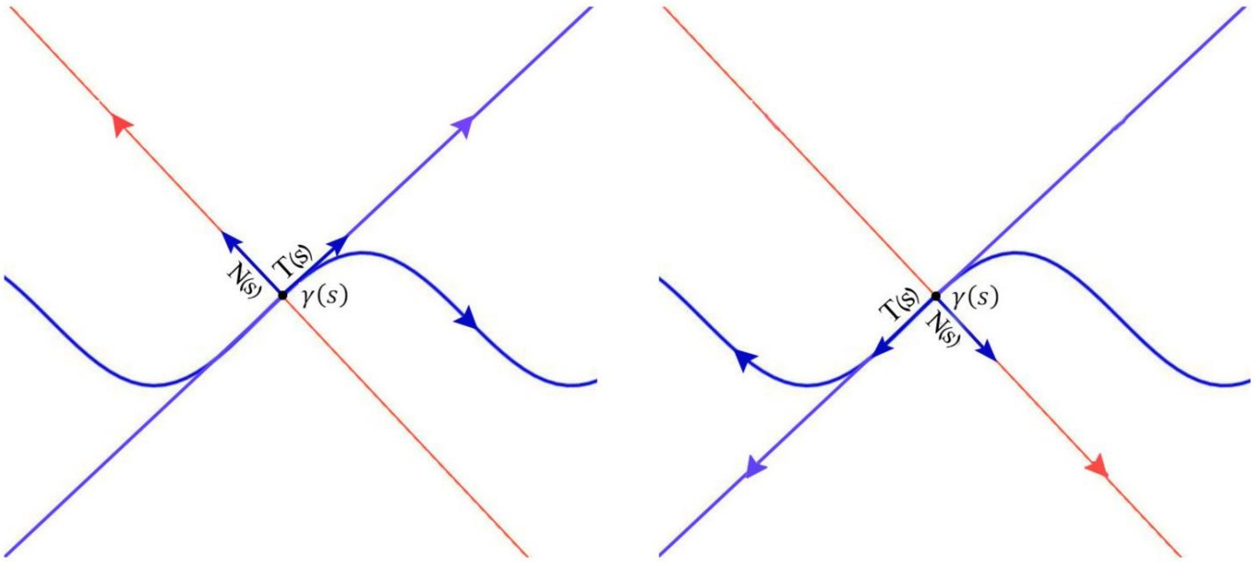
באופן הבא : $T(s) = \gamma\prime(s) = \big(X'(s), Y'(s)\big) = \big(\cos(\alpha(s)), \sin(\alpha(s))\big)$

הערות :

- בעקום רגולרי וקטור המשיק מוגדר בכל נקודה על העקום והוא שונה מווקטור האפס.
- הכיוון של ווקטור המשיק הוא בכיוון התנועה הרציפה של נקודה המגדירה את העקום.

הגדרה : וקטור היחידה $N(s)$ המאונך לוקטור המשיק $T(s)$ כך שהזוג $T(s), N(s)$ מהווה בסיס אורתונורמלי חיובי ביחס לאוריינטציה של המישור הנתון נקרא וקטור נורמל לעקום בנקודה $\gamma(s)$,

ניתן לתאר אותו באופן הבא : $N(s) = \big(-\sin(\alpha(s)), \cos(\alpha(s))\big)$



תמונה 7: וקטור משיק ווקטור נורמל לעקום רגולרי בנקודה שעליו (מתוך היישומון המתואר בפרק 7)

5. עקמומיות של עקום רגולרי

5.1 הגדרת מושג העקמומיות

באופן אינטואיטיבי העקמומיות מתארת מהירות סיבוב של וקטור משיק.

עקמומיות של עקום רגולרי הנתון בפרמטריזציה טבעית בנקודה $\gamma(s)$ מוגדרת באמצעות הנגזרת של פונקציית הזווית שהמשיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x, באופן הבא: $K(s) = \frac{d\alpha(s)}{ds}$

5.2 חישוב עקמומיות בפרמטריזציות שונות

5.2.1 עקום הנתון בפרמטריזציה טבעית:

נחשב את $K(s)$ כאשר העקום $\gamma(s) = \big(X(s), Y(s)\big)$ $s \in [0, L]$ בפרמטריזציה טבעית.

$$T(s) = \big(X'(s), Y'(s)\big) \Longrightarrow (X'(s))^2 + (Y'(s))^2 = 1$$

$$\tan\alpha(s) = \frac{Y'(s)}{X'(s)}$$

$$\alpha(s) = \arctan\frac{Y'(s)}{X'(s)}$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{1 + \frac{Y\prime(s)}{X\prime(s)}} \cdot \frac{Y''(s)\cdot X'(s) - X''(s)\cdot Y'(s)}{(X'(s))^2} =$$

$$= \frac{Y''(s)\cdot X'(s) - X''(s)\cdot Y'(s)}{(X'(s))^2\,\frac{(X'(s)^2 + Y'(s))}{(X'(s))^2}}$$

$$= Y''(s)\cdot X'(s) - X''(s)\cdot Y'(s) = K$$

לדוגמא: ישר שמשוואתו היא מהצורה $y = mx + n$

הצגתו בפרמטריזציה טבעית היא: $\gamma(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{ms}{\sqrt{1+m^2}} + n\right)$.

צ״ל: $K = 0$

הוכחה

$$Y(s) = \frac{ms}{\sqrt{1+m^2}} + n X(s) = \frac{s}{\sqrt{1+m^2}}\ ,$$

$$Y'(s) = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} X'(s) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\ ,$$

$$X''(s) = 0 \quad Y''(s) = 0$$

$$K = Y''(s)\cdot X'(s) - X''(s)\cdot Y'(s)$$

והרי $Y''(s) = X''(s) = 0$

ולכן $K = 0$

5.2.2 עקום הנתון בפרמטריזציה לפי גרף של פונקציה

$$\gamma(t) = \big(t\ , f(t)\big)$$

$$T(t) = \gamma'(t)\ = (1, f'(t)\ )$$

$$\tan \propto (t) = f'(t)$$

$$\propto (t) = \arctan f'(t) \Longrightarrow \frac{d \propto}{dt} = \frac{f''(t)}{1+f'(t)^2} L = \int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2}\, d\, t$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1+f'(t)^2}$$

$$\frac{d \propto}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d \propto}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1+f'(t)^2}} \cdot \frac{f''}{(1+f'(t)^2)} = \frac{f''(t)}{(1+f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

נובע מכך ש : $K = \frac{f''(t)}{(1+f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$

לדוגמא : פרבולה שמשוואתה מהצורה $y = ax^2$

הניתנת להצגה פרמטרית לפי גרף של פונקציה באופן הבא :

$$\gamma(t) = (t, at^2) = \big(t\ , f(t)\big)$$

ולכן: $\gamma'(t) = (1{,}2ax)$

נחשב עקמומיות של פרבולה הנתונה כגרף של פונקציה

$$K(t) = \frac{f''(t)}{(1+f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2a}{(1+(2ax)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

5.2.3 עקום הנתון בפרמטריזציה כלשהי

נתון עקום רגולרי $\gamma: [a, b] \to R^2$ הנתון בפרמטריזציה $\gamma(t) = \big(X(t), Y(t)\big)$ לכל $a \le t \le b$

פרמטר אורך הקשת מסומן ב- s , ומהגדרתו מקבלים: $s = \int_a^t \|\gamma'(\mathcal{E})\| d\mathcal{E}$

ולכן $\frac{ds}{dt} = \|\gamma'(t)\| = \sqrt{X'^2 + Y'^2}$

וקטור משיק לעקום רגולרי $\gamma(t) = \big(X(t), Y(t)\big)$ בנקודה $\gamma(t)$ הוא הוקטור $\gamma'(t)\ = (X'(t_0), Y'(t_0))$

הזווית שהמשיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x מסומנת בעזרת α ולכן :

$$\tan a(t) = \frac{Y'(t)}{X'(t)} \Longrightarrow a(t) = \arctan \frac{Y'(t)}{X'(t)} \Longrightarrow \frac{da}{dt} = \frac{1}{1+\left(\frac{Y'}{X'}\right)^2} \cdot \left(\frac{Y'}{X'}\right)' = \frac{Y''X' - X''Y'}{X'^2 + Y'^2}$$

ולכן $K(t) = \frac{da}{ds} = \frac{\frac{da}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{Y''X' - Y'X''}{X'^2+Y'^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{X'^2+Y'^2}}$

בסופו של דבר מקבלת הנוסחה $K(t) = \frac{Y''X'-X''Y'}{(X'^2+Y'^2)^{3/2}} = \frac{\det\begin{bmatrix} X' & Y' \\ X'' & Y'' \end{bmatrix}}{(X'^2+Y'^2)^{3/2}}$

לדוגמא: נחשב עקמומיות של מעגל ברדיוס R הנתון בפרמטריזציה הבאה:

$$\gamma(t) = \big(X(t), Y(t)\big) = (X_0 + R\cos t, Y_0 + R\sin t)$$

$$X' = -R\sin t\,, \qquad Y' = R\cos\ t$$

$$X'' = -R\cos t\,, \qquad Y'' = -R\sin\ t$$

$$K = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}$$

5.3 נוסחאות פרנה (frenet)

טענה: יהי $\gamma = [0, L] \to R^2$ עקום רגולרי הנתון בפרמטריזציה טבעית.

