"תוכנית רוטשילד-ויצמן למצוינות בהוראת המדעים"
במימונה של קרן קיסריה אדמונד בנימין דה רוטשילד

עבודת גמר

לוגריתמים, מלוחות לפונקציות

מגיש : אורן אלוש

מנחים : ד"ר זהבי נורית, ד"ר גיורא מן

תאריך הגשה : אוקטובר , 20, 2013

אישור המנחה:

תוכן עניינים

מבוא

עבודה זו מכילה בראשיתה את הרקע ההיסטורי להמצאת הפונקציה הלוגריתמית. ההתפתחות במקצועות המדע השימושי בתקופת הרנסנס הביאה איתה דרישה להתפתחות בשיטות חישוב מהירות ומדוייקות יותר. המצאת הלוגריתמים ע"י- ג'והן נפייר- (John Napier , 1550-1617) בתחילת המאה ה-17, הייתה בהחלט תרומה מרחיקת לכת בתחום השימושי והן בתחום המדעי. האפשרות לביצוע חישובים מורכבים הובילה להתפתחויות במדעים, ובמתמטיקה עצמה הופיעו מושגים ורעיונות חדשים.

חלקה הראשון של העבודה מציג את התפתחות מושג הלוגריתם – מראשית המצאתו ע"י נפייר, עבור בהמצאת הלוחות הלוגריתמיים (אשר עד לשנות השבעים המאוחרות של המאה שחלפה עדיין נעשה בהם שימוש בבחינות הבגרות בארץ), ובפיתוח הלוגריתמים לכדי הגדרתם המוכרת כיום ע"י הנרי בריגס, וכלה בשימוש בלוגריתמים לפיתוח מודלים בפיסיקה.

חלקה השני של העבודה מציג שלוש דרכים שונות להצגת הפונקציה הלוגריתמית ,דרך ראשונה כפונקציה הפוכה לפונקציה מעריכית ,דרך שניה כפונקציה המקיימת אקסיומות של מערכת L ודרך שלישית בשיטת אנליזה נומרית.

בנספחי העבודה ישנו פרק שסוקר מספר גישות הוראה מספרי לימוד לאורך ההיסטוריה של לימודי התיכון בארץ בנושא הלוגריתמים והשימוש בלוחות לוגריתמים , בו אנסה להראות כי ניכר הבדל לא מבוטל בין הספרים – הספר הראשון משנות ה–50 ועד לספרי לימוד בני ימינו. בעוד שבספרים הישנים, הדגש היה בעיקר על שימוש בלוחות, ותרגול הנוסחאות כנתון ולא הוכחה, הרי שבמרוצת השנים, עת התבטל הצורך בלוחות הלוגריתמים, המוקד היה הבנה אמיתית של התאוריה והצגת ההוכחות למשפטים בדרך סדורה, צעד אחר צעד. כמו כן אסקור את השינוי שחל בנושא הלוחות הלוגריתמיים והשימוש בחוקי הלוגריתמיים לאורך הבגרויות השונות.

עוד ניתן למצוא בנספחים מספר דרכים ליישום הפונקציה הלוגריתמית בפיסיקה וכן קשר היסטורי מפתיע ללוחות הלוגריתמים בו אני משתמש כמורה כפתיח ויצירת עניין בשיעור הראשון ללוגריתמים.

הופעת הלוגריתמים - רקע היסטורי

בהשפעת הרנסנס במחצית השנייה של המאה ה-16 חלה התעוררות בתחומי המדע השימושי כגון אסטרונומיה, הנדסה וספנות, מקצועות אשר נדרשים בהם חישובים נומריים מדוייקים. ההתפתחות במקצועות אלו הציגה דרישות גוברות והולכות למתמטיקאים, לפתח שיטות חישוב מהירות ומדויקות יותר מבעבר. כתוצאה מכך הגיעו הטכניקות החישוביות לשיאים חדשים.

