

מכון ויצמן
תכנית רוטשילד-ויצמן

תופעת המנהור (חלק תיאורטי)

מנחה: פרופסור שמעון לויט
ירון זהבי

תוכן

4	מבוא	1.
7	יישומים	2.
8	מנהור במכניקה קוונטית	2.1
15	גלים	2.2
18	תיאורית גאמוב לדעיכת אלפא	2.3
18	דעיכת אלפא	2.3.1
18	תאורית גאמוב	2.3.2
22	דיודת מנהרה (TD tunnel diode)	2.4
22	מבנה דיודה רגילה	2.4.1
23	תיאור פעולת דיודת מינהרה	2.4.2
30	מיקרוסקופ מנהור סורק (ממ"ס) (S.T.M.)	2.5
32	נספח: רקע תיאורטי	3.
32	פתרונות למשוואת שרדינגר עבור מחסום פוטנציאל	3.1
38	מנהור בגלים	3.2
4	איור 1 גוף במחסום פוטנציאל	
5	איור 2 הקרונית מצליחה לעבור	
5	איור 3 גל במינהור	
6	איור 4 קרן אור בהחזרה מלאה	
6	איור 5 קרן אור בזווית פגיעה מעל הזווית הקריטית עוברת למנסרה השניה	
8	איור 6 מחסום פוטנציאל	
10	איור 7 התלות של T ביחס E/V_0 עבור $a=a_0$ (רוחב הבור)	
11	איור 8 יחס ההעברה כאשר $a=4a_0$ (רוחב המחסום)	
12	איור 9 יחס ההעברה עבור $a=0.5a_0$	
12	איור 10 יחס ההעברה עבור מחסום צר $a=0.14a_0$	
13	איור 11 התלות של T ברוחב המחסום a	
15	איור 12 שבירה והחזרה בגל	
16	איור 13 דעיכת גל בתווך $n_1 > n_0$	
16	איור 14 התנהגות הגל במעבר מתווך n_0 ל- n_1 ויציאה ל- n_0	
17	איור 15 evanescence wave	
19	איור 16 הפוטנציאל בגרעין ובקרבתו	
19	איור 12.2	
19	איור 18 הפוטנציאל הקולוני כאוסף מחסומים	
19	איור 19 הפוטנציאל הקולוני כמחסום פוטנציאל אחיד	
21	איור 20 דעיכת אלפא עפ"י גאמוב	
21	איור 21 דעיכת אלפא כאשר לחלקיק אנרגיה קטנה יותר	

22	22	איור	22	דיודה
23	23	איור	23	רמות האנרגיה של TD
24	24	איור	24	הזרם בדיודת TD בתהליך המינהור
24	25	איור	25	זרם מנהור מקסמלי
25	26	איור	26	דיודת TD בתחום ההתנגדות השלילית
26	27	איור	27	דיודת TD במתח קדמי גדול
26	28	איור	28	דיודת TD מתנהגת כדיודה רגילה
27	29	איור	29	האופין המלא של הדיודה
28	30	איור	30	שילוב TD במעגל חשמלי
28	31	איור	31	התנודות במעגל RLC ללא TD
29	32	איור	32	מעגל LC בשילוב עם TD בפרמטרים מתאימים
30	33	איור	33	מבנה מיקרוסקופ מינהור (STM)
32	34	איור	34	מחסום פוטנציאל
37	35	איור	35	תלות יחס ההעברה T ביחס E/V_0

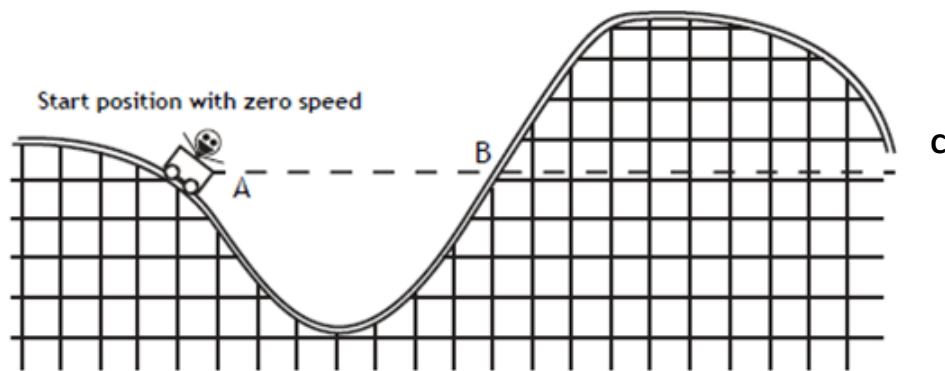
1. מבוא

מנהור

את תופעת המנהור ניתן להסביר בצורה הבאה. נניח עגלה מחליקה ממנוחה על מסילה כמתואר בתרשים הבא. נניח מסילה חלקה וכל התנועה אינה כרוכה באובדן אנרגיה. אם כן אנו מצפים שהעגלה שבה האנרגיה הפוטנציאלית שווה לאנרגיה B תגיע לכל היותר לנקודה A שתחילה להחליק מנקודה A. הפוטנציאלית של נקודה .

איור 1. C עפ"י חוקי ניוטון אין אפשרות שהעגלה תעבור את המעלה ותגיע לנקודה

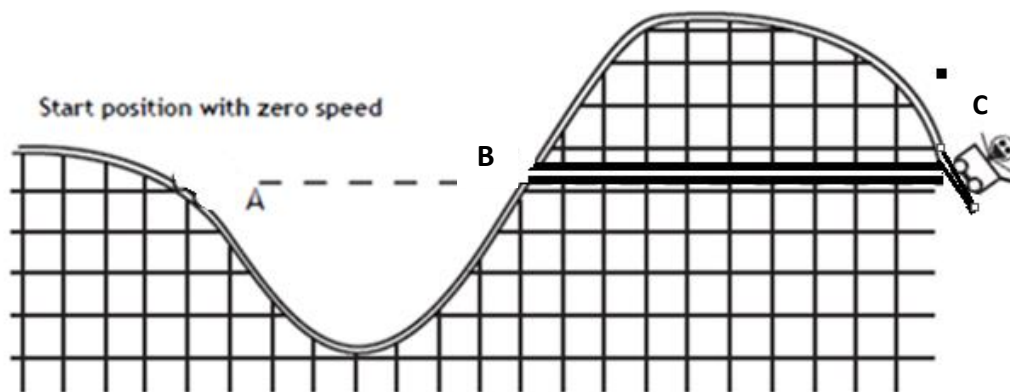
Imagine the Roller Coaster ...



איור 1 גוף במחסום פוטנציאל

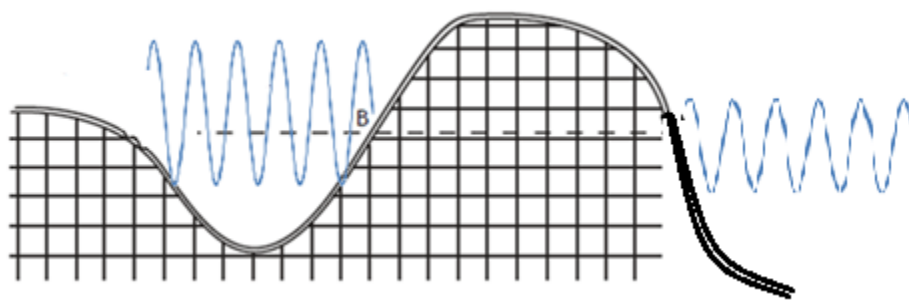
אולם הטבע שאנו חיים בו מתנהג באופן גלי ולכן אם נדמיין חלקיק המגיע למחסום גבוה ממנו הרי ישנה הסתברות השונה מאפס למצוא את החלקיק גם מעבר למחסום.

זאת תופעת המנהור.



איור 2 הקרונית מצליחה לעבור

אם כן, תופעת המינהור הינה תופעה גלית ולכן ניתן להציגה כך:



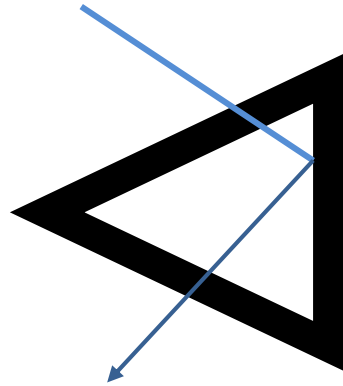
איור 3 גל במינהור

הגל חודר לתוך האיזור החוסם ושם הוא דועך בצורה מהירה ואם רוחב האיזור החוסם אינו רחב כל כך, הרי שניתן למצוא את הגל מעברו השני.

דוגמא : קרן אור במעבר דרך שתי מנסרות.

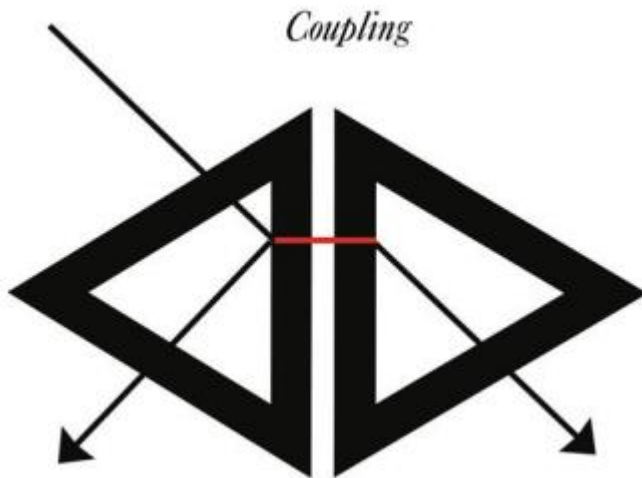
אם זווית הפגיעה תהיה גדולה מהזווית הקריטית, אנו מצפים שכל הגל יחזור והעברה לתוך השני תהיה אפס.

בציור מתוארת מנסרה משולשת וגל חודר לתוכה ופוגע בדופן השניה, בזווית גדולה מהזווית הקריטית. לכן הגל חוזר בהחזרה מלאה.



איור 4 קרן אור בהחזרה מלאה

אם נקרב מנסרה שניה למרחק קטן, נקבל גל שמצליח לעבור את הרווח בין שתי המנסרות, עובר למנסרה השניה ויוצא ממנה.

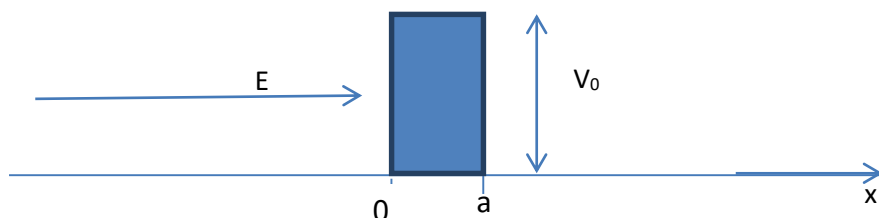


איור 5 קרן אור בזווית פגיעה מעל הזווית הקריטית עוברת למנסרה השניה

2. יישומים

2.1. מנהור במכניקה קוונטית

V_0 המגיע אל מחסום פוטנציאל E נתאר חלקיק בעל אנרגיה



איור 6 מחסום פוטנציאל

$$V_{(x)} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 < x < a \\ 0 & a < x \end{cases}$$

משואת שרדינגר שאינה תלויה בזמן:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar}{2m} \partial^2 \psi &= E\psi & x < 0 \\ -\frac{\hbar}{2m} \partial^2 \psi + V_0 \psi &= E\psi & 0 < x < a \\ -\frac{\hbar}{2m} \partial^2 \psi &= E\psi & a < x \end{aligned}$$

הפתרונות עבור מחסום פוטנציאל זה הן:

$$r = \frac{(k^2 - q^2) \sin(aq)}{2ikq \cos(aq) + (k^2 + q^2) \sin(aq)}$$

$$t = \frac{4kqe^{-iak}}{(k+q)^2 e^{-iaq} - (k-q)^2 e^{iaq}}$$

הוא אמפליטודת הגל שעבר t הוא אמפליטודת הגל החוזר יחסית לאמפליטודת הגל הפוגע ו- r כאשר את המחסום יחסית לגל הפוגע.

מוגדרים כך: k , q וערכי

$$K = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad q = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$$

(ראה נספח 3.1 פתרונות למשוואת שרדינגר עבור מחסום פוטנציאל)

שהם למעשה שטף של חלקיקים (או יותר מדויק של שטף $T = |t|^2$, $R = |r|^2$ נגדיר הסתברות) של הגל העובר את המחסום ושל הגל החוזר מהמחסום.

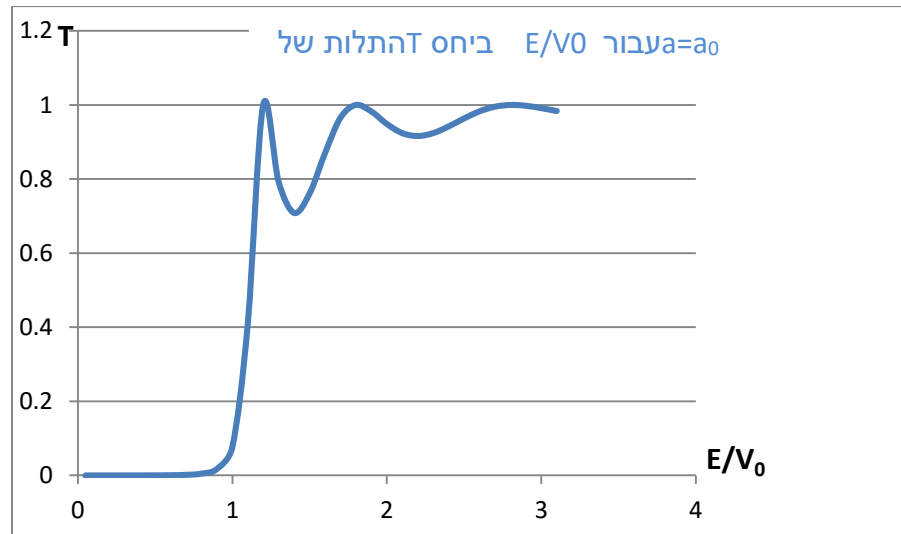
נקבל

$$T = \frac{1}{1 + \frac{[V_0 \sinh(qa)]^2}{4E(V_0 - E)}}$$

$$K = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad q = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$$

כאשר E/V_0 נראה בתרשים הבא בתלות ביחס שבין אנרגיית החלקיק לגובה המחסום T יחס ההעברה

$$7 = \frac{\sqrt{2m} a_0}{\hbar} \cdot a_0$$



איור 7 התלות של T ביחס E/V_0 עבור $a=a_0$ (רוחב הבור)

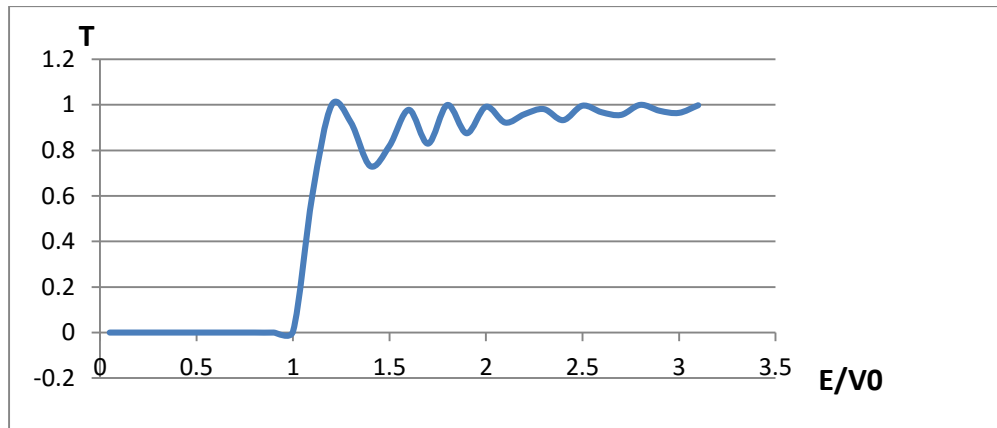
הוא גודל המציין את רוחב המחסום, בהמשך נתיחס להשפעת רוחב המחסום ביחס לערך זה. a_0

מהתוצאות ניתן לראות שההסתברות למצוא את החלקיק מעבר למחסום, שונה מאפס אפילו עבור $E < V_0$ ההסתברות למצוא את החלקיק מעבר למחסום היא לא 1 אלא מין $E > V_0$. ויותר מכך עבור $E < V_0$ פונקציה אוסצילטורית השואפת לאחד ובעלת אמפליטודה קטנה יותר ככל שהאנרגיה יותר גבוהה מהמחסום. יש מצבים שבהם אנרגיה גדולה יותר מקטינה את ההסתברות כמו לדוגמא כאשר $E/V_0 = 1.2$ שהיא ≈ 0.7 . הפונקציה $E/V_0 = 1.4$ ההסתברות היא ≈ 1 לעומת ההסתברות עבור היחס $E/V_0 = 1.2$ מגיע לסדר גודל $E/V_0 = 3.5$ מתכנסת ל 1 כאשר היחס

ההסתברות למעבר החלקיק היא בערך $E = V_0 \cdot 0.15$ עבור

יחס ההעברה הוא אם כן גודל התלוי ביחס שבין אנרגית החלקיק לגובה רמת האנרגיה של המחסום $V_0 < E$ ואיננו אחד עבור $E < V_0$, איננו אפס עבור

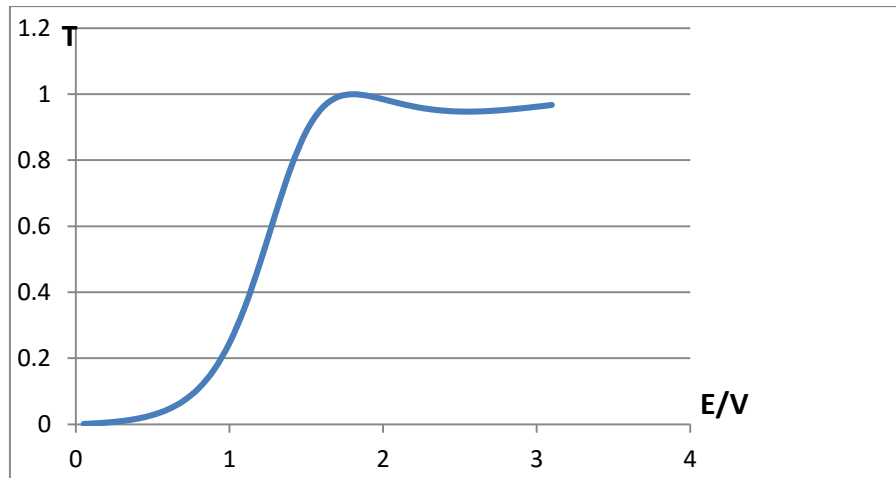
יחס ההעברה הינו גם גודל התלוי ברוחב המחסום. תלות זאת תתואר בשני התרשימים הבאים כאשר הראשון יתאר, רוחב מחסום הגדול פי 4 מהיחס שחושב בשגיאה! מקור ההפניה לא נמצא. שגיאה! מקור ההפניה לא נמצא. .



איור 8 יחס ההעברה כאשר $a=4a_0$ (רוחב המחסום)

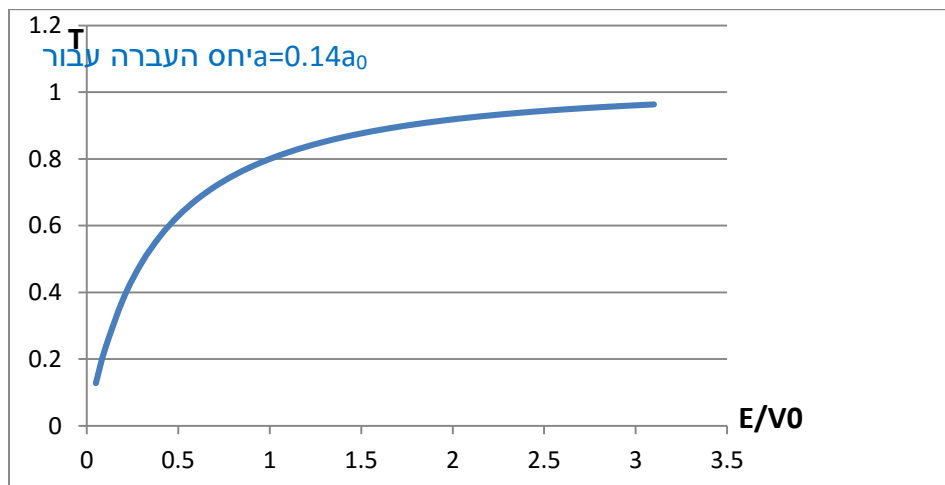
יחס ההעברה הוא כמעט אפס. זאת אומרת שאם המחסום רחב $E < V_0$ בתרשים זה אנו רואים שעבור מאוד, ההסתברות לגלות את הגל מעבר למחסום היא אפסית.

נבדוק את ההשפעה עבור מחסום צר: מחצית רוחב המחסום של שגיאה! מקור הפניה לא נמצא.
 $0.5a_0$



איור 9 יחס ההעברה עבור $a=0.5a_0$

0.14a: ואם נקטין מאוד את רוחב המחסום

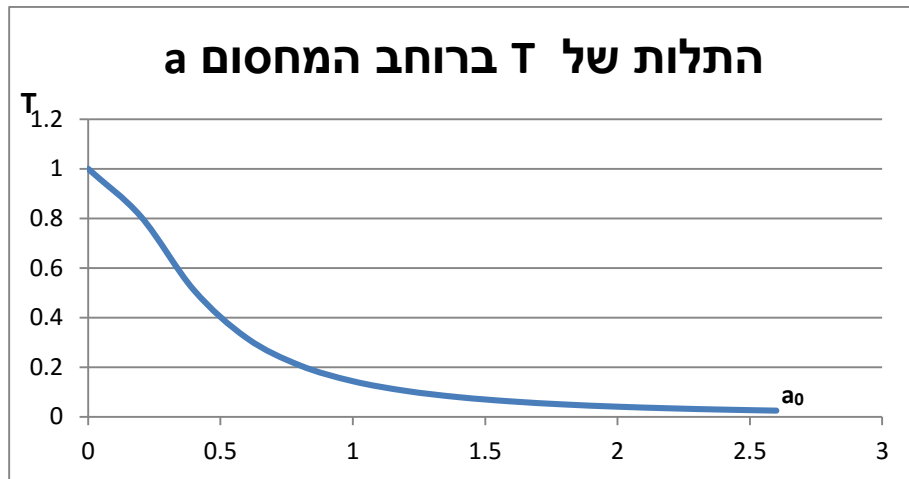


איור 10 יחס ההעברה עבור מחסום צר $a=0.14a_0$

מגיע ל- $E=V_0 \cdot 0.8$ ואנו רואים שההעברה במצב

מסקנה ההעברה היא תלות לא רק ברמת האנרגיה אלא גם ברוחב מחסום הפוטנציאל.

a_0 (ביחידות של $E=V_0$ ההעברה בתלות רוחב המחסום עבור



איור 11 התלות של T ברוחב המחסום a

סיכום

היות וישנה עוד תלות בקבועים אחרים כגון מסה וקבוע פלנק, לכן נתייחס באופן איכותי.

כאשר חלקיק פוגש מחסום פוטנציאל, שטף ההסתברות של החלקיק לעבור את המחסום תלוי בשני פרמטרים עקרים :

- (1) רמת האנרגיה של החלקיק ביחס לגובה הפוטנציאל של המחסום.
- (2) רוחב המחסום.

רמת האנרגיה: לחלקיק יש הסתברות לעבור את המחסום גם אם האנרגיה שלו קטנה מגובה מחסום הפוטנציאל. יחד עם זאת, אם האנרגיה שלו גבוהה מגובה הפוטנציאל של המחסום, ההסתברות למעבר החלקיק היא לא בהכרח 1, אלא ביטוי השואף לאחד, ככל שרמת האנרגיה ביחס לגובה המחסום, גדל.

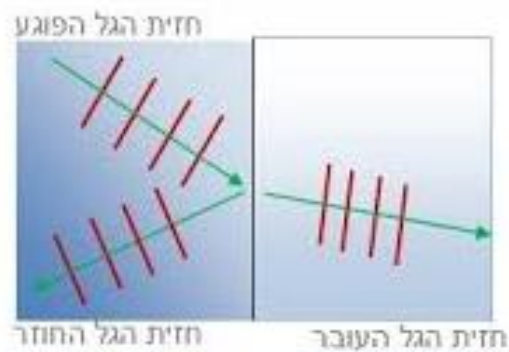
ניכר שכאשר רוחב המחסום צר, ההעברה היא גבוהה מאוד. וככל $E < V_0$ רוחב המחסום: עבור שרוחב המחסום גדול יותר, ההעברה שואפת לאפס. לכן אם רוחב המחסום אינסופי החלקיק לא יעבור ההסתברות שהחלקיק יעבור את מחסום הפוטנציאל היא לא 1 אלא ביטוי $E > V_0$ את המחסום. עבור השואף לאחד ככל שהיחס בין אנרגית החלקיק לגובה המחסום גדול יותר.

EXCLE. T cofition להרחבה ושינוי פרמטרים מצורף בנפרד קובץ

2.2. גלים

חלק הגל עובר שבירה n_1 לתווך עם מקדם שבירה שונה n_0 כאשר גל עובר מתווך עם מקדם שבירה וכווננו נקבע עפ"י חוק סנל וחלק מהגל חוזר בדומה לתופעה הקוונטית שחלקיק הפוגע במחסום פוטנציאל יש שטף הסתברות או שטף חלקיקים החוזרים ושטף חלקיקים העוברים את המחסום.

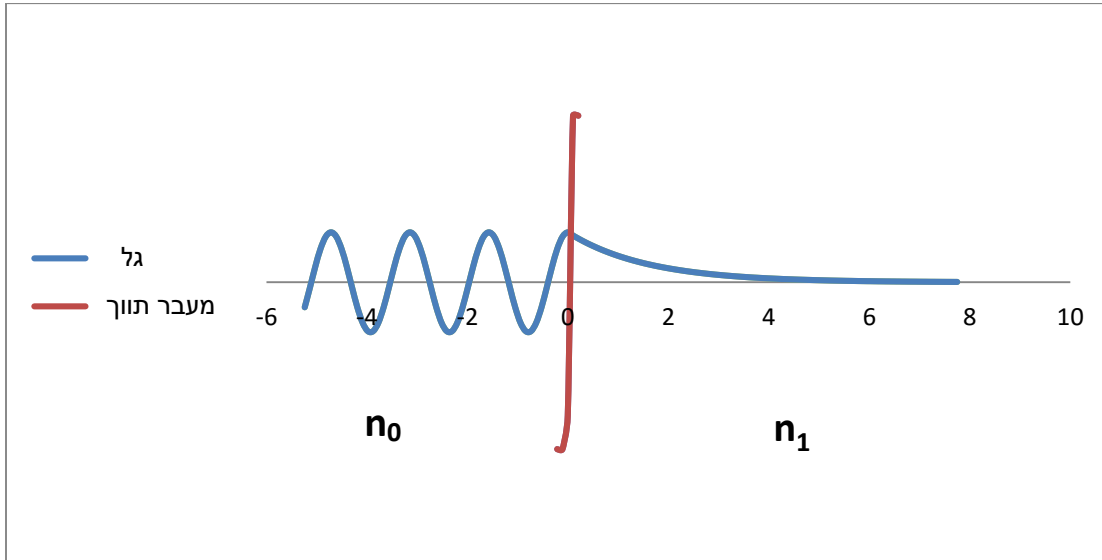
$$n_0 \sin \alpha_0 = n_1 \sin \alpha_1$$



איור 12 שבירה והחזרה בגל

במעבר מתווך בעל מקדם שבירה גבוה לנמוך ישנה זווית קריטית שמעבר אליה כל אנרגיית הגל חוזרת. משוואת הגלים מתארת את התנהגות הגל והדרישה היא רציפות גם במעבר שבין התווכים.

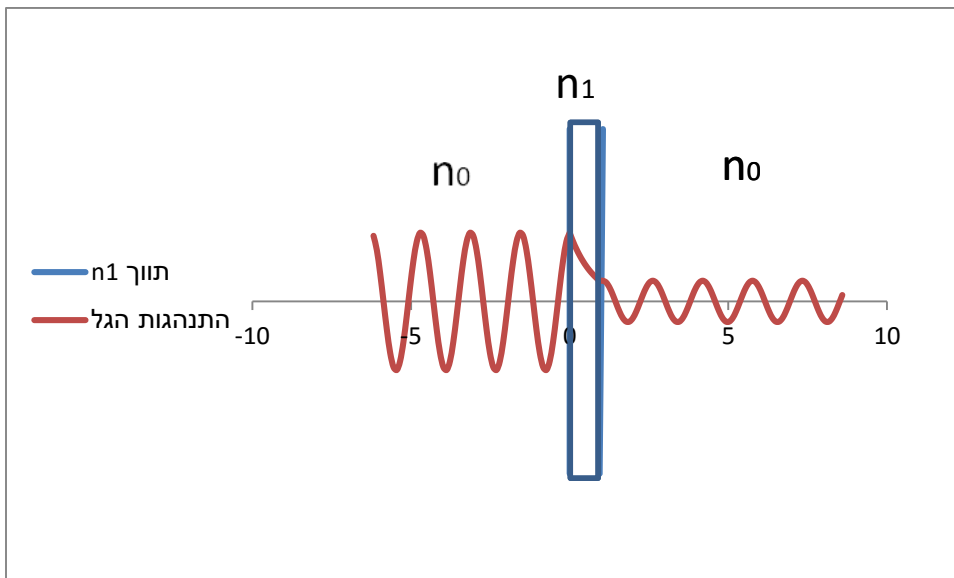
n_1 הפתוחים המתמטיים (ראה נספח) מובילים לתוצאה, שלמרות שאין מעבר אנרגיה לתוך התווך, אלא שהגל דועך בצורה אקספוננציאלית. גל זה נקרא n_1 , בכל זאת ישנה חדירה של הגל לתוך התווך, evanescent wave ותוחלת מרחק החדירה הוא $\lambda/2\pi$.



איור 13 דעיכת גל בתווך . $n_1 > n_0$

מסקנה: בתוך התווך השני קיים שדה אולם הוא איננו מתנהג כגל.

בתרשים השני נראה כיצד יתנהג הגל במקרה והתווך השני איננו עבה אלה צר.



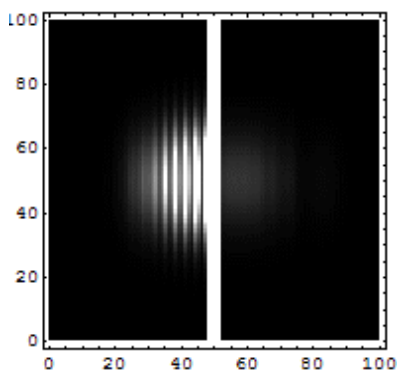
איור 14 התנהגות הגל במעבר מתווך n_0 ל- n_1 ויציאה ל- n_0

וביציאה מהתווך מופיע הגל שוב אם כי *evanescent wave* מתקיים גל הנקרא n_1 בתוך התווך n_1 בעוצמה פחותה בהתאם לעובי התווך.

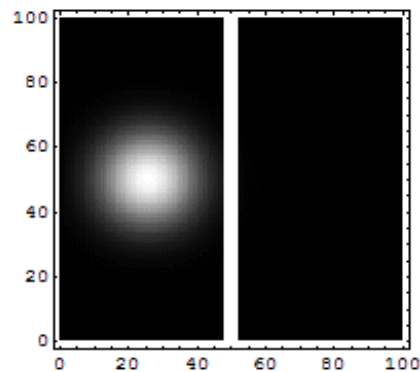
התמונה הבאה לקוחה מהדמיה המופיעה ויקיפדיה. בתמונה מתואר תווך (בשחור) המופרד ע"י מחיצה (צבע לבן). תמונה א מתארת גל (עיגול), הנע ימינה בתווך, ומגיע למחיצה הלבנה.

תמונה ב: מתארת את השלב שבו הגל פגע במחיצה ולכן חלק מהגל חוזר וחלק חודר לתוך התווך השני שמעבר למחיצה. בתווך הראשון של תמונה ב נראים פסי התאבכות של הגל המתקדם עם הגל החוזר. ובתווך השני שמעבר למחיצה נראה חלק מהגל שחודר וממשיך לנוע בתווך השני המופרד מהראשון.

תמונה ב



תמונה א



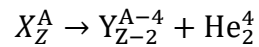
איור 15 *evanescent wave*

קישור ל**[הדמיה](#)** .

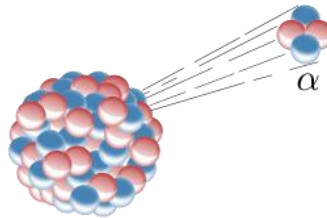
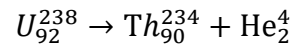
2.3. תיאורית גאמוב לדעיכת אלפא

2.3.1. דעיכת אלפא .

ישנם הטבע גרעינים לא יציבים. ביניהם ישנם גרעינים שפולטים חלקיק אלפא המכיל 2 פרוטונים ושני נויטרונים. פליטה זו מכונה קרינת α . כתוצאה מכך משתנה המספר האטומי של הגרעין והתהליך מתואר כך:



לדוגמה אורניום המתפרק לתוריום בתהליך קרינת אלפא.

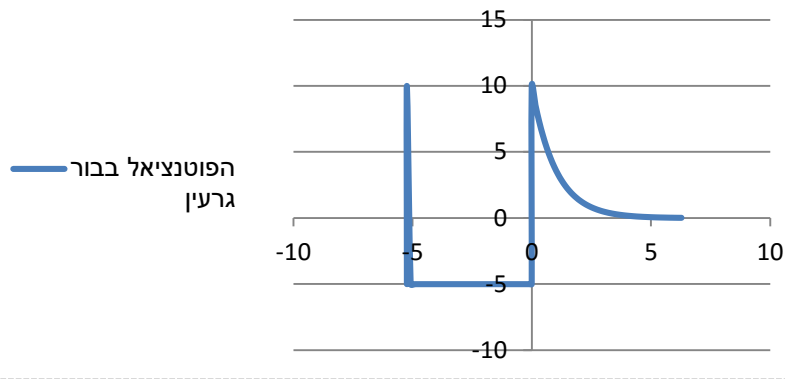


2.3.2. תאוריית גאמוב

(מודל לתהליך פליטת חלקיק אלפא המבוסס **George Gamow** עפ"י מכניקת הקוונטים, הציע גאמוב)
על מנהור.