אזי מתקיימות המשוואות הבאות:

$$T'(s) = K(s)\cdot N(s)$$

$$N'(s) = -K(s)\cdot T(s)$$

הוכחת הטענה:

- $T(s) = \big(X'(s), Y'(s)\big) = \Big(\cos\big(\alpha(s)\big), \sin(\alpha(s)\Big)$

$$T'(s) = \frac{dT(s)}{ds} = \big(X''(s), Y''(s)\big) = (-\sin\big(\alpha(s)\big)\cdot\left(\frac{d\alpha}{ds}\right), \cos\big(\alpha(s)\big)\cdot\left(\frac{d\alpha}{ds}\right))$$

$$= \frac{d\alpha}{ds}\cdot(-\sin\big(\alpha(s)\big), \cos\big(\alpha(s)\big)$$

והרי $\frac{d\alpha}{ds} = K, \quad N(s) = (-\sin\big(\alpha(s)\big), \cos\big(\alpha(s)\big)$

$$\Longrightarrow T'(s) = K\cdot N(s)$$

- $N(s) = (-\ \sin\big(\alpha(s)\big),\ \cos\big(\alpha(s)\big)$

$$N'(s) = \frac{dN(s)}{ds} = (-\cos\big(\alpha(s)\big)\left(\frac{d\alpha}{ds}\right), -\ \sin\big(\alpha(s)\big)\left(\frac{d\alpha}{ds}\right))$$

$$= -\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)\big(\cos\big(\alpha(s)\big), \sin\big(\alpha(s)\big)\big)$$

והרי $T(s) = (\cos\big(\alpha(s)\big), \sin(\alpha(s))\frac{d\alpha}{ds} = k$

$$\Longrightarrow N'(s) = -K\cdot T(s)$$

5.4 תכונות של עקמומיות

- **עקמומיות אינה תלויה בבחירת הפרמטריזציה.**

יהי $\gamma: [a,b] \to R^2$ עקום רגולרי הנתון בפרמטריזציה כלשהי $\gamma(t) = \big(X(t), Y(t)\big)$ לכל $a \le t \le b$

אזי ווקטור המשיק לעקום בנקודה $\gamma(t)$ הוא הווקטור $T(t) = \gamma'(t)$ בנקודה מונח על ישר המשיק לעקום בנקודה זאת.ומנרמול הווקטורים $T(t), N(t)$ באופן הבא :

$$N(s) = \frac{N(t)}{\|N(t)\|} \quad , \quad T(s) = \frac{T(t)}{\|T(t)\|}$$

מתקבלים זוג הווקטורים $T(s), N(s)$

וממשוואת פרמה $T'(s) = K(s) \cdot N(s)$ נובע שהעקמומיות בנקודה היא $K(s)$

ולכן העקמומיות איננה תלויה בבחירת הפרמטריזציה של העקום.

- **שינוי באוריינטציית המישור משנה את סימן העקמומיות.**

אם משנים את אוריינטציית המישור אזי וקטור נורמל $N(s)$ הופך לוקטור $-N(s)$

וממשוואת פרמה $T'(s) = K(s) \cdot N(s)$ נובע שסימן העקמומיות $K(s)$ משתנה.

- **איזומטריה אוקלידית השומרת על אוריינטציות המישור שומרת את העקמומיות.**

יהי $\gamma_1 = [0, L] \to R^2$ עקום הנתון בפרמטריזציה טבעית.

ותהי $A: R^2 \to R^2$ איזומטריה אוקלידית השומרת על אוריינטציות המישור.

נסמן : $\gamma_2(s) = A(\gamma_1(s))$ ולכן $\gamma_2{}'(s) = A(\gamma_1{}'(s))$

מכאן נובע ש $\|\gamma_2{}'(s)\| = \|A(\gamma_1{}'(s))\|$ ולכן $s \in [0, L]$ הוא פרמטר טבעי לעקום $\gamma_2(s)$.

ולכן אם $T(s)$ הוא ווקטור משיק לעקום γ_1 בנקודה $\gamma_1(s)$ ו- $N(s)$ הוא ווקטור הנורמל

אזי $A(T(s))$ הוא ווקטור משיק לעקום γ_2 בנקודה $\gamma_2(s)$ ו-$A(\ N(s)\ )$ הוא ווקטור הנורמל .

וממשוואת פרמה $T'(s) = K(s) \cdot N(s)$ נובע ש $A(T'(s)) = K(s) \cdot A(\ N(s))$, ולכן $K(s)$

היא העקמומיות של עקום γ_1 בנקודה $\gamma_1(s)$ והעקמומיות של עקום γ_2 בנקודה $\gamma_2(s) = A(\gamma_1(s)$

ולכן איזומטריה אוקלידית השומרת על אוריינטציות המישור שומרת את העקמומיות.

- **שינוי אוריינטציית העקום משנה את סימן העקמומיות.**

אם משנים את אוריינטציית העקום אזי וקטור המשיק $T(s)$הופך לוקטור $-T(s)$.

שינוי בכיוון וקטור המשיק $T(s)$ מביא לשינוי בכיוון וקטור הנורמל $N(s)$ ווקטור הנורמל $N(s)$ הופך לוקטור $-N(s)$, משום שווקטור הנורמל לעקום בנקודה $\gamma(s)$ הוא ווקטור יחידה $N(s)$ המאונך לוקטור המשיק $T(s)$ כך שהזוג $T(s), N(s)$ מהווה בסיס אורתונורמלי ביחס לאוריינטציה של המישור.

וממשוואת פרמה $N'(s) = -K(s) \cdot T(s)$נובע שסימן העקמומיות $K(s)$ משתנה.

5.5 משוואה טבעית של עקום

הגדרה: עקמומיות $K(s)$ כפונקציה של אורך הקשת

$K: [0, L] \to R$, $s \in [0, L]$ נקראת משוואת טבעית של עקום.

(פרמטר s הוא פרמטר אורך הקשת בפרמטריזציה טבעית, ו-L מהווה את ארוך העקום)

דוגמאות:

א. מצאו עקום מישורי $\gamma: R \to R^2$ בפרמטריזציה טבעית $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$

המתקבל ע״י המשוואה הטבעית $K(s) = s$ לכל $s \in R$

<u>שלב א׳</u>- ראשית נראה שהעקומה $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$ המוגדרת באופן הבא:

$$X(s) = \int_0^s \cos(\emptyset(u))du \quad \text{-ו} \quad Y(s) = \int_0^s \sin(\emptyset(u))du$$

(כאשר $\emptyset: R \to R$ פונקציה חלקה - גזירה ברציפות אינסוף פעמים).

נתונה בפרמטריזציה טבעית, ונחשב את עקמומיותה.

וקטור המשיק הוא: $\gamma'(s) = \big(\cos(\emptyset(s)), \sin(\emptyset(s))\big)$

נחשב את אורכו $\|\gamma'(s)\| = \sqrt{\cos^2(\emptyset(s)) + \sin^2(\emptyset(s))} = 1$

מכאן נובע ש:

- העקומה נתונה בפרמטריזציה טבעית,
- ווקטור המשיק הוא: $T(s) = \gamma'(s) = \big(\cos(\emptyset(s)), \sin(\emptyset(s))\big)$
- נורמל היחידה הוא: $N(s) = \big(-\sin(\emptyset(s)), \cos(\emptyset(s))\big)$
- $T'(s) = \gamma''(s) = \big(-\sin(\emptyset(s))\emptyset'(s), \cos(\emptyset(s))\emptyset'(s)\big)$

כעת נשתמש במשוואות פרמה כדי לחשב את העקמומיות,

$$T'(s) = K(s) \cdot N(s)$$

נציב $N(s) = \big(-\sin(\emptyset(s)), \cos(\emptyset(s))\big)$ ו- $T'(s) = \big(-\sin(\emptyset(s))\emptyset'(s), \cos(\emptyset(s))\emptyset'(s)\big)$

ונקבל $\big(-\sin(\emptyset(s))\emptyset'(s), \cos(\emptyset(s))\emptyset'(s)\big) = K(s) \cdot \big(-\sin(\emptyset(s)), \cos(\emptyset(s))\big)$

$$\Longrightarrow \qquad \gamma''(s) = K(s)N(s) \Longrightarrow \quad K(s) = \emptyset'(s)$$

לפיכך העקמומיות היא: $K(s) = s = \emptyset'(s)$

<u>שלב ב׳</u>- מציאת הפרמטריזציה הטבעית של העקום הנתון ע״י המשוואה הטבעית $K(s) = s$

בסעיף הקודם הראנו שהעקמומיות היא: $K(s) = s = \emptyset'(s)$ ולכן: $\emptyset(s) = \frac{1}{2}s^2$

$$\Longrightarrow \quad \gamma(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\frac{1}{2}u^2\right)du, \int_0^s \sin\left(\frac{1}{2}u^2\right)du\right)$$

ב. הדוגמא הבאה נקראת **עקום Cornu**

מצאו עקום מישורי $\gamma: R \to R^2$ בפרמטריזציה טבעית $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$

המתקבל ע"י המשוואה הטבעית $K(s) = C^2 s$ לכל $s \in R$.