המצאת הלוגריתמים על ידי - ג'והן נפייר - (John Napier , 1550-1617) בתחילת המאה ה- 17, הייתה בהחלט דבר בעיתו, שכן בעזרת לוגריתמים נעשות פעולות מסובכות על ידי חישובים פשוטים. הלוגריתמים התקבלו בהתלהבות והתפשטו עד מהרה בקרב המתמטיקאים ואנשי מדעי הטבע.
להמצאה זו הייתה תרומה מרחיקת לכת גם בתחום השימושי וגם בתחום העיוני. האפשרות לביצוע חישובים מורכבים הובילה להתפתחויות במדעים. במתמטיקה עצמה הופיעו מושגים ורעיונות חדשים.

במשך כמה מאות שנים היה לוח הלוגריתמים, או סרגל החישוב הלוגריתמי, ציוד קבוע ושימושי בילקוטם של תלמידים ומדענים, דורות רבים חישבו ופתרו אין ספור תרגילים בעזרתם. כיום, יש לרבים גישה למחשב או לפחות למחשב כיס. השימוש בהם לביצוע חישובים מסובכים, הוא קל ויעיל ומבטל למעשה את הצורך בלוח לוגריתמים או סרגל החישוב.

ג'והן נפייר נולד בסקוטלנד למשפחה סקוטית ידועה ומכובדת. הוא חונך בביתו עד גיל 13 ואז נשלח לאוניברסיטה, תחילה בסקוטלנד ולאחר מכן בצרפת. במהלך לימודיו גילה עניין באריתמטיקה ובתאולוגיה. כעבור שנים אחדות, חזר לסקוטלנד שהייתה נתונה אז בויכוחים פוליטיים ומלחמות דת חריפות, בהן נטל נפייר חלק במרץ רב. בין מאבקיו הפוליטיים והדתיים עסק נפיר בלימודי מתמטיקה ומדע, ואחת התוצאות של עיסוקיו הייתה המצאת הלוגריתמים.

בין כתביו מופיעה הטבלה הבאה [1]:

VII	VI	V	IV	III	II	I	
128	64	32	16	8	4	2	1

איור 1 : מכתביו של נפייר

נפיר התפעל מטבלה זו והסתכל עליה כעל כלי משחק חדש. הבנתו העמוקה את ההתאמה שבין שתי סדרות מקבילות אלו, שאחת היא אריתמטית והשנייה גיאומטרית, היא שדחפה אותו לחפש שיטה **להחליף תרגילי כפל בתרגילי חיבור**.

עבודתו של נפייר[2]

נקודת המוצא של נפיר הייתה התאמה בין סדרה גיאומטרית וסדרה אריתמטית. סדרות אלו היו ידועות עוד לפני זמנו של נפיר, אך כלים לרישום חזקות לא היו ידועים עדיין ורק מאוחר יותר טבע דקרט (Descartes) את הסימון a^n .

לנפייר לא היו הכלים האלגבריים של חזקות ומעריכים והוא נזקק לאינטרפטציה דינמית גיאומטרית על מנת להגדיר את הלוגריתמים .

אם נקודה a נעה במהירות קבועה על קרן bi , אזי היא עוברת בפרקי זמן שווים קטעי דרך שווים והמרחקים b-1, b-2, b-3 וכו' מהווים סידרה אריתמטית עולה.

TS הוא קטע שאורכו כאורך הרדיוס ונקודה g יוצאת מ T ונעה עליו כך שבפרקי זמן שווים היא עוברת תחילה מרחק T-1 שהוא (למשל) $\frac{1}{10}$ של TS ואחר כך מרחק 1-2 שהוא $\frac{1}{10}$ של המרחק 1-S ואחר כך מרחק 2-3 שהוא $\frac{1}{10}$ של המרחק S -2 וכו' . בצורה כזאת המהירות של g בכל נקודה פרופורציונית למרחק שעוד נותר לה לעבור והיא יורדת לפי סידרה גיאומטרית.

נקודה g יוצאת מ T במהירות היורדת לפי סדרה גיאומטרית. באותו זמן יוצאת מ b נקודה a באותה מהירות שבה יצאה g ונעה במהירות קבועה. כאשר g מגיעה ל d , a מגיעה ל c.