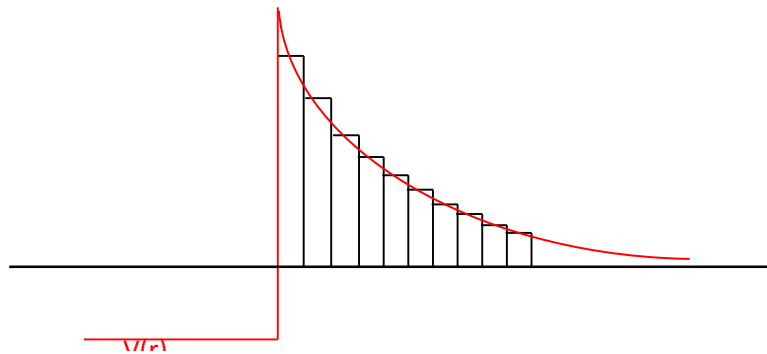
הנוקלאונים שבגרעין נמצאים במעין בור פוטנציאל עם מחסום פוטנציאל המפריד בינו לבין החלל שמחוץ לגרעין. בבור כלוא גם חלקיק אלפא. מחוץ לגרעין שורר שדה חשמלי קולוני ולו פוטנציאל קולוני כך שניתן לתאר את הפוטנציאל בסביבת הגרעין כך.

הפוטנציאל בבור גרעין



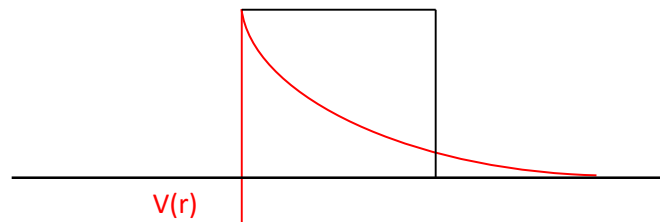
איור 16 הפוטנציאל בגרעין ובקרבתו

גאמוב הניח, שפליטת אלפא היא תופעה של מנהור. לכן ניתן לחשב את ההסתברות למנהור. ניתן לחשב את ההסתברות כאילו יש אוסף של מחסומים מרובעים מנקודת הכניסה עד נקודת היציאה כמוצג



איור 18 הפוטנציאל הקולוני כאוסף מחסומים

יש להעיר: שאם נתיחס למחסום הפוטנציאל כמחסום מרובע אחד, שרוחבו מקצה הגרעין עד לנקודת היציאה של חלקיק אלפא כמוראה באיור



איור 19 הפוטנציאל הקולוני כמחסום פוטנציאל אחד

התייחסות כזו גורמת לשגיאה משמעותית, כיוון שההנחה שהחלקיק מרגיש דחית פוטנציאלית קבועה. לכן, קירוב טוב יותר יהיה, להתייחס לפוטנציאל הקולוני כאוסף של מחסומי פוטנציאל צמודים, ואז ההסתברות למעבר החלקיק תהיה מכפלת ההסתברויות עד למוצא.

T: ההסתברות למעבר

$$T \approx \prod_i e^{-\frac{2\Delta x}{\hbar} \sqrt{2m(V_{x_i}-E)}} = e^{-\frac{2}{\hbar} \sum \sqrt{2m(V_{x_i}-E)} \Delta x}$$

Δ נוכל לעבור לאינטגרל: אעבור ערכים קטנים של

$$e^{-\frac{2}{\hbar} \sum \sqrt{2m(V_{(x_i)}-E)} \Delta x} = e^{-\frac{2}{\hbar} \int \sqrt{2m(V_{(x)}-E)} dx}$$

ביטויים אלו מקורבים, שכן עפ"י הניתוח של מחסום הפוטנציאל בקוונטים, בתוך מחסום הפוטנציאל הזניח את את הגלים הנוצרים Gamow ישנם גלים חוזרים, ואנו אמורים להתייחס אליהם, אולם מתופעת ההחזרה במחסומים המרובעים.

מכאן גאמוב פיתח את הנוסחה לאמפליטודת המעבר :

$$T \approx \exp \left[-\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int_R^{R_\alpha} \sqrt{V_{(r)} - E_\alpha} dr \right]$$

הוא הפוטנציאל שבין חלקיק אלפא לגרעין הבת שנוצר בעקבות פליטת החלקיק. $V_{(r)}$ כאשר

$$V_{(r)} = \frac{ZZe^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

הוא האנרגיה הקינטית של החלקיק אלפא לאחר הפליטה. $E_{(\alpha)}$

הוא רדיוס בור הגרעין שבו היה כלוא החלקיק אלפא. R.

הוא מרחק החלקיק ממרכז הגרעין. R_α .

T. ניתן לפשט את הביטוי ל- $R_\alpha \gg R$ ובעזרת ההנחה Tניתן לחשב את האינטגרל שבביטוי של

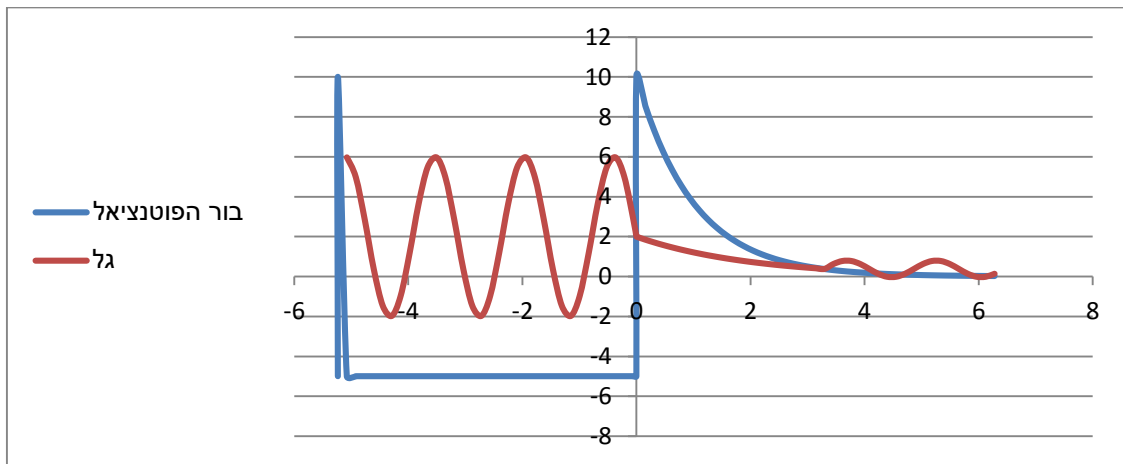
$$T \approx \exp \left[-\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \sqrt{\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}} \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R}{R_\alpha}} \right) \right]$$

בעזרת ביטוי זה ניתן להעריך את זמן מחצית החיים של אטום הראשוני.

$$t_{1/2} \propto \frac{1}{|T|^2}$$

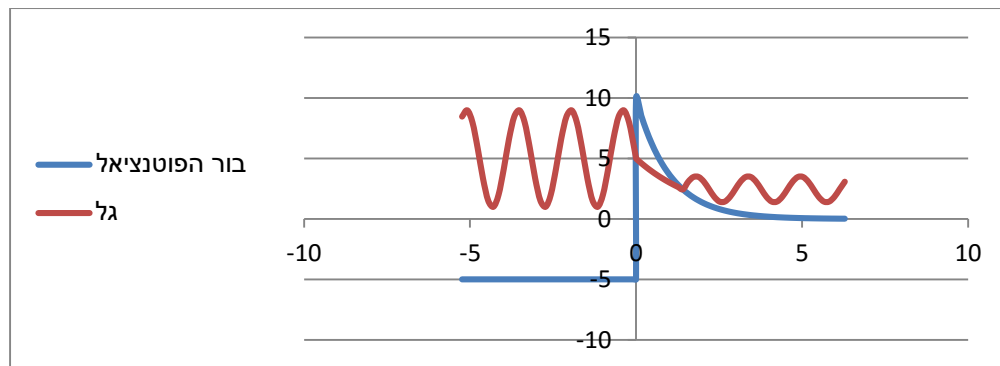
תוצאות חישוב אילו התאימו לתוצאות הניסויים שהתקבלו אז.

התרשימים הבאים מתארים את הפריקה עפ"י גאמוב.



איור 20 דעיכת אלפא עפ"י גאמוב

ובתרשים הבא מתואר תהליך כאשר חלקיק אלפא נמצא ברמת אנרגיה גבוהה יותר.



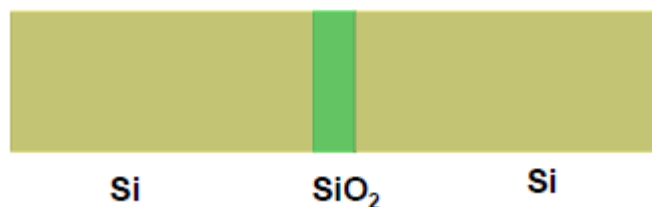
איור 21 דעיכת אלפא כאשר לחלקיק אנרגיה קטנה יותר

מהתרשים נראה שככל שלחלקיק אנרגיה ראשונית קטנה יותר הרי שההסתברות לפליטה יותר גדולה. המשמעות ככל שהחלקיק קשור יותר לגרעין או נמצא עמוק יותר בבור אז ההסתברות לפליטה מהגרעין תהיה נמוכה יותר.

2.4.2. דיודת מנהרה (TD tunnel diode)

2.4.1 מבנה דיודה רגילה

דיודה רגילה מורכבת מחומר שבקליפה החיצונית שלו ישנם 4 אלקטרונים, והוא נחשב כמוליך בשני חומרים אחד שיש לו 5 doping למחצה. את הדיודה מזהמים (תהליך הנקרא סימום או אלקטרונים בקליפה החיצונית ולשני יש שלושה אלקטרונים בקליפה החיצונית. כתוצאה מהשילוב של שני החומרים נוצרים קוולנטים בין שני החומרים כך שהחומר בעל 5 אלקטרונים תורם והחומר P אלקטרון לחומר בעל 3 אלקטרונים. לחומר התורם נוצר חוסר של אלקטרון ולכן הוא נקרא . איזור המגע ביניהם מכונה חשני שקלט את האלקטרון יש עודף של אלקטרון ולכן הוא מכונה והפוך מעין דיפוזיה . n ל "צומת". בצומת נוצר מעבר של מטענים מהחומר

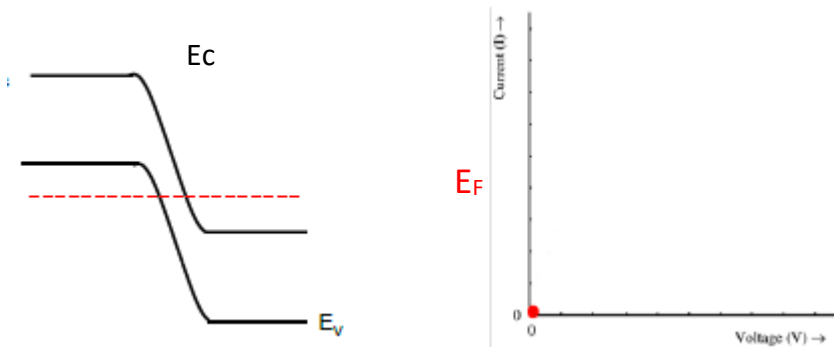


איור 22 דיודה

בדיודה נוצר מעין מחסום פוטנציאל עבור אלקטרונים .

2.4.2 תיאור פעולת דיודת מינהרה

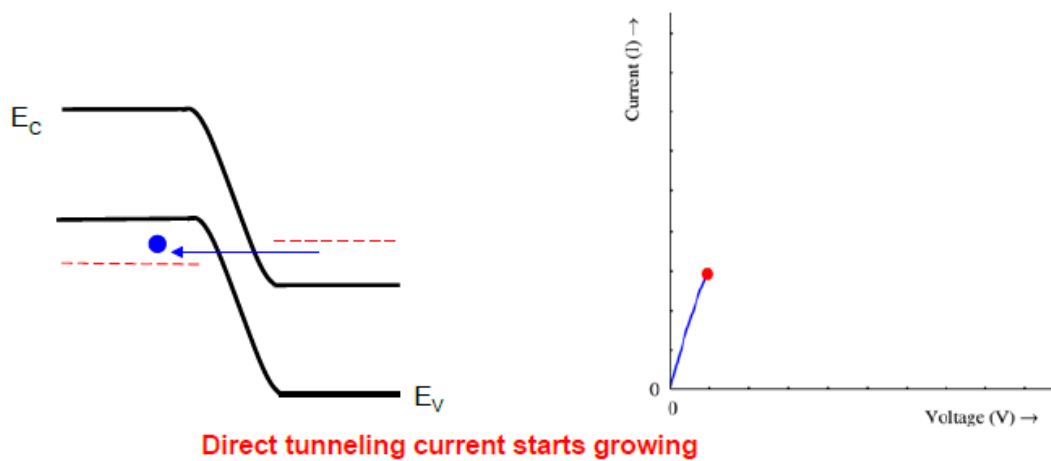
(10nm) גבוה, הסימון גרם להצרת המחסום (doping) דיודת מנהרה היא דיודה שעברה סימון (ורמת פרמי נמצאת מעל פס ההולכה ומתחת לפס הערכיות).



איור 23 רמות האנרגיה של TD

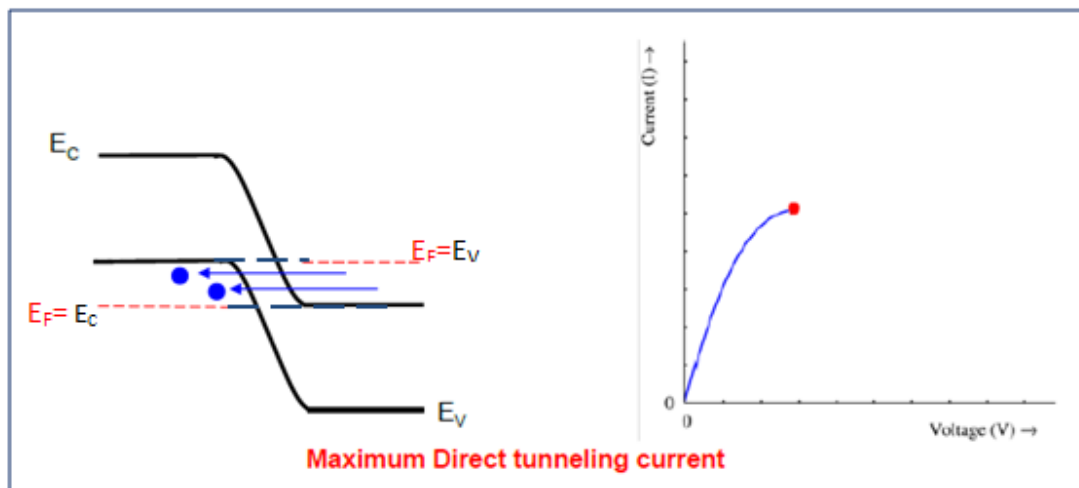
יכולים n בעקבות הצרת המחסום כאשר הדיודה מקבלת ממתח קדמי, אלקטרונים הנמצאים באזור , מבלי לשנות את רמת האנרגיה שלהם, כיוון שרמת פרמה שווה, כך שיכולה קלעבור במנהור לאזור להיווצר זרימה. בתרשים שלמעלה פועל על הדיודה מתח אפס ולכן אין זרימה.

אם לדיודה יחובר ממתח קדמי, יחלו אלקטרונים לנוע מפס ההולכה לפס הערכיות בתהליך מנהור ותתקבל עליה בזרם.



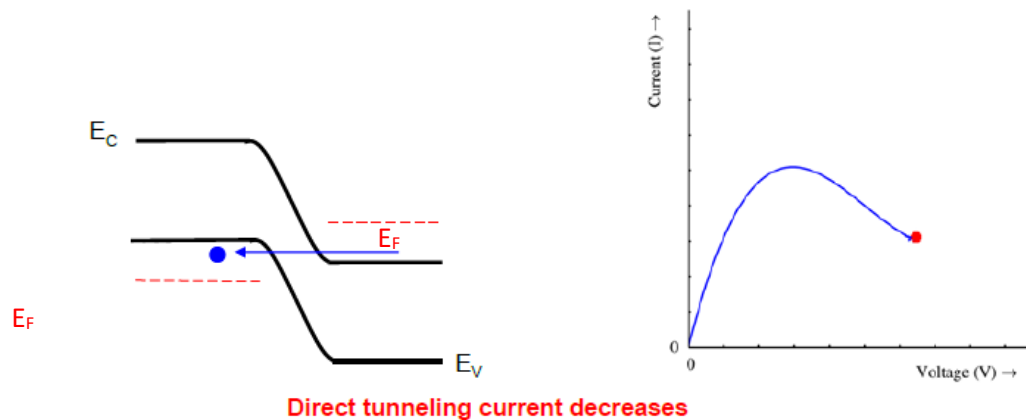
איור 24 הזרם בדיודת TD בתהליך המינהור

עם הגדלת המתח הקדמי, מוגברת הזרימה עד לערך מסוים שהוא הערך המכסימלי של זרם שווה לרמת האנרגיה של חהמנהור. במצב זה, רמת פרמה של האלקטרונים הנמצאים באזור קהורים באזור .



איור 25 זרם מנהור מקסמלי

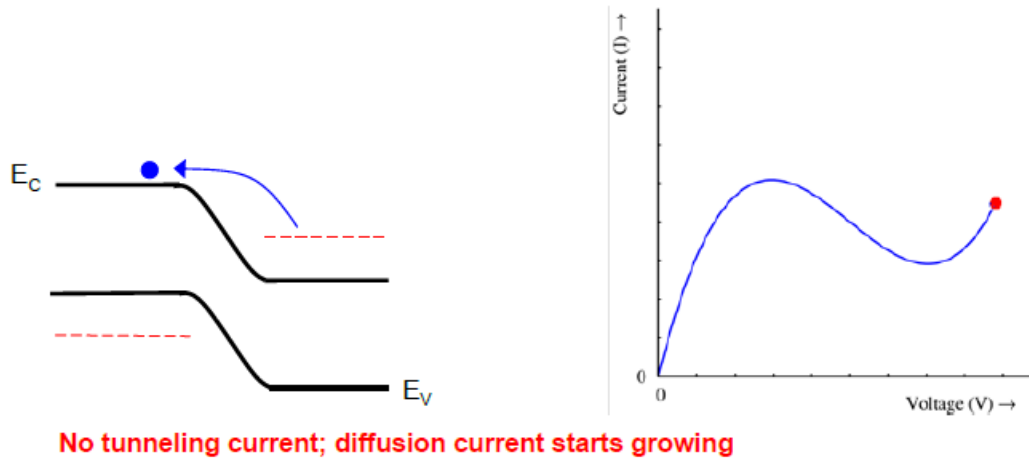
תעבור את רמת חאם נגדיל כעת את המתח הקדמי על הדיודה, רמת פרמה של האלקטרונים בתחום יקטן, לכן מספר n ו p , ואז תחום החפיפה של האלקטרונים ב- E_V האנרגיה בפס הערכיות יקטן, ז"א תהיה ירידה בזרם. קלאזרח האלקטרונים שיוכלו לעבור במנהור מאזור



איור 26 דיודת TD בתחום ההתנגדות השלילית

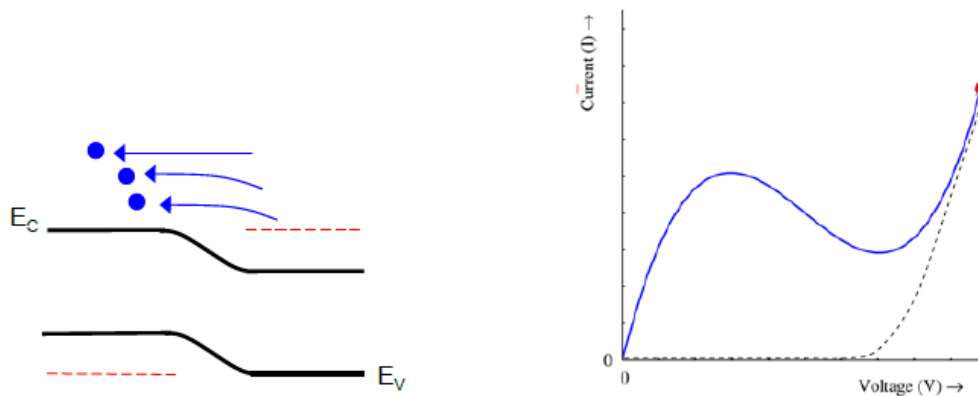
משמעות התנהגות זו היא שעליה במתח גורמת לירידה בזרם המנהור ומתקבל נגד שלילי.

עליה נוספת של המתח הקדמי תגרום להפסקת זרם המנהור והתחלה של זרם דיודה רגיל בממתח קדמי.



איור 27 דיודת TD במתח קדמי גדול

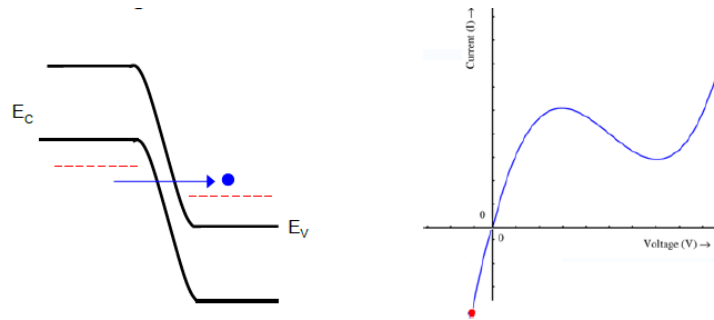
והגדלה נוספת תיתן זרם המתאים לדיודה רגילה.



איור 28 דיודת TD מתנהגת כדיודה רגילה.

הקו המקווקו מתאר את התנהגותה של דיודה רגילה.

לדיודת המנהרה גם התנהגות מיוחדת עבור ממתח שלילי ועקום ההיענות המלא של הדיודה נראה כך:

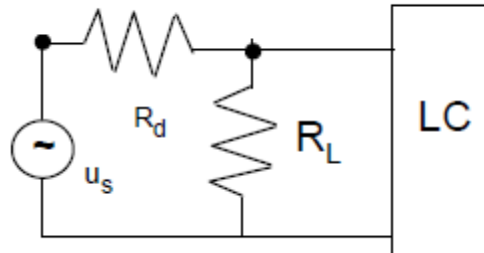


איור 29 האופיין המלא של הדיודה

האלקטרונים זורמים במנהור אולם בכיוון הפוך עקב השפעת המתח האחורי שמופעל על הדיודה. המשמעות שבמתח שלילי יש זרימה בדיודה והיא כולה זרימה כתוצאה של מנהור.

2.4.3 שימושי דיודת המנהרה

שילוב דיודה במעגל.



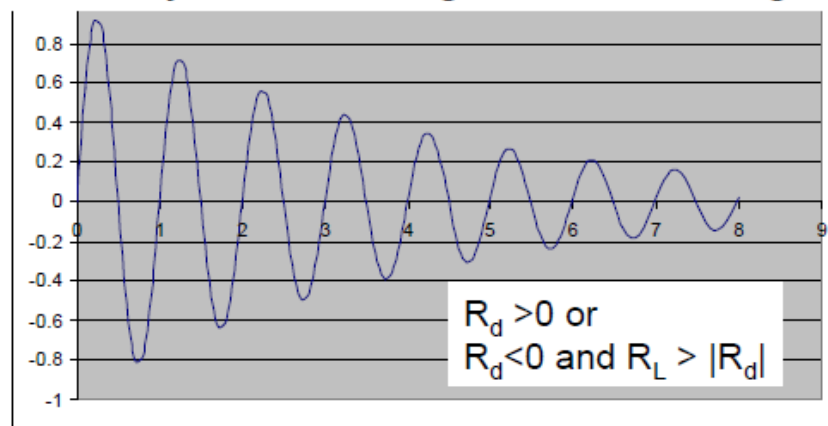
איור 30 שילוב TD במעגל חשמלי

$P=IV$. כאשר נגד מחובר למקור מתח, זורם במעגל זרם ועל הנגד מתפתח חום לפי

חיובי ההספק של הנגד הוא חיובי ז"א הוא צורך הספק R . ולכן עבור $V=IR$ מתח הנגד מחושב לפי וההספק שלילי ז"א הנגד מיצר הספק כמו מקור מתח $V < 0$ המתפתח לחום. אולם אם הנגד שלילי אז ולכן שימוש העיקרי כמתנד.

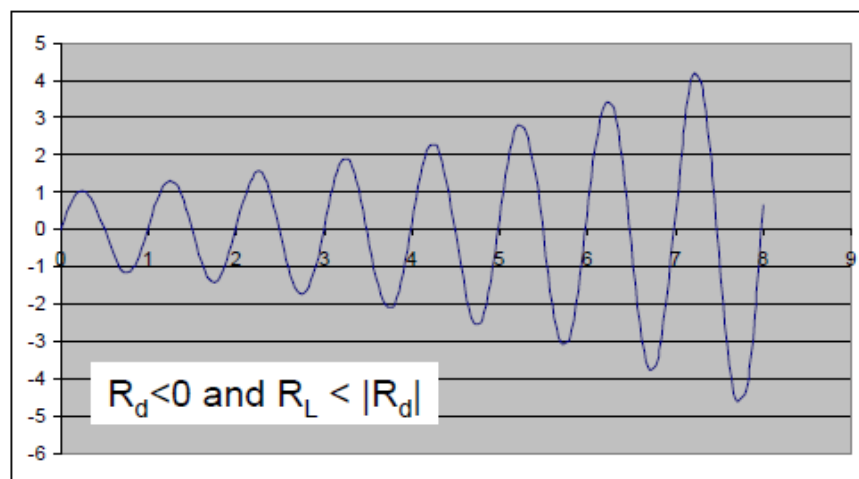
מתנד

נוצר גל אולם עקב תופעות אוהמיות הגל דועך. לכן בשילוב של דיודת מנהרה בתחום LC במעגל ההתנגדות השלילית, נוצר מתנד. לדיודת מנהרה יכולת תגובה מהירה לכן ניתן ליצר בה גלים עד כ- 100GHz ובמעגלים דיגיטליים ניתן להגיע אפילו ל-5GHz.



איור 31 התנודות במעגל RLC ללא TD

ללא דיודת מנהרה RC התרשים מתאר גל דועך הנוצר במעגל



איור 32 מעגל LC בשילוב עם TD בפרמטרים מתאימים

תקשורת

לתקשורת בתחום המיקרו, דרושים דיודות מהירות ליצירת תדרים גבוהים. הדיודות הרגילות אינן מתאימות ודיודת המנהרה ממלאת תפקיד זה. לכן היא שימושית בתחום התקשורת ובמיוחד בתקשורת לווינים. אמנם כיום מיוצרים טרנזיסטורים מתאימים לתחום זה והם ממלאים את תפקיד דיודת המנהרה.

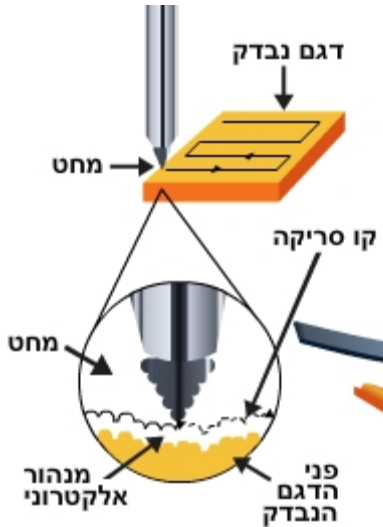
עמידות

לדיודות המנהרה עמידות גבוהה לטמפרטורה ולשדות מגטים. העמידות להשפעת שדות מגנטיים מנוצלת בעיקר למחקר. העמידות לטמפרטורה הופכת את דיודת המנהרה ליעילה מאד לשימושים צבאים ולשימוש בלווינים.

2.5. מיקרוסקופ מנהור סורק (ממ"ס) (S.T.M.)

(תהודה)(ויקיפדיה)

ממ"ס פועל על עיקרון המנהור. הממ"ס מצויד בחוד קטן מאד ואותו מקרבים למשטח הסריקה, למרחק 4×10^{-10} מ.



איור 33 מבנה מיקרוסקופ מנהור (STM)

הסריקה יכולה להתבצע בשני אופנים:

(1) שמירה על זרם קבוע

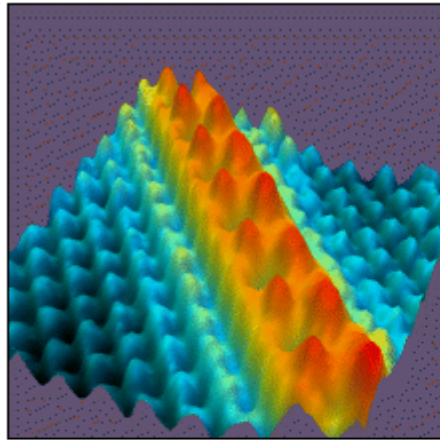
(2) שמירה על מרחק קבוע.

שמירה על זרם קבוע, מתבצעת ע"י שינוי גובה החוד מהמשטח. גובה החוד נמדד ע"י המתח המסופק למערכת הייצוב של החוד, וכך ניתן לקבל תצורה של צפיפות המטען שעל פני משטח.

באופן השני, הסריקה מתבצעת תוך שמירה על מרחק קבוע. ז"א מתח הייצוב קבוע, ואז זרם המנהור משתנה, בהתאם לצפיפות המטען. לכן בזמן סריקה, ניתן להבחין בין אטומים שונים ומצבי אנרגיה שונים. סריקה זו מהירה יותר, שכן היא דורשת מדידה של זרם המנהור, הניתן למדידה מהירה יותר, מאשר המתח הדרוש לייצוב המרחק של חוד המיקרוסקופ, בשיטה הראשונה.

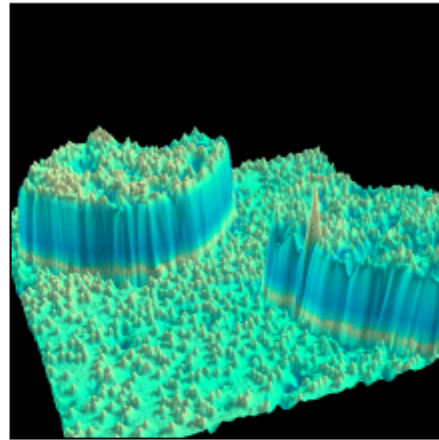
עיצוב פני משטח

IBM עקב הרזולוציה הגבוהה של הממ"ס ויכולת הצפייה המידית של מבנה המשטח, פתחו חוקרי לשנייה לאזור אחר. בשנת 1989 4\AA^0 שיטה המאפשרת התקרבות לאטום מסוים וגרירתו במהירות ע"י 35 אטומים בודדים. IBM והצליח דר' דון איגלר לעצב את השם



STM image, 7 nm x 7 nm, of a single zig-zag chain of Cs atoms (red) on the GaAs(110) surface (blue).

Reference: Geometric and Electronic Properties of Cs Structures on III-V (110) Surfaces: From 1-D and 2-D Insulators to 3-D Metals, L.J. Whitman, J.A. Stroscio, R.A. Dragoset, and R.J. Celotta, Phys. Rev. Lett. 66, 1338 (1991). Electron Physics Group



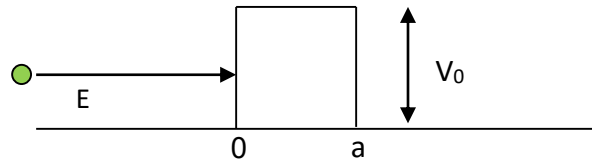
STM image, 35 nm x 35 nm, of single substitutional Cr impurities (small bumps) in the Fe(001) surface.

Reference: Atomic-scale Observations of Alloying at the Cr-Fe(001) Interface, A. Davies, J.A. Stroscio, D.T. Pierce, and R.J. Celotta, Phys. Rev. Lett. 76,

3. נספח: רקע תיאורטי

3.1 פתרונות למשוואת שרדינגר עבור מחסום פוטנציאל

בניח שהחלקיקים נעים ימינה ופוגעים במחסום פוטנציאל סופי E נתאר שטף חלקיקים בעלי אנרגיה $E < V_0$. בתחום $[0, a]$ V_0 שגובהו



איור 34 מחסום פוטנציאל

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 < x < a \\ 0 & a < x \end{cases}$$

משואת שרדינגר שאינה תלויה בזמן:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar}{2m} \partial^2 \psi &= E\psi & x < 0 \\ -\frac{\hbar}{2m} \partial^2 \psi + V_0 \psi &= E\psi & 0 < x < a \\ -\frac{\hbar}{2m} \partial^2 \psi &= E\psi & a < x \end{aligned}$$

1.3

נעביר אגפים ואז נקבל:

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar}{2m}\partial^2\psi &= E\psi & x < 0 \\
-\frac{\hbar}{2m}\partial^2\psi &= (E - V_0)\psi & 0 < x < a \\
-\frac{\hbar}{2m}\partial^2\psi &= E\psi & a < x
\end{aligned}$$

2.3

נניח פתרונות מהצורה :

$$\begin{aligned}
\psi_{x<0} &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\
\psi_{0<x<a} &= Ce^{iqx} + De^{-iqx} \\
\psi_{x>a} &= Ge^{ikx} + He^{-ikx}
\end{aligned}$$

3.3

כאשר

$$K = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad q = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$$

4.3

החלקיקים לא חוזרים אחורה אז $a < x$ עפ"י ההנחה החלקיקים נעים ימינה ולכן בתחום $H=0$.

הדרישות מהפתרונות הן רציפות הפונקציות ורציפות הנגזרות שלהן.

וכאן נקבל:

רציפות הפונקציה:

$$\begin{aligned}
A + B &= C + D & x = 0 \\
Ce^{iqa} + De^{-iqa} &= Ge^{ika} & x = a
\end{aligned}$$

5.3

רציפות הנגזרות :

$$\begin{aligned} ik(A - B) &= iq(C - D) & x = 0 \\ iq(Ce^{iqa} - De^{-iqa}) &= ikGe^{ika} & x = a \end{aligned}$$

6.3

מהמשוואות אנו רואים שקימת הסתברות של החלקיק לחזור וגם לעבור. לכן כדי לקבל התרשמות על A. גדלים יחסים אלו כדי לחלק את כל המשוואות ב-

$$\text{ונגדיר: } \frac{B}{A} = r \quad \frac{C}{A} = f \quad \frac{D}{A} = d \quad \frac{G}{A} = t$$

מציינים t, f, d - מציינים את החלק החוזר מהמחסום והחלק העובר את המחסום מצוין ע"י r הערך של את החלק העובד בתוך המחסום.