פתרון

נתונה המשוואה הטבעית $K(s) = C^2 s$ לכל $s \in R$

$$\alpha(s) = \int_0^s C^2 \sigma d\sigma = \frac{1}{2} C^2 s^2$$

$$X(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{1}{2} C^2 \sigma^2\right) d\sigma ,$$

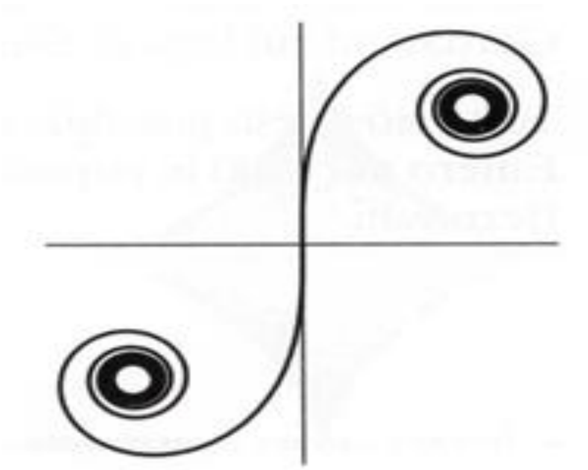
$$Y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{1}{2} C^2 \sigma^2\right) d\sigma ,$$

נציב $t = \frac{C\sigma}{\sqrt{2}}$ ונקבל: $\gamma(s) = (\frac{\sqrt{2}}{C} \int_0^s \cos t^2 dt , \frac{\sqrt{2}}{C} \int_0^s \sin t^2 dt)$

(אינטגרלים אלה נקראים האינטגרלים של fresnel והעקום המתקבל נקרא נקרא עקום Cornu.)

וכאשר $s \to \infty$ העקום שואף לנקודה $(\frac{\sqrt{\pi}}{2C}, \frac{\sqrt{\pi}}{2C})$

מכיוון שידוע $\int_0^\infty \sin t^2 dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2C}$ ו – $\frac{\sqrt{2}}{C} \int_0^\infty \cos t^2 dt = \frac{\sqrt{2}}{C}$



תמונה 8: תיאור גרפי של עקום Cornu

6. אפיונים נוספים למושג עקמומיות

6.1 קירוב מעגלי לעקום בנקודה שעליו

הגדרה - יהא $\gamma: \mathrm{R} \to \mathrm{R}^2$ עקום רגולרי הנתון בפרמטריזציה טבעית $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$

נניח שהעקמומיות שלו בנקודה מסוימת $\gamma(s)$ שונה מאפס $K(s) \neq 0$

רדיוס העקמומיות בנקודה $s \in \mathrm{R}$ הוא: $R(s) = \frac{1}{|K(s)|}$

ומרכז עקמומיות של העקום בנקודה $\gamma(s)$ מוגדר בנקודה $C(s) = \gamma(s) + \frac{1}{K(s)} N(s)$

טענה : יהא $R: [0, L] \to R^2$ עקום רגולרי הנתון בפרמטריזציה טבעית.

נניח שהעקמומיות שלו בנקודה מסוימת $\gamma(s)$ שונה מאפס $K(s) \neq 0$.

נבחר שתי נקודות $s_1, s_2 \in [0, L]$ כך ש: $0 \leq s_1 < s < s_2 \leq L$ קרובות מספיק ל-s,

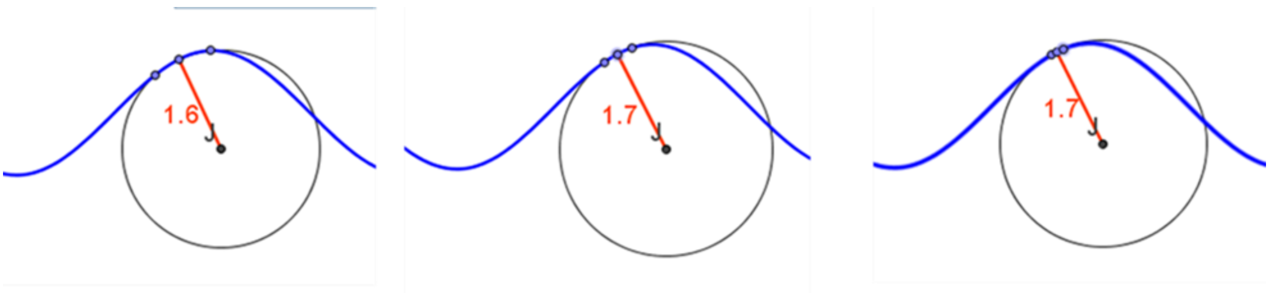
נסמן ב $O(s, s_1, s_2)$ את מרכז המעגל העובר דרך הנקודות $\gamma(s), \gamma(s_1), \gamma(s_2)$.

אזי מתקיים:

א. הנקודות $\gamma(s), \gamma(s_1), \gamma(s_2)$ אינן נמצאות על ישר אחד.

ב. $O(s, s_1, s_2)$ שואף למרכז העקמומיות של העקום בנקודה $\gamma(s)$ כאשר s_1, s_2 שואפות ל-s.

כלומר: $\lim_{s_1, s_2 \to s} O(s, s_1, s_2) = C(s)$



תמונה 9: קירוב מעגלי לעקום רגולרי בנקודה שעליו (מתוך היישומון)

הוכחה

א. יהיו $s_1, s_2 \in [0,L]$ כך ש: $0 \le s_1 < s < s_2 \le L$ קרובות מספיק ל-s,

נניח בשלילה כי שלוש הנקודות $\gamma(s_1), \gamma(s_2), \gamma(s)$ נמצאות על ישר אחד ונסמנו ב-ℓ

אז קיים וקטור $a \neq 0$, המאונך לישר ℓ, ומתקיים:

$$\langle a, \gamma(s_1)\rangle = \langle a, \gamma(s_2)\rangle = \langle a, \gamma(s)\rangle = 0$$

נגדיר פונקציה $f: I = [0,L] \to R$ באופן הבא:

לכל $s \in [0,L]$ $\quad f(s) = \langle a, \gamma(s)\rangle$

נציין כי γ חלקה ולכן f חלקה. ו- $f(s_1) = f(s_2) = f(s) = 0$

לכן ממשפט רול נובע ש:

קיימות זוג נקודות $t_1 \in (s_1, s), t_2 \in (s_2, s)$ כך ש: $f'(t_1) = f'(t_2) = 0$.

וקיימת נקודה $j \in (t_1, t_2)$ כך ש: $f''(j) = 0$

ולכן מתקיימת מערכת המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \langle a, \gamma'(t_1)\rangle = f'(t_1) = 0 \\ \langle a, \gamma''(j)\rangle = f''(j) = 0 \end{cases}$$

ממערכת משוואות זאת נובע כי a מאונך לשני הווקטורים $\gamma'(t_1), \gamma''(j)$.

הווקטורים $\gamma'(t_1), \gamma''(j)$ מהווים בסיס ל-R^2 (משום ש- $\det(\gamma'(t_1)|\gamma''(r)) = K(s) \neq 0$

ולכן בהכרח a=0, בסתירה.

ב. נגדיר פונקציה חלקה באופן הבא: לכל $s \in [0,L]$ $\quad f(s) = \|\gamma(s) - O(s,s_1,s_2)\|^2$ ולכן:

- $f'(s) = \langle \gamma(s) - O(s,s_1,s_2), \gamma(s) - O(s,s_1,s_2)\rangle' = 2\langle \gamma'(s), \gamma(s) - O(s,s_1,s_2)\rangle$
- $f''(s) = 2\langle \gamma'(s), \gamma(s) - O(s,s_1,s_2)\rangle = 2\langle \gamma''(s), \gamma(s) - O(s,s_1,s_2)\rangle + 2\langle \gamma'(s), \gamma'(s)\rangle$
  $= 2\langle \gamma''(s), \gamma(s) - O(s,s_1,s_2) + 2\rangle$
- $f(s_1) = f(s_2) = f(s_3) = [R(s,s_1,s_2)]^2$

ממשפט רול נובע ש:

קיימות נקודות $t_1 \in (s_1, s), t_2 \in (s_2, s)$ כך ש: $f'(t_1) = f'(t_2) = 0$.

וקיימת נקודה $j \in (t_1, t_2)$ כך ש: $f''(j) = 0$ ולכן,

$$0 = f'(t_1) = 2\langle \gamma'(t_1), \gamma(t_1) - O(s,s_1,s_2)\rangle \Longrightarrow \langle \gamma'(t_1, \gamma(t_1) - O(s,s_1,s_2)\rangle = 0$$

$$0 = f''(j) = 2\langle \gamma''(j), \gamma(j) - O(s,s_1,s_2)\rangle + 2 \Longrightarrow \langle \gamma''(j), \gamma(j) - O(s,s_1,s_2)\rangle = -1$$

כאשר $s_1, s_2 \to s$ אז גם $t_1, j \to s$, וכעת יש להראות כי:

- $\lim_{t_1 \to s} \langle \gamma'(t_1), O(s) - O(s,s_1,s_2)\rangle = 0$
- $\lim_{j \to s} \langle \gamma''(j), C(s) - O(s,s_1,s_2)\rangle = 0$

לשם כך ניעזר במשוואת פרמה : $\gamma''(s) = K(s)N(s) \;\Rightarrow\; |K(s)| = \|\gamma''(s)\| = \sqrt{\langle\gamma''(s), \gamma''(s)\rangle}$

ונראה כי :

א. $\langle\gamma'(t_1), C(s) - O(s, s_1, s_2)\rangle = \langle\gamma'(t_1), \gamma(s) - \gamma(t_1)\rangle + \frac{1}{K(s)}\langle\gamma'(t_1), N(s)\rangle$

נימוק :

$$\langle\gamma'(t_1), C(s) - O(s, s_1, s_2)\rangle = \langle\gamma'(t_1), \gamma(s) + \frac{1}{K(s)}N(s) - O(s, s_1, s_2)\rangle$$

$$= \langle\gamma'(t_1), \gamma(t_1) - O(s, s_1, s_2)\rangle + \langle\gamma'(t_1), \gamma(s) - \gamma(t_1) + \tfrac{1}{K(s)}N(s)\rangle$$

$$= 0 + \langle\gamma'(t_1), \gamma'(s) - \gamma(t_1)\rangle + \tfrac{1}{K(s)}\langle\gamma'(t_1), N(s)\rangle$$