לפי הגדרה זו הלוגריתמוס של TS (שאורכו כאורך הרדיוס) שווה לאפס וככל שהמספר ds (הסינוס) קטן הלוגריתמוס שלו גדל. עוד ניתן לומר כי הלוגריתמוס של ds שהוא אורך הקטע bc חסום מלמטה על ידי האורך Td , שכן מהירותה של g הולכת ופוחתת. בהנחה שמהירותה של g הולכת ופוחתת בהתקרבה ל T משמאל, באותו היחס שבו היא יורדת בהמשך הדרך, ניתן לחסום מלמעלה את bc על ידי הערך $\frac{TS}{ds}\cdot TD$.

לגבי רביעיה a,b,c,d שאיבריה הם איברי סדרה גיאומטרית מתקיים : ad = bc ; לגבי הלוגריתמים שהם איברי סדרה אריתמטית מתקיים log a + log d = log b + log c ובהינתן שלושה מהם אפשר למצוא את הרביעי.

ההגדרה שנתן נפיר הביעה בעצם משוואה דיפרנציאלית והוא הציע לה פתרון שלם.

בעזרת חשבון דיפרנציאלי, שלא היה ידוע לנפייר, ניתן לראות כי :

$$Nap\log y = 10^7 \log_{\frac{1}{e}}(\frac{g}{10^7})$$

אורכו של TS הוא כאורך הרדיוס, $TS=10^7$. נניח כי המהירות ההתחלתית של הנקודות g ו – a היא גם 10^7.

נסמן :

$$y=dS$$
$$x=bc$$
$$Td=10^7-y$$

לגבי המהירות של g מתקיים : $-\frac{dy}{dt}=y$ ומכאן : $-\frac{dy}{y}=dt$.

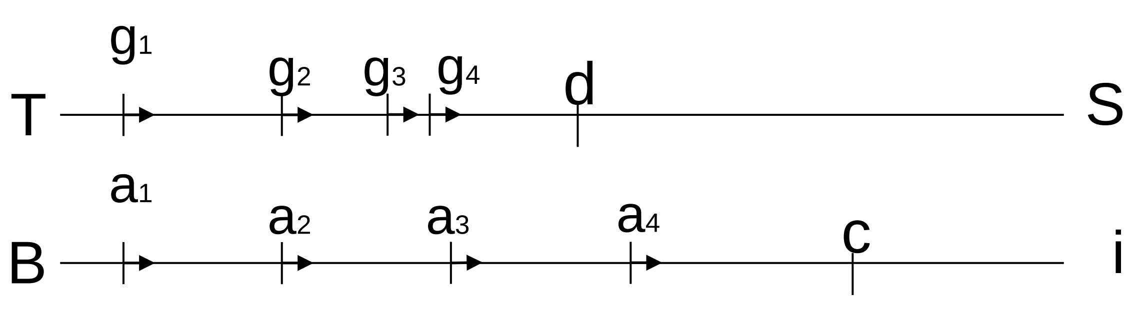
ע"י אינטגרציה נקבל כי : $\ln y=-t+k$.

נמצא את קבוע האינטגרציה k ע"י שנציב t=0 ונקבל : $\ln 10^7=0+k\Rightarrow k=\ln 10^7$

לכן, $\ln y=-t+\ln 10^7$ והמהירות של a היא $\frac{dx}{dt}=10^7$

ע"י אינטגרציה נקבל כי : $x=10^7t$.

$$Nap\log y=x=10^7t=10^7(\ln 10^7-\ln y)=10^7\ln(\frac{10^7}{y})=10\log_{\frac{1}{e}}(\frac{y}{10^7})$$



איור 2 : האינטרפטציה הדינמית של נפייר

עבודתו של הנרי בריגס

המצאת הלוגריתמים עוררה עניין רב באנגליה, ובמיוחד התעניין בכך הנרי בריגס (Henry Briggs 1561-1630), פרופסור לגיאומטריה בלונדון. בפגישתם הראשונה (בשנת 1616) אמר בריגס לנפיר :*" באתי בדרך ארוכה כדי ללמוד מנין צמחה הגאוניות שהביאה להמצאת הלוגריתמים, עכשיו בראותי אותך, תמה אנוכי מדוע איש לא חשב על כך מקודם, הרי כאשר זה ידוע – זה בעצם כל כך פשוט"*[3].