המשוואות שנקבל:

$$\begin{aligned} 1 + r &= f + d \\ ik(1 - r) &= iq(f - d) \\ fe^{iqa} + de^{-iqa} &= te^{ika} \\ iq(fe^{iqa} - de^{-iqa}) &= tike^{ika} \end{aligned}$$

7.3

פתרון המשוואות נותן:

$$r = \frac{(k^2 - q^2) \sin(aq)}{2ikq \cos(aq) + (k^2 + q^2) \sin(aq)}$$

8.3

$$t = \frac{4kqe^{-iak}}{(k + q)^2 e^{-iaq} - (k - q)^2 e^{iaq}}$$

9.3

$$d = \frac{e^{iaq-iak}(kq - k^2)}{2kq \cosh(-2iaq) + (k^2 + q^2) \sinh(-2iaq)}$$

10.3

$$f = \frac{e^{iaq-iak}(kq + k^2)}{2kq \cosh(-2iaq) + (k^2 + q^2) \sinh(-2iaq)}$$

11.3

קימת $0 < x < a$ הפתרונות הרשומים הינם פתרונות כלליים. מהפתרון אנו רואים שבכל מקרה בתחום $f, d \neq 0$ שונים מאפס. f, d הסתברות לנוכחות החלקיק. זאת בגלל שהערכים של המקדמים

מקבל ערך q אז $E < V_0$ וזה אומר שאם $q = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$ $0 < x < a$ יותר מזאת בתחום הנתון מדומה. ואז הפתרון המתאים לתחום זה :

$$\psi_{0 < x < a} = fe^{|q|x} + de^{-|q|x}$$

12.3

אם כך בתחום הנתון לא מתקיים גל, אלא רואים התנהגות אקספוננציאלית ללא התנדנדות. למרות "נולד" הגל מחדש. החלקיק בעל אותן תכונות שהיו לו לפני מחסום ורק בעצמה $a < x$ זאת באזור (אמפליטודה) יותר קטנה. ביטוי זה מתאר זרם חלקיקים ש"הצליחו" לחדור ולעבור את המחסום.

עפ"י הפיזיקה הקלאסית, אם לחלקיק אנרגיה, הנמוכה מגובה המחסום, אין הוא יכול לעבור את המחסום. אולם בהיבט הקוונטי, למרות שלחלקיק אנרגיה נמוכה יותר מהמחסום, ישנה הסתברות למצוא אותו מעבר למחסום. באותו אופן, ביחס למקרה שלחלקיק אנרגיה גבוהה יותר מאשר למחסום. בהיבט הקלאסי, החלקיק אמור לעבור את המחסום ללא שינוי, ובהיבט הקוונטי ההסתברות למעבר החלקיק היא לא 100%, אלא יש סיכוי סופי שהחלקיק יוחזר ולא יעבור את המחסום.

יחס העברה

נדון ביחס ההעברה המחושב עפ"י: V_0 ל- E נפריד את המקרים עפ"י היחס שבין $T = |t|^2$.

עבור $E > V_0$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{[V_0 \sinh(qa)]^2}{4E(V_0 - E)}}$$

13.3

גדל ז"א ככל שרוחב a והולך ודועך במהירות, ככל ש- $a=0$ מקסימאלי עבור T הערך של מחסום הפוטנציאל גדול יותר, ישנה דעיכה אקספוננציאלית, של יחס העברה. אולם היחס הוא איננו אפס.

עבור $E = V_0$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{ma^2V_0}{2\hbar^2}}$$

14.3

a במקרה זה תלוי ברוחב המחסום T הערך.

עבור $E < V_0$

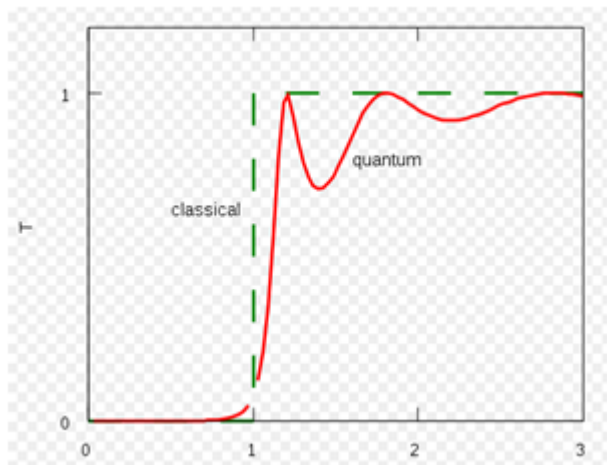
$$T = \frac{1}{1 + \frac{[V_0 \sin(qa)]^2}{4E(E - V_0)}}$$

15.3

V_0 במצב זה יחס ההעברה איננו 1, למרות שהאנרגיה של החלקיק גדולה מגובה המחסום.

מסקנה: כאשר חלקיק פוגש מחסום פוטנציאל הוא מושפע ממנו גם כאשר האנרגיה של החלקיק גדולה מהמחסום.

את התוצאות ניתן לראות בגרף:



T

E/V_0

איור 35 תלות יחס ההעברה T ביחס E/V_0

3.2. מנהור בגלים

משוואת הגלים:

$$\partial^2 E_{(x,y)} + K_0^2 n_{(x)}^2 E_{(x,y)} = 0$$

16.3

נניח פתרון של משוואת הגלים בהפרדת משתנים.

$$E_{(x,y)} = A E_{(x)} E_{(y)}$$

17.3

נציב במשוואת הגלים ונקבל:

$$\partial^2 (A E_{(x)} E_{(y)}) + K_0^2 n_{(x)}^2 A E_{(x)} E_{(y)} = 0$$

18.3

מכאן נובע:

$$(\partial^2 E_{(x)}) A E_{(y)} + (\partial^2 E_{(y)}) A E_{(x)} + K_0^2 n_{(x)}^2 A E_{(x)} E_{(y)} = 0$$

19.3

ונקבל $A E_{(x)} E_{(y)}$ נחלק את המשוואה ב-

$$\frac{\partial^2 E_{(x)}}{E_{(x)}} + \frac{\partial^2 E_{(y)}}{E_{(y)}} + K_0^2 n_{(x)}^2 = 0$$

20.3

הוא מספר לכן ניתן להניח פתרון: $K_0^2 n_{(x)}^2$ הביטוי

$$\frac{\partial^2 E_{(y)}}{E_{(y)}} = \alpha$$

21.3

הפתרון של משוואה זו:

$$\partial^2 E_{(y)} = \alpha E_{(y)}$$

בניח פתרון:

$$E_{(y)} = B e^{iK_y y} + D e^{-iK_y y}$$

22.3

$$\alpha = -K_y^2$$

נחזור למשוואה

$$\frac{\partial^2 E_{(x)}}{E_{(x)}} + \frac{\partial^2 E_{(y)}}{E_{(y)}} + K_0^2 n_{(x)}^2 = 0$$

23.3

נציב את:

$$\frac{\partial^2 E_{(x)}}{E_{(x)}} - K_y^2 + K_0^2 n_{(x)}^2 = 0$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\frac{\partial^2 E_{(x)}}{E_{(x)}} = K_y^2 - K_0^2 n_{(x)}^2$$

$$\frac{\partial^2 E_{(x)}}{E_{(x)}} = -(K_0^2 n_{(x)}^2 - K_y^2)$$

$$\partial^2 E_{(x)} = -(K_0^2 n_{(x)}^2 - K_y^2) E_{(x)}$$

24.3

למשוואה האחרונה יש פתרון התלוי בערך שמופיע בתוך הסוגריים. אם הגל עובר מתווך אחד לתווך . אם הגל עובר מתווך בעל מקדם שבירה $n(x)$ שני הרי שהאיבר שבתוך הסוגריים תלוי בשינוי של $n_2 < n_1$ מגבוה לנמוך מתקים

$$K_y^2 < K_0^2 n_1^2$$

נגדיר

$$n_2^2 = n_1^2 - \epsilon$$

25.3

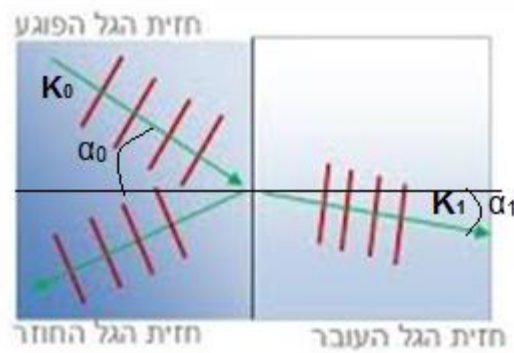
$$\beta \text{ ואז } = (K_0^2 n_2^2 - K_y^2) = K_0^2 n_1^2 - K_0^2 \epsilon - K_y^2$$

26.3

יכול לקבל גם ערך שלילי. $K_0^2 n_1^2 - K_0^2 \epsilon - K_y^2$ הביטוי

הקשר לחוק סנל

בתרשים מתואר גל מתקדם הפוגע בתווך כאשר חלק ממנו מוחזר וחלק ממנו עובר. נסמן את כיוון הגל K_1 ואת כיוון הגל העובר ב- K_0 הפוגע ב-



. x, y ע"י שני רכיבים בצירים K_1 ואת K_0 ניתן להביע את

$$K_{0y} = K_0 \sin \alpha_0$$

$$K_{0x} = K_0 \cos \alpha_0$$

27.3

$$K_{1y} = K_1 \sin \alpha_1$$

$$K_{1x} = K_1 \cos \alpha_1 \quad \text{כאשר} \quad K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

28.3

דורשת γ הרציפות בציר

$$K_0 \sin \alpha_0 = K_1 \sin \alpha_1$$

או

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \alpha_0 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \sin \alpha_1$$

29.3

וזהו למעשה חוק סנל.

$\beta < 0$ נחזור למשוואה 3.24 עבור

ובמקרה זה המשוואה 3.24 תיראה:

$$\partial^2 E_{(x)} = |\beta| E_{(x)}$$

30.3

כאשר V_0 הפוגש מחסום פוטנציאל E משוואה זו דומה למקרה הקוונטי של חלקיק בעל אנרגיה $E < V_0$

$$-\frac{\hbar}{2m} \partial^2 \psi = (E - V_0) \psi$$

$$\partial^2 \psi = -\frac{2m}{\hbar} (E - V_0) \psi$$

$$\partial^2 \psi = \frac{2m}{\hbar} (V_0 - E) \psi$$

ובעבור מקרה זה קבלנו פתרון אקספוננט. ולכן גם כאן הפתרון יראה:

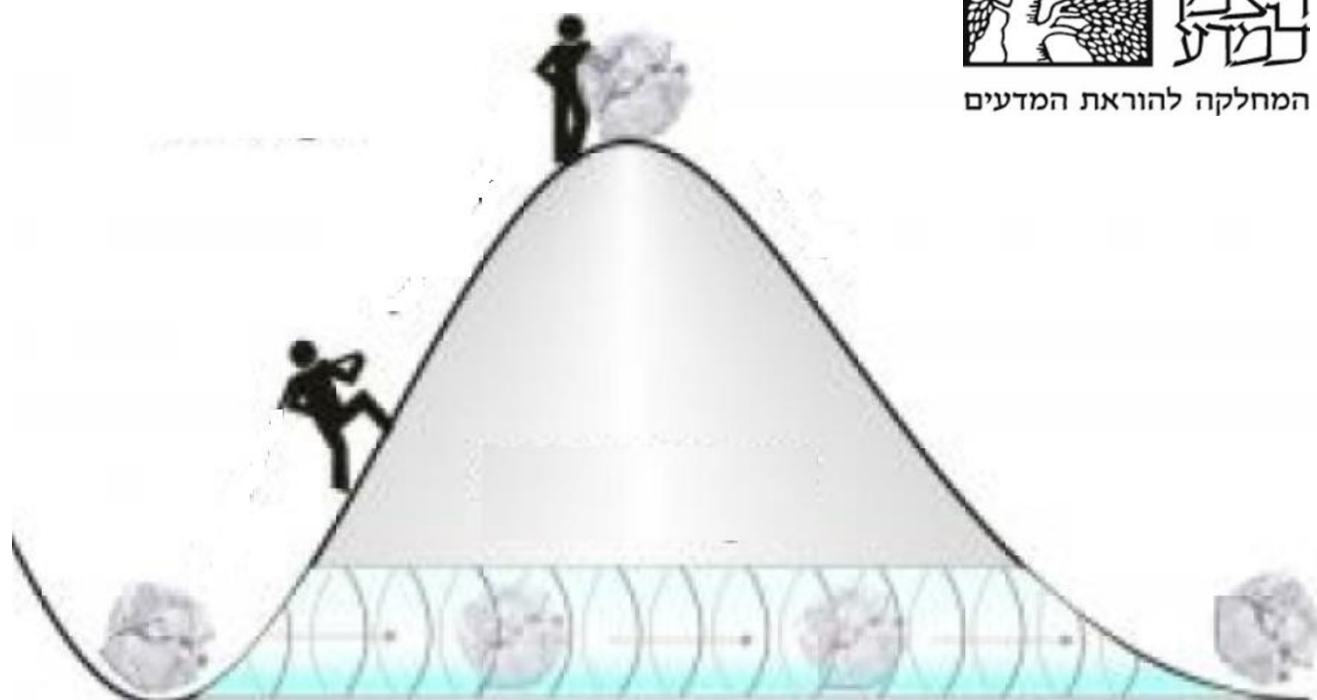
$$E_{(x)} = Ge^{-\sqrt{\beta} \cdot x}$$

31.3

ז"א גל עם דעיכה אקספוננציאלית בציר x.



המחלקה להוראת המדעים



עבודה בנושא:

מנהור גלים (חלק דידקטי)

מגישים:

אהרון לבירם

אלי דניאל

תוכן העניינים

מבוא.....3

חלק א. רקע וידע נדרש

תופעת המנהור הגלי בתהליכים טבעיים ושימושים טכנולוגיים.....4-6

רקע מתמטי.....7-9

שדה של פונקציית פוטנציאל.....10-11

תורת הקוונטים.....12

גלים.....13-15

חלק ב. חקירת גל בהשפעת שדה של פונקציית פוטנציאל

מקרה 1: חלקיק חופשי.....16-17

מקרה 2: חלקיק בפונקציית מדרגה $(E > V)$18-22

מקרה 3: חלקיק בפונקציית מדרגה $(E > V)$23-26

מקרה 4: חלקיק בפונקציית מדרגה $(E < V)$27-31

מקרה 5: חלקיק בבור פוטנציאל מלבני $(E > V)$32-36

מקרה 6: חלקיק במחסום פוטנציאל מלבני $(E > V)$37-41

מקרה 7: חלקיק במחסום פוטנציאל מלבני $(E < V)$42-47

אנלוגיה למקרים באופטיקה.....48-51

חלק ג. תרגול וחקר אמצעות הדמיה

תוכן עניינים.....53

מבוא

תופעת המנהור הקוונטי, נושא עבודת הגמר, הינה תופעה המיוחסת לעולם המסתורי של העולם הקוונטי, עולם שמורים לפיזיקה חוששים להיכנס אליו. הסיבות לכך יכולות להיות:

(א) בורות וחוסר הבנה בנושא.

(ב) הפחד מהכנסת מתמטיקה "כבדה" לתלמידי תיכון

(ג) אי יכולת להשליך את האינטרפרטציה הקוונטית לגלים בכלל וגלים מכנים בפרט.

העובדה שהפיזיקה המודרנית (הקוונטית) מציגה, את הגלים כבסיס להבנת עולם התופעות שאני כוללים במושג "פיזיקה" וכי הפיזיקה הקלאסית, חומר הלימודים שאנו מלמדים בתיכון (ובאוניברסיטאות..) הוא מקרה פרטי של תורת הקוונטים. לא באה לידי ביטוי בעדכון חומרי הלימודים והשתלמויות מורים ובכך אנו מונעים מ"דור העתיד" לספוג הבנה בתורת הגלים, שהיא הבסיס לכל מחקר עתידי בפיזיקה. וזה הפסדינו כמורים.

נושא העבודה המקורי היה "תופעת המנהור הקוונטי". עם התעסקותנו בנושא גילינו כי חשיפה של המנהור הקוונטי כמעשה קסמים השייך לעולם הקוונטי אשר ממילא התלמידים לא נחשפים אליו לא תהיה בעלת ערך. המנהור הקוונטי מפתיע לא בשל העובדה שהוא סותר התנהגות של חלקיקים קלאסיים אלה בשל האינטרפרטציה של פונקציית הגל כצפיפות הסתברות (למציאת החלקיק) שהוא אחד הפוסטולטים של תורת הקוונטים, ולא התופעה עצמה, כתופעה ידועה ומוכרת עשרות שנים. העובדה שאנו, מורים לפיזיקה מלמדים את תלמידינו בשעורי האופטיקה שכשמתרחשת החזרה פנימית מלאה של קרן אור הפוגעת במשטח בזווית הגדולה מהזווית הקריטית אין כלל מעבר של אור אל התווך השני וכי יש רק החזרה, היא "לא כל האמת" היא לדעתנו, טעות. הסברת הנושא לא רק שתעשיר את התלמיד ואת המורה, גם תגרום להתעוררות של סקרנות התלמידים ל"מה בדיוק קורה שם" או "איך האור יודע..." וכן תחזק את האפשרות שלא להבין ולהסביר טכנולוגיות של מכשירים שהוא משתמש שהבסיס שלהם הוא מנהור של גל.

תלמידי התיכון נחשפים לגלים ברמה בסיסית. הם מבינים את המושגים הבסיסיים בתורת הגלים: תנועה הרמונית ומשוואתה שמייצרת גל. עקרון הסופרפוזיציה, גל נע וגל עומד, התאבכות בונה והורסת, Beat. הקושי להרחיב את היריעה ולחשוף את העולם העשיר של תורת הגלים היא המתמטיקה: קשה מאוד לעסוק במשוואות גלים ללא שימוש במספרים מרוכבים. נושא זה, אם בכלל, ניתן בצורה שטחית בכיתה יב'.

עבודה זו מגישה למורה לפיזיקה ערכה ללימוד עצמי של תופעות גליות, הוא יותר נכון, השפעה של שדה פוטנציאל על גל הנע בו. היא מורכבת מ:

- סקירת הנושא של המנהור כתופעה פיזיקלית טבעית ויישומים טכנולוגיים שלה
- רקע מתמטי בסיסי ובמשוואות דיפרנציאליות
- רקע בתורת הקוונטים
- ניתוח התנהגות גל (מכני) הנע בהשפעת פונקציות פוטנציאל שונות
- אנלוגיה קוונטית לכל המצבים הנ"ל
- אנלוגיה ויישומים אופטיים ושל גלים א"מ של המצבים הנ"ל
- התנסות בהדמיה (Phet של אוני' קולוראדו) לשם חקירה של כל אחד מהמצבים הנסקרים.
- הצעות להדגמות והוראת הנושא בכיתה

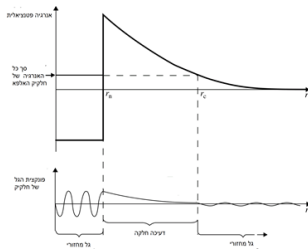
לעבודה יש גם אתר [כאן](#) שמכיל חלק מהנושאים המועברים בעבודה זו וכן חומרים וקישורים בנושא העבודה. אנו מאחלים למורים המשתמשים בעבודה זו הנאה סיפוק והעשרה, כפי שהיה לנו בחקירת וכתבת הנושא. ומעל הכל שיהיה לנו, המורים לפיזיקה את היכולת ללמד אותו את תלמידנו.

חלק א. רקע וידע נדרש

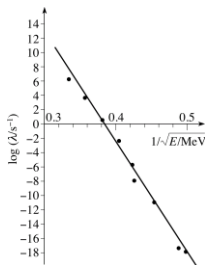
תופעת המנהור הגלי בתהליכים טבעיים ושימושים טכנולוגיים.

אחד הדברים שהלהיבו אותנו בכתבת העבודה בנושא המנהור הקוונטי היא חשיבות הנושא מבחינה טכנולוגית ומדעית. הדעת הרווחת היא שתופעת המנהור היא עוד אחת ממזרויות האקזוטיות של תורת הקוונטים ולא יותר כשלמעשה הנושא הזה "חם" ועומד להיות בין הנושאים הכי חשובים בעתיד הטכנולוגי והמדעי של תלמידנו. נפתח בסקירה על תהליכים טבעיים שמערבים מנהור קוונטי:

א. התפרקות אלפא:



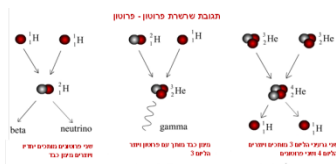
רעיון המנהור הקוונטי הוזכר לראשונה בהתפרקות α של גרעין רדיואקטיבי. הגרעין הרדיואקטיבי הוא כבד ולחלקיק α יכולה להיות ארגיה מספיקה כדי להמלט במנהור קוונטי. חלקיק α מוחזק בגרעין ע"י בור פוטנציאל שנוצר משני סוגי פוטנציאלים: מושך (בשל כוח גרעיני) ודוחה (בשל דחיה אלקטרוסטטית קולוניית בן פרוטוני הגרעין לאלו של α). כפי שנראה באיור, החלקיק לכו בבור שהאנרגיה בו חיובית ואותה רמת אנרגיה מתקיימת מחוץ לבור על כן החלקיק יכול להמלט במנהור מהבור.



צורת מחסום הפוטנציאל מורכב יותר מהמחסום המלבני שבמודל שהצגנו. אך נוכל להגיד בעקבות המודל שככל שאנרגיית חלקיק האלפא גבוהה יותר סיכויין למנהור גבוהים יותר בשל 2 גורמים: הגורם הישיר הוא האנרגיה גבוהה והגורם הבלתי ישיר הוא שעובי המחסום קטן ככל שהאנרגיה גבוהה יותר. שתי הגורמים הללו גורמים לשינויים גדולים מאוד בקצב התפרקות אלפא בעקבות שינויים קטנים באנרגיה.

באיור נראה שינויי של 10^{24} בקצב בהתפרקות בשל שינוי של 10^2 בלבד באנרגיה.

ב. היתוך גרעיני בשמש:

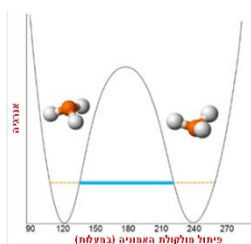


תהליך היתוך גרעיני המימש היתה אחת הסוגיות הבעייתיות לפתרון עד שהמדענים הבינו שמנהור קוונטי אחראי לתופעה. בשמש שלנו, שהוא כוכב ממוצע ובעוד כוכבים "קרים" מסוגה שטמפרטורת גרעיניהם היא עד 15 מיליון מעלות קלווין מתרחשת ראקציית פרוטון-פרוטון (איור) טמפרטורה שמאפשרת רק לפרוטונים בודדים שיש להם אנרגיה קינטית מספיקה להתגבר על הדחיה הקולונית. ההסבר המקובל הוא שפרוטונים עוברים במנהור את המחסום ובממוצע נדרשים 1,000 התנגשויות בין פרוטונים בין היתוך להיתוך. בקצב ראקציה בינהם והראקציות בשמש

ג. קוסמולוגיה

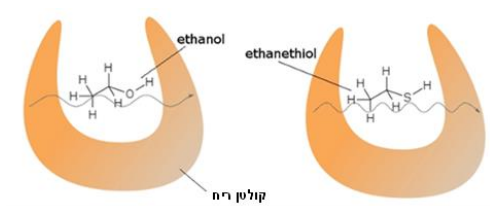
אחת התיאוריות שמדברת על היווצרות היקום כתופעת מינהור ממצב של "חוסר גאומטריה" (חוסר זמן-מרחב) למצב בו הוא נמצא היום שמכיל מרחב זמן ו...חיים.

ד. מנהור בכימיה



אחת הבעיות הראשונות שבהן הופיע רעיון המנהור הוא הסבר של מעברים בין שני קונפיגורציות גאומטריות של מולקולות, שאמוניה היא המולקולה הראשונה בהן שנחקרה, שקיימות בשני מצבים גאומטרים מבחינת זרועות הקשרים של אתומי המימן עם החנקן. כל אחד מהמצבים נתון בבור פוטנציאל ומבודדים ביניהם על ידי מחסום פוטנציאל שמבחינה קלאסית אין למולקולה אפשרות לעבור ממצב אחד למצב שני.

ה. (ביולוגיה) מינהור בקולטני הריח



עד לאחרונה, היה מקובל שעיקרון הפעולה של קולטני הריח שבאף הוא התאמה של מולקולות הריח לקולטנים (מנגנון שנקרא מנעול-מפתח). עיקרון זה לא יכול להסביר כיצד שתי מולקולות ריח, בעלות מבנה זהה, למשל ethanol ו ethanethiol (הראשון הוא זה שאנו שותים ואילו השני מריח כביצים סרוחות...). תיאוריה מקובלת חדשה מתארת את תהליך ההרחה (זהו מולקולת הריח) כתהליך שמערב מנהור קוונטי. הקולטן מזרים זרם שיוצר שדה חשמלי ומרעיד את מולקולת הריח בתנודה ספציפית למולקולה שאז היא ניתנת לזהוי. הבעיה היא שאין מגע חשמלי טוב בין הקולטן למולקולה ולמעשה המרווח ביניהם הוא מחסום פוטנציאל. זרם האלקטרונים שעובר מהקולטן למולקולה עובר במנהור דרך המחסום.

ו. (ביולוגיה) מוטציות

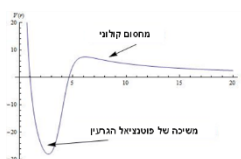
תופעות לא מוסברות של שינויים ביוכימיים בהם קשרים כימיים משתנים ואשר גורמים לשינויים בקידוד ברמת התא ומכאן לכשל של התא ליצור חלבונים ושאר חומרים באופן תקין ולמוטציות ברמת DNA שמשפיעות על השרדות הייצור החי וצאצאיו. קשרי מימן שהרבה מהם מאופיינים בפוטנציאל של בור פוטנציאל כפול. פרוטון שכלוא בבור העמוק יותר יכול לצאת אך ורק באמצעות מינהור ולעבור לבור השני, מצב לא רצוי, ביולוגית, בו המולקולה שונה ואינה יכולה לשמש לתפקודה התקין בתא.

מובן שההסבר החדש שופך אור חדש על ענפים אחרים במדע כגון כחקר גורמים באבולוציה ובהתפתחות החיים.

מינהור קוונטי בטכנולוגיה

האדם מנצל את הידע וההבנה של תופעת המנהור לשימושים טכנולוגיים. אלו מתרבים ככל שעובר הזמן. נזכיר כמה מהם:

ז. היתוך גרעיני קר



הדחיה הקולונית בין הפרוטונים בשל מטענים מהווה למעשה מחסום פוטנציאל המונע היתוך בין פרוטונים. באנרגיות נמוכות, עובי המחסום שנובע מפוטנציאל $\frac{1}{r}$ גדול. כדי להתגבר על הדחייה משתמשים בטמפרטורות גבוהות (בפצצת אטום כדי להצית פצצת מימן) במאיצי חלקיקים או בבקבוקי פלאסמה.

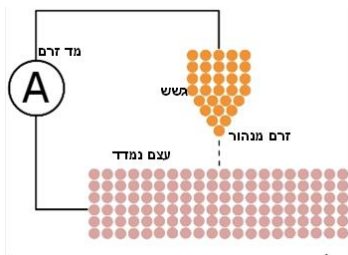
ח. צומת ג'ספסון

עליו מבוסס רכיב שימושי ביותר המשמש למדידה. הצומת מורכבת משני על מוליכים המבודדים ביניהם בשיכבה דקה מאוד של חומר אחר, מוליך או מבודד. אלקטרונים עוברים מעל-מוליך אחד לשני דרך השכבה הדקה במנהור. העובדה שכמות האלקטרונים שעוברת מושפעת אקספוננציאלית מרוחב המחסום וזה מושפע מהפרש פוטנציאלים של האלקטרונים ושל המחסום שמושפע מהסביבה אותה הוא מודד, הופכת את הרכיב למכשיר מדידה מדויק ביותר למדידת שדות חלשים ומשתמשים בו בתחומי מדע שונים.

ט. דיודת מנהור

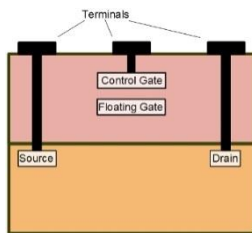
דיודה שרמת הזהום (doping) של חצאי המוליכים גדולה ואשר יוצרים צומת PN דקה מספיק למנהור כשהדיודה מחוברת בממתח אחורי. אחד המאפיינים שלה היא מהירותה – היות והשינוי ברוחב הצומת או בממתח משפיע אקספוננציאלית על הזרם. שימוש נוסף הוא בתור מתנד מהיר מאוד: בתחום מתחים בהם מתאפשר מינהור העלעת המתח תגרום להקטנת הזרם והפוך, דבר שעלפי חוק אום שאפשר לראות אותו כהתנגדות שלילית מצב המאפשר למערכת ליצור תנודה הרמונית.

י. מקרוסקופ מינהור סורק (STM) Scanning Tunneling Microscope



מכשיר רב עוצמה למיפוי עצמים עד לרזולוציה של מאית האטום. המכשיר מורכב מגשש דק מאוד בקצהו (הצליחו ליצר גשש שרוחבו 0.001nm – קרוב לרוחב אטום בודד) הממוקם קרוב מאוד לעצם 0.007nm , מרחק המאפשר מינהור ואשר סורק את העצם באמצעות הנעה עדינה ומדוייקת (מבוססת על גבישים פיאזואלקטרים) בדיוק של 1nm בסריקה ו 0.01nm בציר האנכי. השתנות המרחק בין קצה הגשש לבין הדגימה מתבטאת בשינוי רוחב מחסום הפוטנציאל וכתוצאה מכך הזרם שבגשש מגיב אקספוננציאלית וניתן להגיע לרזולוציה מדידות של היות ורוחב המחסום מופע גם מהפרש הפוטנציאלים בין הגשש למשטח הנמדד ניתן לאפיין את מבנה המשטח (סוג האטומים, למשל) עלידי שינוי ממתח על הגשש.

יא. זכרונות פלאש (Flash drives)

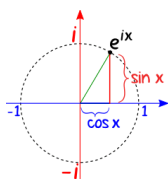


המידע הדיגיטלי באמצעי זיכרון פלאש כדוגמת הדיסק-און-קי, מבוסס על מינהור. הרכיב הוא למעשה טרנזיסטור המכיל שני שערי מתכת, שער בקרה ושער צף. השער הצף שקוע בסביבה של מבודד ומהווה למעשה בור פוטנציאל. במצבו הרגיל השער הצף מייצג את המצב הלוגי "1". כשהוא נטען באלקטרון, האלקטרון לכוד בבור הפוטנציאל אך מטענו משנה את הפוטנציאל שמשפיע על רוחב המחסום. שינוי זה בא לידי ביטוי במתח חשמלי אותו מרגיש שער הבקרה ומתרגם ל"0" בינארי. כדי למחוק מידע טוענים את שער הבקרה למימתח חיובי גדול המשנה את רוחב המחסום הבור כך שהאלקטרון הלכוד יכול לצאת עלידי מנהור לשער הבקרה.

קיימים עוד הרבה טכנולוגיות ושימושים, אחד מהם הוא החיישן למדידת זהות טביעת אצבע, אמצעי שנכנס היום במכשירים רבים המתבסס על מיפוי טביעות האצבע עלידי כך שהוא מודד את זרם המנהור דרך מרווח האויר שבחריץ טביעת האצבע...

רקע מתמטי

כדי ללמד את הנושא בלתי נמנע להציג את הגל של בצורה של מספרים מרוכבים. אין צורך להיכנס לעומק המתמטיקה אלה ללמד את הדגשים הבאים:



✓ הגדרת היחידה המדומה $i = \sqrt{-1}$ עם דגש למישור המדומה (בתמונה) דבר שיזכיר לתלמיד את היחסים בין הפונקציות \sin ו \cos הטריגונומטריות ויקל עליו להשתמש בהצגה מרוכבת במשוואות הגל ולא בהצגה טריגונומטרית.

✓ הבנה שמספר מדומה מתקבל כתוצאה מהוצאת שורש של מספר שלילי $z =$

$$\sqrt{-|A|} = i\sqrt{|A|}$$

✓ משמעות של צמוד מרוכב והריבוע של מספר מרוכב.

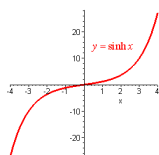
✓ ייצוג הפונקציות הטריגונומטריות: $\sin(x) = \frac{\exp(x) - i\exp(-x)}{2i}$, $\cos(x) = \frac{\exp(x) + i\exp(-x)}{2}$

✓ משוואה דיפרנציאלית לינאריות – הצגת המושג כבסיס להוראת הפיזיקה.

- להתחיל לקרא למהירות $\frac{dx}{dt}$, לתאוצה $\frac{d^2x}{dt^2}$ וכו'.
- כשמלמדים את משוואת הכוח המחזיר $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ שפתרונה הוא ש ω מדומה ולכן הפתרון הוא מחזורי יש ללמד גם את הפתרון למשוואה $\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x$ שפתרונה הוא ש ω ממשי ולכן הפתרון מעריכי.
- ללמד את ההקבלה בין הצגת אוילר $x(t) = A\exp(i\omega t)$ להצגה הטריגונומטרית $x(t) = B\cos(\mp\omega t)$ או $x(t) = C\sin(\mp\omega t)$.
- ללמד תנאי שפה והתחלה כבסיס לפתרון משוואה דיפרנציאלית.