ב. $\langle\gamma''(j), C(s) - O(s, s_1, s_2)\rangle = -1 + \langle\gamma''(j), \gamma(s) - \gamma(j)\rangle + \frac{\langle\gamma''(j),\gamma''(s)\rangle}{\langle\gamma''(s),\gamma''(s)\rangle}$

נימוק :

$$\langle\gamma''(j), C(s) - O(s, s_1, s_2)\rangle = \langle\gamma''(j), \gamma(s) + \frac{1}{K(s)}N(s) - O(s, s_1, s_2)\rangle$$

$$= \langle\gamma''(j), \gamma(j) - O(s, s_1, s_2)\rangle + \langle\gamma''(j), \gamma(s) - \gamma(j) + \tfrac{1}{K(s)}N(s)\rangle.$$

$$= -1 + \langle\gamma''(j), \gamma(s) - \gamma(j)\rangle + \langle\gamma''(j), \frac{1}{K(s)}N(s)\rangle$$

$$= -1 + \langle\gamma''(j), \gamma(s) - \gamma(j)\rangle + \tfrac{1}{K^2(s)}\langle\gamma''(j), \gamma''(s)\rangle$$

$$= -1 + \langle\gamma''(j), \gamma(s) - \gamma(j)\rangle + \tfrac{\langle\gamma''(j),\gamma''(s)\rangle}{\langle\gamma''(s),\gamma''(s)\rangle}$$

ולכן :

- $\lim\limits_{t_1\to s}\langle\gamma'(t_1), O(s) - O(s, s_1, s_2)\rangle = \lim\limits_{t_1\to s}\langle\gamma'(t_1), \gamma'(s) - \gamma(t_1)\rangle + \frac{1}{K(s)}\langle\gamma'(t_1), N(s)\rangle) =$

  $\langle\gamma'(s), \gamma(s) - \gamma(s)\rangle + \frac{1}{K(s)}\langle\gamma'(s), N(s)\rangle = 0$

- $\lim\limits_{j\to s}\langle\gamma''(j), C(s) - O(s, s_1, s_2)\rangle = \lim\limits_{j\to s}(-1 + \langle\gamma''(j), \gamma(s) - \gamma(j)\rangle + \frac{\langle\gamma''(j),\gamma''(s)\rangle}{\langle\gamma''(s),\gamma''(s)\rangle}) =$

  $-1 + \langle\gamma''(j), \gamma(s) - \gamma(s)\rangle + \frac{\langle\gamma''(s),\gamma''(s)\rangle}{\langle\gamma''(s),\gamma''(s)\rangle} = 0$

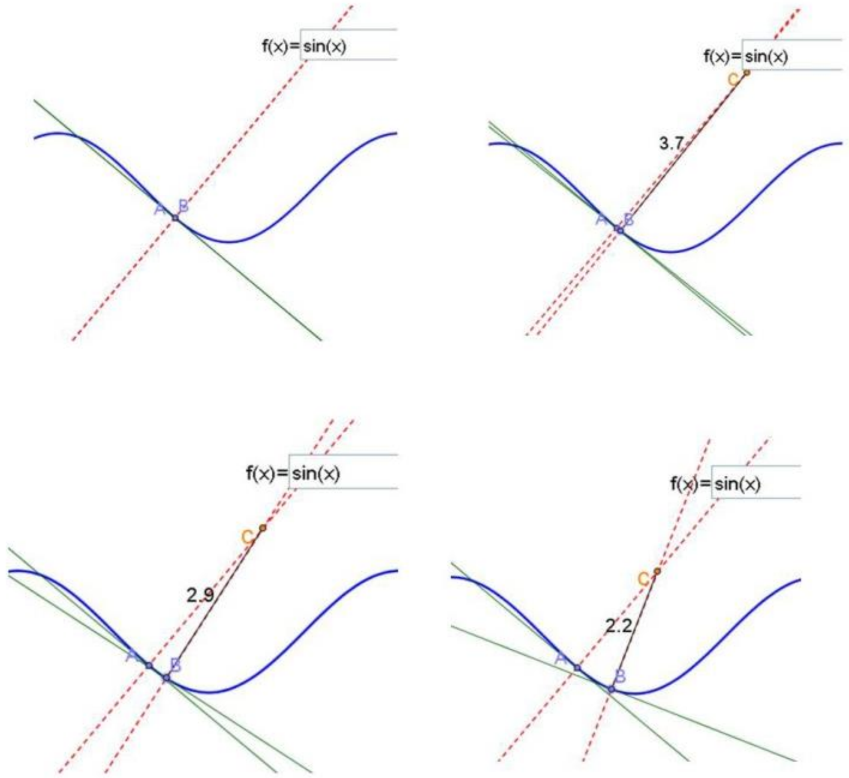
  כמו בסעיף הקודם, בסביבה מספיק קטנה של s הווקטורים $\gamma'(t_1), \gamma''(j)$ מהווים בסיס ל-R^2 ולכן :

$$\lim_{s_1,s_2\to s}(C(s) - O(s, s_1, s_2)) = 0 \;\Longrightarrow\; \lim_{s_1,s_2\to s} O(s, s_1, s_2) = C(s)$$

6.2 מרכז עקמומיות כגבול נקודת מפגש הנורמלים

יהא $r: [0, L] \to R^2$ עקום רגולרי בפרמטריזציה טבעית ו $r(s)$ נקודה עם $K(s) \neq 0$ נעביר נורמל בנקודה הזאת ובנקודה $r(s_1)$ הקרובה אליה.

טענה אם s_1 קרובה מספיק ל- s אז הנורמלים לעקום בנקודות $r(s)$ ו- $r(s_1)$ אינם מקבילים ונקודת החיתוך שלהם $O(s, s_1)$ שואפת למרכז העקמומיות בנקודה $r(s)$ כאשר $s_1 \to s$.



תמונה 10: גבול נקודת מפגש הנורמלים לעקום בסביבת נקודה שעליו (מתוך היישומון)

הוכחה:

את נקודת החיתוך ניתן למצוא מהמשוואה:

$$r(s_1) + \tau n(s_1) = \tau(s) + \mu n(s), \qquad \tau, \mu \in R$$

נסמן $s' - s = \delta$. מנוסחת Taylor וממשוואות Frenet נובע כי:

$$r(s_1) = r(s) + r'(s)\delta + o(\delta) = r(s) + t(s) \cdot \delta + o(\delta)$$

$$n(s_1) = n(s) + n'(s)\delta + o(\delta) = n(s) - K(s) \cdot t(s) \cdot \delta + o(\delta)$$

על ידי הצבה במשוואת פרמה מקבלת המשוואה הבאה:

$$r(s) + \tau n(s) + \delta \cdot t(s) - \tau K(s) \cdot t(s) \cdot \delta = r(s) + \mu \cdot n(s) + o(\delta)$$

מכאן נובע ש:

$\tau = \mu = \frac{1}{K(s)} + o(\delta)$ ולכן נקודת החיתוך שואפת ל- $r(s) + \frac{1}{K(s)} n(s)$.

7. יישומים בהוראת המתמטיקה בחט"ע

בפרק זה אציע גישה להוראת מושג "עקמומיות" של עקומה במישור האוקלידי בחטיבה העליונה בקישורית לדיסציפלינה, המתבססת על העקרונות הבאים:

- שינוי בתפיסת הבעיה- הגדרת הרעיון המוביל להתפתחות מושג העקמומיות בדיסציפלינה, רעיון זה מהווה פריצת דרך בפתרון בעיות בגיאומטריה.
- הגדרת מושג "עקמומיות" של עקומה במישור האוקלידי בקישוריות להגדרה הפורמאלית בדיסציפלינה. והעצמת התלמידים ללמידת חקר.
- חישוב עקמומיות של גרף של פונקציה בנקודה שעליו באמצעות יישומון דינמי שנבנה באמצעות תוכנת הגיאוגברה , כפי שיתואר בהמשך, מטרות השימוש ביישומון הן הצגה דינמית של קירובים ליניאריים ומעגליים לגרף של פונקציה בנקודה שעליו וחישוב רדיוס המעגל המשיק בצורה מיידית ללא צורך בנוסחאות או בחישובים אריתמטיים מסובכים.
- יישומים רלוונטים לנושאים הנלמדים בכיתה.
- הצצה לעבודות חקר של מתמטיקאים בדיסציפלינה.

7.1 הרעיון המוביל להתפתחות מושג עקמומיות

שימוש בחדו"א לחקר תכונות לוקאליות של עקומים ומשטחים המסייעות לפתרון בעיות בגיאומטריה הוביל להתפתחות מושג עקמומיות בדיסציפלינה.

רעיון זה יוצג לתלמידים במקרה הדו-ממדי באמצעות שימוש בקירובים ליניאריים ומעגליים לעקום רגולרי בנקודה שעליו לחקר תכונות הנשמרות בהזזות בסיבובים ובשיקופים של העקום.

בכדי להציג רעיון זה בכיתה יש צורך שהתלמידים יגדירו קודם את המושגים הבאים:

א. קירוב לינארי לגרף של פונקציה בנקודה שעליו,
ב. קירוב מעגלי לגרף של פונקציה בנקודה שעליו.
ג. נורמל לגרף של פונקציה בנקודה שעליו.
ד. גבול נקודת מפגש הנורמלים לגרף של פונקציה בסביבת נקודה שעליו.
ה. אוריינטציה של המישור.
ו. שינוי באוריינטציית המישור.
ז. אוריינטציית מישור חיובית ואוריינטציית מישור שלילית
ח. אוריינטציה קנונית של המישור
ט. ווקטור יחידה המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שעליו.
י. וקטור יחידה המאונך לגרף הפונקציה בנקודה שעליו הנקרא וקטור נורמל.
יא. תכונה אינוריאנטית לאוריינטצייה של המישור.