בין בריגס ונפייר נוצרה ידידות עמוקה והם החלו לעסוק בצוותא בשיפור הטבלאות. עבודתם המשותפת לא ארכה זמן רב, כי בשנת 1617 נפטר נפייר.

הלוגריתמים העשרוניים

בנספח ל **Constructio**, הציע נפייר לבנות לוגריתמים "מסוג טוב יותר" , כלומר כאלו שעבורם הלוגריתמוס של 1 יהיה אפס. הוא בחר בתור לוגריתמוס של 10 את המספר 10^{10} והצביע על דרך לקבל טבלאות לוגריתמים בעזרת חישובים מסובכים מאוד של הוצאת שורשים ומציאת ממוצעים.

כמו כן הוא מציין בנספח כי כאשר הלוגריתמוס של 1 שווה לאפס מתקבלות תכונות מיוחדות של הלוגריתמים למשל, לוגריתמוס של מכפלה שווה לסכום הלוגריתמוס של הגורמים.

בעקבות ביקורו של בריגס אצל נפיר החליטו שניהם לעבוד על "הסוג הטוב יותר" של הלוגריתמים ובחרו את הלוגריתמים של 10 בתור 1 וכך נולדו הלוגריתמים הבריגיים שהם בעצם הלוגריתמים העשרוניים של היום .

הלוגריתמים העשרוניים מתאימים במיוחד, כאשר סופרים בשיטה העשרונית.

אחרי מותו של נפייר, המשיך בריגס במרץ רב בחיבור הטבלאות. ב 1624 הוא פרסם את : ***Arithmetica Logarithmia*** המכיל לוגריתמים עשרוניים בדיוק של 14 מקומות, של המספרים מ 1 עד 20000 וכן מ 90000 עד 100000 . את הפער שבין 20000 ו 90000 השלים ההולנדי אדריאן וולק (Adrian Vlacq , 1600-1666) ולמרות שעבודתו הייתה רבה מאוד הוא הצטנע וקרא לטבלאות שלו מהדורה שנייה של ספר הטבלאות של בריגס.

דרכים שונות להצגת הפונקציה הלוגריתמית

נפייר פיתח שיטה נוחה ומהירה להמרת פעולות כפל סבוכות בפעולות חיבור פשוטות , אך המתמטיקה התקדמה לה ונוצר צורך הכרחי לפתרון בעיות פיסיקליות להן משוואות שהמתמטיקה עדיין לא נתנה פתרון. דוגמאות לבעיות כאלו הן בעיות התפרקויות רדיואקיטביות ,זמן מחצית חיים , חוק הקירור של ניוטון, תיארוך עי פחמן , התרבות ודיכוי חיידקים , בעיות שעל חלקם ניתן לראות פירוט בחלק הנספחים המתאים. הבעיה המתמטית בבעיות אלו הייתה מהו הפתרון של משוואה דיפרנציאלית מן הצורה :

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

נחליף אגפים ונאנטגרל ונקבל את המשוואה :

$$\int \frac{1}{x} dx = \int -kdt$$

כלומר הבעיה האמיתית שעמדה בפניהם הייתה :

$$\int \frac{1}{x} dx = ???$$

וזו הייתה בעיה רצינית בתקופה זו.

אוכל לייצג הבעיה בצורה שונה, אם נשתמש בכלל הגזירה הידוע : $(x^n)` = nx^{n-1}, n \neq 0$ כדי למלא טבלה ובה משתנה בחזקה מסוימת , נקבל לפתע חור בטבלה :

$\int y`$	**y`**
X^3	$3X^2$
X^2	$2X$
X^1	$1 \cdot X^0$
???	X^{-1}
X^{-1}	$-1 \cdot X^{-2}$
X^{-2}	$-2 \cdot X^{-3}$
X^{-3}	$-3 \cdot X^{-4}$

איור 3 : החור שיצרה המשוואה הדיפרנציאלית

אם כן מי היא הפונקציה הקדומה לפונקציה X^{-1} ? הרי לפי המשפט היסודי של החדוא קיימת לה פונקציה קדומה.