✓ לימוד של פונקציות האקספוננט: \exp^{ax} , \exp^{-ax}

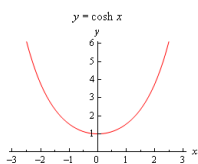
✓ לימוד הפונקציות ההפרבוליות $\sinh(x)$ $\cosh(x)$.



$$\cosh(ax) = \frac{\exp^{ax} + \exp^{-ax}}{2} \bullet$$

$$\sinh(ax) = \frac{\exp^{ax} - \exp^{-ax}}{2} \bullet$$

והזהויות שלהן:



$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \bullet$$

$$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \exp(x) \bullet$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \exp(-x) \bullet$$

$$\cos(ix) = \cosh(x), \sinh(x) = i\sinh(x) \bullet$$

פתרון משוואות דיפרנציאליות

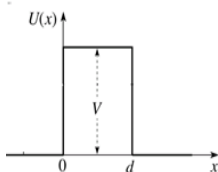
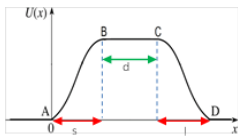
אילוצי התחלה ושפה:

תלמידים נתקלים במשוואות דיפרנציאליות כבר בחומר הבסיסי במכניקה – קינמטיקה. הם משתמשים במשוואות $v = v_0 + at$, או $x = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$ וכו' בלי להיות מודעים לעובדה שהם פתרונות למשוואה דיפרנציאלית, $\frac{dv}{dt} = a$ | $\frac{d^2x}{dt^2} = a$ בהתאמה וכי v_0 ו x_0 הם תנאי התחלה, מהירות ומיקום הגוף בזמן $t=0$. אל משוואות דיפרנציאליות של מרחב משתמשים בהגדרת אנרגיה פוטנציאלית $-F = \frac{dU}{dx}$ כדי להגיע לחישוב הפוטנציאל בנקודה x : $U(x) = F(x - x_0) - U_0$. כאן U_0 ו x_0 הם האנרגיה והמיקום ההתחלתי. כאן המיקום קובע את אילוצי המערכת.

היות ומשוואת הגל מכילה נגזרת שניה (של זמן ו/או מרחב) חייבים להיות תנאי התחלה ו/או שפה, בהתאמה. משוואת הגלים לפונקציה $y(x,t)$: $\frac{d^2y(x,t)}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2y(x,t)}{dt^2}$ דורשת 2 תנאי התחלה ושני תנאי שפה. פתרון כללי של המשוואה: $y(x,t) = A_1 \exp(kx + \omega t) + A_2 \exp(kx - \omega t)$ כש $A_1 \exp(kx + \omega t)$ מתאר גל במסערת מקסימלית A_1 שנע לכיוון $+x$ ו $A_2 \exp(kx - \omega t)$ מתאר גל במסערת מקסימלית A_2 שנע לכיוון $-x$. כדי לפתור את המשוואה דרוש לדעת אינפורמציה על הזמן (לקבוע את ω) ועל המרחב (לקבוע את A_1, A_2, k).

מהם אילוצי שפה? כשהגל עובר בנקודת הגבול בו משתנה פוטנציאל מתרחש שינוי "משני צידי הנקודה" של הפוטנציאל, ולפיכך פועל עליו כוח שמשנה את מהירותו (תאוצה) ולכן משתנה תנע החלקיק. $\frac{dU}{dx} = -F = ma \propto -m\Delta v = -\Delta p$. שינוי תנע בשפת גלים הוא שינוי במספר הגל (אורך הגל)

הערך של $\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_0}$ וכוונתו יקבע מה יקרה לתנע החלקיק במעבר בנקודה x_0 . פונקציות בהם נשתמש בהמשך יהיו פונקציות מדרגה (או מחסום) אשר משנות ערכים בנקודת הגבול. מצב זה גורר ש $dx = 0$ בביטוי $\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_0}$ ולפיכך פועל על החלקיק כוח אינסופי שגורם לשינוי תנע אינסופי.



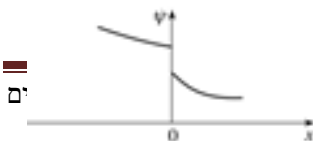
בחרנו פונקציות כאלו מתוך נוחות מתמטית ומתוך העובדה שהם מייצגות נאמנה פונקציות המתארות פוטנציאלים אמיתיים. בצירור נראה פונקציה אמיתית, שקצב השינוי של הפוטנציאל מ A ל B (ומ C ל D) מתרחש במרחק s ולכן על גוף שיושפע מפוטנציאל זה יפעל כוח סופי (כי $dx \neq 0$).

כאן נכנסת העובדה שגל מאופיין באורך גל והוא אינו מושפע משינויים הקטנים מאורך הגל שלו. לכן תנאי להשוואת הפונקציה המקורית לפונקציה המתמטית (בתמונה) יהיה קטן מאורך הגל.

3. תנאי השפה בגלים:

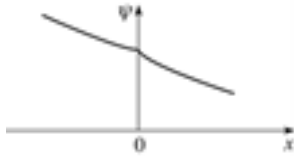
כשהחלקיק עובר בנקודת הגבול נדרוש ש:

- א. תנאי רציפות הפונקציה (תנאי שפה 1) - שערך פונקציית הגל תהיה זהה משני צידי הנקודה. זהו תנאי בסיסי בפיזיקה שמבטיח רציפות באזור קרוב לנקודת מדידה.



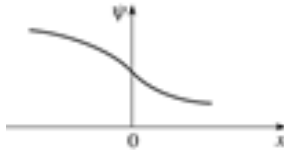
במידה ותנאי זה לא מתקיים הרי שהפונקציה אינה רציפה ואז הנגזרות שלה אינסופיות ולא פיזיקליות.

ב. תנאי על שיפוע הפונקציה ((תנאי שפה 2) שיפוע פונקצית הגל, $d\psi(x)/dx$, צריך להיות זהה משני צידי הנקודה.



אילוץ זה נובע משתי סיבות:

1. מכך ששינוי לא רציף פרושו כוח אינסופי שמוביל לשינוי בתנע אינסופי.
2. לא יתכן, פיזיקלית, שבאותה נקודה יפעלו 2 כוחות שונים



בשני האיורים הראשונים נראים פונקציות שמתאימות רק לאחד מתנ"ש ולפיכך אינן יכולות לתאר גל.

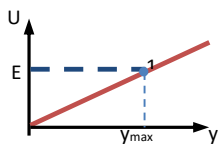
באיור השלישי נראת פונקציה שמתאימה לתאור גל היות והיא מקיימת את שני תנאי השפה.

שדה של פונקצית פוטנציאל

במסגרת לימודיהם התלמידים לומדים על פוטנציאלים שונים כגון פוטנציאל כבידה, פוטנציאל חשמלי, ופוטנציאל קפיץ (שמשום מה קוראים לו עבודת קפיץ...). שכהגדרתם תלויים במקום. ומסומנים כ $U(x)$. חוק שימור האנרגיה נובע שגוף בעל אנרגיה התחלתית E נמצא בפוטנציאל כזה האנרגיה הקינטית שלו היא $E_k(x) = E - U(x)$ והקשר בין מהירות לאנרגיה הקינטית מקבלים שמהירות החלקיק בנקודה x היא

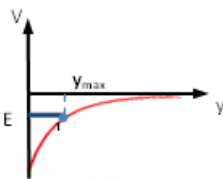
$$v(x) = \sqrt{\frac{2[E-U(x)]}{m}}$$

דוגמאות:

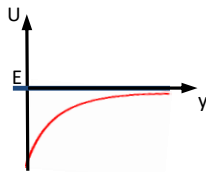


(א) חלקיק בעל מסה m נזרק בשדה גרביטציה אחיד g . האנרגיה של החלקיק $E = E_k(y) + U_0$ ומכאן שבכל נקודה במסלולו $E_k(y) = E - U(y)$ כש $U(y) = mgy$. באיור מתואר גרף אנרגית החלקיק (כחול) וגרף הפוטנציאל (אדום). האנרגיה הקינטית היא ההפרש בין האנרגיה E לבין גרף $U(y)$, מצויינת בגרף.

בנקודה 1 באיור, $E=U(y)$, האנרגיה הקינטית מתאפסת והחלקיק נעצר. היות והכוח הפועל על החלקיק הוא $F(y) = -\frac{dV}{dy}$, כיוון הכוח הוא לכיוון מנוגד לכיוון המקורי והוא גורם לו לחזור בחזרה.

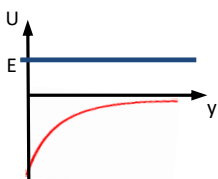


(ב) פוטנציאל גרביטציוני, שהוא מקרה כללי לדוגמה האחרונה: $U(y) = -\left(\frac{GM}{R+y}\right)m$. היות והאנרגיה הקינטית היא ההפרש בין אנרגית החלקיק E (הקו הכחול) לפוטנציאל $V(x)$ (העקומה האדומה). לחלקיק שבאיור אנרגיה שלילית. כל עוד העקומה המתארת את האנרגיה שלו מעל לעקומת הפוטנציאל, האנרגיה הקינטית חיובית ויש לו מהירות. בנקודה 1, שם העקומות חותכות, המהירות מתאפסת והחלקיק יחזור בחזרה בתאוצה הולכת וגדלה (השיפוע הולך וגדל ולפיכך הכוח - התאוצה). זהו מצב של חלקיק לכוד בשדה הפוטנציאל.



מצב אחר (באיור) לחלקיק יש אנרגיה גבולית (אפס) העקומות יחתכו באינסוף ורק שם גם מהירות החלקיק מתאפסת. שם לא יופעל עליו כוח (כי שיפוע גרף הפוטנציאל אפס). מצב זה מוגדרת המהירות

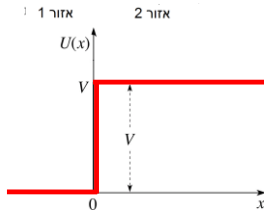
$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$



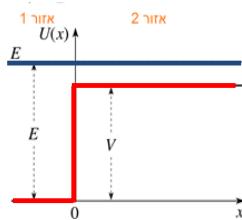
מצב שלישי הוא כשלחלקיק מהירות התחלתית גדולה ממהירות הבריחה $E > 0$, החלקיק יאט ככל שיתרחק ובאינסוף תהיה לו מהירות

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

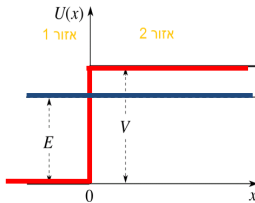
ג) דוגמה נוספת לפוטנציאל הוא פוטנציאל מדרגה (באיור). פוטנציאל כזה ניתן ליצור בעזרת 2 קבלים טעונים. לפוטנציאל המדרגה שני אזורים שבהם הפוטנציאל קבוע. אזור 1 ב $x < 0$ ואזור 2 כש $x > 0$



חלקיק שנע, למשל, מאזור 1 לאזור 2, נתקל בתנאי שפה בנקודה $x=0$ שהוא מואלץ לקיים. כפי שנתקלנו בדוגמאות הקודמות, בפונקציית הפוטנציאל הנתונה יש לחלקיק 3 מצבים (כשהאנרגיה ההתחלתית חיובית). באזורים מתוארים 2 מצבים בהם נעסוק בעבודה זו.



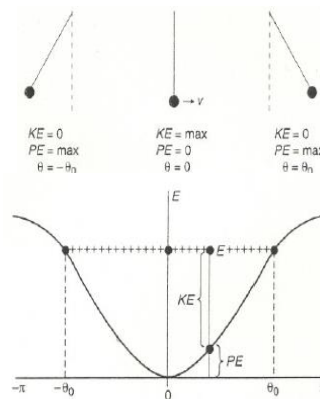
כש $E > V$ האנרגיה הקינטית של החלקיק חיובית בשני האזורים ולכן תהיה לו מהירות ממשיית $v = \sqrt{\frac{2[E-V(y)]}{m}}$. החלקיק במקרה זה, אם הוא נע מאזור 1 לאזור 2 החלקיק נע במהירות V_1 באזור 1 עובר את נקודת הגבול וממשיך במהירות V_2 באזור 2.



מצב שני, החלקיק ינוע במהירות V_1 יעצור בשפה $x=0$ כי שם האנרגיה הקינטית מתאפסת ולכן גם מהירותו. אם נחשוב שהחלקיק באזור 2 האנרגיה הקינטית שלו שלילית ולכן המהירות שלו צריכה להיות מספר מדומה

$$v = \sqrt{\frac{2[E-V(y)]}{m}} = i \sqrt{\frac{2[V(y)-E]}{m}}$$

לחלקיק קלסי אין מהירות מדומה. לגל יש! מבחינה קלאסית החלקיק לא יוכל להיכנס לאזור 2 והוא מוחזר מנקודת הגבול בחזרה לאזור 1. אזור 2 הוא "אזור אסור" מבחינת החלקיק הקלסי.



תורת הקוונטים

תורת הקוונטים מתארת את החלקיקים המיוצגים בעזרת משוואות גלים. אם מפעילים על משוואות גלים אלו פעולות מתמטיות המתארות מדידת גדלים פיזיקליים (אופרטורים הרמיטים) ניתן למצא נתונים על הגלים, כגון תנע, אנרגיה ומיקום. חלקיק כגל אין לו מקום מוגדר וחד משמעי אם ניתן להגדיר את הגל חד משמעית, למשל, אם ידוע לי מספר הגל (מגדיר לי חד משמעי את הגל) לא אוכל למצא את מיקומו במדוייק. עקרון זה, ששיך לעולם הגלים הוא יסוד ונלווה לתורת הקוונטים ונקרא "עקרון חוסר הוודעות של אייזנברג" הנוסחה החשובה לענייננו היא נוסחת הגלים של שרדינגר הבלתי תלויה בזמן

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

שהיא זהה לממשוואת האנרגיה הקלאסית $\frac{p^2(x)}{2m} + U(x) = E$

כאשר האופרטור $-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}$ הפועל על פונקצית הגל $\psi(x)$ מייצג את התנע בריבוע של החלקיק. (אופרטור התנע $p = \hbar \frac{d}{dx}$) אחרי שנציב את הנחת דה-ברולי שהתנע הוא $p = \hbar k$,

כש h הוא קבוע פלנק המצומצם. k הוא מספר הגל של החלקיק

נקבל: $\frac{p^2(x)}{2m} = \frac{[\hbar k(x)]^2}{2m} = E - U(x)$

נציב: $k^2 = \frac{2m(E-U(x))}{\hbar^2}$

על כן מספר הגל $k = \frac{\sqrt{2m(E-U(x))}}{\hbar}$ ואורך הגל $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m(E-U(x))}}$

נעביר את $U(x)\psi(x)$ אגף ונחלק ב $-\frac{\hbar^2}{2m}$ נקבל:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2m(E-U(x))}{\hbar^2} \psi(x)$$

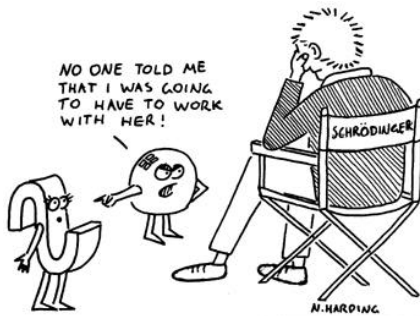
נגדיר: $K^2 \equiv \frac{2m(E-U(x))}{\hbar^2}$ ונציב במשוואה נקבל: $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -K^2\psi(x)$

שהיא משוואת דפרנציאלית המתארת גלים.

עקרונות יסוד בתורת הקוונטים

1. מצב קוונטי של מערכת קוונטית מתואר באמצעות פונקצית גל המייצגת סופרפוזיציה של הסתברות כל האפשרויות לקבל ערך מדיד. הערך עצמו מתקבל עלידי העלאה בריבוע (והיות ופונקצית הגל מרוכבת פונקצית הגל מוכפלת בצמוד לה.
2. המדידה מתבצעת עלידי הפעלת אופרטורים מתמטיים לכל ערך פיזיקלי (תנע, מיקום וכו') יש אופרטור כזה
3. ההסתברות למצא חלקיק במיקום x היא $P(x) = \psi(x)\psi^*(x)$

3מ נובע תנאי נרמול שמחייב ש $\int_{-\infty}^{\infty} P(x) = 1$ ובכך יש אילוץ נוסף על פונקציית הפתרון



גלים

היות ונושא הגלים נלמד בתיכון יצאנו מנקודת הנחה שלתלמיד ידע מקיף בהגדרות של גל ושל הפרעה. התופעות שבהם נעסוק הם תופעות גליות חד ממדיות (רק לשם הפשטות). אנחנו מכירים מספר סוגים של גלים:

גלים מכניים: שהמוכרים ביניהם הקפיצים והמיתרים. מאופיינים בכך שהם:

- (א) יכולים להיות גלים אורכיים או רוחביים.
- (ב) אנרגית הגלים מתכונתית לריבוע המשרעת.
- (ג) מהירותם קטנה ממהירות האור.
- (ד) מצייתים לחוקי המכניקה הקלאסית

גלים אלקטרומגנטיים: שהמוכר יותר (מבחינת תכנית הלימוד) הוא האור. גלים אלו מאופיינים בכך שהם:

- (א) גלים רוחביים
- (ב) יש להם שני סוגי שדות- שדה חשמלי ושדה מגנטי שמתנדנדים בניצב זה לזה.
- (ג) יש להם קיטוב.
- (ד) אנרגיה מתכונתית לריבוע השדה החשמלי (פוינטינג)
- (ה) מתוארים על ידי משוואות מקסוול.
- (ו) מצייתים לחוקי מכניקה הגלים.

חלקיק קוונטי: הוא המושג המודרני הכולל בתוכו גם את הגל האלקטרומגנטי (פוטון) המתאר את חלקיקי החומר כגלים. מאופיינים בכך שהם:

- (א) אינם מייצגים מהות פיזיקלית מדידה אלה פונקציה מתמטית שנקראת פונקצית צפיפות ההסתברות, מסומנת ב $\psi(x,t)$.
- (ב) ההסתברות למצוא את החלקיק במתכונתית לריבוע פונקצית צפיפות ההסתברות $P(x) = \psi(x)\psi^*(x)$
- (ג) מתוארים על ידי משוואת שרדינגר
- (ד) מצייתים לחוקי המכניקה הקוונטית

מהו גל?

במקרה הרחב יותר גל מתאר הפרעה המשתנה בזמן ובמרחב. במסגרת לימודי הפיזיקה נלמד הנושא תנודה הרמונית פשוטה שמקורו במשוואת הכוח המחזיר. לדוגמה, משוואת כוח הקפיץ היא: $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{K}{m}x$. פתרונה תנודה הרמונית פשוטה שכללי נראה כך: $x(t) = A \exp(i\omega t + \varphi)$. כש $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ נקבע על ידי הפרמטרים של המערכת ואילו A ו φ נקבעים עלידי תנאי התחלה.

משוואת גל כללית יותר, בה כל משרעת כל נקודה בתווך בו נוצר הגל משתנה בהתאם לזמן ובהתאם למיקום בצורה מחזורית היא המשוואה: $\frac{d^2y(x,t)}{dt^2} = [C^2] \frac{d^2y(x,t)}{dx^2}$.

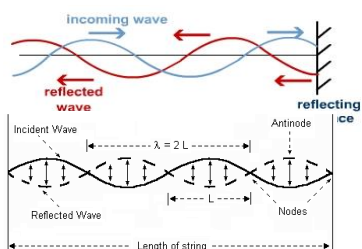
פתרון המשוואה: $y_{\pm}(x,t) = A \exp(i\omega t + \varphi) \exp(\pm ikx)$. בהצבה של הפתרון במשוואה נקבל את הביטוי, למהירות הפאזה של הגל $\frac{\omega}{k} = C$. או השוואה לנוסחה הידועה לתלמידים $f\lambda = C$ תגלה ש $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ פרמטר

הנקרה מספר הגל. כפי ש ω קשור למימד הזמן, מספר הגל קשור למרחב. בתורת הגלים כפי שנראה בהמשך הוא מתכונתי לתנע.

גל נע וגל עומד

- גל נע** - בכל תווך בו ההתקדמות היא גלית, משרעת הגל מכילה סופרפוזיציה של שני גלים הנעים בכיוונים מנוגדים (עקרון הסופרפוזיציה):
 גל הנע משמאל לימין: $A \exp(ik_1x) \exp(-i\omega t)$ (ימין כיוון ה+)
 גל הנע מימין לשמאל: $B \exp(-ik_1x) \exp(-i\omega t)$
 לכן הגל המתקבל הוא: $y(x) = [A \exp(ik_1x) + B \exp(-ik_1x)] \exp(-i\omega t)$, כש $B_1 A_1$ נקבעים על ידי תנאי ההתחלה.

- גל עומד** - נניח שלשני הגלים הנעים בכיוונים מנוגדים בעלי אותה התדירות, המשרעת של שניהם הוא סכום משרעות הגלים הבודדים. כתוצאה מכך, כשיש פאזה הפוכה ביניהם (180°) הם מבטלים זה את זה. כשהפאזה זהה - המשרעת מקסימלית. התנועה נעה מעלה מטה (כשמתייחסים גם לרכיב הזמן) והיא אינה נעה משמאל לימין או הפוך כמו גל נע. מאפיין של גל עומד הם המיקומים הקבועים של מקומות שיא המשרעת (*antinodes*) בהם המשרעת מקסימלית ואלו בהן המשרעת אפס (*nodes*)



בתמונה העליונה נראים שני גלים הנעים במיתר - הגל המקורי (כחול) והגל המוחזר ממשטח מחזיר (אדום). המשרעת בנקודה מסוימת במיתר היא הסכום של שתי המשרעות ונוצר גל עומד.

בתמונה מצוינים כל ההגדרות המאפיינות גל עומד.

כאן ניתן לראות את עקרון הסופרפוזיציה בין גלים. (לחץ על התמונה)



כאן ניתן לראות היווצרות גל עומד כתוצאה מתנועת גלים בתדירות זהה הנעים בכיוונים מנוגדים (לחץ על התמונה)



כאן ניתן לראות היווצרות Beat כתוצאה מתנועת גלים בתדירות שונות הנעים בכיוונים מנוגדים (לחץ על התמונה)



הפתרון הכלל של משוואת גל: $y(x) = [A \exp(ik_1x) + B \exp(-ik_1x)] \exp(-i\omega t)$

ומבחינה פיזיקלית הוא מכיל 2 גלים, גל לכל אחד מהמרכיבים:

$A_1 \exp(ikx) \exp(-i\omega t)$ מתאר גל הנע ימינה (לכיוון +) שעוצמתו המקסימלית A_1 ,
 $A_2 \exp(-ikx) \exp(-i\omega t)$ מתאר גל הנע שמאלה (לכיוון -) שעוצמתו המקסימלית A_2 .

ניתן לכתוב פתרון זה גם בצורה טריגונומטרית: $A_1 \cos(kx - i\omega t) + B_1 \sin(kx - i\omega t)$

או $C_1 \cos(kx - i\omega t + \varphi)$

כדי להדגים את התופעות הגליות בהשפעת פוטנציאל נפתח את המודל הבא המבוסס על מיתר. שהוא אינטואיטיבי לתלמידים וניתן להדגומו בכיתה.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{C}{m} y = 0 \quad \text{או} \quad F(t) = m \frac{d^2y}{dt^2} = -b \frac{dy}{dt} - Cy$$

כאשר האיבר b במשוואה תלוי במהירות והוא אחראי "לבליעת" אנרגיה. בתופעות הגליות שנטפל בהן לא

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{C}{m} y \quad \text{המשוואה תהיה: } b=0. \text{ ומכאן ש}$$

אם C חיובי, הרי שאחרי הצבה של הפתרון הכללי $y(t) = A \exp(\omega t)$ נקבל ש ω מדומה. ולכן הוא מתנהג

$$\text{כגל: } y(t) = A \exp(i\omega t) + B \exp(-i\omega t)$$

אם C שלילי, נקבל ש ω ממשי ואז ישנה התנהגות אקספוננציאלית: $y(t) = A \exp(\omega t) + B \exp(-\omega t)$

C הוא פרמטר שתלוי במערכת והוא מייצג את הפוטנציאל שלה, למשל, בקפיץ C הוא קבוע הקפיץ, במטוטלת מתמטית הוא אורך הקפיץ ובמיתר מתיחות המיתר.

במובנו הכללי בהקשר לגלים, C הוא האימפדנס של המערכת.

חלק ב. חקירת גל בהשפעת שדה של פונקציית פוטנציאל

בדיוננו בתופעות גליות חשבנו שאם נלמד על בסיס של גלים מכנים - גל במיתר, יהיה יותר קל למורה להבין ואף להדגים את ההסבר באמצעים פשוטים ופחות מופשט מבחינת התלמידים לצורך הבנה של התנהגות גל בתנאי גבול שונים נבנה מערכת של מיתרים ונעביר בה הפרעה

עובדות לגבי גלים במיתר

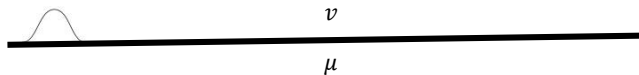
- מהירות התקדמות גל במיתר היא $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ כש T המתוחות ו μ הצפיפות. (סרטון המסביר את הפיתוח)
- היות ו $v = \frac{\omega}{k}$ לכן $k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\frac{\mu}{T}}$
- מכאן שאם שבאותה מתיחות ככל שחומר המיתר צפוף יותר מהירות מעבר ההפרעה יהיה איטי יותר ולכן מספר הגל k יהיה קטן יותר ($k = \alpha \sqrt{\frac{1}{\mu}}$)

וכאן עשינו twist קטן והכנסנו תופעה שלא הצלחנו למצוא סימוכין לה, אבל מבחינה פיזיקלית היא אפשרית: שינוי במתיחות המיתר יכול לגרום לשינוי בסימנו של C ולגרום לשינוי בתכונות הגל העובר בו. ומבחינה מעשית אם כתוצאה ממעבר הגל דרך המיתר יקרו אחד מהמקרים הבאים: א. מתיחות המיתר, T , תקטן, או ב. הצפיפות μ , תקטן תכונת המיתר תשתנה. שני המצבים יגרמו לערך שמתחת לשורש $\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ להיות שלילי ומכאן ש k יהיה מדומה. בדוגמאות שבהמשך נקרא למיתר כזה **מיתר בעל מתיחות שלילית**...

נתבונן במספר מקרים בהם עוברת הפרעה במערכות של מיתרים שונים.

מקרה 1: מיתר ארוך (אינסופי) ואחיד בצפיפות μ (ללא תנאי שפה)

אנלוג קוונטי: חלקיק חופשי



הגל הנכנס בעל תדירות זוויתית ω , ונניח שהמשרעת שלו $A=1$. המיתר מהווה תווך אחיד בו הוא מתקדם במהירות קבועה v ועל כן מספר הגל שלו קבוע, k . היות ואין כל שינוי במהירות (המיתר אינסופי) לכן אין שינוי תנע, ומכאן שאין החזרה של הגל. האמפליטודה בכל נקודה היא: $y(x) = \exp(ikx)$

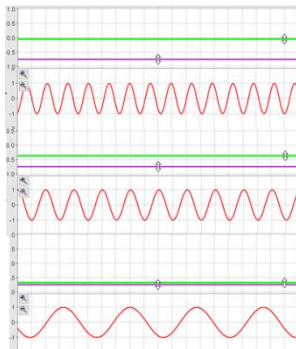
כאן ניתן לראות הפרעה העוברת במיתר כזה וממשיכה (לחץ על התמונה)



מקרה 1 - קוונטי:

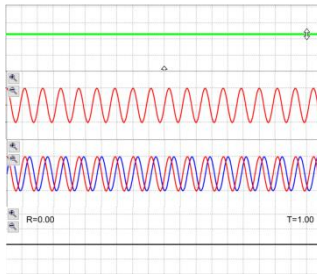
$$k = \frac{\sqrt{2m(E-U(x))}}{h} \quad \text{היות } u(x) = 0 \text{ ו } \lambda = \frac{2\pi}{k} \text{ קבוע.}$$

בתמונה משמאל נראה חלקיק בעל אנרגיה כלשהי E (גרף ירוק) קבועה. אנרגיה זו קובעת, בהתאם לפוטנציאל בו נמצא החלקיק, את אורך הגל. אנרגית החלקיק מיוצגת על ידי תדר הזוויתית שלו אשר בתווכים בעלי פוטנציאלים שונים מתורגם למספרי גל שונים – אורכי גל שונים.



בתמונה משמאל רואים את אותו חלקיק (אותה אנרגיה) כשהוא ב-3 אזורים שונים - כל אזור יש לו פוטנציאל שונה. הפוטנציאל קובע את אורך הגל – וככל שההפרש בין אנרגית החלקיק לפוטנציאל בו הוא נמצא קטן – מספר הגל קטן. מספר גל קטן – אורך גל גדל ($\lambda = \frac{2\pi}{k}$). כשאנרגית החלקיק שווה לפוטנציאל, מיספר הגל אפס ואורך הגל אינסופי.

גם במודל הקלסי, כשההפרש בין אנרגית החלקיק לפוטנציאל מתאפס הרי ש E-U(x) היא האנרגיה הקינטית ואם היא מתאפסת אז הגוף במהירות v=0.



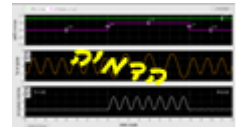
מתמטית, גל מיוצג על ידי משוואה:

$$y(x) = A \cos(kx) + iB \sin(kx) \quad \text{שהיא מרוכבת ושיש לה רכיב ממשי ורכיב מדומה. אפשרות אחרת הוא ייצוג האקספוננציאלי}$$

$y(x) = C \exp(ikx)$, שהוא ייצור מרוכב. הרכיב המדומה נמצא בפאזה של $\frac{\pi}{2}$ מהממשי, כייאה לייצוג במעגל המרוכב. אך כפי שנראה מעברים מתוך אחד לשני, בתנאים מסויימים ישתנה הפרש הפאזה הזה לערכים אחרים

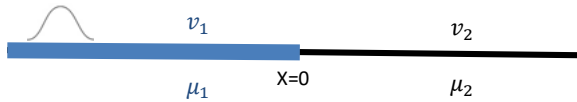
2.א. חלקיק חופשי - פעילות תיאורטית

2.ב. חלקיק חופשי – פעילות חקר



מקרה 2: מיתר ארוך בעל צפיפות גדולה, μ_1 מחובר בנקודה $x=0$ למיתר אחר בעל צפיפות קטנה, μ_2 . המעבר הוא ממהירות קטנה למהירות גדולה. עלכן $k_1 < k_2$.

אנלוג קוונטי: חלקיק בפוטנציאל מדרגה כש $E > V$



כאן יש שני אזורים משני צידי נקודת הגבול $x=0$

אזור 1: $-\infty \leq x < 0$, k_1

אזור 2: $0 \leq x < \infty$, k_2 , $k_1 < k_2$

באזור 1 יכולים להיות 2 גלים – הגל המקורי והגל החוזר. עלכן משוואת הגל היא:

$$y_1(x) = \exp(ik_1x) + r \exp(-ik_1x)$$

$$y_2(x) = t \exp(ik_2x)$$

נתיחס לתנאי שפה (תנ"ש) של המערכת:

מתנ"ש 1 (רציפות הפונקציה) בנקודת הגבול $x=0$: $y_1(0) = y_2(0)$

$$y_1(x=0) = \exp(ik_1 \cdot 0) + r \exp(-ik_1 \cdot 0) = 1 + r \quad \text{עלכן:}$$

$$y_2(0) = t \exp(ik_2 \cdot 0) = t$$

$$1 + r = t \quad \text{ונקבל:}$$

מתנ"ש 2 (רציפות שיפוע הפונקציה) בנקודת הגבול $x=0$:

$$\frac{d\psi_1(x=0)}{dx} = \frac{d\psi_2(x=0)}{dx}$$

$$\frac{d\psi_1(0)}{dx} = ik_1 A \exp(ik_1 \cdot 0) - ik_1 r \exp(-ik_1 \cdot 0) = ik_1(1 - r)$$

$$\frac{d\psi_2(0)}{dx} = ik_2 t \exp(ik_2 \cdot 0) = ik_2 t$$

$$1 - r = \frac{k_2}{k_1} t \quad \text{נציב ונקבל:}$$

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ 1 - r = \frac{k_2}{k_1} t \end{cases} \quad \text{ממערכת המשוואות שקבלנו:}$$

$$t = \frac{2k_1 k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha} \quad | \quad r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad \text{ונקבל:} \quad \alpha \equiv \frac{k_2}{k_1} \quad \text{נגדיר:}$$

ולכן משרעות הגלים בכל אחד מהאזורים:

$$y_1(x) = \exp(ik_1x) + r \exp(-ik_1x) = \exp(ik_1x) + \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) \exp(-ik_1x)$$

$$y_2(x) = t \exp(ik_2x) = \frac{2\alpha}{1+\alpha} \exp(ik_2x)$$

היות ובמקרה זה $k_1 < k_2$ וכן $1 < \alpha$ ולכן משרעת הגל המוחזר $\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) < 0$ הגל המוחזר הוא בסימן שלילי, הפוך לגל הנכנס ולכן גורם להתאבכות הורסת איתו.