התלמידים יגדירו את המושגים הנ"ל תוך התמודדות עם משימות חקר ובאמצעות שימוש ביישומון דינמי הנבנה בתוכנת הגיאוגברה לצורך פעילות זאת.

<u>המשימה לתלמידים:</u>

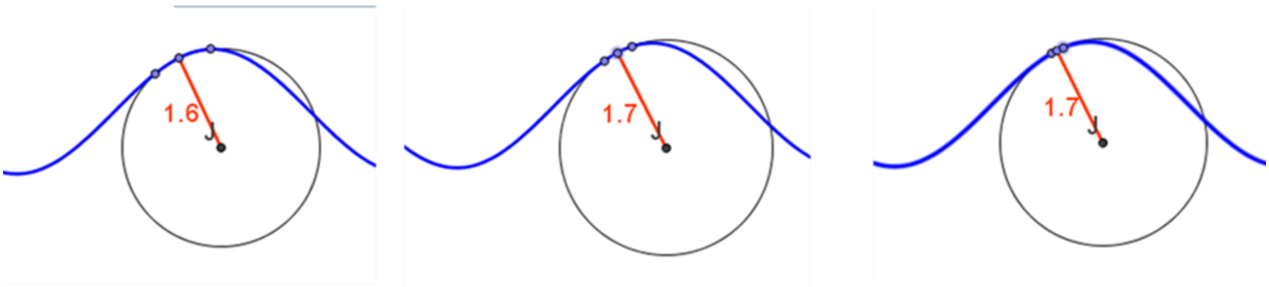
- התלמידים יגדירו את המושגים הנ"ל ויתארו תכונות של עקום רגולרי הנשמרות לאחר הזזתו סיבובו ושיקופו במישור האוקלידי תוך התנסות ביישומון הנבנה בתוכנת הגיאוגברה לצורך פעילות זאת.

<u>תיאור היישומון:</u>

באמצעות היישומון ניתן לשרטט את האובייקטים הגיאומטריים הבאים :

א. גרף של פונקציה כלשהיא, התלמידים מקלידים את משוואת הפונקציה והיישומון מציג את שרטוט גרף הפונקציה.

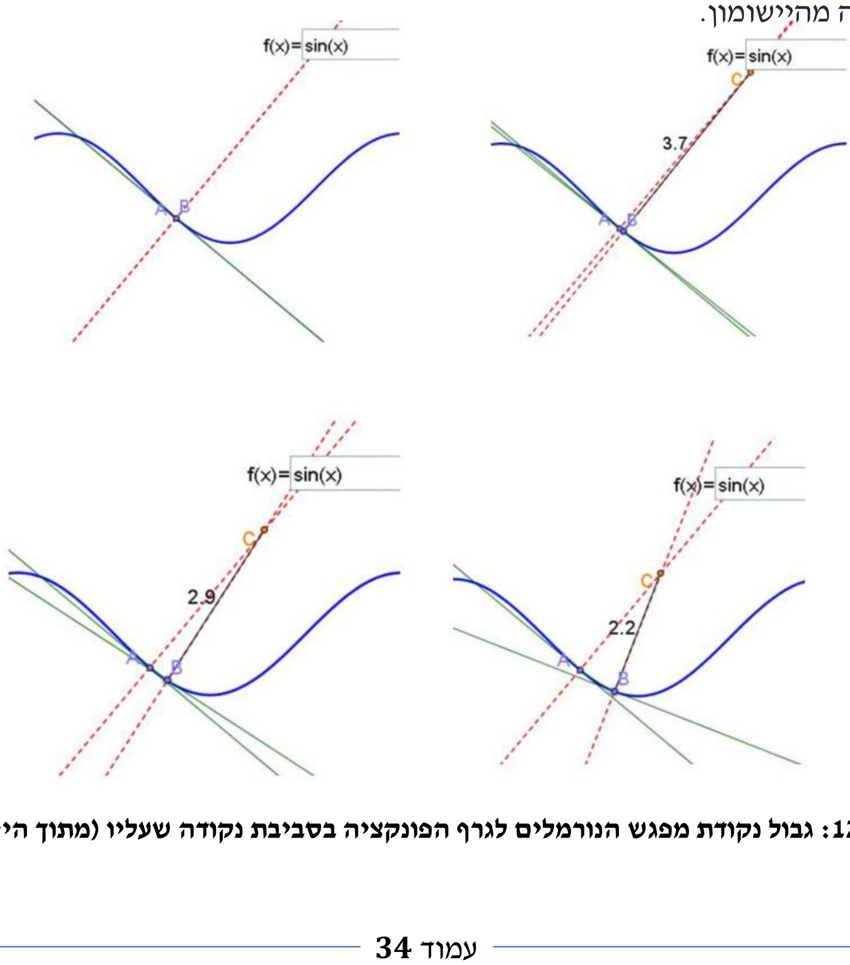
ב. קירוב מעגלי לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת וחישוב רדיוסו. התלמידים מסמנים שלוש נקודות על גרף הפונקציה והיישומון מציג את המעגל העובר דרך שלוש הנקודות הנ״ל, התלמידים יכולים לקרב את שלוש הנקודות הנ״ל לנקודה האמצעית ולקבל את הקירוב המעגלי לגרף הפונקציה בנקודה זאת. כפי שמתואר בתמונה הבאה הלקוחה מהיישומון.



תמונה 11: קירוב מעגלי לגרף של פונקציה בנקודה שעליו (מתוך היישומון)

ג. גבול נקודת מפגש הנורמלים לגרף הפונקציה בסביבת נקודה שעל גרף הפונקציה. התלמידים מסמנים שתי נקודות על גרף הפונקציה ובאמצעות היישומון הם משרטטים את שני המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות אלה ואת הנורמלים לגף הפונקציה בנקודות אלה.

התלמידים מקרבים בין שתי הנקודות ומוצאים את גבול נקודת החיתוך של שני הנורמלים ואת המרחק בין נקודת מפגש הנורמלים לקירוב של שתי הנקודות הנ״ל. כפי שמתואר בתמונה הבאה הלקוחה מהיישומון.

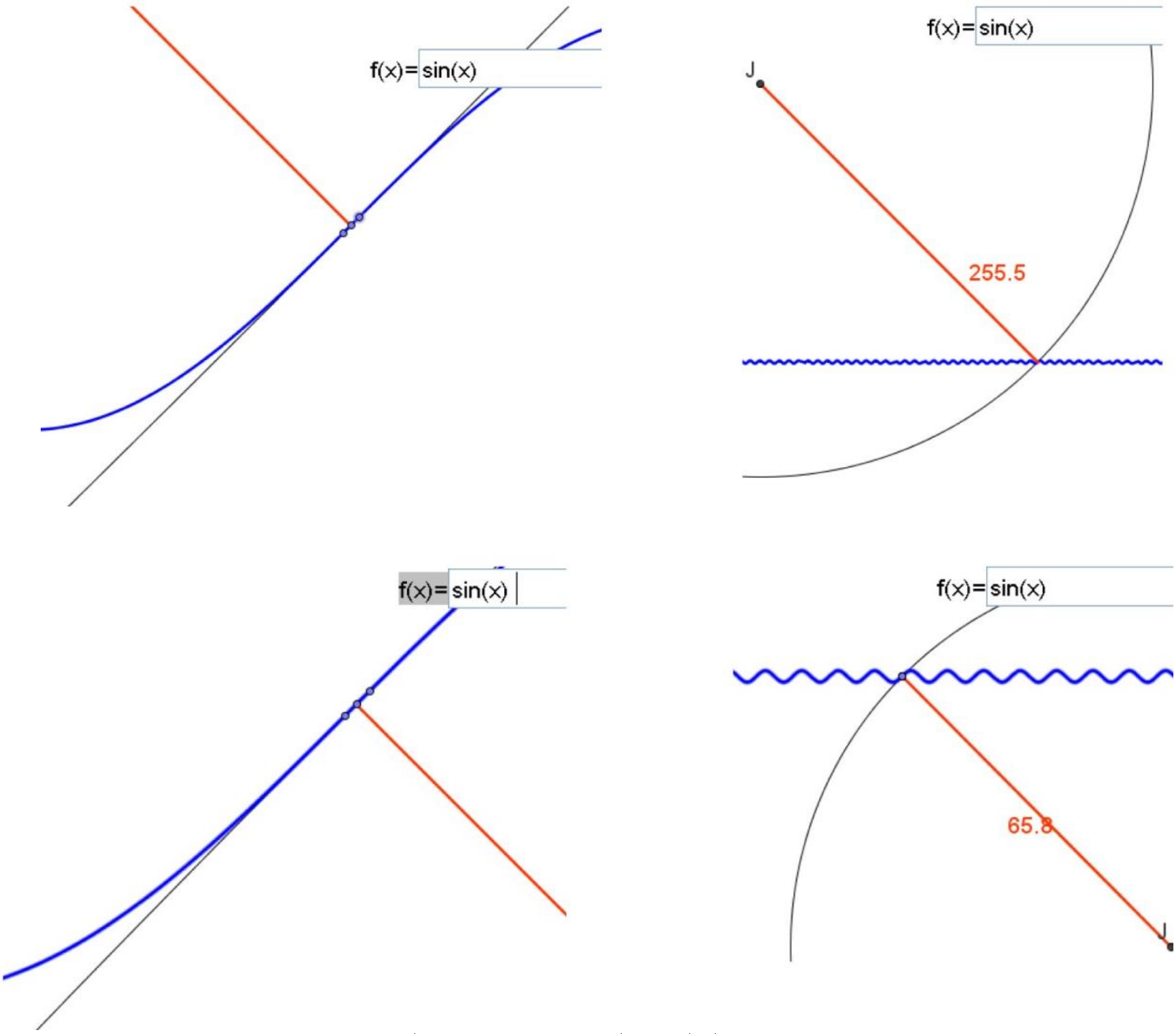


תמונה 12: גבול נקודת מפגש הנורמלים לגרף הפונקציה בסביבת נקודה שעליו (מתוך היישומון)

<u>השאלון לתלמידים</u>

<u>חלק א׳</u>: הצגת הרעיון המוביל

- התבוננו בשרטוטים שלפניכם ומיינו אותם לשתי קבוצות , והסבירו את המשותף לכל קבוצה ואת ההבדל העקרוני שבין הקבוצות השונות.