קיימות מספר דרכים שונות להגיע אל הפונקציה הלוגריתמית:

אציג שלוש דרכים , כאשר על השתיים הראשונות מבוססת ההוראה בביה"ס בימינו , הראשונה מבוססת על העובדה כי הפונקציה הלוגריתמית הפוכה לפונקציה המעריכית והשנייה , הפחות נפוצה ,פונקציה הלוגריתמית כפונקציה מבוססת על אקסיומות של מערכת L .

דרך נוספת שארה היא דרך מאוד שכיחה כתבנית של אינטגרציה נומרית - שיערוך ערך האינטגרל ע"י שיטת סימפסון.

<u>דרך ראשונה : הפונקציה הלוגריתמית כפונקציה הפוכה לפונקציה המעריכית :</u>

כיום , היות ועומדים לרשותינו כלים נפלאים לחישוב , נוכל להכניס בכל מחשבון סימבולי את הביטוי

$$\int \frac{1}{x} dx = ???$$

ולקבל למרבה הפלא את התוצאה הבאה : $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$

ואם נגזור את התוצאה שקיבלנו נקבל חזרה את הפונקציה $\frac{1}{x}$,כלומר $\ln(x)$ היא הפונקציה הקדומה של $\frac{1}{x}$.

כעת נוכל לחקור את הפונקציה החדשה ע"י המחשבון הסימבולי שברשותינו:

נגלה ע"י חישוב הביטוי : $\ln(e^x) = x$ כי $\ln(x)$ היא פונקציה הפוכה לפונקציה e^x .

אם כך הפונציות הלוגריתמיות הפוכות לפונקציות המעריכיות – על עיקרון זה בנויה תוכנית הלימודים בימינו.

עוד נוכל לגלות ע"י המחשבון כי ניתן לעבור ממכפלה לסכום – התגלית של נפייר , כלומר : $\ln(e^x \cdot e^y) = x + y$.

ניתן להוכיח זאת , גם מבלי להשתמש במחשבון ע"י שימוש בעובדה כי הפוהפונציות הלוגריתמיות הפוכות לפונקציות המעריכיות בצורה הבאה : $\ln(e^x \cdot e^y) = \ln(e^{x+y}) = x + y$.

תכונה נוספת אותה מקיימת הפונקציה היא : $\ln(e) = 1$

<u>דרך שניה : הפונקציה הלוגריתמית כפונקציה מבוססת על אקסיומות של מערכת L[4] :</u>

נגדיר פונקציה בעלת תכונות כפל כפונקציה המקיימת התכונות הבאות :

א. לכל x ו – y (שבתחום) $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$

ב. $f(x)$ היא פונקציה מונוטונית .

ג. כל המספרים הגדולים מ – 0 נמצאים בתחום של $f(x)$

ד. $f_a(a) = 1$

כבר רואים כי התכונה הראשונה והרביעית מתאימות לתכונות אותן מצאנו בדרך הראשונה.

בעזרת משפט עזר א: $f_a(1)=0$, משפט עזר ב : לכל N שלם, $f_a(a^N)=N$, משפט עזר ג'. אם N שלם (חיובי או שלילי) ו – m טבעי אז $f_a(a^{\frac{N}{m}})=\frac{N}{m}$, משפט עזר ד'. בין כל שני מספרים שונים נמצא לפחות מספר רציונאלי אחד.ו - משפט 7. לכל x ממשי $f_a(a^x)=x$

נוכל להגיע למסקנה כי : $\ln(e^x)=x$, והרי שכעת יש לנו גם את התכונה הרביעית של דרך ראשונה.