שני המקדמים, t ו- r ממשיים. לכן הגודל המדיד, הוא:

$$T = |t|^2 = tt^* = t^2 \quad R = |r|^2 = rr^* = r^2$$

עלכן: מקדם העברה הוא: $T = \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1+k_2)^2} = \frac{4\alpha^2}{(1+\alpha)^2}$

ומקדם החזרה הוא: $R = \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2} = \frac{(1-\alpha)^2}{(1+\alpha)^2}$

סיכום:

במקרה שגל עובר מתווך איטי תווך מהיר, או כש $k_1 < k_2$ ($1 < \alpha$):

(1) פאזת הגל החוזר הפוכה לזו של הגל הפוגע והוא מתאבך איתו התאבכות הורסת

(2) משרעת הגל החוזר הוא $r = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ או $r = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}$

(3) משרעת הגל העובר $t = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$ או $t = \frac{2k_1k_1}{k_1+k_2}$

(4) אנרגיית הגל החוזר, $R = \frac{(1-\alpha)^2}{(1+\alpha)^2}$ או $R = \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2} = \frac{(1-\alpha)^2}{(1+\alpha)^2}$

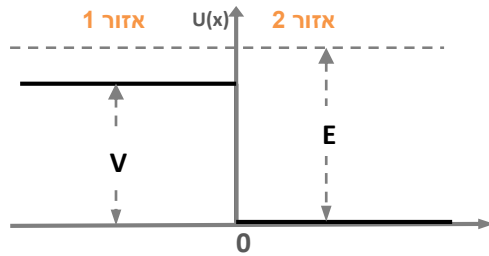
(5) אנרגיית הגל העובר, $T = \frac{4\alpha^2}{(1+\alpha)^2}$ או $T = \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1+k_2)^2}$

(6) ככול ש k_2 גדול מ k_1 ככל ש $\alpha > 1$ תהיה פחות העברה לאזור 2

ניתן לראות הפרעה העוברת במיתר כזה וממשיכה (לחץ על התמונה)

מקרה 2 - קוונטי:

פוטנציאל מדרגה



אזור 1: $U(x) = 0$, $-\infty \leq x < 0$

אזור 2: $U(x) = V$, $0 \leq x < \infty$

חלקיק באנרגיה E נע באזור 1 משמאל לימין. הפוטנציאל באזור 1 הוא V ולכן האנרגיה הקינטית שלו היא

$E - V$. קיבלנו מתוך הגדרת התנע הקוונטי ש $k = \frac{\sqrt{2m(E-U(x))}}{h}$

עלכן:

אזור 2: $p_2 = \hbar k_2 = \sqrt{2m(E - V)}$

אזור 1: $p_1 = \hbar k_1 = \sqrt{2mE}$

אזור 3: $p_3 = \hbar k_1 = \sqrt{2mE}$

כש $k_1 < k_2$ $k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{h}$

וכפי שקיבלנו בפיתוח הכללי

$\psi_1(x) = \exp(ik_1x) + r\exp(-ik_1x)$

$\psi_2(x) = t\exp(ik_2x)$

$t = \frac{2k_1k_1}{k_1+k_2} = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$ | $r = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$

מקדם העברה: $T = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2} = \frac{4\alpha^2}{(1+\alpha)^2}$ מקדם החזרה: $R = \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2} = \frac{(1-\alpha)^2}{(1+\alpha)^2}$

כש $\alpha \equiv \frac{k_2}{k_1}$

$\alpha = \sqrt{\frac{E-V}{E}} = \sqrt{1 - \frac{V}{E}}$ $\alpha = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{h}}{\frac{\sqrt{2mE}}{h}} = \sqrt{\frac{E-V}{E}} = \sqrt{1 - \frac{V}{E}}$

צפיפות ההסתברות $P(x)$ או מהי ההסתברות למצוא את החלקיק בנקודה x

היות ו $P(x) = \psi(x)\psi^*(x)$

הסתברות מציאת החלקיק במיקום x באזור 1: $P_1(x) = \psi_1(x)\psi_1^*(x)$

$$P_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\exp(ik_1x) + r\exp(-ik_1x)] \frac{1}{\sqrt{2}} [\exp(-ik_1x) + r\exp(ik_1x)]$$

$$P_1(x) = \frac{1+r^2+2r\cos(2k_1x)}{2} \quad \text{לכן:}$$

ההסתברות למצא את החלקיק בכל נקודה באזור 1 משתנה בצורה מחזורית, מספר הגל של ההסתברות באזור 1 גדול פי 2 מספר המחזור של פונרצית הגל. $(2k_1)$ המרכיב המחזורי נובע מהעובדה שמתרחשת באזור זה תאבכות של הגל הפוגע והמוחזר מהמדרגה והוא רוכב על הסתברות קבועה, $\frac{1+r^2}{2}$, סופרפוזציה של שני הגלים.

$$P_1(x) = \frac{1+r^2-2r}{2} = \frac{(1-r)^2}{2} \quad \text{ההסתברות מנימאלית וערכה:}$$

מתרחשת כש $\cos(2k_1x) = -1$ ולכן כש $2k_1x = 2\pi n$ ומכאן כש $x = \frac{\pi}{k_1}(2n-1)$ או $x = \frac{\lambda_1}{2}(2n-1)$ (הצבנו $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}$)

$$P_1(x) = \frac{1+r^2+2r}{2} = \frac{(1+r)^2}{2} \quad \text{ההסתברות מקסימאלית וערכה:}$$

מתרחשת כש: $\cos(2k_1x) = 1$ ולכן כש $2k_1x = 2(n-1)\pi$ ומכאן כש $x = \frac{\pi}{k_1}n$ או $x = \frac{\lambda_1}{2}n$

$$\text{כש: } r = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

הסתברות מציאת החלקיק במיקום x באזור 2: $P_2(x) = \psi_2(x)\psi_2^*(x)$

$$\psi_2(x) = t\exp(ik_2x) \quad \psi_2^*(x) = t\exp(-ik_2x) \quad \text{היות ו:}$$

$$P_2(x) = t\exp(ik_2x) \times t\exp(-ik_2x) = t^2$$

$$P_2(x) = t^2 = T \quad \text{לכן:}$$

מכאן, שההסתברות למצא את החלקיק באזור 2 קבועה.

סיכום מקרה קוונטי:

חלקיק קוונטי בעל אנרגיה E עובר מאזור פוטנציאל V_1 לאזור פוטנציאל V_2 כש $V_1 > V_2$ שעובר פונקציה מדרגה מבמקרה שגל עובר מתווך איטי תווך מהיר, או כש $k_1 < k_2$ ($1 < \alpha$):

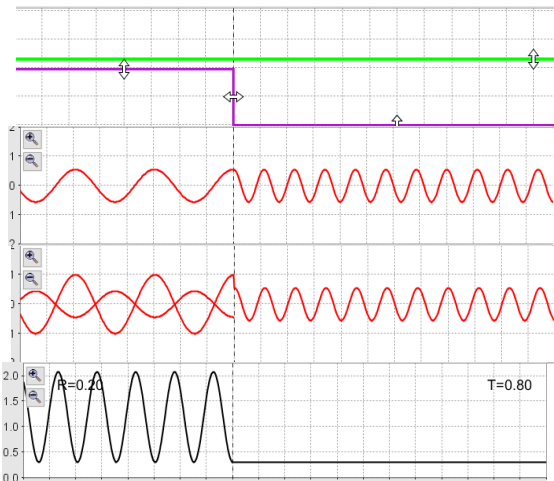
$$(1) \text{ מספר הגל } k_1 = \frac{\sqrt{2m(E-V_1)}}{h} \text{ באזור 1 ו } k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_2)}}{h} \text{ באזור 2 במקרה זה } k_1 < k_2$$

$$(2) \text{ משרעת הגל החוזר הוא } r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \text{ והוא יחזור בהיפוך מופע. הגל יתאבך התאבכות הורסת עם הגל הפוגע.}$$

$$(3) \text{ משרעת הגל העובר } t = \frac{2k_1 k_1}{k_1 + k_2}$$

$$(4) \text{ ההסתברות למצא את החלקיק באזור 1 היא פונקציה מחזורית, } P_1(x) = \frac{1+r^2+2r\cos(2k_1x)}{2} \text{ בעלת מספר גל } 2k_2 \text{ או אורך גל } \frac{\lambda_1}{2} \text{ ערכה המינימלי } \frac{(1-r)^2}{2} \text{ והמקסימלי } \frac{(1+r)^2}{2}$$

(5) ההסתברות למצא את החלקיק באזור 2 קבוע.



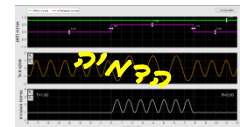
באיור זה נראה הגל הנע משמאל לימין. הגרף הראשון מראה את המערכת.

הגרף השני מראה את פונקציית הגל בשני האזורים. המשרעת שלהם שווה היות והגל המוחזר בפאזה הפוכה לגל הפוגע (גרף שלישי) ולכן בסופרפוזיציה ביניהם קטנה האמפליטודה ומשתווה לאנפליטודת הגל העובר. (כמובן, שהרי זה תנאי השפה שהשתמשנו כדי למצא אותם)

בגרף הרביעי רואים את התפלגות הסיכוי למצא את החלקיק. רואים שהסיכוי קיים בשני האזורים. באזור 1 הוא מחזורי כשאורך גל מחזורו קצר פי 2 מאשר אורך גל פונקציית הגל

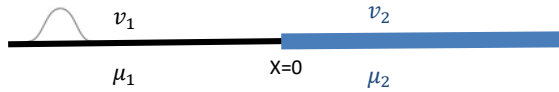
3.א חלקיק בפוטנציאל מדרגה $(E > V)$ - תיאורטי

3.ב חלקיק בפוטנציאל מדרגה $(E > V)$ - חקר



מקרה 3: מיתר ארוך בעל צפיפות קטנה μ_1 מחובר בנקודה $x=0$ למיתר אחר בעל צפיפות גדולה, μ_2 . המעבר הוא ממהירות גדולה למהירות קטנה עלכן $k_1 > k_2$.

אנלוג קוונטי: חלקיק בפוטנציאל מדרגה כש $E > V$



יש שני אזורים משני צדי נקודת הגבול $x=0$

אזור 1: k_1 , $-\infty \leq x < 0$

אזור 2: k_2 , $0 \leq x < \infty$ כש: $k_1 > k_2$

משראת הגל בכל אזור:

$$y_1(x) = \exp(ik_1x) + r \exp(-ik_1x)$$

$$y_2(x) = t \exp(ik_2x)$$

הפיתוח כאן זהה למקרה הקודם ונקבל:

$$y_1(x) = \exp(ik_1x) + r \exp(-ik_1x) = \exp(ik_1x) + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \exp(-ik_1x)$$

$$y_2(x) = t \exp(ik_2x) = \frac{2k_1k_2}{k_1 + k_2} \exp(ik_2x)$$

היות ובמקרה זה $k_1 > k_2$ משרעת הגל המוחזר $\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} > 0$ הגל המוחזר באותה הפאזה של הגל הפוגע והוא מתאבך איתו התאבכות בונה

$$T = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{4\alpha^2}{(1 + \alpha)^2} \quad \text{מקדם העברה הוא:}$$

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{(1 - \alpha)^2}{(1 + \alpha)^2} \quad \text{ומקדם החזרה הוא:}$$

והם זהים למקרה הקודם

סיכום:

במקרה שגל עובר מתנוך מהיר לתנוך איטי, או כש $k_1 > k_2$ ($\alpha > 1$):

(7) הגל החוזר מתאבך התאבכות הורסת עם הגל הפוגע

(8) משרעת הגל החוזר הוא $r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ או $r = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$

(9) משרעת הגל העובר $t = \frac{2k_1k_1}{k_1 + k_2}$ או $t = \frac{2\alpha}{1 + \alpha}$

(10) אנרגיית הגל החוזר, $R = \frac{(1 - \alpha)^2}{(1 + \alpha)^2}$ או $R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$

(11) אנרגיית הגל העובר, $T = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2}$ או $T = \frac{4\alpha^2}{(1 + \alpha)^2}$

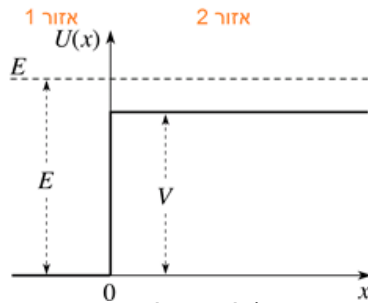
(12) ככול ש k_2 גדול מ k_1 ככל ש $\alpha > 1$ תהיה פחות העברה לאזור 2

ניתן לראות הפרעה העוברת במיתר כזה וממשיכה (לחץ על התמונה)



מקרה 3 - קוונטי

פוטנציאל מדרגה



אזור 1: $U(x) = 0$, $-\infty \leq x < 0$

אזור 2: $U(x) = V$, $0 \leq x < \infty$

חלקיק באנרגיה E נע באזור 1 משמאל לימין. הפוטנציאל באזור 1 הוא אפס (ולכן יש לו רק אנרגיה קינטית)

קיבלנו מתוך הגדרת התנע הקוונטי ψ $k = \frac{\sqrt{2m(E-U(x))}}{\hbar}$

עלכן: באזור 1: $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $-\infty \leq x < 0$

אזור 2: $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}$, $0 \leq x < \infty$

כש $k_1 < k_2$

וכפי שקיבלנו בפיתוח הכללי

$\psi_1(x) = \exp(ik_1x) + r\exp(-ik_1x)$

$\psi_2(x) = t\exp(ik_2x)$

$t = \frac{2k_1k_1}{k_1+k_2} = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$ ו $r = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$

מקדם העברה: $T = \frac{4k_1^2k_2^2}{(k_1+k_2)^2} = \frac{4\alpha^2}{(1+\alpha)^2}$ מקדם החזרה: $R = \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2} = \frac{(1-\alpha)^2}{(1+\alpha)^2}$

כש $\alpha \equiv \frac{k_2}{k_1}$

$\alpha = \sqrt{\frac{E-V}{E}} = \sqrt{1 - \frac{V}{E}}$ $\alpha = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}}{\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}} = \sqrt{\frac{E-V}{E}} = \sqrt{1 - \frac{V}{E}}$

פונקצית ההסתברות זזה למקרה הקודם כש

$P_1(x) = \frac{1 + r^2 + 2r\cos(2k_1x)}{2}$

$P_2(x) = t^2 = T$

סיכום מקרה קוונטי:

חלקיק קוונטי בעל אנרגיה E ($E > V$) עובר מאזור בפוטנציאל V_1 לאזור בפוטנציאל V_2 כש $V_1 < V_2$ שעובר פונקצית מדרגה מבמקרה שגל עובר מתווך מהיר לתווך איטי, או כש $k_1 > k_2$ ($1 > \alpha$):

$$(1) \text{ מספר הגל } k_1 = \frac{\sqrt{2m(E-V_1)}}{\hbar} \text{ באזור 1 ו } k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_2)}}{\hbar} \text{ באזור 2 במקרה זה } k_1 > k_2$$

$$(2) \text{ משרעת הגל החוזר הוא } r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \text{ והוא והיא תתאבך התאבכות בונה עם הגל הפוגע.}$$

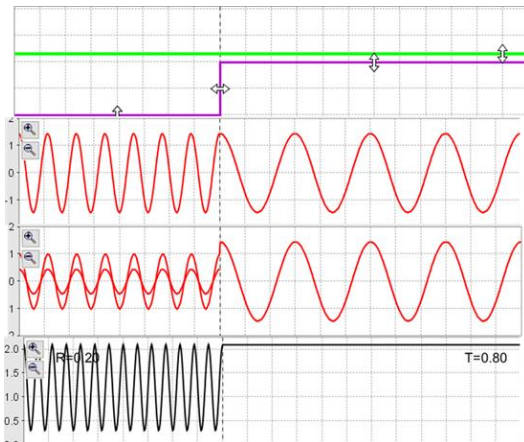
$$(3) \text{ משרעת הגל העובר } t = \frac{2k_1 k_1}{k_1 + k_2}$$

$$(4) \text{ ההסתברות למצא את החלקיק באזור 1 היא פונקציה מחזורית, } P_1(x) = \frac{1+r^2+2r\cos(2k_1x)}{2}$$

$$\text{בעלת מספר גל } 2k_2 \text{ או אורך גל } \frac{\lambda_1}{2}. \text{ ערכה המינימלי } \frac{(1-r)^2}{2} \text{ והמקסימלי } \frac{(1+r)^2}{2}$$

(5) ההסתברות למצא את החלקיק באזור 2 קבוע.

(6) ככול ש k_2 גדול מ k_1 תהיה פחות העברה לאזור 2



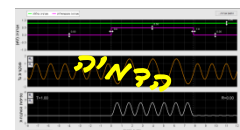
באיור זה נראה הגל הנע משמאל לימין. הגרף הראשון מראה את המערכת.

הגרף השני מראה את פונקצית הגל בשני האזורים. המשרעת שלהם שווה היות והגל המוחזר באותה הפאזה של הגל הפוגע (גרף שלישי) ולכן בסופרפוזיציה ביניהם גדלה האמפליטודה ומשתווה לאנפליטודת הגל העובר. (כמובן, שהרי זה תנאי השפה שהשתמשנו כדי למצא אותם)

בגרף הרביעי רואים את התפלגות הסיכוי לכלות את החלקיק. רואים שהסיכוי קיים בשני האזורים. באזור 1 הוא מחזורי כשאורך גל מחזורו קצר פי 2 מאשר אורך גל פונקצית הגל

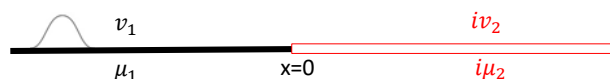
3.א חלקיק בפוטנציאל מדרגה ($E > V$) - תיאורטי

3.ב חלקיק בפוטנציאל מדרגה ($E > V$) - חקר



מקרה 4: מיתר ארוך בעל צפיפות, μ_1 מחובר בנקודה $x=0$ למיתר ארוך שיש לו מתיחות שלילית. מכאן ש k_1 ממשי ו k_2 מדומה.

אנלוג קוונטי: חלקיק בפטנציאל מדרגה כש $E < V$



במקרה זה ישנם שני אזורים, אזור 1 בו k_1 ממשי ולכן ההפרעה מתקדם כגל. ואזור 2 בו k_2 מדומה ולכן ההפרעה תדעך אקספוננציאלית

אזור 1: $-\infty \leq x < 0$, k_1

אזור 2: $0 \leq x < \infty$, ik_2

משראת הגל בכל אזור:

$$y_1(x) = \exp(ik_1x) + r \exp(-ik_1x)$$

$$y_2(x) = t \exp(-k_2x)$$

כאשר באזור 2 פסלנו את האפשרות (הנכונה מבחינה מתמטית) לרכיב המכיל אקספוננט מתבדר ככל ש x גדל, מצב שהוא אינו נכון פיזיקלי.

היות והמערכת זהה לזה שבמקרה 2 הפיתוח זהה פרט לעובדה שבמקום k_2 נציב ik_2

$$r = \frac{k_1 - ik_2}{k_1 + ik_2} = \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} - i \frac{2k_1k_2}{k_1^2 + k_2^2}$$

$$t = \frac{2k_1}{k_1 + ik_2} = \frac{2k_1k_2}{k_1^2 + k_2^2} - i \frac{2k_1^2}{k_1^2 + k_2^2}$$

קיבלנו שמשרעות הגל המוחזר והעובר מרוכבים. המשמעות היא שהפאזה של הגלים הללו משתנה

ומכאן שהעתק הגל:

$$y_1(x) = \exp(ik_1x) + \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} - i \frac{2k_1k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right) \exp(-ik_1x)$$

$$y_2(x) = \left(\frac{2k_1k_2}{k_1^2 + k_2^2} - i \frac{2k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) \exp(-k_2x)$$

נגדיר: $\alpha \equiv \frac{k_2}{k_1}$ נקבל $r = \frac{(1-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)} - i \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)}$ ו $t = \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)} - i \frac{2}{(1+\alpha^2)}$

ומקדם החזרה: $R = \frac{(k_1 - ik_2)^2}{(k_1 + ik_2)^2} = \frac{(k_1^2 + k_2^2)^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2} = 1$

$$T = \frac{4k_1 i k_2}{(k_1 + i k_2)^2} = \frac{4k_1 i k_2 (k_1 - i k_2)^2}{(k_1 + i k_2)^2} = 0$$

ומקדם ההעברה: $T = 0$. ז"א שבאזור 1 יש התאבכות בונה של שני הגלים – המקורי והמוחזר שהם בעלי אותה אמפליטודה ופאזה.

באזור 2 אומנם קיים גל דועך אקספוננציאלי עם מקדם דעיכה של $\frac{1}{k_2}$, אך השטף, שמשמעותו הפיזיקלית הוא אנרגיה, הוא אפס.

סיכום:

במקרה שגל עובר מתווך בו הוא נע מתווך אחד לתווך בו מהירותו מדומה k_1 ממשי ו k_2 מדומה,

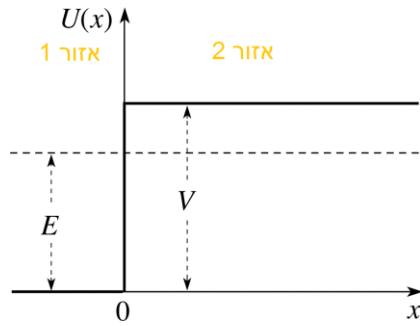
- 1) כמו במקרה הגל הנע לתווך איטי, הגל החוזר מתאבך התאבכות בונה עם הגל הפוגע, אך במקרה הזה הגל החוזר מרוכב ומכאן שהפאזה שלו אינה קבועה
- 2) החלק העובר לאזור 2 אינו גל אלה הפרעה דועכת. קצב הדעיכה תלוי ב k_2 וככל ש k_2 גדול יותר הדעיכה תהיה חזקה יותר.
- 3) $T=0$ ולכן אין מעבר אנרגיה לאזור 2.
- 4) הגל אינו מתנהג כחלקיק קלסי והוא חודר גם לאזור בו הוא אינו יכול לנוע (מהירותו מדומה).

מקרה 4 חלקיק קוונטי

חלקיק בעל אנרגיה E עובר בפוטנציאל מדרגה:

אזור 1: $U(x) = 0$, $-\infty \leq x < 0$

אזור 2: $U(x) = V$, $0 \leq x < \infty$



במצב זה האנרגיה שלו $0 < E < V$. באזור 2 ולכן קלסית הוא המקום אסור.

אזור 1: $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $-\infty \leq x < 0$ ממשי

אזור 2: $ik_2 = i \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}$, $0 \leq x < \infty$ מדומה

פונקצית הגל כפי שקיבלנו למעלה, באזור 1 מתקבל גל עומד מרוכב

$$\psi_1(x) = \exp(ik_1x) + \left[\frac{(1-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)} - i \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)} \right] \exp(-ik_1x)$$

$$\alpha = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}}{\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}} = \sqrt{\frac{V-E}{E}} = \sqrt{\frac{V}{E} - 1} \text{ כש}$$

$$\psi_2(x) = \left(\frac{2k_1k_2}{k_1^2+k_2^2} - i \frac{2k_1^2}{k_1^2+k_2^2} \right) \exp(-k_2x)$$

מרחק הדעיכה האופייני הוא: $\sigma = \frac{1}{k_2}$ שהוא המרחק בו ערך הפונקציה קטן פי e מהערך שהיה הגבול $x=0$,

שם $\psi_2(0) = A \left(\frac{2k_1k_2}{k_1^2+k_2^2} - i \frac{2k_1^2}{k_1^2+k_2^2} \right)$ ומכאן $\sigma = \frac{1}{k_2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V-E)}}$

$$\sigma = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V-E)}} \quad \psi_2(x) = r \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right)$$

לכן מרחק הדעיכה:

- תלוי רק באזור 2 !
- יהיה גדול יותר ככל ש:
 - ✓ הפרש $V - E$ יהיה קטן יותר.
 - ✓ המסה m תהיה קטנה יותר.

להבדיל מחלקיק קלאסי שאזור 2 לגביו הוא **אזור אסור**, ולכן לא יתכן שהוא יעבור אליו, חלקיק קוונטי יכול לחדור אליו למרחק קצר. מרחק זה תלוי הפוך להפרש שבין אנרגיית החלקיק לפוטנציאל (ולמסת החלקיק). באזור 2 החלקיק קיים (במרחק קצר, $\frac{1}{k_2}$ מהשפה), אך אין לו תכונות של גל.

ההסתברות למצא את החלקיק :

באזור 1: $P_1(x) = \psi_1(x)\psi_1^*(x)$

$$P_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\exp(ik_1x) + r\exp(-ik_1x)] \frac{1}{\sqrt{2}} [\exp(-ik_1x) + r^*\exp(ik_1x)]$$

$$\frac{1}{2} [1 + r^*\exp(i2k_1x) + r\exp(-i2k_1x) + rr^*]$$

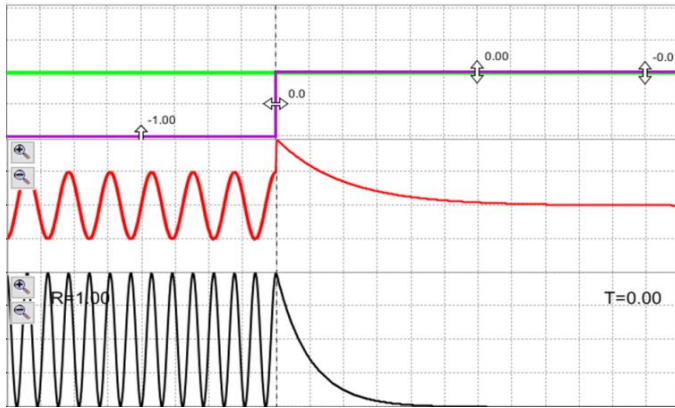
$$\text{לכן } r^* = \frac{(1-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)} + i\frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)} \quad r = \frac{(1-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)} - i\frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)}$$

$$r^*\exp(i2k_1x) = \left[\frac{(1-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)} + i\frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)} \right] \exp(i2k_1x)$$

$$r\exp(-i2k_1x) = \left[\frac{(1-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)} - i\frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)} \right] \exp(-i2k_1x)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{(1-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)} \cos^2(2k_1x) + \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)} \sin^2(2k_1x) + \frac{(1-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)} + \frac{(1-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)} \right] = 1$$

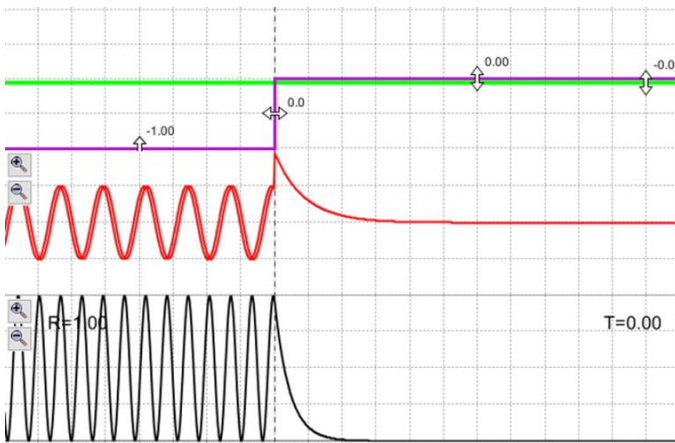
וההסתברות למציאת החלקיק באזור 1 הוא 1!



באיור נראה הגל הנע משמאל לימין. הגרף הראשון מראה את המערכת. אנרגיית החלקיק קטנה ב 0.01 eV מאשר הפוטנציאל.

הגרף השני מראה את פונקציית הגל בשני האזורים. באזור 1 יש החזרה מלאה ובאזור 2 רואים דעיכה. הגל המוחזר בדיוק באותו מופע כמו הגל הפוגע. מרחק הדעיכה $\sim 7 \text{ nm}$

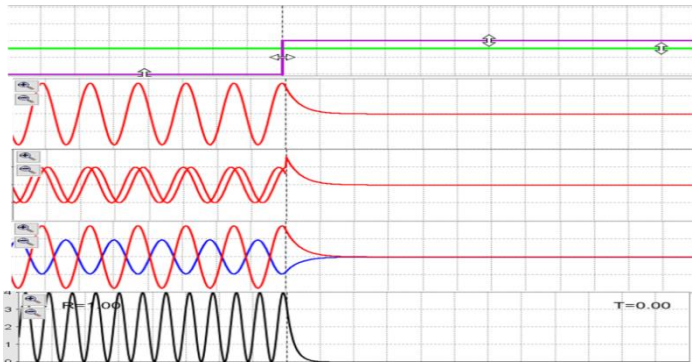
בגרף השלישי רביעי רואים את התפלגות הסיכויים שהחלקיק יהיה בשני האזורים.



באיור הזה, המערכת זהה לקודמת אלה שכאן אנרגיית החלקיק קטנה ב 0.05 eV מאשר הפוטנציאל V_2 .

בגרף השני נראה שיש הבדל פאזה בין הגל הפוגע למוחזר, והוא נראה כאילו שהוא חוזר מאזור גבול אחר, קרוב יותר לכיוון ההגעה.

הדעיכה, באזיר 2 חזקה יותר ומרחק הדעיכה $\sim 3 \text{ nm}$



באיור אנרגיית החלקיק קטנה יותר מאשר במקרים למעלה ורואים עוסיות את הבדלי הפאזה שהין הגל הפוגע למוחזר. (גרף שלישי)

בגרף הרביעי רואים את החלק המדומה (כחול) והממשי (אדום) כפי שפיתחנו הגל החוזר והממשיך מרכיבים.

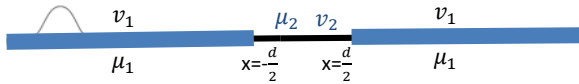
מרחק הדעיכה קטן 1 nm .

בכל המקרים הנ"ל מקדם החזרה $T=1$.

מקרה 5: מיתר ארוך בעל צפיפות גדולה, μ_1 מחובר בנקודה $x = -\frac{d}{2}$ למיתר קצר בצפיפות קטנה, μ_2 באורך d וזה מתחבר (בנקודה $x = \frac{d}{2}$) למיתר ארוך, זהה למיתר הראשון. מבחינת מהירויות הגל נע ממהירות קטנה באזור 1, דרך מהירות גדולה באזור 2 וממשיך במהירות קטנה באזור 3

אנלוג קוונטי: חלקיק מעל בור פוטנציאל מלבני כש $E > V$

במקרה זה $\mu_1 > \mu_2$, $v_1 < v_2$, ולכן $k_1 < k_2$



עלכן:

אזור 1: $-\infty \leq x < -\frac{d}{2}$ ממשי k_1

אזור 2: $-\frac{d}{2} \leq x < \frac{d}{2}$ ממשי k_2

אזור 3: $\frac{d}{2} \leq x < \infty$ ממשי k_1 כש $k_1 < k_2$

פונקציות הגל:

אזור 1: $y_1(x) = \exp(ik_1x) + r\exp(-ik_1x)$ k_1

אזור 2: $y_2(x) = A\exp(-k_2x) + B\exp(k_2x)$ k_2

אזור 3: $y_3(x) = t\exp(ik_1x)$ k_1

באזור 1 ו 2 אין מניע שיהיו גלים נעים לשני הכוונים. באזור 3 יהיה רק גל נע לכיוון המקורי.

הפתוח הנוכחי מעט יותר ארוך מהפיתוח של שני אזורים. אבל מה שמעניין אותנו, הוא איזה יחס מהגל המקורי (r) מוחזר בחזרה מהמשטח הראשון, ב $x = -\frac{d}{2}$ איזה יחס (t) מהגל המקורי מועבר לאזור 3.

עתה יש 3 אזורים ולכן 2 תנ"ש, ב $x = -d/2$ וב $x = d/2$

מתנ"ש 1 (רציפות הפונקציה) נדרוש ש: $\psi_1(-d/2) = \psi_2(-d/2)$ ו $\psi_2(d/2) = \psi_3(d/2)$

מתנ"ש 2 (רציפות שיפוע הפונקציה) נדרוש ש: $\frac{d\psi_1(-d/2)}{dx} = \frac{d\psi_2(-d/2)}{dx}$ ו $\frac{d\psi_2(d/2)}{dx} = \frac{d\psi_3(d/2)}{dx}$

אחרי שנכתיב את תנאי השפה ונעשה את האלגברה נקבל:

$$t = \frac{2k_1k_2e^{-ik_1k_2d}}{2k_1k_2\cos(k_2d) - i(k_1^2 + k_2^2)\sin(k_2d)}$$

$$r = \frac{(k_2^2 - k_1^2)\cos(k_2d)\exp(-ik_1d)}{2k_1k_2\cos(k_2d) - i(k_1^2 + k_2^2)\sin(k_2d)}$$

$$\alpha \equiv \frac{k_2}{k_1} \text{ : אדם}$$

$$\mathbf{r} = \frac{i(\alpha^2 - 1) \sin(k_2 d) \exp(-ik_1 d)}{2\alpha \cos(k_2 d) - i(\alpha^2 - 1) \sin(k_2 d)}, \quad \mathbf{t} = \frac{2\alpha e^{-i2k_1 d}}{2\alpha \cos(k_2 d) - i(1 + \alpha^2) \sin(k_2 d)}$$

מקדמי העברה והחזרה:

$$R = |\mathbf{r}|^2 = \mathbf{r}\mathbf{r}^* = \frac{(k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2 d)}{4k_1^2 k_2^2 + (k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2 d)} = \frac{1}{1 + \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2 d)}}$$

$$T = |\mathbf{t}|^2 = \mathbf{t}\mathbf{t}^* = \frac{1}{\frac{-4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2 d) + 4k_1^2 k_2^2}}$$

אחרי שנסדר את המשוואות ונציב $\alpha = \frac{k_2}{k_1}$ נקבל:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 1\right)^2 \sin^2(k_2 d)}{4\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}}, \quad R = \frac{1}{1 + \frac{4\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}{\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 1\right)^2 \sin^2(k_2 d)}}$$

כשבמקרה זה $\alpha > 1$

העברה מלאה תהיה $T=1$, תתקיים כש $\sin^2(k_2 d) = 0$ ולכן כש $d = n \frac{\pi}{k_2} = n \frac{\pi \lambda}{2\pi} = n \frac{\lambda}{2}$ במצב זה באזור 2 מתרחשת התאבכות בונה כשהגל המוחזר והגל הנכנס באותו מופע. ובאזור 2 מתפתח גל עומד.

משרעת הגל החוזר יהיה אפס.

העברה מינימלית תהיה $T = \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^4 + k_2^4)}$ תתקיים כש: $\sin^2(k_2 d) = 1$ ולכן כש $d = \frac{\pi(n + \frac{1}{2})}{k_2} = (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda_2}{2}$ במצב זה באזור 2 מתרחשת התאבכות הורסת מלאה כשהגל המוחזר והגל הנכנס נבסימן מנוגד (בהפרש פאזה של π).

במצב של העברה מלאה, כש $d = \frac{\pi}{k_2} n$, נקרה מצב שנקרא מצב של רזוננס בהעברה **transmission resonance**. במצב זה יש העברה מלאה של הגל (אין החזרה!)

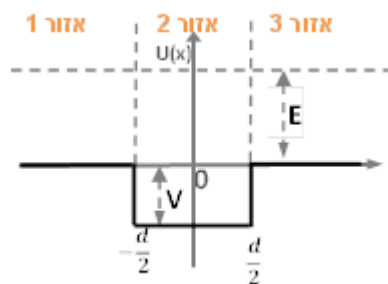
אפשר לראות את ההתנהגות של הגל בתוך הבור פוטנציאל כך:

הגל הפוגע עובר מ k_1 ל k_2 כש $k_1 < k_2$. כתוצאה מכך חלק מהגל חוזר לאזור 1 בפאה הפוכה וגורם באזור 1 להתאבכות הורסת עם הגל המקורי שמקטינה את המשרעת שלו. החלק שהמשיך לאזור 2 ממשיך באותה פאה של הגל המקורי, נתקל בגבול המעבר לאזור 3, במעבר מ k_2 ל k_1 , $k_1 < k_2$, חלקו חוזר וחלקו ממשיך. החלק החוזר לאזור 2 חוזר באותה הפאה ומתאבך התאבכות בונה עם הגל המקורי שבאזור זה, נתקל שוב בגבול עם אזור 1, חלקו חוזר וחלקו מוחזר. החלק החוזר חוזר תמיד באותה פאה נתקל שוב בגבול עם אזור 3 חלקו מוחזר וחלקו ממשיך. המסלול הזה של הגל הלכוד מתרחש אין סוף פעמים כשכל פעם הוא מאבד את החלק שממשיך לאזור הבא ונשאר עם החלק המוחזר. חיבור של כל ההחזרות הללו באזור 2 שהוא חיבור של סידרה גיאומטרית אינסופית שסכומה הוא משרעת הגל שחזר לאזור 1 מהגל המקורי. אותו סכום סידרה גאומטרית מתווסף לאזור 1 ומקזז את ההתאבכות ההורסת עם שהגל החוזר עשה עם הגל המקורי. אותו סכום מתווסף לאזור 3 ומוסיף לו את הגל שהוחזר במעבר מאזור 1 לאזור 2. מכאן שבכל האזורים נשאר המשרעת בגודל המקורי של הגל הנכנס.