תמונה 13: קירוב מעגלי לגרף של פונקציה בנקודה שעליו (מתוך היישומון)

הערות:

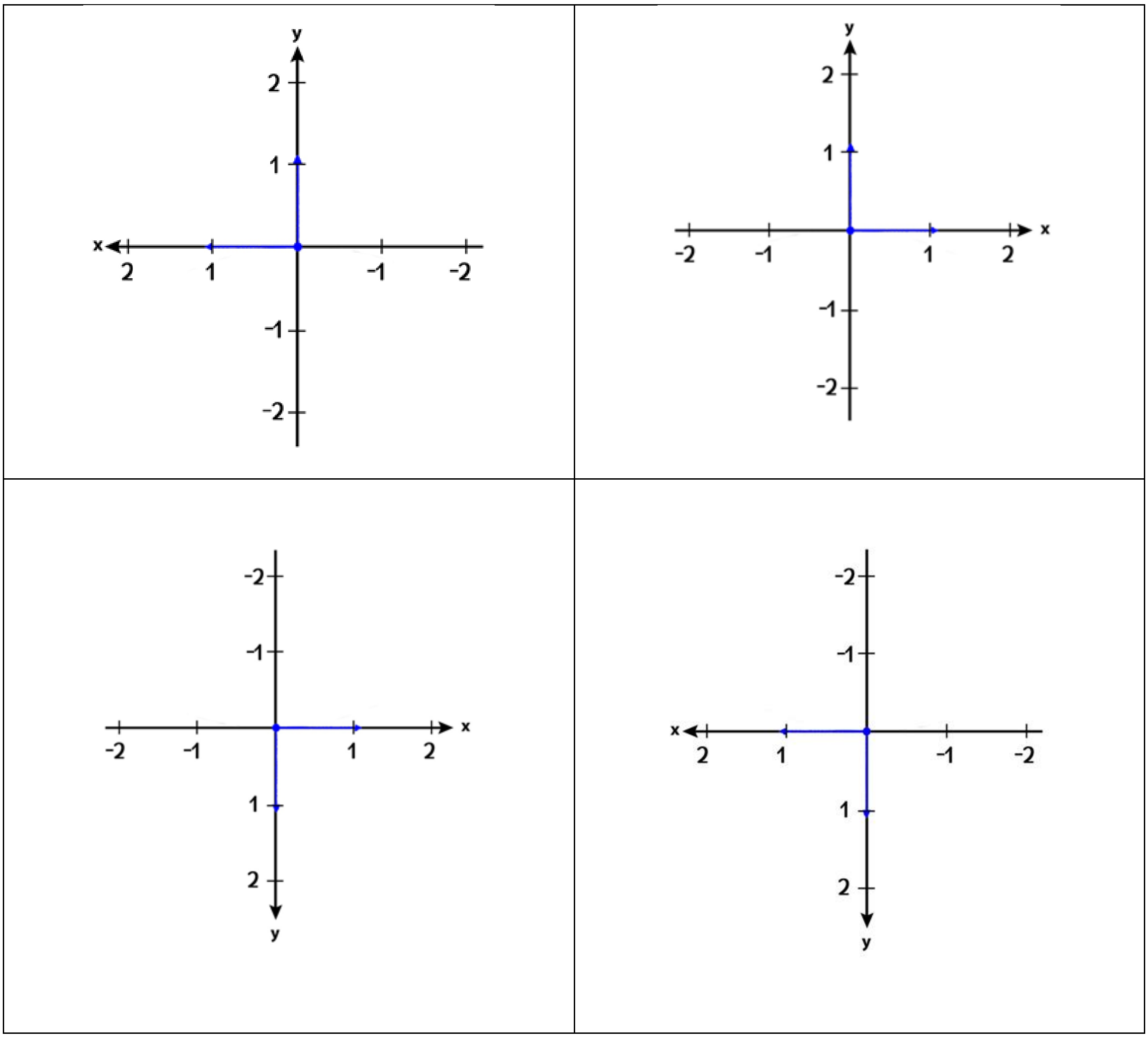
התלמידים יבינו את ההבדל בין תפיסה גלובלית לתפיסה לוקאלית של מושג ״עקום מישורי״.

התלמידים יבחינו בהבדל בכיוון ווקטור רדיוס המעגל המשיק המתואר בכל אחד משרטוטים.

<u>חלק ב'</u>- הגדרת מושגים המסייעים להגדרת מושג "עקמומיות"

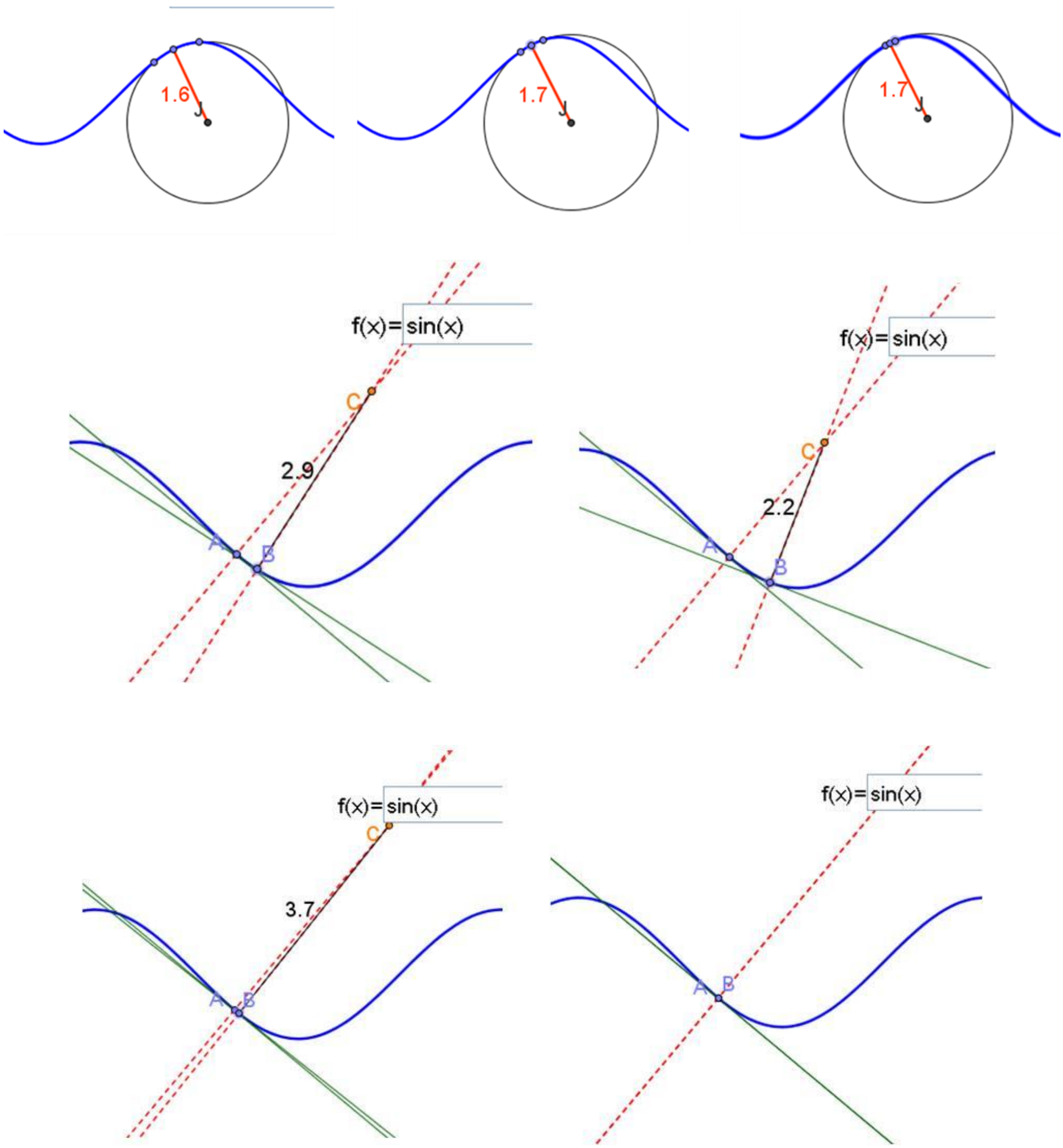
התבוננו בתמונה הבאה והסבירו את המושגים בהאים :

- אוריינטציה של המישור.
- שינוי באוריינטציית המישור.
- אוריינטציית מישור חיובית ואוריינטציית מישור שלילית
- אוריינטציה קנונית של המישור



תמונה 14: אוריינטציה של המישור האוקלידי

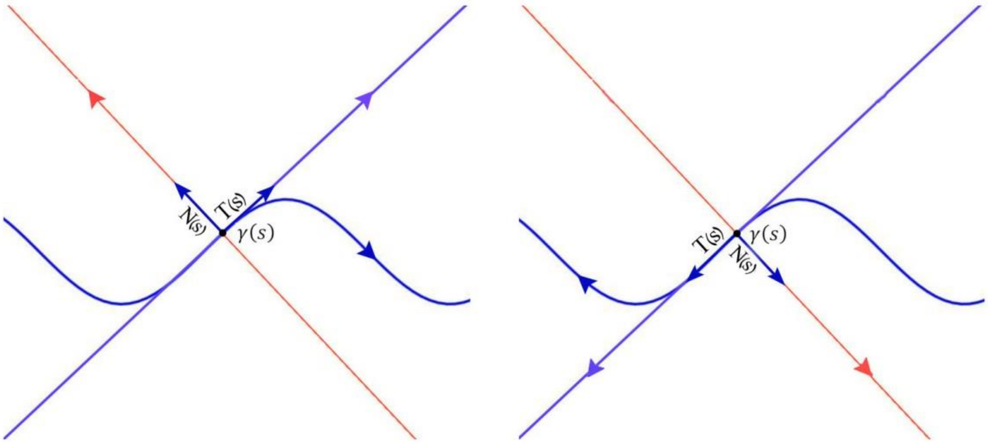
שרטטו את התמונות הבאות באמצעות היישומון,
תארו במילים את המתואר בכל תמונה ותנו דוגמאות נוספות.