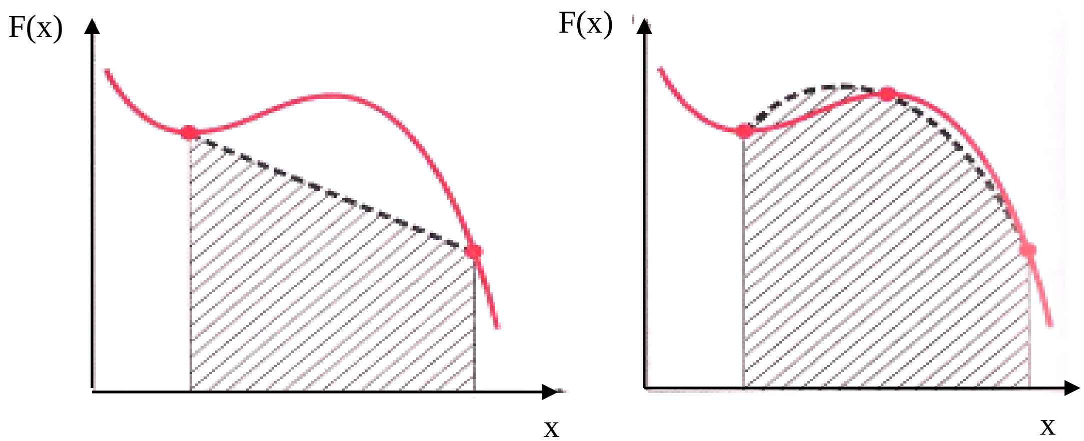
ומכך גם נובע כי הלוגריתמית והמעריכית הפוכות.

(הוכחת ופירוט המשפטים ניתן לראות בנספח : הלוגריתמים בספרי הלימוד)

דרך שלישית – אנליזה נומרית – שיטת סימפסון (גרפית וחישובית)[5]:

זו שיטה מאוד שכיחה וידועה באינטגרציה נומרית שמבוססת על אסטרטגיית החלפת פונקציה מסובכת או חסרת מידע בפונקציה מקורבת שניתנת לאינטגרציה בקלות רבה יותר כלומר :

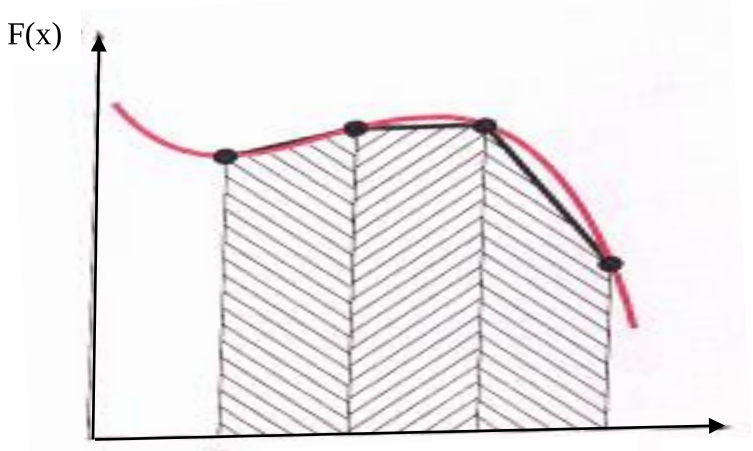
$I=\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx$ כאשר $fn(x)=a_o+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ כאשר n הוא מעלת הפולינום (ראו הציור הבא :).