התיאור הנ"ל למעשה מציג את המערכת כחיבור של שתי מערכות: מערכת ממקרה 2 שמחוברת למערכת ממקרה 3.

במצב שהוא לא רזוננס, ההתאבכויות הנ"ל יהיו חלקיות, והחיבור של כל המעברים וההחזרות לא מסתכם לזה של הגל הנכנס.

מקרה 5 חלקיק קוונטי



חלקיק בעל אנרגיה E עובר מעל בור פוטנציאל מלבני:

$$\text{אזור 1: } U(x) = 0, \quad -\infty \leq x < -\frac{d}{2}$$

$$\text{אזור 2: } U(x) = -V, \quad -\frac{d}{2} \leq x < \frac{d}{2}$$

$$\text{אזור 3: } U(x) = 0, \quad \frac{d}{2} \leq x < \infty$$

פונקציית הגל:

$$k_1 = \frac{\sqrt{2m(E)}}{\hbar}$$

$$\psi_1(x) = \exp(ik_1x) + r \exp(-ik_1x) \quad \text{אזור 1}$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar} \quad \psi_2(x) = A \exp(-k_2 x) + B \exp(k_2 x) \quad \text{אזור 2:}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2m(E)}}{\hbar} \quad \psi_1(x) = t \exp(ik_1 x) \quad \text{אזור 3:}$$

כש $k_1 < k_2$

קיבלנו ש:

$$\mathbf{r} = \frac{i(k_2^2 - k_1^2) \sin(k_2 d) \exp(-ik_1 d)}{2k_1 k_2 \cos(k_2 d) - i(k_1^2 + k_2^2) \sin(k_2 d)} \quad \mathbf{t} = \frac{2k_1 k_2 e^{-ik_1 k_2 d}}{2k_1 k_2 \cos(k_2 d) - i(k_1^2 + k_2^2) \sin(k_2 d)}$$

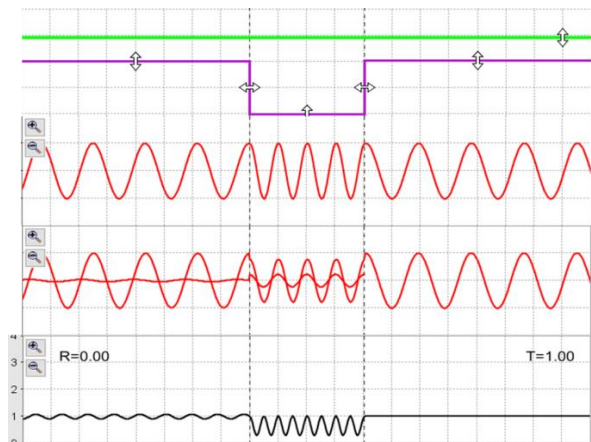
ומקדמי העברה והחזרה:

$$R = \frac{1}{1 + \frac{4(\frac{1}{\alpha})^2}{(\frac{1}{\alpha})^2 - 1} \sin^2(k_2 d)}$$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{(\frac{1}{\alpha})^2 - 1}{4(\frac{1}{\alpha})^2} \sin^2(k_2 d)}$$

$$\alpha = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}}{\frac{\sqrt{2m(E)}}{\hbar}} = \frac{(E-V)}{E} \quad \text{נציב:}$$

$$R = \frac{1}{1 + \frac{4E(E-V)}{V^2 \sin^2(\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar} d)}} \quad T = \frac{1}{1 + \frac{V^2 \sin^2(\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar} d)}{4E(E-V)}} \quad \text{נקבל}$$



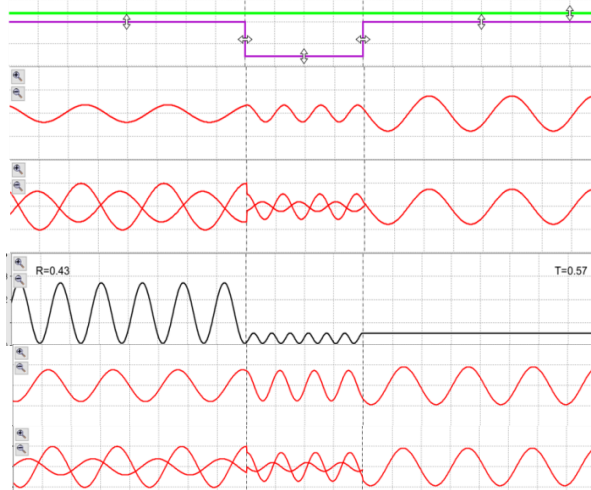
באיור נראה גל הנע משמאל לימין. הגרף הראשון מראה את המערכת בה מתרחשת העברה מלאה לאזור 3. מצב רזוננס.

בגרף השני ניתן לראות שמשרעת פונקצית הגל בכל האזורים שווה, אורך הגל מתאים לפער האנרגיה $V-E$ שבכל אזור.

בגרף השלישי רואים שבמצב של החזרה מלאה הגל הפוגע והמוחזר באזור הבור (אזור 2) באותה פאזה ונוצרת התאבכות בונה. ובאזור 1 הגל החוזר מתאפס.

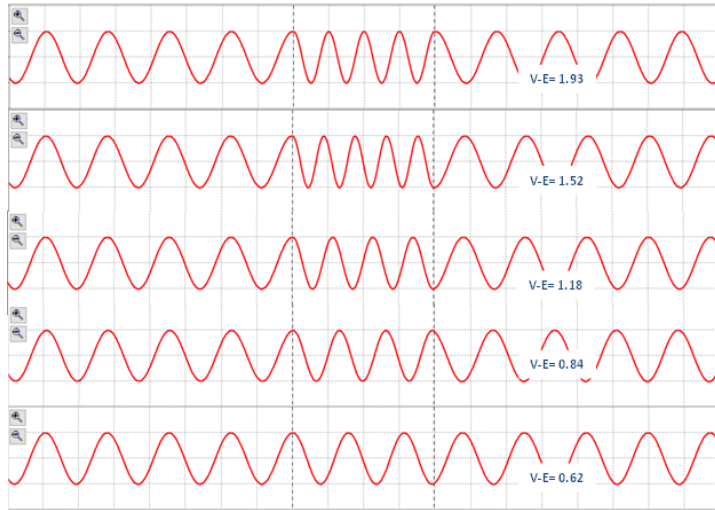
במצב של העברה מינימלית מקבלים העברה של 57% במקרה זה.

ניתן לראות בגרף השני שבניגוד למצב הרזוננס במצב זה ההתאבכות באזור 2 היא התאבכות הורסת היות ומשרעת הגל העובר גדולה מזה של החוזר הגל לא נעלם.



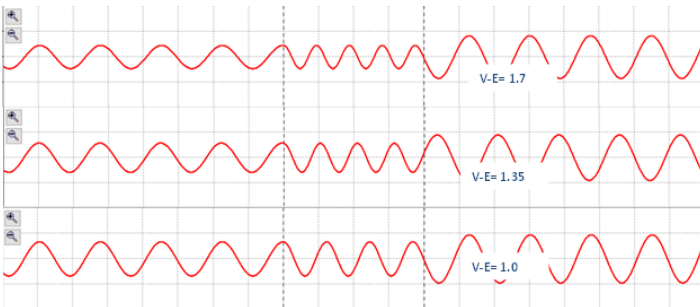
בגרף 4 ניתן לראות שבמצב זה יש מקומות באזורים 1 ו 2 בהם אין סיכוי למצא חלקיק (מינימום פונקצית ההסתברות הוא אפס).

במצב ביניים, הפרש הפאזה בין הגל העובר והמוחזר באזור 2 הוא לא 0 או π ולכן אין התאבכות מלאה או בונה. שמשפיע על אזור 1 ו 3.



באיור מתואר מחסום של 4 nm שהפרש האנרגיה בה משתנה מתמונה לתמונה. ניתן לראות שבמצבים בהם יש העברה מלאה:

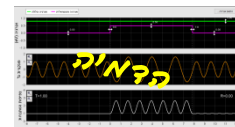
- נכנסים מספר שלם של חצאי גלים.
- מספר חצאי הגלים מוגבל ותלוי בהפרש האנרגיה.
- ככל שהפרש האנרגיה גדול יותר כך יכנסו יותר חצאי גל.



מצב של מינימום העברה נוצר כשנכנסים כפולות שלמות של $\frac{2\pi}{3}$:

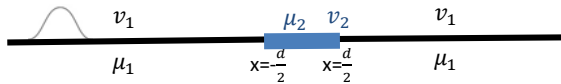
- מספרם תלוי בהפרש האנרגיה.
- ככל שהפרש האנרגיה גדול יותר כך יכנסו יותר חצאי גל.

4. חלקיק בפונקציית מחסום/ בור פוטנציאל מלבני ($E > V$) – תיאורטי



מקרה 6: מיתר ארוך בעל צפיפות קטנה, μ_1 מחובר בנקודה $x = -\frac{d}{2}$ למיתר קצר בצפיפות גדולה, μ_2 באורך d וזה מתחבר בנקודה $x = \frac{d}{2}$ למיתר ארוך אינסופי, זהה למיתר הראשון.

הגל עובר ממהירות גדולה באזור 1 למהירות קטנה באזור 2 וממשיך במהירות נמוכה באזור 3.



אנלוג קוונטי: חלקיק במחסום פוטנציאל מלבני כש $E > V$

במקרה זה $\mu_1 < \mu_2$, ולכן $v_1 < v_2$ ו $k_1 < k_2$

מקרה זה זהה למקרה 5 פרט לעובדה ש $k_1 < k_2$

אזור 1: $-\infty \leq x < -\frac{d}{2}$ ממשי k_1

אזור 2: $-\frac{d}{2} \leq x < \frac{d}{2}$ ממשי k_2

אזור 3: $\frac{d}{2} \leq x < \infty$ ממשי k_1 כש $k_1 < k_2$

פונקציות הגל:

אזור 1: $\psi_1(x) = \exp(ik_1x) + r\exp(-ik_1x)$ k_1

אזור 2: $\psi_2(x) = A\exp(-k_2x) + B\exp(k_2x)$ k_2

אזור 3: $\psi_3(x) = t\exp(ik_1x)$ k_1

הפיתוח זהה למקרה הקודם יתן אותן תוצאות:

באזור 1:

$$r = \frac{i(k_2^2 - k_1^2)\sin(k_2d)\exp(-ik_1d)}{2k_1k_2 \cos(k_2d) - i(k_1^2 + k_2^2)\sin(k_2d)}$$

באזור 2:

$$A = \frac{t}{2k_2}(k_1 + k_2)\exp[i(k_1 - k_2)d] \quad B = \frac{t}{2k_2}(k_1 - k_2)\exp[i(k_1 + k_2)d]$$

באזור 3:

$$t = \frac{2k_1k_2e^{-ik_1k_2d}}{2k_1k_2 \cos(k_2d) - i(k_1^2 + k_2^2)\sin(k_2d)}$$

מקדמי ההחזרה והעברה:

$$T = |\mathbf{t}|^2 = \mathbf{t}\mathbf{t}^* = \frac{1}{1 + \frac{(k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2 d)}{4k_1^2 k_2^2}} \quad R = |\mathbf{r}|^2 = \mathbf{r}\mathbf{r}^* = \frac{1}{1 + \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2 d)}}$$

אפשר לראות את ההתנהגות של הגל בתוך מחסום פוטנציאל כך: הגל הפוגע עובר מ k_1 ל k_2 כש $k_1 > k_2$. כתוצאה מכך חלק מהגל חוזר לאזור 1 באותה פאזה וגורם באזור 1 להתאבכות בונה עם הגל המקורי שמגדילה את המשרעת שלו (באזור 1). החלק שהמשיך לאזור 2 ממשיך באותה פאזה של הגל המקורי, נתקל בגבול המעבר לאזור 3, במעבר מ k_1 ל k_2 , $k_1 > k_2$, חלקו חוזר וחלקו ממשיך. החלק החוזר לאזור 2 חוזר בפאזה הפוכה ומתאבך התאבכות הורסת עם הגל המקורי שבאזור זה, הוא נתקל שוב בגבול עם אזור 1, חלקו חוזר וחלקו מוחזר. החלק החוזר שוב הופך את הפאזה והוא בפאזה של הגל המקורי. הוא תקל שוב בגבול עם אזור 3 חלקו מוחזר וחלקו ממשיך. המסלול הזה של הגל הלכוד מתרחש אין סוף פעמים כשכל פעם הוא מאבד את החלק שממשיך לאזור הבא ונשאר עם החלק המוחזר. הגלים בחלק זה שנעים ימינה הם באותה פאזה של הגל המקורי וגורמים להתאבכות בונה ואילו אלו שנעים שמאלה הם בפאזה הפוכה וגורמים להתאבכות הורסת. חיבור של כל ההחזרות הללו באזור 2 הוא חיבור של סידרה גיאומטרית אינסופית שסכומה הוא משרעת הגל שחזר לאזור 1 מהגל המקורי. לאזור 1 נעים גלים מאזור 2 בפאזה הפוכה לגל המקורי שסכומם הוא אותו סכום סידרה גיאומטרית והוא מקזז את הגל להתאבכות הבונה שיצר הגל החוזר באזור 1 עם הגל המקורי. באזור 3 הגלים שמגיעים מאזור 2 הם באותה הפאזה של הגל המקורי, סכומם הוא משרעת הגל המוחזרת במעבר מאזור 1 ל 2 וסכומם נותן את משרעת הגל המקורי.

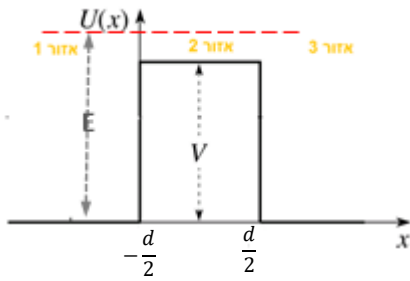
מכאן שבכל האזורים נשאר המשרעת בגודל המקורי של הגל הנכנס.

התיאור הנ"ל למעשה מציג את המערכת כחיבור של שתי מערכות: מערכת ממקרה 2 שמחוברת למערכת ממקרה 3.

במצב שהוא לא רזוננס, ההתאבכויות הנ"ל יהיו חלקיות, והחיבור של כל המעברים וההחזרות לא מסתכם לזה של הגל הנכנס.

מקרה 6 חלקיק קוונטי

חלקיק בעל אנרגיה E עובר בפוטנציאל מדרגה:



אזור 1: $U(x) = 0$, $-\infty \leq x < -\frac{d}{2}$

אזור 2: $U(x) = V$, $-\frac{d}{2} \leq x < \frac{d}{2}$

אזור 3: $U(x) = 0$, $\frac{d}{2} \leq x < \infty$

פונקציות הגל:

אזור 1: $\psi_1(x) = \exp(ikx) + r \exp(-ikx)$ (ממשי) $k_1 = \frac{\sqrt{2m(E)}}{h}$

אזור 2: $\psi_2(x) = A \exp(-kx) + B \exp(kx)$ (מדומה) $k_2 = \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{h}$

אזור 3: $\psi_3(x) = t \exp(ikx)$ (ממשי) $k_3 = \frac{\sqrt{2m(E)}}{h}$

כשבמקרה זה: $k_1 > k_2$

קיבלנו ש:

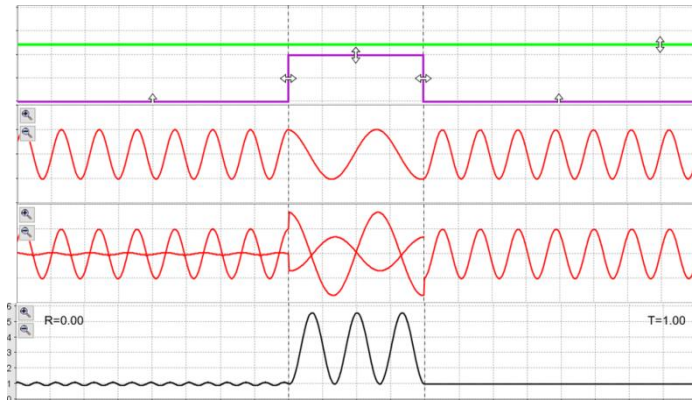
$$r = \frac{i(k_2^2 - k_1^2) \sin(k_2 d) \exp(-ik_1 d)}{2k_1 k_2 \cos(k_2 d) - i(k_1^2 + k_2^2) \sin(k_2 d)} \quad t = \frac{2k_1 k_2 e^{-ik_1 k_2 d}}{2k_1 k_2 \cos(k_2 d) - i(k_1^2 + k_2^2) \sin(k_2 d)}$$

מקדמי ההחזרה והעברה:

$$R = \frac{1}{1 + \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2 d)}} \quad T = \frac{1}{1 + \frac{(k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2 d)}{4k_1^2 k_2^2}}$$

אם נציב את ערכי k_1 ו k_2 נקבל:

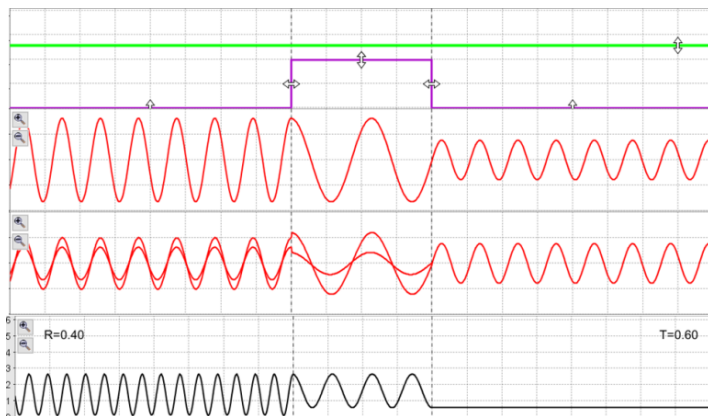
$$T = \frac{1}{1 + \frac{V^2 \sin^2\left(\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{h} d\right)}{4E(E-V)}}$$



באיור נראה גל הנע משמאל לימין. הגרף הראשון מראה את המערכת בה מתרחשת העברה מלאה לאזור 3. מצב רזוננס.

בגרף השני ניתן לראות שמשרעת פונקציית הגל בכל האזורים שווה, אורך הגל מתאים לפער האנרגיה V-E שבכל אזור.

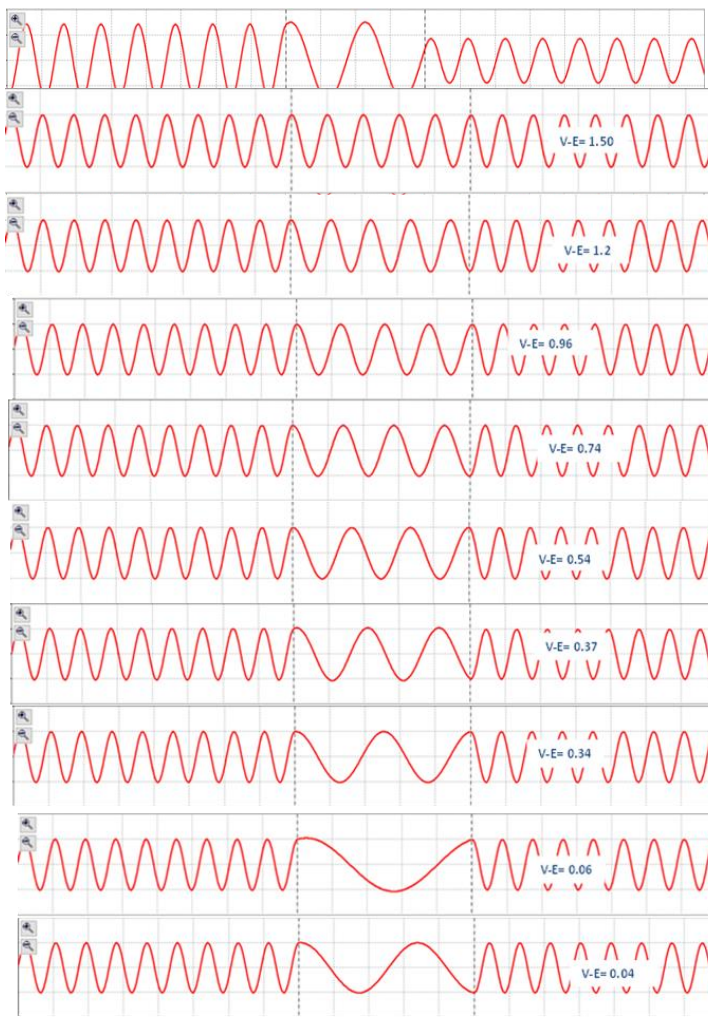
בגרף השלישי רואים שבמצב של החזרה מלאה הגל הפוגע והמוחזר באזור הבור (אזור 2) בפאזה ונוצרת התאבכות הורסת. ובאזור 1 הגל החוזר מתאפס.



במצב של העברה מינימלית מקבלים העברה של 60% במקרה זה.

ניתן לראות בגרף השני שבניגוד למצב הרזוננס במצב זה ההתאבכות באזור 2 היא התאבכות בונה היות ומשרעת הגל העובר גדולה מזה של החוזר הגל לא נעלם.

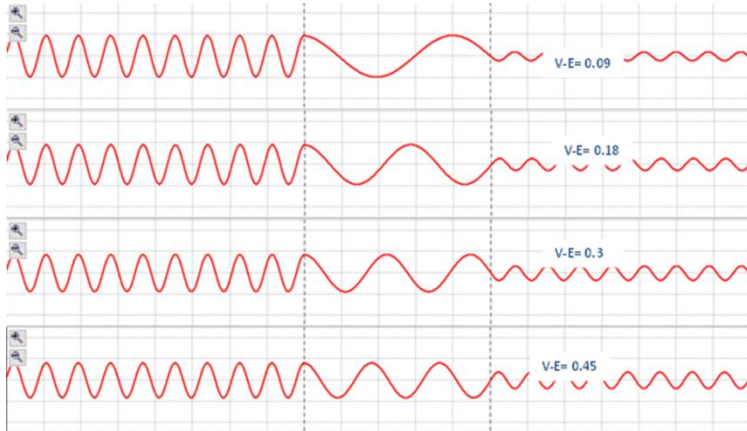
בגרף 4 ניתן לראות שבמצב זה יש מקומות באזור 1 שבאין אין סיכוי למצא חלקיק (מינימום פונקציית ההסתברות הוא אפס).



במצב ביניים, הפרש הפאזה בין הגל העובר והמוחזר באזור 2 הוא לא 0 או π ולכן אין התאבכות מלאה או בונה. שמשפיע על אזור 1 ו 3.

באיור מתואר מחסום של 5 nm שהפרש האנרגיה בה משתנה מתמונה לתמונה. ניתן לראות שבמצבים בהם יש העברה מלאה:

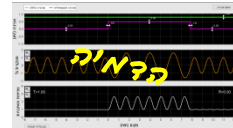
- נכנסים מספר שלם של חצאי גלים.
- מספר חצאי הגלים מוגבל ותלוי בהפרש האנרגיה.
- ככל שהפרש האנרגיה גדול יותר כך יכנסו יותר חצאי גל.



מצב של מינימום העברה נוצר כשנכנסים כפולות שלמות של $\frac{2\pi}{3}$:

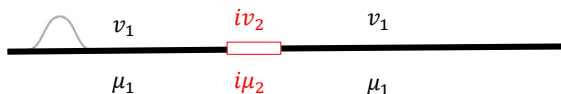
- מספרם תלוי בהפרש האנרגיה.
- ככל שהפרש האנרגיה גדול יותר כך יכנסו יותר חצאי גל.

4. חלקיק בפונקציית מחסום/ בור פוטנציאל מלבני ($E > V$) – תיאורטי



מקרה 7: מיתר בעל מהירות v מחובר למיתר שני קצר שיש לו מתיחות שלילית מיתר זה מתחבר למיתר שלישי זהה לראשון.

אנלוג קוונטי: מחסום פוטנציאל מלבני כש $E < V$



אזור 1: $U(x) = 0$, $-\infty \leq x < -\frac{d}{2}$

אזור 2: $U(x) = V$, $-\frac{d}{2} \leq x < \frac{d}{2}$

אזור 3: $U(x) = 0$, $\frac{d}{2} \leq x < \infty$

פונקצית הגל:

אזור 1: $y_1(x) = \exp(ikx) + r \exp(-ikx)$ $k_1 = \frac{\sqrt{2m(E)}}{\hbar}$ (ממשי)

אזור 2: $y_2(x) = A \exp(-kx) + B \exp(kx)$ $k_2 = \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}$ (מדומה)

אזור 3: $y_3(x) = t \exp(ikx)$ $k_3 = \frac{\sqrt{2m(E)}}{\hbar}$ (ממשי)

כשבמקרה זה: $k_1 > k_2$

שוב מקרה עם 3 אזורים שבאזור 2 k_2 מדומה. היות וכל מרכיבי המערכת האחרים זהים נקבל את אותם הביטויים שקיבלנו במקרים הקודמים פרט לעובדה ש k_2 מוחלף ב ik_2

$$r = \frac{i((ik_2)^2 - k_1^2) \sin(ik_2 d) \exp(-ik_1 d)}{2k_1 k_2 \cos(ik_2 d) - i(k_1^2 + ik_2^2) \sin(ik_2 d)}$$

נתמקד בהעברה:

$$t = \frac{2k_1 ik_2 e^{ik_2 k_1 d}}{2k_1 k_2 \cos(ik_2 d) - i(k_1^2 + ik_2^2) \sin(ik_2 d)}$$

היות $\cos(ix) = \cosh(x)$ $\sin(ix) = i \sin(x)$

נציב ונקבל:

$$t = \frac{2k_1 k_2 e^{-k_1 k_2 d}}{2k_1 k_2 \cosh(k_2 d) - i(k_1^2 - k_2^2) \sinh(k_2 d)}$$

באזור 2

$$B = \frac{t}{2k_2} (k_2 - ik_1) \exp(ik_1) \exp(k_2 d) \quad A = \frac{t}{2k_2} (k_2 + ik_1) \exp(ik_1) \exp(-k_2 d)$$

נמצא את מקדם ההעברה:

$$\cosh^2(x) = \sinh^2(x) + 1 \quad \text{נחליף לפי זהות:}$$

$$T = |t|^2 = tt^* = \frac{4k_1^2 k_2^2}{4k_1^2 k_2^2 + (k_1^2 + k_2^2) \sinh^2(k_2 d)} = \frac{1}{1 + \frac{(k_1^2 + k_2^2)^2 \sinh^2(k_2 d)}{4k_1^2 k_2^2}}$$

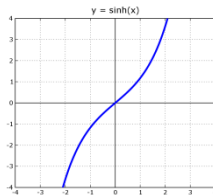
$$T = \frac{1}{1 + \frac{(k_1^2 + k_2^2)^2 \sinh^2(k_2 d)}{4k_1^2 k_2^2}}$$

קיבלנו ש T לא אפס ומכאן שיש מעבר של הגל לאזור 3

תופעה כזו, בה גל עובר מתווך אחד דרך תווך בו הוא אינו קיים כגל (מהירותו שם מדומה) לתווך אחר היא **תופעת המנהור**.

נבחן במצבים שונים:

- T מתאפס כש $\frac{(k_1^2 + k_2^2)^2 \sinh^2(k_2 d)}{4k_1^2 k_2^2} \gg 1$ (אינסופי). היות והפונקציה $\sinh^2(x)$ מתבדרת מהר מאוד (ראה בתמונה) T שונה מאפס רק כש d קטן מאוד.



$$\text{ו/או כש } \frac{(k_1^2 + k_2^2)^2}{4k_1^2 k_2^2} \gg 1 \text{ ומכאן שכש } |k_1^2 - k_2^2| \ll 1$$

- כש $k_1 \sim k_2$

$$T = \left[1 + \frac{4k_{\pm}^4 \sinh^2(k_1 d)}{4k_{\pm}^4} \right]^{-1} = \frac{1}{\cosh^2(k_1 d)}$$

אם $d=0$ (אזור 3 לא קיים) $\cosh^2(k_1 0) = 1$ ונקבל את מקרה 1 $T=1$.

- אם $k_2 d$ גדול (אורך מיתר ארוך או ש k_2 גדול) נקבל:

$$T = \frac{4k_1^2 k_2^2}{4k_1^2 k_2^2 + (k_1^2 + k_2^2) \frac{\exp(2k_2 d)}{4}} \approx \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \exp(-k_2 d)$$

$$T \propto \exp(-k_2 d)$$

את הגודל $\frac{1}{k_2}$ מגדירים כמקדם דעיכה (המרחק בו עוצמת הגל דועכת ל $\frac{1}{e}$) $\sigma \equiv \frac{1}{k_2}$.

$$r = \frac{i(k_2^2 - k_1^2) \sin(k_2 d) \exp(-ik_1 d)}{2k_1 k_2 \cos(k_2 d) - i(k_1^2 + k_2^2) \sin(k_2 d)}$$

ומקדם ההחזרה $R=1-T$

סיכום:

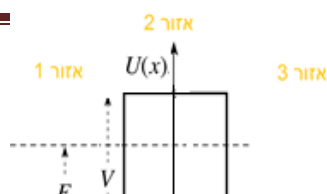
במקרה שגל עובר מתווך בו הוא נע (במהירות ממשית) מתווך אחד לתווך צר בו מהירותו מדומה ואחר כך שוב לתווך בו הוא נע במהירות ממשית.

k_1 ממשיו k_2 מדומה, k_3 ממשיו

- (1) בניגוד לחלקיק קלסי, גל יכול להיכנס אל תוך אזור אסור קלאסי
- (2) באזור האסור החלקיק דועך אקספוננציאלית.
- (3) מרחק הדעיכה יהיה גדול יותר ככל שהפרש $V-E$ קטן יותר
- (4) באזור 3 הגל ממשיך להיות גל שמשרעתו קטנה יותר (בהתאם לדעיכה)
- (5) חודר גם לאזור בו הוא אינו יכול לנוע (מהירותו מדומה).

מקרה 7 חלקיק קוונטי

חלקיק בעל אנרגיה E עובר בפוטנציאל מחסום מלבני כש $E < V$:



אזור 1: $U(x) = 0, -\infty \leq x < 0$

אזור 2: $U(x) = V, 0 \leq x < d$

אזור 3: $U(x) = V, d \leq x < \infty$

אזור 1: $\psi_1(x) = \exp(ikx) + r \exp(-ikx)$ (ממשי) $k_1 = \frac{\sqrt{2m(E)}}{\hbar}$

אזור 2: $\psi_2(x) = A \exp(-kx) + B \exp(kx)$ (מדומה) $k_2 = \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}$

אזור 3: $\psi_3(x) = t \exp(ikx)$ (ממשי) $k_3 = \frac{\sqrt{2m(E)}}{\hbar}$

כשבמקרה זה: $k_1 > k_2$

קיבלנו שהחלק העובר את המחסום לאזור 3 הוא: $T = \frac{1}{1 + \frac{(k_1^2 + k_2^2)^2 \sinh^2(k_2 d)}{4k_1^2 k_2^2}}$

אם נציב את הערכים של k_1 ו k_2 נקבל:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V^2}{4E(V-E)} \sinh^2\left(\frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar} d\right)}$$

אם $\frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar} d$ גדול (המרחק d , הפרש האנרגיות $V-E$, או המסה m) קיבלנו ש

$$T \approx \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \exp(-k_2 d)$$

ומקדם הדעיכה: $\sigma = \frac{1}{dk_2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar} d} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V-E)} d}$

$$T \approx \frac{4E}{V} (V - E) \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right) = \left(1 + \frac{E}{V}\right) E \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right)$$

והדעיכה: $\exp\left(-\frac{\sqrt{2m(V-E)} dx}{\hbar}\right)$

התפלגות הסיכוי למצא את החלקיק באזור 3 היא T

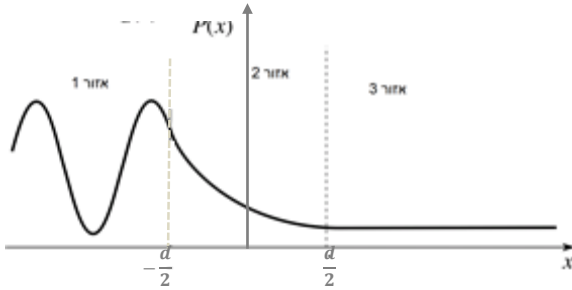
ההתפלגות למצא את החלקיק באזור 2 היא $\psi_2^*(x) \psi_2(x)$ כש:

כש: $\psi_2(x) = A \exp(-kx) + B \exp(kx)$

$$B = \frac{t}{2k_2} (k_2 x - ik_1 x) \exp(ik_1 x) \exp(k_2 dx) \quad A = \frac{t}{2k_2} (k_2 x + ik_1 x) \exp(ik_1 x) \exp(-k_2 dx)$$

אם נפתור נקבל פונקציה דועכת

האיור מסכם את התפלגות הפונקציה המתארת את הסיכוי למצא את החלקיק בכל אחד משלושת האזורים.