תמונה 15 : קירובים לגרף של פונקציה בנקודה שעליו (מתוך היישומון)

היעזרו ביישומון ובתמונה שלפניכם והגדירו את המושגים הבאים:

- קירוב לינארי וקירוב מעגלי לגרף של פונקציה בנקודה שעליו.
- ישר משיק וישר המאונך לגרף של פונקציה בנקודה שעליו.
- וקטור משיק ווקטור נורמל לגרף של פונקציה בנקודה שעליו.
- גבול נקודת מפגש הנורמלים בנקודה שעל גרף הפונקציה.
- תכונה אינווראנטית לאוריינטציית המשור.



תמונה 16: וקטור משיק ווקטור נורמל לעקום רגולרי (מתוך היישומון)

הערות:

* וקטור משיק ווקטור נורמל לגרף של פונקציה בנקודה שעליו הם ווקטורי **יחידה** המאונכים זה לזה.
* גרף של פונקציה רציפה הינו עקום שכיוונו משמאל לימין.
* וקטור משיק הוא ווקטור יחידה על ישר המשיק היוצא מנקודת ההשקה בכיוון העקום.
* וקטור נורמל הוא וקטור יחידה המאונך לוקטור המשיק והוא למעשה סיבוב של וקטור המשיק בזווית ישרה נגד כיוון השעון.

.

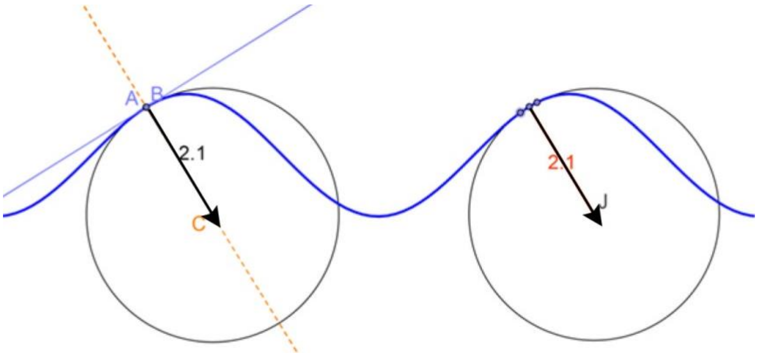
8.2הגדרת מושג עקמומיות בחט"ע

להלן אתאר הצעה להגדרת מושג "עקמומיות" של עקומה במישור האוקלידי בקישוריות להגדרה הפורמאלית בדיסציפלינה תוך שימוש ביישומון דינאמי. באמצעות הפעילות הבאה:

המשימה לתלמידים

חלק ב': עקמומיות- הגדרת המושג ויישומים

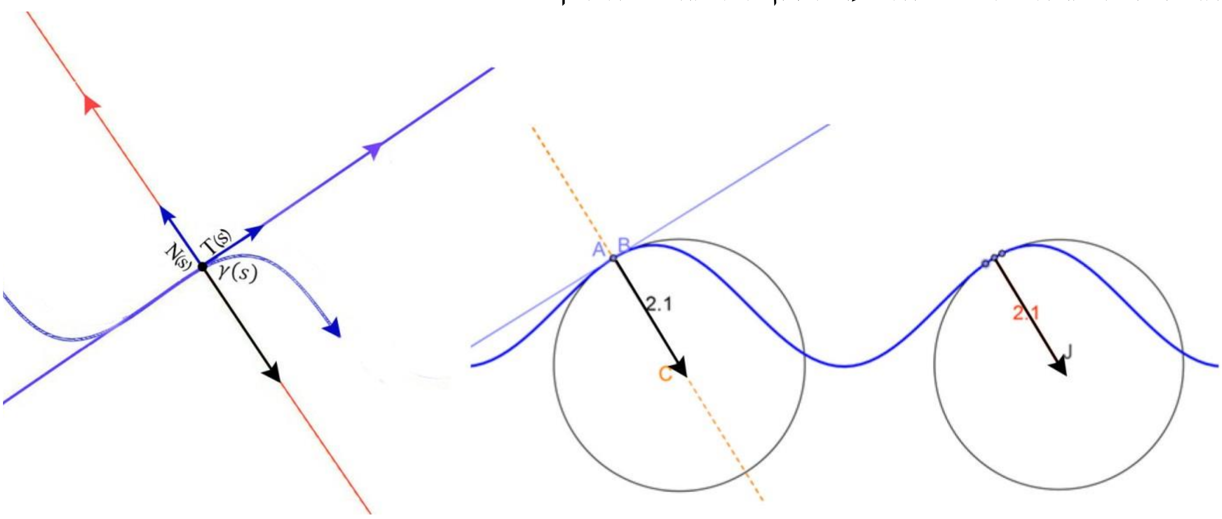
- התבוננו בתמונה הבאה ומצאו את הקשר שבין קירוב מעגלי לגרף של פונקציה לגבול נקודת מפגש הנורמלים בסביבת נקודה שעל גרף הפונקציה.



תמונה 17: קירוב מעגלי לגרף של פונקציה וגבול נקודת מפגש הנורמלים (מתוך היישומון)

הדרכה:
היעזרו ביישומון שרטטו גרף של פונקציה מחזורית ושרטטו את הקירוב מעגלי לגרף של פונקציה ואת גבול נקודת מפגש הנורמלים בשני מחזורים שונים.

- התבוננו בתמונה שלפניכם והציעו פתרון לשאלות שבהמשך.



תמונה 18: שימוש בקירובים לינאריים ומעגליים להגדרת תכונות גיאומטריות של העקום בנקודה שעליו (מתוך היישומון)

- נסחו טענה מתמטית המייצגת את הקשר בין רדיוס המעגל המשיק לגרף של פונקציה בנקודה שעליו לוקטור הנורמל לגרף הפונקציה בנקודה הנ"ל.
- הציעו כיצד ניתן להשתמש בקירובים אלה להגדרת תכונות הנשמרות לאחר הזזה סיבוב ושיקוף של גרף הפונקציה במישור האוקלידי.

אציין כי מטרת השאלות הנ"ל היא לנסח עם התלמידים את התובנות הנלמדות מדיון זה, באופן הבא:

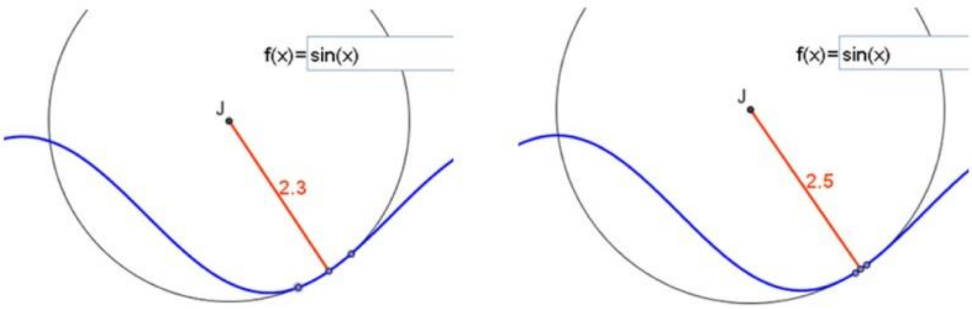
- תהי $\gamma(s)$ נקודה על עקום רגולרי, יהי $\mathrm{N(s)}$ וקטור המאונך לעקום בנקודה $\gamma(s)$, ויהי $\mathrm{R(s)}$ וקטור היוצא מהנקודה $\gamma(s)$ למרכז של הקירוב המעגלי לעקום בנקודה $\gamma(s)$,

  אזי קיים $\mathrm{t \in R}$ כך שמתקיים: $\mathrm{R(s) = t \cdot N(s)}$.
- העקמומיות של עקום בנקודה $\gamma(s)$ מסומנת ב- K ומוגדרת: $\mathrm{K} = \frac{1}{t}$.

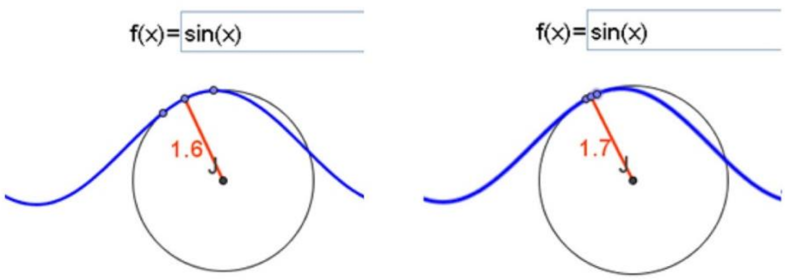
דיון בשאלות חקר בכיתה

התלמידים יתמודדו עם שאלות החקר המוצגות להלן, ולאחר מכן ידונו בהן בכיתה.
התלמידים יעזרו ביישומון להצגת דוגמאות.