איור 4 : שיערוך האינטגרל שמתחת לפונקציה קווית ושל פרבולה

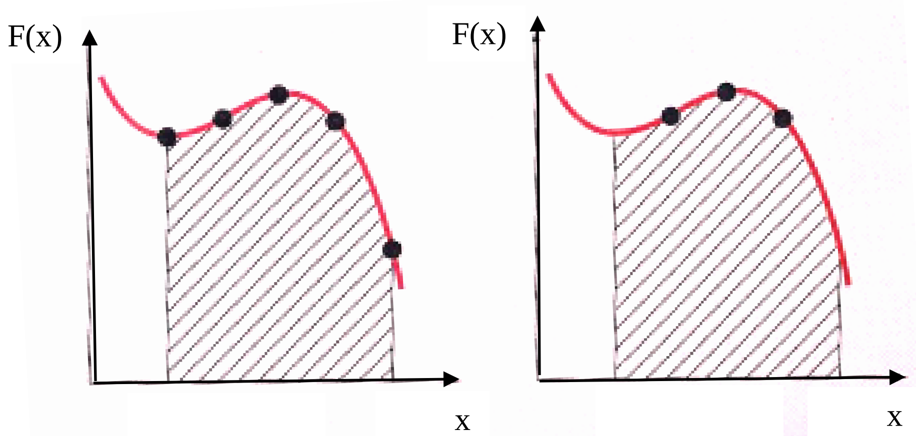
האינטגרל יכול גם להיות מוערך ע"י סדרה של פולינומים שמיושמים בקטעים שונים לאורך הפונקציה אותה מעריכים לאורך סגמנטים קבועים.

לדוגמא , בציור הבא , שלושה סגמנטים ישרים משמשים להעריך את האינטגרל. פולינום מסדר גבוה יכול לשמש לאותה המטרה.



איור 5 : שיערוך אינטגרל ע"י חלוקה לשלושה מקטעים

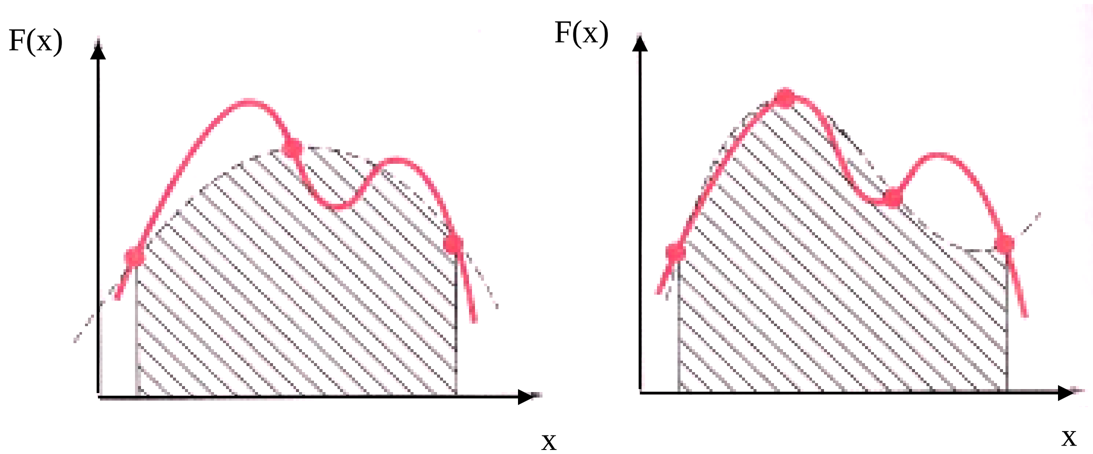
קיימות גישות פתוחות וסגורות לנוסחאות ניוטון-כוטס (NEWTON-COTES) . הגישות הסגורות משמשות כאשר נקודות ההתחלה והסוף של גבולות האינטגרל ידועים והגישות הסגורות כאשר הגבולות מחוץ לנקודות הנתונות ואז מפעילים אקסטרפולציות.



איור 6 : ההבדל בין שיטה סגורה לשיטה פתוחה

כעת אציג שיטה סגורה להעריך אינטגרל – שיטת סימפסון , באמצעותה אעריך בתחום מסוים את האינטגרל $\int \frac{1}{x} dx$, אצייר את הפונקציה המתקבלת ואבדוק מידת ההתאמה לפונקציה הקדומה $\ln(x)$

שיטת סימפסון היא שיטה להעריך אינטגרל של פונקציה על ידי פולינום מדרגה גבוהה שיחבר את הנקודות של גרף הפונקציה. לדוגמא , אם ישנה נקודה נוספת בין $f(a)$ ל - $f(b)$, שלושת הנקודות ניתנות לחיבור ע"י פרבולה. אם ישנן 2 נקודות במרקחים שווים בין $f(a)$ ל - $f(b)$, ארבעת הנקודות ניתנות לחיבור ע"י פולינום ממעלה שלישית . הנוסחאות שמתקבלות ע"י לקיחת האינטגרל תחת פולינומים אלו נקראות נוסחאות סימפסון.