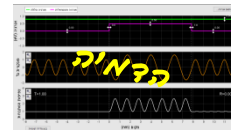
סיכום:

במקרה שחלקיק קוונטי עובר מתווך בו האנרגיה שלו גדולה מפוטנציאל ועובר דרך תחום דק ברוחב d בו האנרגיה שלו קטנה מהפוטנציאל שם

k_1 ממשי ו k_2 מדומה

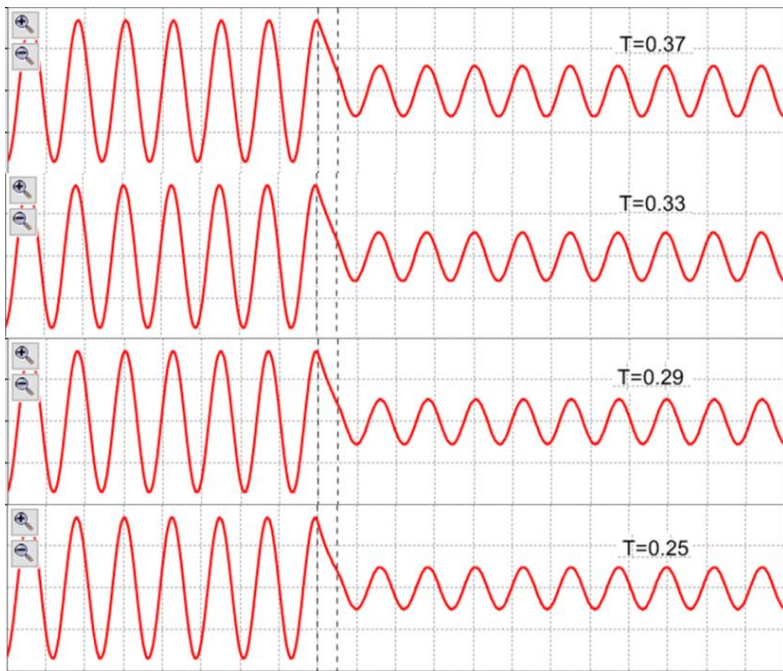
- (5) בניגוד לחלקיק קלאסי, חלקיק קוונטי יכול להיכנס אל תוך אזור אסור קלאסי
- (6) באזור האסור החלקיק דועך אקספוננציאלית.
- (7) מרחק הדעיכה יהיה גדול יותר ככל שהפרש $V-E$ קטן יותר
- (8) מרחק הדעיכה יהיה גדול יותר ככל שמסת החלקיק קטנה יותר
- (9) החלקיק מופיע להיות חלקיק (בעל תכונות גליות) כשהוא יוצא מהאזור האסור
- (10) קיימת הסתברות למצוא את החלקיק באזור 3 והסתברות הזו גדולה ככל ש d קטן

5.א. מנהור דרך מחסום פוטנציאל מלבני – תיאורטי



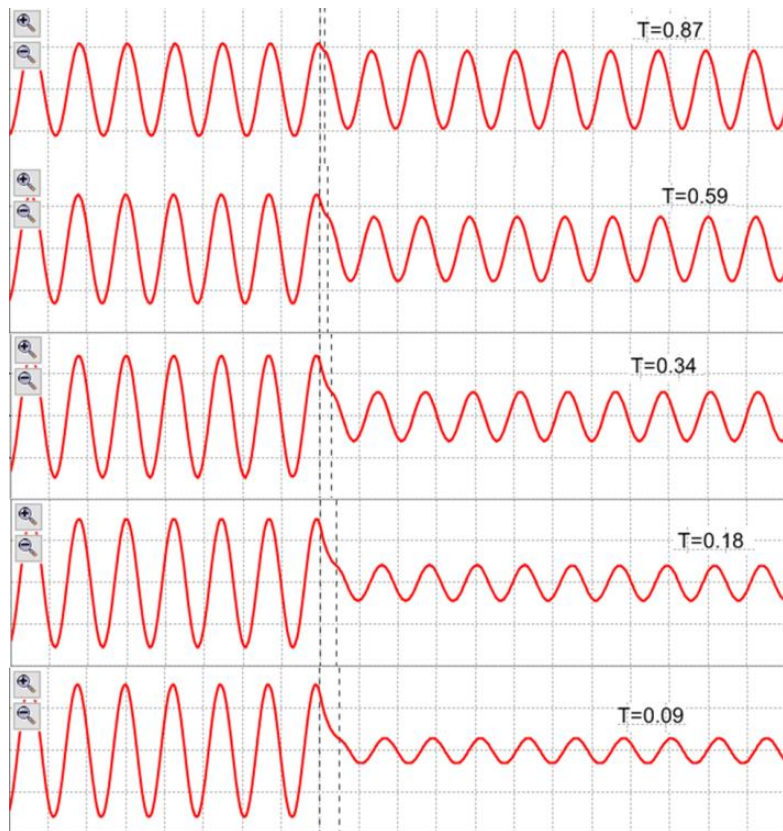
5.ב. מנהור דרך מחסום פוטנציאל מלבני – חקר

דוגמאות:



באיורים נראה הגל הפוגע במחסום פוטנציאל מלבני ברוחב $d=0.5$ nm. כאשר בכל איור הפרש הפוטנציאל $V-E$ משתנה בקפיצות של 0.5 eV

- ככל שהפרש גדול ההעברה קטנה יותר
- הקשר בין העברה לבין הפרש האנרגיות הוא קשר לינארי $T \approx \frac{4E}{V} (V - E) \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right)$



באיורים נראה הגל הפוגע במחסום פוטנציאל מלבני. הפרש הפוטנציאלים קבוע $E-V=-0.5$ eV. רוחב המחסום משתנה מ $d=0.1$ nm בקביעות של 1 nm מתמונה לתמונה

- ככל שרוחב המחסום גדול גדול ההעברה קטנה יותר
- ההעברה קטנה בקצב אקספוננציאלי עם שינוי ב רוחב

אנלוגיה באופטיקה

נסתכל על כל אחד מהמצבים שניתחנו בהקשר אופטי.

מקרה 1

פוטון בעל אנרגיה $E = h\omega$ יש לו בריק מספר גל $k_0 = \frac{\omega}{c}$ כשהוא נע בחומר נע נמצא בשדה פוטנציאלי ומספר הגל יתארך ויהיה: $k = \frac{\omega}{v}$ כש v המהירות שלו בחומר. היות ומקדם השבירה מוגדר כ $n \equiv \frac{c}{v}$ נקבל: $n = \frac{c}{v} = \frac{\omega k}{\omega k_0} = \frac{k}{k_0}$. אם נקבע ש מספר הגל בווקום $k_0 = 1$, הרי ש $n = k$. ומקדם השבירה הוא מספר הגל k.

כך שלמעשה אורך הגל אנו מודדים בחומר בעל מקדם שבירה n נובע מהפרש הפוטנציאליים E-V וככל שהוא גדול יותר אורך הגל קצר יותר (מספר הגל גדול יותר).

מקרה 2

קקרון אור (פוטון) עוברת מתווך עם מקדם שבירה n_1 לתווך עם מקדם שבירה n_2 . כאשר $n_2 > n_1$. פיתוח פשוט שיוצא מתוך תנאי שפה שמכתיבות משוואות מקסוול יתן את משוואות פרנל. עלפי משוואות אלו השדה החשמלי החוזר r והשדה החשמלי העובר t הם:

$$t = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad r = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$$

ועוצמת השדה העובר $T = tt^* = t^2$ והחוזר $R = rr^* = r^2$ הם

$$T = \left[\frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right]^2 \quad R = \left[\frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right]^2$$

שהם זהות למשוואות שקיבלנו במקרה 2

משוואות זהות למשוואות שקיבלו בפיתוח החד מימדי שעשינו. כדי לראות זאת נציב $\theta_i = \theta_t = 0$ משמע – הקרניים פוגעות בניצב למשטח ונקבל:

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

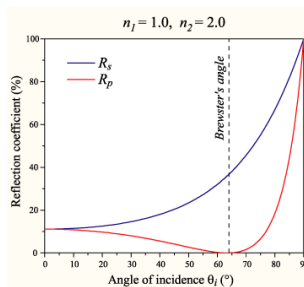
במקרה זה $n_1 < n_2$ ולכן הגל מוחזר בהיפוך פאזה.

$$T = \left[\frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right]^2 \quad R = \left[\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right]^2$$

שהם זהות למשוואות שקיבלנו במקרה 2 פרט לעובדה שכאן מקדם השבירה מחליף את מספר הגל

נחזור למקרה הדו – מימדי: השדה המוחזר: $r = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$

נציב מחוק סנל: $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$ וכן את הזהות: $\cos \theta_t = \sqrt{1 - (\sin \theta_t)^2}$



$$R = \left[\frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2}}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2}} \right]^2 \quad r = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2}}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2}} \quad \text{ונקבל:}$$

היות ובמקרה זה $\frac{n_1}{n_2} < 1$ השורש יהיה תמיד ממשי לכן n_2 ממשי ותמיד תהיה העברה (1-R=T)

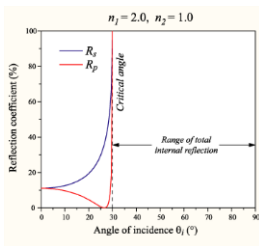
מקרה 3.

כשפוטון עובר מתווך עם מקדם שבירה n_1 לתווך עם מקדם שבירה n_2 . כאשר $n_2 < n_1$.

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

ניתבון בפיתוח שעשינו במקרה הקודם:

$$R = \left[\frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2}}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2}} \right]^2 \quad r = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2}}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2}}$$



במקרה הזה $\frac{n_1}{n_2} > 1$ ולכן יכול להיות ש n_2 מרוכב. היות ומקרה 3 היה k_2 ממשי התנאי לכך כאן הוא ש

$$\sin \theta_i < \frac{n_2}{n_1} \quad \text{כש} \quad \sin \theta_i = \frac{n_2}{n_1} \quad \theta_i = \theta_c \quad \text{היא הזווית הקריטית שמעליה} \quad n_2 \text{ מרוכב.}$$

לכן מקרה 3 ($n_2 < n_1$) לזוויות פגיעה מתחת לזווית הקריטית $\theta_i < \theta_c$

מקרה 4.

המקרה המתואר הינו מצב של החזרה פנימית מלאה. כשקרן אור עוברת מתווך עם מקדם שבירה n_1 לתווך עם מקדם שבירה n_2 כש $n_2 < n_1$ הפגיעה שלו זווית הפגיעה שלו גדולה מהזווית הקריטית הקרן מוחזרת במלואה.

$$r = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2}}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2}} \quad \text{כפי שהראנו במקרה הקודם:}$$

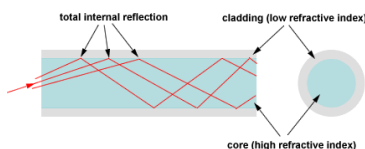
מקרה 4 הוא המקרה בו k_2 היה מדומה. ובאנלוגיה לכאן כש n_2 מרוכב. במקרה הזה $\frac{n_1}{n_2} > 1$ ולכן התנאי

$$\sin \theta_i < \frac{n_2}{n_1} \quad \text{או} \quad \theta_i > \theta_c$$

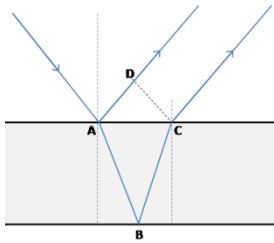
R הופך להיות מספר מרוכב ולכן $R = rr^*$ ואם נציב נקבל R=1

התופעה נקראת החזרה מלאה (Total Internal Reflection).

שימוש טכנולוגי ידוע בתופעה הוא הסיב האופטי.



מקרה 5 ו 6



המקרה המתואר זהה להתאבכות שכבות דקות באופטיקה. קרן אור פוגעת בשכבת החומר, מוחזרת באופן חלקי, ונשברת באופן חלקי (ציור). הקרן הנשברת שעברה דרך השכבה תוחזר מן הצד השני, ותתאבך עם הקרן המוחזרת. תתקבל התאבכות בונה או הורסת בהתאם להפרש הדרכים האופטיות שעברו שתי הקרניים. הפרש זה תלוי בזווית הפגיעה של האור, עובי השכבה, ומקדמי השבירה של החומר ממנו עשויה השכבה ושל התווך ממנו מגיע האור.

אם מקדם השבירה של החומר ממנו עשויה השכבה גדול ממקדם השבירה של התווך (מקרה 5), או אם מקדם השבירה של החומר ממנו עשויה השכבה קטן ממקדם השבירה של התווך (מקרה 6), תתקבל התאבכות בונה אם הפרש הדרכים האופטיות שווה לכפולה חצי שלמה של אורך הגל של האור, והתאבכות הורסת אם הפרש הדרכים שווה לכפולה שלמה של אורך הגל.

כל התופעות והטכנולוגיה של אופטיקה של שכבות דקות בנויה על מקרים 4 ו 5.

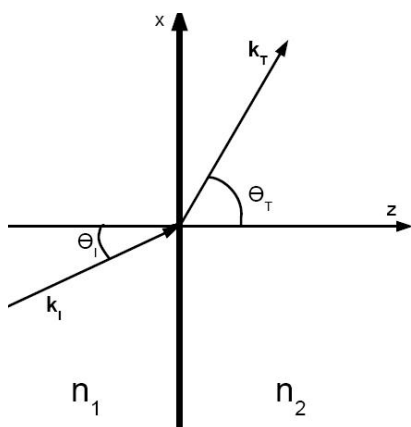
שימושים טכנולוגיים:

פילטרים המעבירים אורכי גל מסויימים מאפשר לנו לבנות פילטרים שיעבירו רק אורך גל מסוים או מספר פילטרים שכל אחד מהם מתוכנן להעביר אורך גל מסויים ואז ליצור פילטר לתחום תדרים (band-pass-filter)

מקרה 7

כדי לראות מה קורה במצב זה, בו, כמו במקרה 4 יש החזרה פנימית מלאה נסתכל על וקטור הגל:

בציור רואים את וקטור הגל k_T שנע בתווך עם מקדם שבירה n_1 פוגע במשטח הגבול בזווית θ_I נשבר וממשיך בתווך השני בו מקדם השבירה n_2 ורטור הגל k_T



$$k_T = k_T \sin \theta_T \hat{x} + k_T \cos \theta_T \hat{z} \quad \text{עלפי מערכת הצירים שבשרטוט:}$$

אם $n_2 < n_1$ אז כתוצאה מחוק סנל $\sin \theta_T > 1$

$$\sin \theta_T = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_I \quad \text{כש } \theta_I > \theta_C$$

$$\text{אבל } \cos \theta_T = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_T}$$

$$\text{ומכאן ש } \cos \theta_T = i \sqrt{\sin^2 \theta_T - 1} \quad \text{מדומה:}$$

כתוצאה מכך:

$$E_T = E_0 \exp i(\mathbf{k}_T \mathbf{r} - \omega t)$$

אבל $r = x\hat{x} + z\hat{z}$ ונקבל:

$$E_T = E_0 \exp i(xk_T \sin\theta_T + zk_T \cos\theta_T - \omega t)$$

$$E_T = E_0 \exp i(xk_T \sin\theta_T + zk_T i\sqrt{\sin^2\theta_T - 1} - \omega t)$$

$$E_T = E_0 \exp i(xk_T \sin\theta_T - \omega t) \exp[-zk_T \sqrt{\sin^2\theta_T - 1}] \quad \text{ונקבל:}$$

$$k_T = \frac{\omega n_2}{c} \quad \text{נציב:}$$

$$E_T = E_0 \exp i\left(x \frac{\omega n_2}{c} \sin\theta_T - \omega t\right) \exp\left[-z \frac{\omega n_2}{c} \sqrt{\sin^2\theta_T - 1}\right] \quad \text{ונקבל:}$$

$$n_2 \sin\theta_T = n_1 \sin\theta_I \quad \text{מחוק סנל:}$$

$$E_0 \exp i\left(x \frac{\omega}{c} n_1 \sin\theta_I - \omega t\right) \exp\left[-z \frac{\omega}{c} \sqrt{(n_1 \sin\theta_I)^2 - n_2^2}\right]$$

$$k = \frac{\omega}{c} n_1 \sin\theta_I \quad \kappa = \frac{\omega}{c} \sqrt{(n_1 \sin\theta_I)^2 - n_2^2}, \quad \text{נציב:}$$

$$E_T = E_0 \exp i(kx - \omega t) \exp(-\kappa z)$$

קיבלנו גל שנכנס אל תוך תווך 2 אבל דועך אקספוננציאלית לפי $\frac{1}{\kappa}$

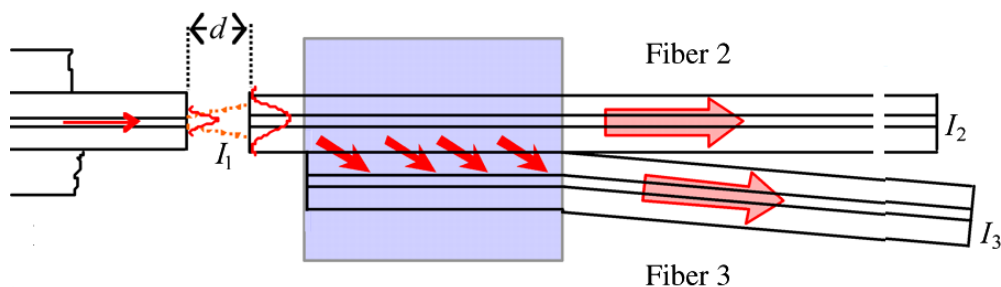
$$\kappa = \frac{\omega}{c} \sqrt{(n_1 \sin\theta_I)^2 - n_2^2} \quad \text{כש}$$

במידה ועובי התווך של החומר השני קצר, z יהיה קצר, ו E_T לא יהיה זניח נוכל למדוד בצד השני גל ממשיך.

היבט מעניין הוא להסתכל על עוצמת הגל (אנרגיית הגל שהיא $I_T = E_T E_T^*$ כשנעשה זאת נקבל

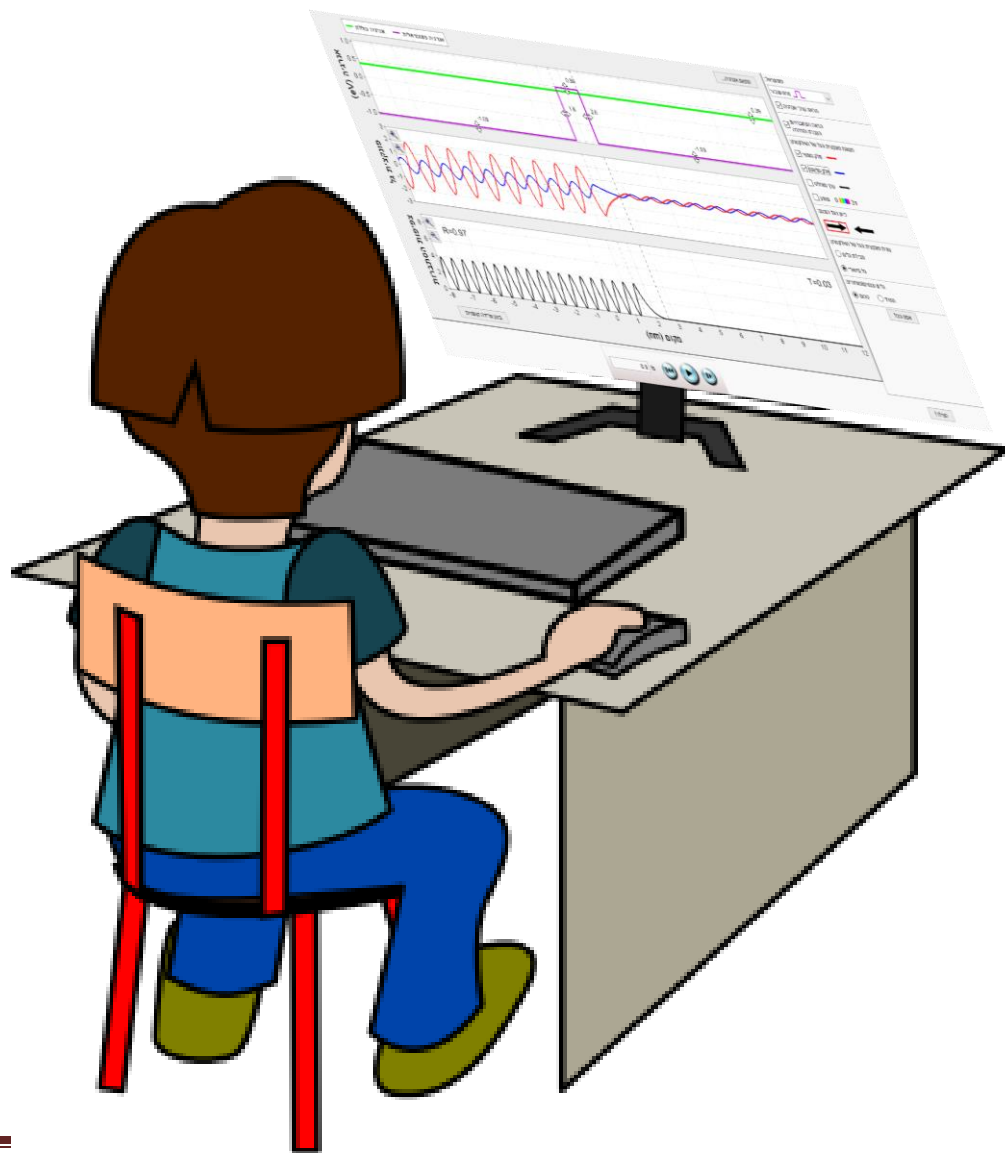
$$I_T = E_0^2 \exp(-2\kappa z)$$

שימושים טכנולוגים – בין השאר, צימוד ("האזנה") למידע בין סיבים אופטיים.



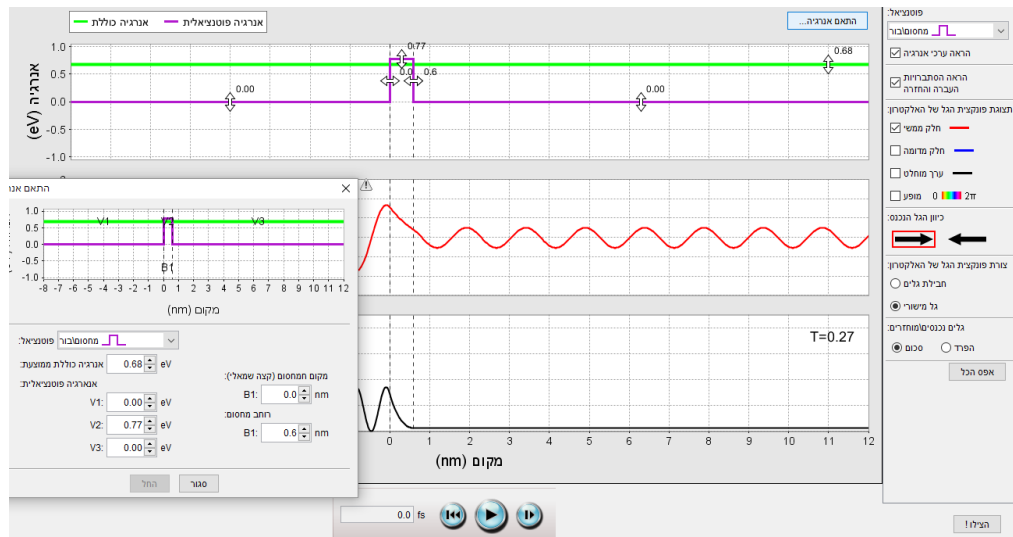
מנהור גלים

תרגול וחקר באמצעות הדמייה



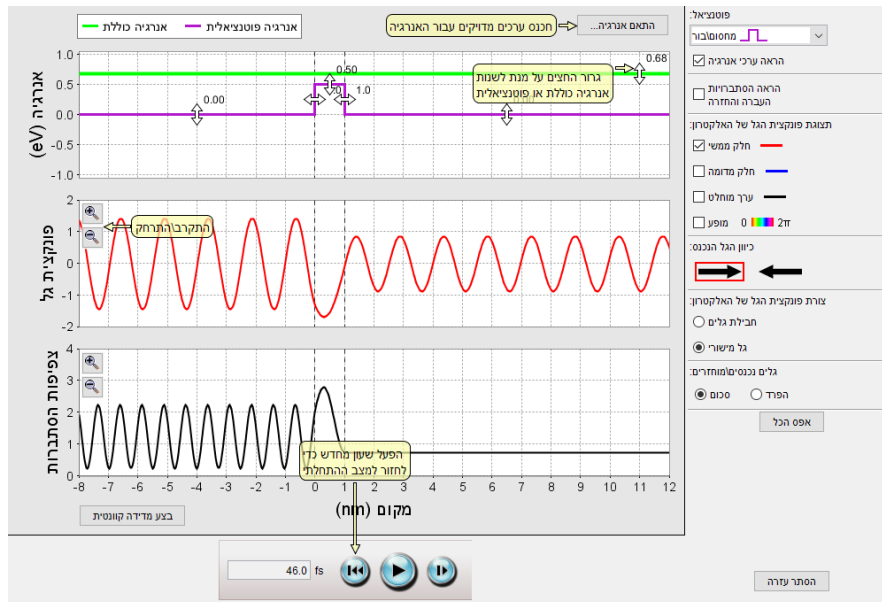
תוכן העניינים:

1. מבוא - הכרת ההדמיה ואופן העבודה54-55
2. א. חלקיק חופשי- פעילות תיאורטית.....56-57
2. ב. חלקיק חופשי – פעילות חקר.....58
3. א. חלקיק בפוטנציאל מדרגה ($E > V$) תיאורטי.....59-61
3. ב. חלקיק בפוטנציאל מדרגה ($E < V$) - חקר.....62-63
4. חלקיק בפונקציית מחסום/ בור פוטנציאל מלבני ($E > V$) – תיאורטי64-68
5. א. מנהור דרך מחסום פוטנציאל מלבני – תיאורטי.....69
5. ב. מנהור דרך מחסום פוטנציאל מלבני – חקר.....70-71



ב. הערות ודגשים

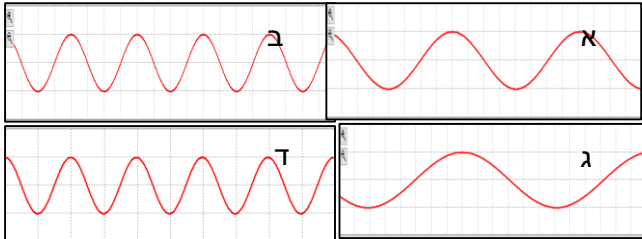
1. מומלץ לעבוד במצב של pause שהוא הגל ללא תלות בזמן כפי שמובא בחומר הקורס
2. הקורס אינו עוסק בחבילת גלים ולכן יש להשתמש רק בגל מישורי. (ניתן, כמובן, להשתמש באפשרות של הצגת חבילת גלים בהקשר של הבנת דיספרסיה)
3. ישנן שתי אפשרויות לשינוי ערכי האנרגיה – גרירה של הסמנים בגרף האנרגיה (המערכת) או באמצעות חלון "התאם אנרגיה". השתמש באפשרות השניה לשינויים עדינים ולצורך בקרה.
4. בחלון "התאם אנרגיה" יש ללחוץ על "החל" כדי לעדכן את חלון הגרפים. אין צורך לסגור את החלון בזמן העבודה.
5. בפעילויות של מדידות אורך יש להשתמש באמצעי תצוגה גדול ככל שניתן (מסך מחשב גדול, מקרן על מסך וכו')
6. בניית הגרפים המוזכרים בחלק זה יכולה להיות גם בשרטוט ידני ולא רק ב Excel
7. חלק זה ניתן למורה כדוגמה לסוגי פעילויות ושאלות לתכני הקורס ונושא הגלים זו הסיבה שהוא אינו ערוך בצורה של דפי עבודה.
8. דפי עבודה ועבודות מקוונות ניתן להוריד באתר הקורס.



2.א. חלקיק חופשי – פעילות תיאורטית

מהו אורך הגל של פונקציות הגל הבאות?

ומצא את ההפרש E-V כדי לקבל אותם.



- א. _____
 ב. _____
 ג. _____
 ד. _____

• אורך הגל של החלקיק מתייחס לאנרגיה והפוטנציאל:

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E-V)}} \quad (\text{א})$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-V)}} \quad (\text{ב})$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{2m(E-V)}}{h} \quad (\text{ג})$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{2m(E-V)}{h}} \quad (\text{ד})$$

• מסתו של חלקיק היא:

$$m = \frac{\hbar}{\lambda\sqrt{2m(E-V)}} \quad (\text{א})$$

$$m = \frac{\hbar^2}{\lambda^2\sqrt{2m(E-V)}} \quad (\text{ב})$$

$$m = \frac{\hbar^2}{\lambda^2 2m(E-V)} \quad (\text{ג})$$

$$m = \left(\frac{\hbar}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{2m(E-V)} \quad (\text{ד})$$

• מספר הגל של החלקיק מתייחס לאנרגיה והפוטנציאל

$$k = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E-V)}} \quad (\text{א})$$

$$k = \frac{h}{\sqrt{2m(E-V)}} \quad (\text{ב})$$

$$k = \frac{\sqrt{2m(E-V)}}{h} \quad (\text{ג})$$

$$k = \sqrt{\frac{2m(E-V)}{h}} \quad (\text{ד})$$

$$k = \frac{\sqrt{2m(E-V)}}{h} \quad (\text{ה})$$

$$k = \frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar} \quad (1)$$

• הקבוע של פלאנק הוא:

$$h = \lambda \sqrt{2m(E-V)} \quad (א)$$

$$h = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{2m(E-V)} \quad (ב)$$

$$h = \frac{\lambda}{\pi \sqrt{4m(E-V)}} \quad (ג)$$

$$h = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{m(E-V)} \quad (ד)$$

אם $E-V=2$ אורך הגל יהיה

$$0.86 \text{ nm} \quad (א)$$

$$0.88 \text{ nm} \quad (ב)$$

$$0.91 \text{ nm} \quad (ג)$$

$$0.93 \text{ nm} \quad (ד)$$

כש $V=-0.5\text{eV}$ מה צריכה להיות אנרגיית החלקיק כדי שאורך הגל יהיה 1?

$$1 \text{ eV} \quad (א)$$

$$1.2 \text{ eV} \quad (ב)$$

$$0.9 \text{ eV} \quad (ג)$$

$$0.7 \text{ eV} \quad (ד)$$

כשאנרגיית החלקיק $E=0.3\text{eV}$ מה צרי להיות הפוטנציאל כדי שאורך הגל יהיה 2?

$$-0.17 \text{ eV} \quad (א)$$

$$-0.19 \text{ eV} \quad (ב)$$

$$-0.2 \text{ eV} \quad (ג)$$

$$-0.21 \text{ eV} \quad (ד)$$

מה צריך להיות $E-V$ כדי שאורך הגל $\lambda=20 \text{ nm}$?

$$0.004 \text{ eV} \quad (א)$$

$$2 \times 10^{-5} \quad (ב)$$

$$0.04 \text{ eV} \quad (ג)$$

$$2 \times 10^{-3} \quad (ד)$$

2.ב. חלקיק חופשי – פעילות חקר

קבע: פוטנציאל קבוע. פונקציית גל: אמתי,

סמ: "הראה ערכי אנרגיה. תצוגת פונקציית גל של האלקטרון: חלק ממשי (ברירת מחדל)

סמ: צורת פונקציית גל של האלקטרון: "גל מישורי"

לחץ על הכפתור "התאם אנרגיה" או שנה את ערך קווי האנרגיה בעזרת גרירת החצים שעליהם בכיוון אנכי.

לחץ על כפתור ה pause

הפעילות

במערכת שבחרת (גל מישורי) שדה הפוטנציאל אחיד. קבע את האנרגיה הפוטנציאלית ל 0 ואנרגיה כוללת ממוצעת ל 0.8 eV ולחץ "החל".

בנתונים האלה מדוד על מסך המחשב (או, עדיף להקריין על מסך) בעזרת סרגל את אורך הגל בדיוק המירבי.
 $\lambda = \text{_____ nm}$

שנה את אנרגיית החלקיק (אנרגיה כוללת): $E=0.6$ מדוד את אורך הגל באמצעות סרגל. חזור על הפעולה עם $V=0.3eV$.

קבע את $E=-0.63$, $V=-1$ מדוד את אורך הגל. קבע את $E=-0.13$, $V=-0.5$ ומדוד את אורך הגל. המשך כך שהפרש $(E-V) = 0.47$ ומדוד כל פעם את אורך הגל.

מהי מסקנתך?

קבע את הפוטנציאל ל $-1 eV$. התחל מאנרגיית חלקיק ההתחלתי של $1eV$ ומדוד את אורך הגל ורשום את תוצאת המדידה בטבלה. המשך והורד את האנרגיה הכוללת הגל בקפיצות של $0.4 eV$ וחזור על המדידה.

סרטט בעזרת נתוני הטבלה ב Excel את הפונקציה $\lambda(T)$.

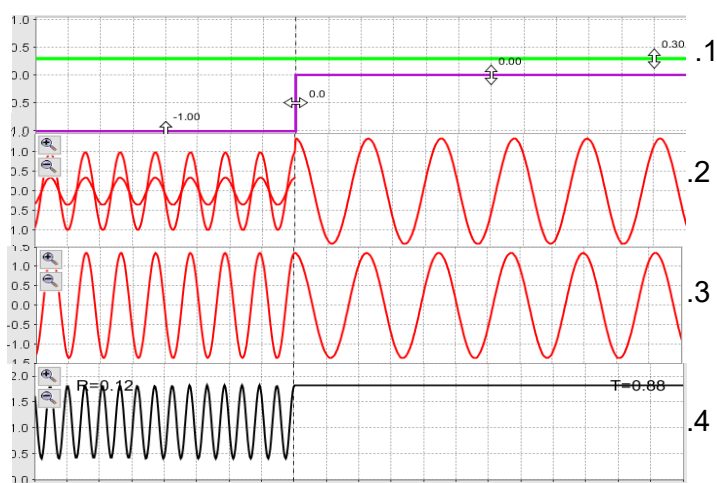
העבר את קו המגמה ובקש להציג משוואה.

עלפי המשוואה שקיבלת, חשב את מסת החלקיק.

• מהי זהות החלקיק?

3.א. חלקיק בפונקציית מדרגה ($E > V$) – תיאורטי

הסבר מה מייצג כל אחד מהגרפים הבאים:

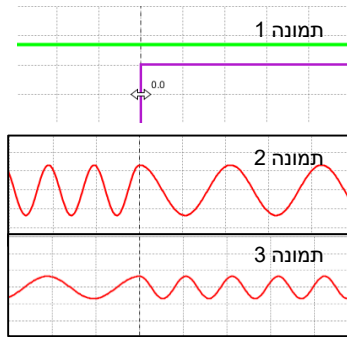


- באיזה אזור מהירות החלקיק גדולה יותר? נמק באמצעות נתוני הגרף.
- זהה את הקרן הפוגעת והקרן המוחזרת באזור 1.

ענה על השאלות הבאות בהסבר מילולי ובאמצעות נוסחאות הפרק:

- מדוע אורך גל פונקציית צפיפות ההסתברות פי 2 מאשר אורך גל של פונקציית הגל?
- למה צפיפות ההסתברות באזור 1 מחזורית?
- למה צפיפות ההסתברות באזור 2 קבועה?
- למה יש היפוך פאזה בין הקרן המוחזרת לנכנסת באזור המדרגה?
- מהו יחס המשרעות בין החלק שמוחזר לחלק שעובר r/t ? ולמה הוא קטן מ 1 במקרה זה?
- למה אין רציפות של הגל החוזר העובר והנכנס בנקודת הגבול?
- למה יש רציפות של הסופרפוזיציה שלהם?
- כיצד משרעת פונקציית הגל גדלה ככל שמקטינים את $E-V$? האם אין בכך סתירה לחוק שימור האנרגיה?
- איך יכול להיות שמשרעות הגלים זהות בשני הכיוונים?