❖ מהי המשמעות הגיאומטרית של **<u>סימן העקמומיות</u>**? הביאו דוגמאות מהיישומון.

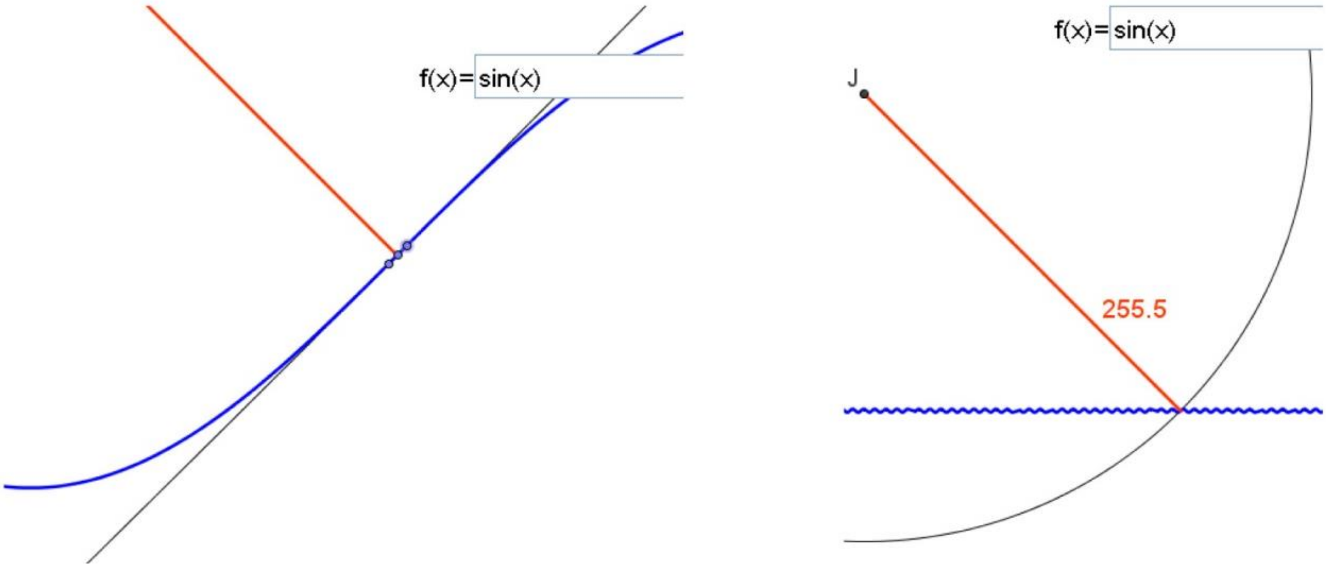


תמונה 19: עקמומיות חיובית בנקודה שעל גרף של פונקציה (מתוך היישומון)

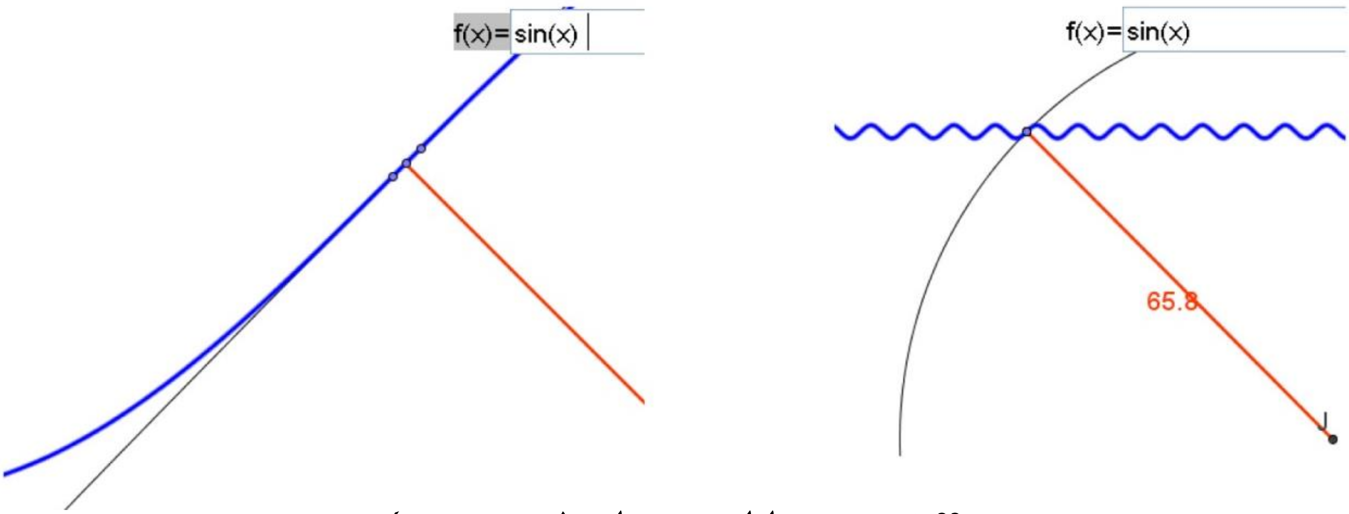


תמונה 20: עקמומיות שלילית בנקודה שעל גרף של פונקציה (מתוך היישומון)

❖ מהי המשמעות הגיאומטרית של **<u>עקמומיות אפס</u>**? הביאו דוגמאות מהיישומון.



תמונה 21 : עקמומיות חיובית שואפת לאפס (מתוך היישומון)

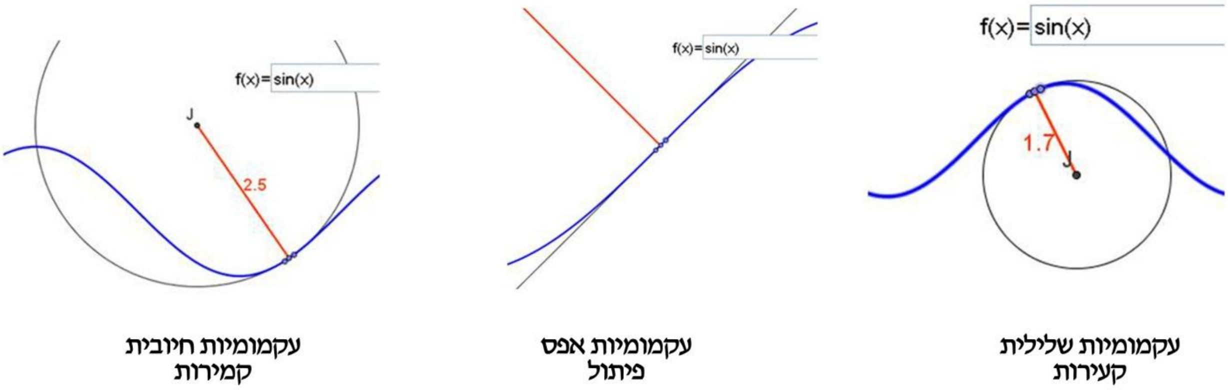


תמונה 22 : עקמומיות שלילית שואפת לאפס(מתוך היישומון)

❖ אלו תכונות גיאומטריות מתאפיינות באמצעות העקמומיות?
❖ איזה תכונה גיאומטרית משותפת לישרים ולמעגלים, ומהי משמעותה הגיאומטרית?
❖ מה הקשר בין העקמומיות לנגזרת השנייה?
❖ כיצד העקמומיות מסייעת בחקירת פונקציות גזירות ברציפות?

7.3 סיכום- יישומי העקמומיות בהוראה בקישוריות לדיסציפלינה

התלמידים יגדירו את מושג העקמומיות של עקום רגולרי במישור האוקלידי תוך שימוש ביישומון דינמי הנבנה בתוכנה הגיאוגברה. ויסבירו כיצד העקמומיות מאפיינת תכונה גלובלית של עקומים מישוריים האינווראנטית לאוריינצית המישור - קמירות וקעירות.



תמונה 23:העקמומיות מאפיינת תכונות גיאומטריות של עקום מישורי

נציין בכיתה את עבודתו של רימן , שהראה כיצד העקמומיות מאפיינת את התכונות הגיאומטריות הגלובליות של המרחב. הוא הסביר באמצעות רעיון זה את ההבדל שבין הגיאומטריה האוקלידית שהתפתחה בתקופת המתמטיקה היוונית לגיאומטריות הלא איקלידיות שהתפתחו במאה ה-19.

תמונה 24 : העקמומיות מאפיינת תכונות גיאומטריות של המרחב

רשימת מקורות:

i. ארבל, ב. (2005). *קיצור תולדות המתמטיקה*. תל-אביב: מכון מופ"ת.

ii. ארבל, ב. (2009). *מתמטיקאים ואירועים גדולים בתולדות המתמטיקה*. תל-אביב: מכון מופ"ת.

iii. סטיוארט, א. (2012). *לאלף את האינסוף: סיפורה של המתמטיקה* (תרגמה נ. מובשביץ הדר). תל-אביב: ספרי עליית הגג.

iv. פרבר, מ. (1999). *מבוא לגיאומטריה דיפרנציאלית*. תל-אביב: אוניברסיטה.

v. Hilbert, D., & Cohn-Vossen, S. (1952). *Geometry and the imagination* (P. Nemeny, Trans). New York, NY: Chelsea.