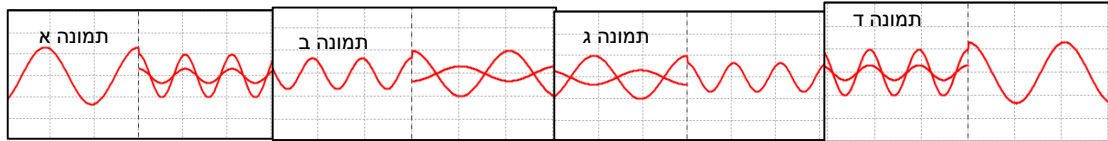
נתון חלקיק הנע משמאל לימין



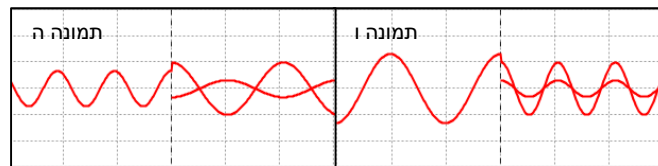
- מי משתי פונקציות הגל שבתמונה מתאימה ל

- תנאי שפה דורשים רציפות הפונקציה והנגזרת שלה בנקודת המעבר. האם רואים את דרישות תנאי השפה בתמונה 1 ו 2? הסבר

נתונים גרפים של גל פוגע המוחזר:



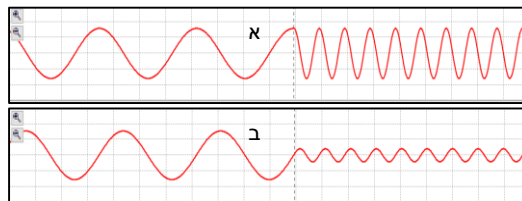
- מי מהפונקציות שבתמונות א-ד מתאים לחלקיק המתואר? נמק



בהתייחס לתמונות ה' ו ו':

- מה כיוון הגל הנכנס?
- איזו תמונה פונקציית הגל החוזר הפוכה במופעה מפונקציית הגל הפוגע?
- לאיזה פונקציית פוטנציאל שייכת כל תמונה? צייר אותה
- הראה שחיבור המשרעות של הגל החוזר והפוגע בנקודת המעבר שווה למשרעת באזור 2.
- על איזה עיקרון מבוססת הטענה האחרונה?
- תנאי שפה דורשים רציפות הפונקציה והנגזרת שלה בנקודת המעבר. האם רואים זאת בתמונות ה ו ו'? הסבר.

נתונות פונקציות גל של חלקיק באותה מערכת:

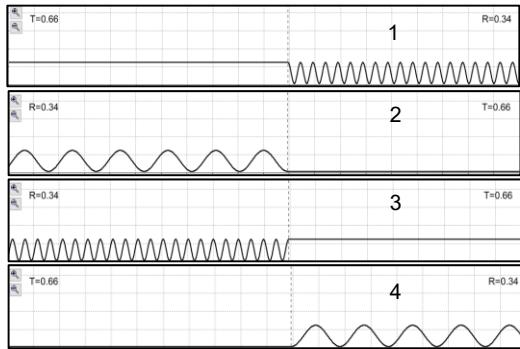


כיצד ניתן לבדוק שזו אותה המערכת?

מה ההבדל בין שתי הפונקציות?

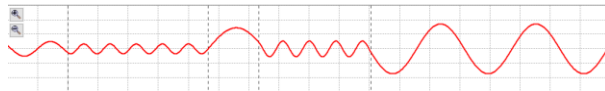
מאיזה כיוון מגיע החלקיק בכל אחת מהפונקציות?

שתי

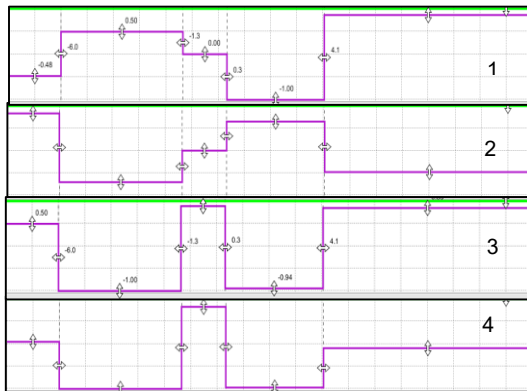


לאילו פונקציות צפיפות הסתברות 1-4 מתאימות פונקציות הגל הנ"ל? נמק!

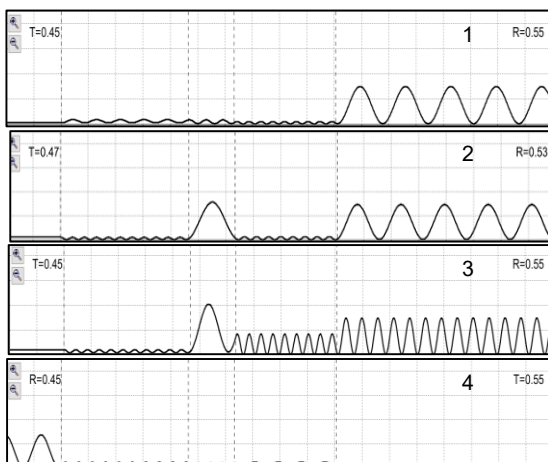
נתונה פונקצית הגל:



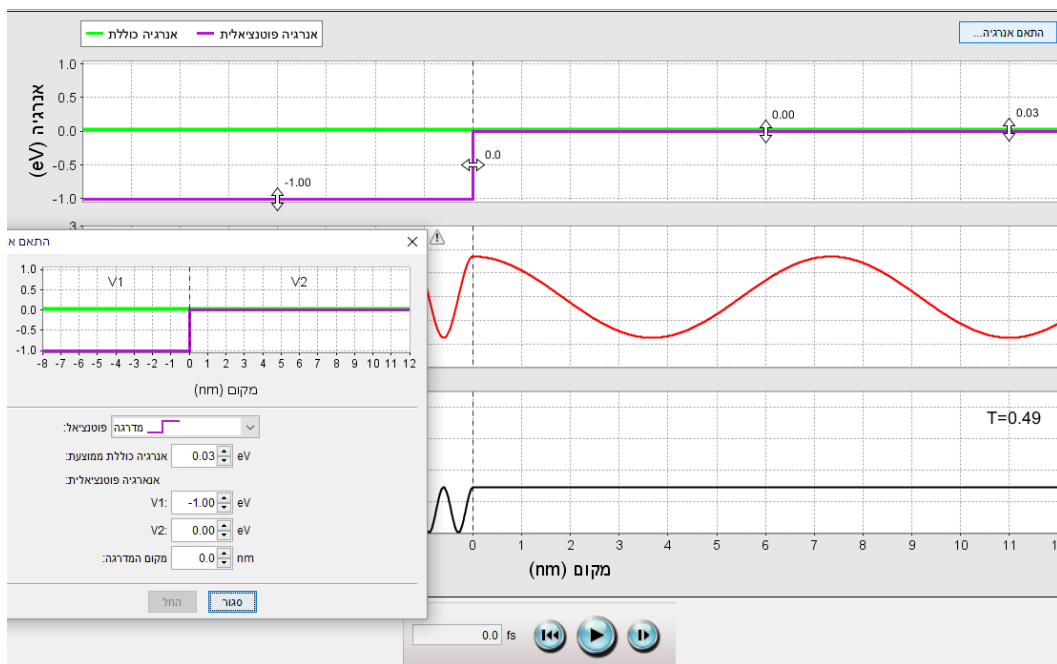
• לאיזה מערכת מ-1-4 היא שייכת? נמק!



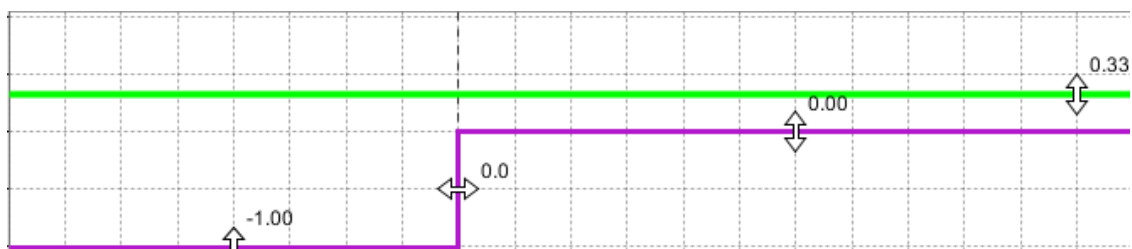
• לאיזו פונקצית הסתברות מ-1-4 היא שייכת? נמק!



4. חלקיק בפונקציית מדרגה ($E < V$) – פעילות חקר



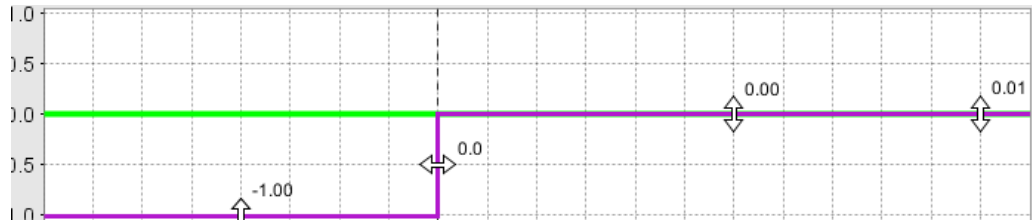
התחל מהמערכת המתוארת בציור



- מהו אורך הגל כש $E-V=0.3$? 0.1 _____ ? 0.2 _____
- מהו אורך הגל כש $E-V=0$? _____
- מה לדעתך יקרה אם $E-V < 0$?

הזכר באופטיקה שניתקלנו באותו מצב עם גודל הדמות כשהעצם התקרב לנקודת מוקד העדשה.

- מה קרה לדמות כשהעצם התקרב לכיוון העדשה לפני שהיה בנקודת הממוקד?
- מה קרה לדמות כשהעצם ניצב בנקודת המוקד?
- מה קרה לדמות כשהעצם עבר את נקודת המוקד לכיוון העדשה?
- האם לדעתך יש קשר בין שתי התופעות?

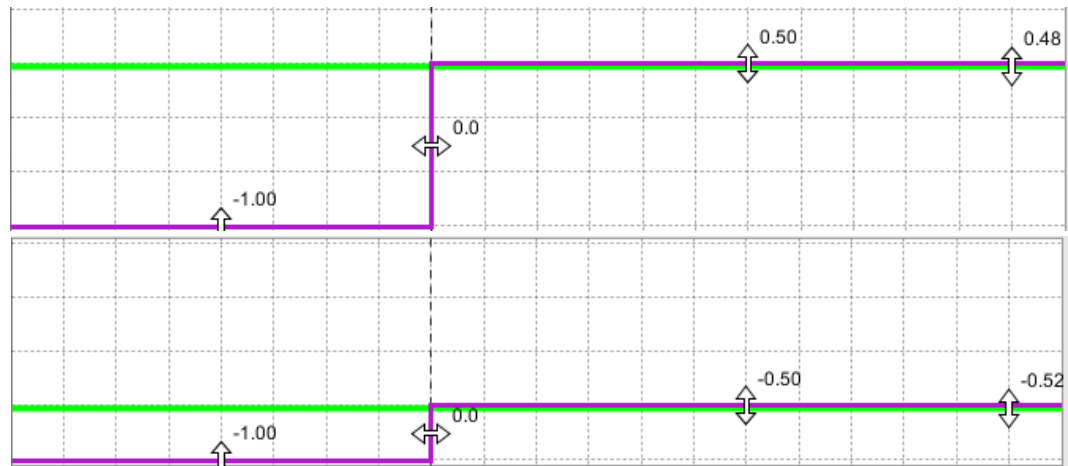


גרור את גרף האנרגיה לכיוון מטה. עבור את נקודת המנהור.

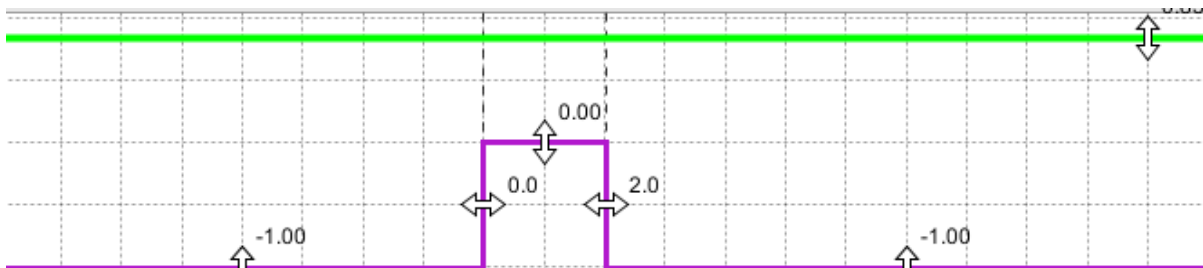
- תאר מה קרה לפאזה במעבר למצב של מנהור.

ממצב של מנהור $E=V$, צעד בצעדים של 0.01 eV ומדוד (בעזרת שנתות מ"מ של סרגל*) את מרחק הדעיכה.

- כמה צעדים הצלחת לעשות עד לדעיכה מוחלטת? מהי הבעייתיות בניסוי זה?
- העלה את הגרף באקסל והעבר קו מגמה אקספוננציאלי. האם הצלחת?
- האם יש הבדל בין מרחק הדעיכה בין שני המצבים הבאים? נמק והעזר בנוסחה בנימוקך.



5.א. חלקיק בפונקציית מחסום / בור פוטנציאל מלבני ($E > V$) – תיאורטי



- מה התנאי למינימום העברה במערכת הנ"ל?
- אם נשנה את רוחב המחסום האם ישתנו מספר המחזורים?
- באיזה רוחב יהיה מקסימום העברה הראשון בפוטנציאל ובאנרגיה שבתמונה הנ"ל?
- מהו המרחק בין כל מקסימום העברה בפוטנציאל ובאנרגיה שבתמונה הנ"ל?
- באיזה רוחב יהיה מינימום העברה הראשון בפוטנציאל ובאנרגיה במערכת הנ"ל?

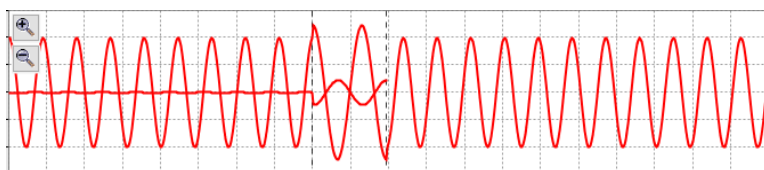
החזרה מלאה ממחסום פוטנציאל מלבני ($E > V$)

מהפוטנציאל הנ"ל גרור את קו האנרגיה מטה ומעלה. שים לב למחזוריות של מקסימום ומינימום.

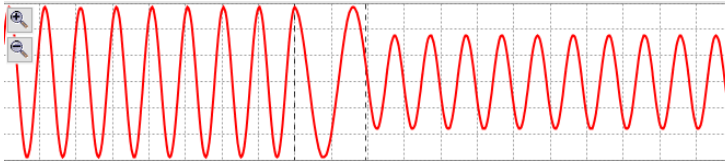
- ממה נובעת המחזוריות (הסבר והראה ביטוי)?

שים לב מה קורה במחסום כשהעברה $T=1$.

- מהו התנאי להתרחשותה?

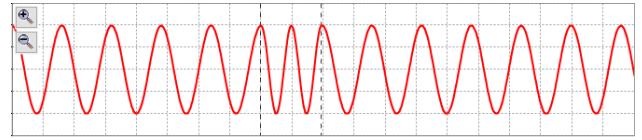
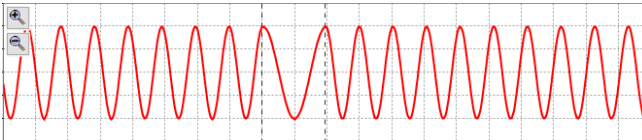
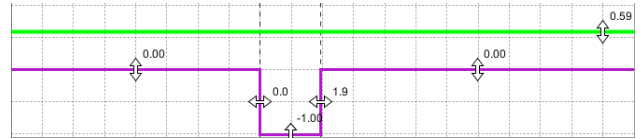
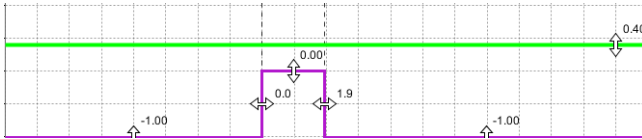


- מהו כיוון התנועה של החלקיק שבתמונה?
- מה יהיה ערכו של T בתמונה?
- באותו רוחב מחסום, באיזה אנרגיה חלקיק יהיה ערכו של T שוב באותו ערך?

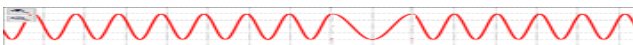


- מהו כיוון התנועה של החלקיק שבתמונה?
- האם העברה היא מינימלית או מקסימלית?
- כיצד יראה הגל החוזר בכל אחד מהאזורים?

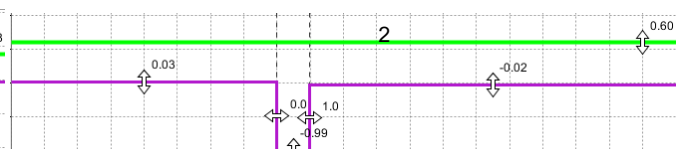
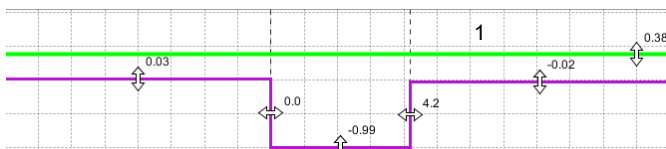
התבונן במערכות ובפונקציות הגל שבתמונה:



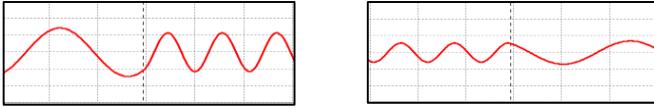
- איזו מערכת יוצר את הגל שבתמונה, חבר ביניהם בקו. נמק בחירתך
- האם ניתן לקבוע את כיוון הגל על סמך תמונות הגלים?
- האם הגלים יוצרים מינימום או מקסימום העברה?
- מי מבין הגלים מתאים למי מהמערכות? חבר בין התמונות בקו והסבר את שיקולך



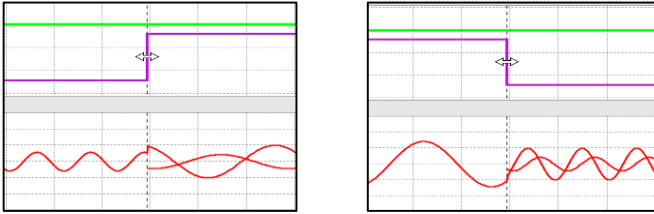
התאם לפונקציית הגל את המערכת. נמק



בתמונות 1, 2 נתונות פונקציות גל

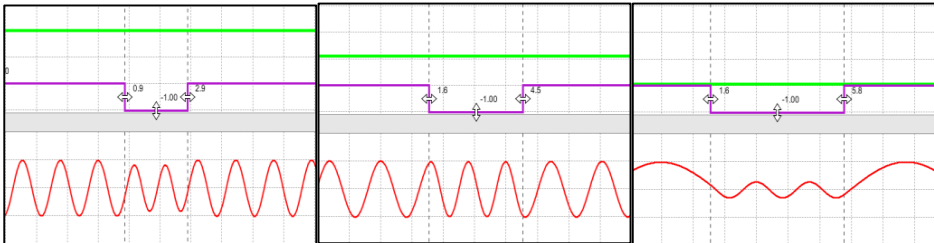


ואילו ב 3 ו 4 המערכות ורכיבי הגל הפוגע המוחזר והעובר



- האם החלקיק מגיע מאותו הכיוון? נמק
- התאם בין תמונה 1 ו 2 ל 3 ו 4.
- הסבר כיצד יתכן שמשרעות בשני האזורים שוות.
- כיצד יתכן שמקדם העברה של שני המצבים זהה? (שים לב למשרעת הגל הפוגע!)

התבוננו ב3 התמונות שלפנכם:



- מה משותף להן? (ת. 1. בור פוטנציאל, מספר הגלים בבור, העברה מקסימלית)
- מה שונה ביניהן? (ת. אנרגיית החלקיק E, רוחב הבור d)
- אם נתון שלכולם יש אותו מקדם העברה ופוטנציאל, מה הקשר בין רוחב המחסום d למרווח E-V ב T נתון?

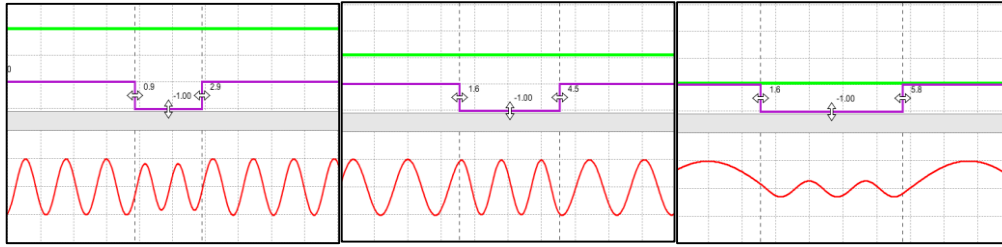
$$(\text{ת. } d \propto (E - V)^{-1} \text{ או } d \times (E - V) = \text{const.})$$

- איך רואים את הקשר שמצאתם ב. ב. בנוסחה? (ת. $T = \frac{1}{1 + \frac{V^2 \sin^2(\frac{\sqrt{2m(E-V)}d}{h})}{4E(E-V)}}$)

- מתי מתקבלת העברה מקסימלית בנוסחת העברה? (ת. כש $\frac{\sqrt{2m(E-V)}d}{h} = n\pi$)

- איך רואים שההחזרה מלאה (ת. מספר שלם של חצאי אורכי גל n) במחסום)

התבוננו ב3 התמונות שלפניכם:



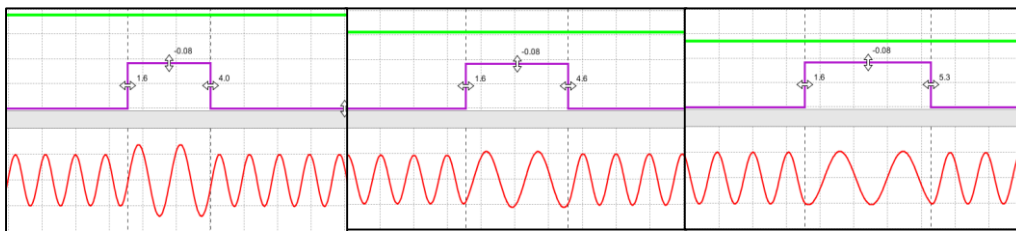
- מה משותף להן? (ת. 1. מחסום פוטנציאל, מספר הגלים בבור, העברה מקסימלית)
- מה שונה ביניהן? (ת. אנרגיית החלקיק E, רוחב הבור d)
- אם נתון שלכולם יש אותו מקדם העברה ופוטנציאל, מה הקשר בין רוחב המחסום d למרווח E-V ב T נתון?

(ת. $d \times (E - V) = cont.$ או $d \propto (E - V)^{-1}$)

איך רואים את הקשר שמצאתם ב.ב. בנוסחה? (ת. $T = \frac{1}{1 + \frac{V^2 \sin^2(\frac{\sqrt{2m(E-V)}d}{h})}{4E(E-V)}}$)

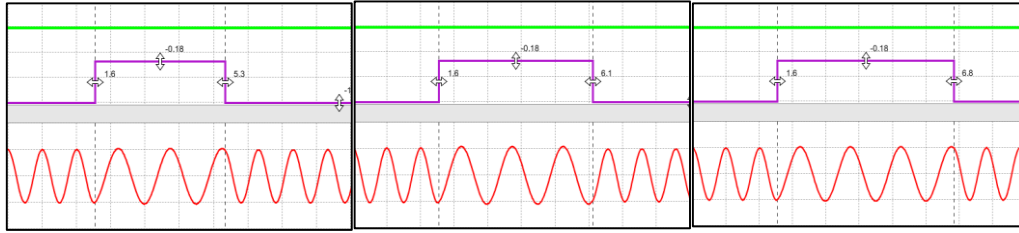
- מתי מתקבלת העברה מקסימלית בנוסחת העברה? (ת. כש $\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{h} d = n\pi$)
- איך רואים שההחזרה מלאה (ת. מספר שלם של חצאי אורכי גל (n) במחסום)

התבוננו ב3 התמונות שלפניכם:



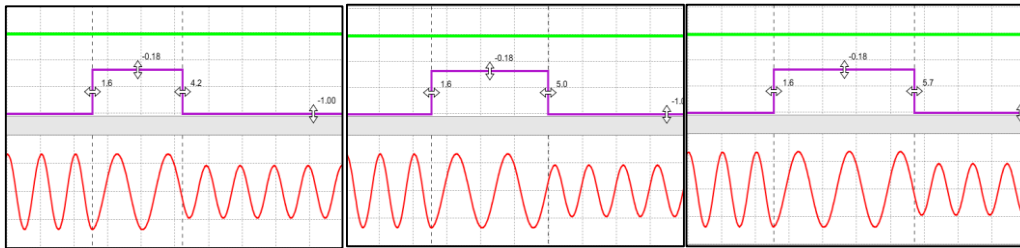
- מה משותף להן? (ת. 1. מחסום פוטנציאל, E-V, העברה מקסימלית)
- מה שונה ביניהן? (ת. מספר חצאי הגלים, רוחב הבור d)
- איך רואים את הקשר שמצאתם ב.ב. בנוסחה? (ת. $T = \frac{1}{1 + \frac{V^2 \sin^2(\frac{\sqrt{2m(E-V)}d}{h})}{4E(E-V)}}$)
- מתי מתקבלת העברה מקסימלית בנוסחת העברה? (ת. כש $d = n \frac{\pi h}{\sqrt{2m(E-V)}}$)
- איך רואים שההחזרה מלאה (ת. מספר שלם של חצאי אורכי גל (n) במחסום).

התבוננו ב3 התמונות שלפניכם:



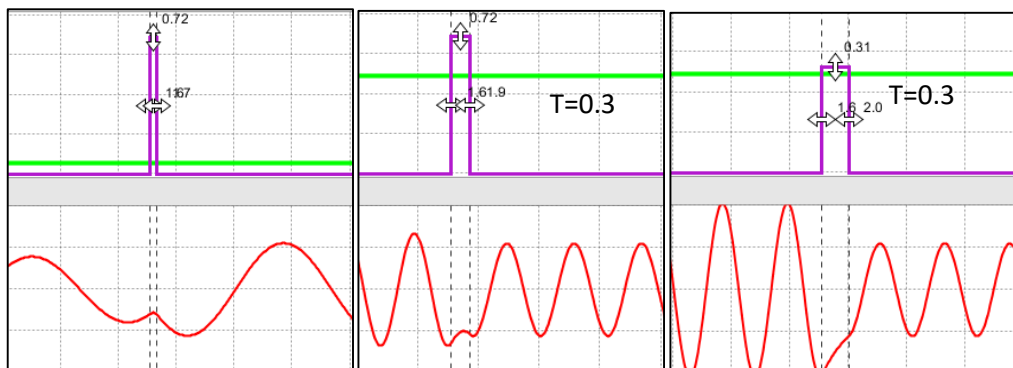
- מה משותף להן? (ת. 1. מחסום פוטנציאל, E-V, העברה מקסימלית)
- מה שונה ביניהן? (ת. מספר חצאי הגלים, רוחב הבור d)
- איך רואים את הקשר שמצאתם ב.ב. בנוסחה? (ת. $T = \frac{1}{v^2 \sin^2(\frac{\sqrt{2m(E-V)}d}{h}) + \frac{4E(E-V)}{1}}$)
- מתי מתקבלת העברה מקסימלית בנוסחת העברה? (ת. $d = n \frac{\pi h}{\sqrt{2m(E-V)}}$)
- איך רואים שההחזרה מלאה (ת. מספר שלם של חצאי אורכי גל (n) במחסום).

התבוננו ב3 תמונות המערכות שלפניכם:



- מה משותף להן? (ת. 1. מחסום פוטנציאל, E-V, מינימום העברה)
- מה שונה ביניהן? (ת. מספר חצאי הגלים, רוחב הבור d)
- איך רואים את הקשר שמצאתם ב.ב. בנוסחה? (ת. $T = \frac{1}{v^2 \sin^2(\frac{\sqrt{2m(E-V)}d}{h}) + \frac{4E(E-V)}{1}}$)
- מתי מתקבלת העברה מינימלית בנוסחת העברה? (ת. $d = \frac{2n+1}{2} \frac{\pi h}{\sqrt{2m(E-V)}}$)
- איך רואים שההחזרה מינימלית? (ת. הפרש של $\frac{\pi}{2}$ בין פאזת הגלים בקצוות המחסום)

5.א. מנהור דרך מחסום פוטנציאל מלבני – תיאורטי

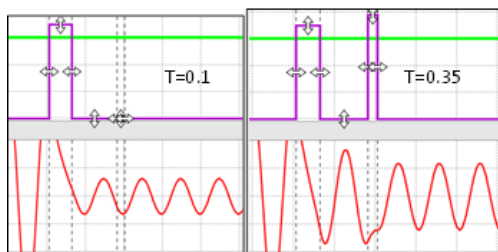


ובגרף $\sinh(x)$ והסבר את

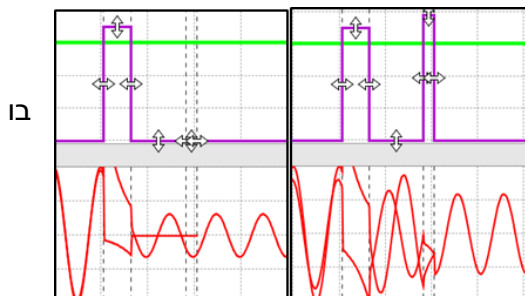
• התבונן בביטוי העברה $T = \frac{1}{1 + \frac{V^2}{4E(V-E)} \sinh^2\left(\frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}d\right)}$

הגרפים הנ"ל

- (ת. אם $(V - E)$ או d גדלים הפונקציה מתבדרת וגורמת למכנה לגדול מהר מאוד)
- עלפי ביטוי ההעברה למי מהגורמים $(V - E)$ או d השפעה גדולה יותר על העברה?
(ת. לרוחב המחסום, היות הוא גדל מהר יותר מ $\sqrt{(V - E)}$).



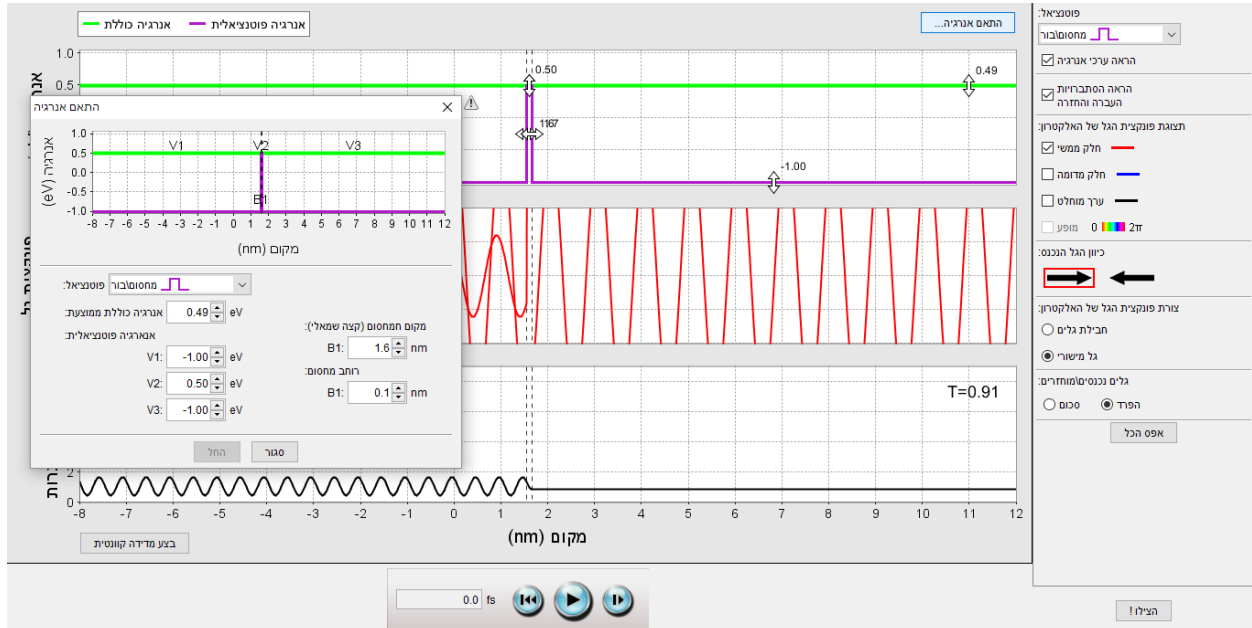
- מחסום הפוטנציאל בתמונה השמאלית מעביר 10% ($T=0.1$) אם מוסיפים לו מחסום נוסף ניתן להגדיל את ההעברה (בתמונה הימנית ההעברה גדלה ל-35%) הסבירו כיצד זה יתכן?



- (ת. ההסבר המתמטי מורכב וצריך לפתח את הביטוי ל-2 מחסומים. ניתן לראות שהגלים החוזרים מהמחסום השני גורמים להתאבכות בונה באזור שביניהם, שמגדילה את משרעת הגל ויש התאבכות הורסת במחסום השני (לכן יש עליה). תמונה מורכבת שנוכל לראות את מרכיביה מתמונות הגלים העוברים והמוחזרים (ראו תמונות))

פעילות ב: מציאת $T(d)$

עבוד עם תיבת "התאם אנרגיה"



1. קבע את $(V-E)$ קטן ככל שניתן ושנה את רוחב המחסום בקפיצות בדידות ואסוף נתונים של $T(d)$. שרטט את הגרף $T(V-E)$ ב excel ונסה להתאים לו פונקציית אקספוננט.
2. בדוק את הנתונים בעזרת נוסחת העברה של מחסום הפוטנציאל $(T = \frac{1}{1 + \frac{V^2}{4E(V-E)} \sinh^2(\frac{\sqrt{2m(V-E)}d}{h})})$ ב excel לפי הנתונים והטבלה.