איור 7 : שימוש בשיטת סימפסון עבור 3 נקודות ועבור 4 נקודות.

<u>שיטת ה $\frac{1}{3}$ של סימפסון :</u>

שיטה זו מתקבלת כאשר משתמשים בפולינום מסדר שני להערכת אינטגרל הפונקציה כך :

$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_2(x)dx$. אם נסמן את a ו b ע"י x_0, x_2 בהתאמה ו - $f_2(x)$ מיוצג ע"י פולינום לגראנג' מסדר שני , האינטגרל נהיה :

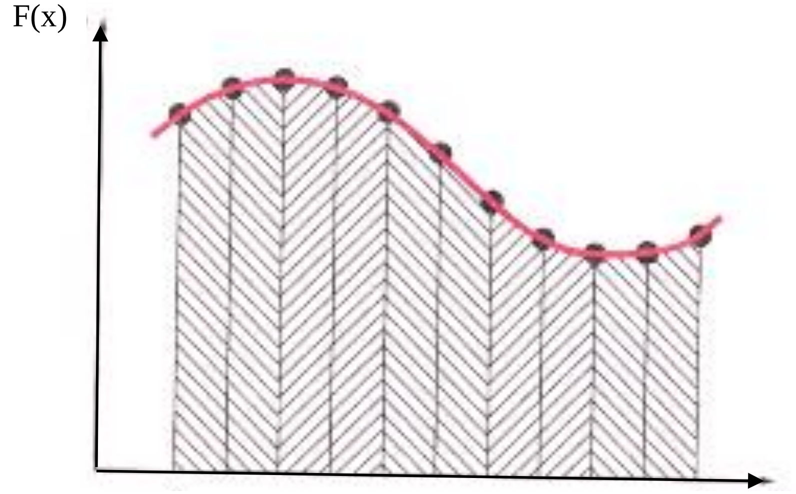
$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx$$

לאחר אינטגרציה ומניפולציות אלגבריות נקבל את הנוסחא הבאה :

$I \cong \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \right]$, כאשר במקרה זה $h = \frac{(b-a)}{2}$.

נוסחא זו ידועה בתור שיטת ה <u>$\frac{1}{3}$ של סימפסון</u> . הסימון $\frac{1}{3}$ בא מן העובדה ש h מחולק ב 3 במשוואה.

ניתן לרשום נוסחא זו גם כך : $I \cong (b-a)\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}$ כאשר $(b-a)$ מייצג את הרוחב והביטוי $\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}$ מייצג את הגובה הממוצע.



איור 8 : שימוש בשיטת סימפסון- חלוקה למקטעים שווים.

ניתן להראות שלמקטע בודד בשיטת השליש של סימפסון ישנה שגיאת שארית של :

$E_t = -\dfrac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$, כאשר ξ שוכב בתוך האינטרוול $[a,b]$, כך שמתקבלת שגיאה מאוד נמוכה

לכל מקטע , יחסית למטרה שלשמה אני מציג שיטה זו – להעריך את גרף הפונקציה $\ln(x)$.

ניתן לשפר את שיטה השליש של סימפסון ע"י חלוקת האיטנטרוולים ל - n מקטעים בעלי רוחב שונה ,

כלומר $h = \dfrac{(b-a)}{n}$, כך שנוכל להציג האינטגרל כעת , כך :

$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$, חיבור שיטת השליש של סימפסון עבור כל אחד

מהאינטגרלית תניב התוצאה הבאה :

$$I \cong 2h\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6} + 2h\frac{f(x_3)+4f(x_3)+f(x_4)}{6} + \ldots + 2h\frac{f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)}{6}$$

ובצורה מצומצמת ע"י הנוסחא :

$$I \cong (b-a)\frac{f(x_0)+4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$, בעלת שגיאה של : $E_a = -\dfrac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$

כאשר $\bar{f}$ הוא ממוצע הנגזרת הרביעית של האינטגרל.

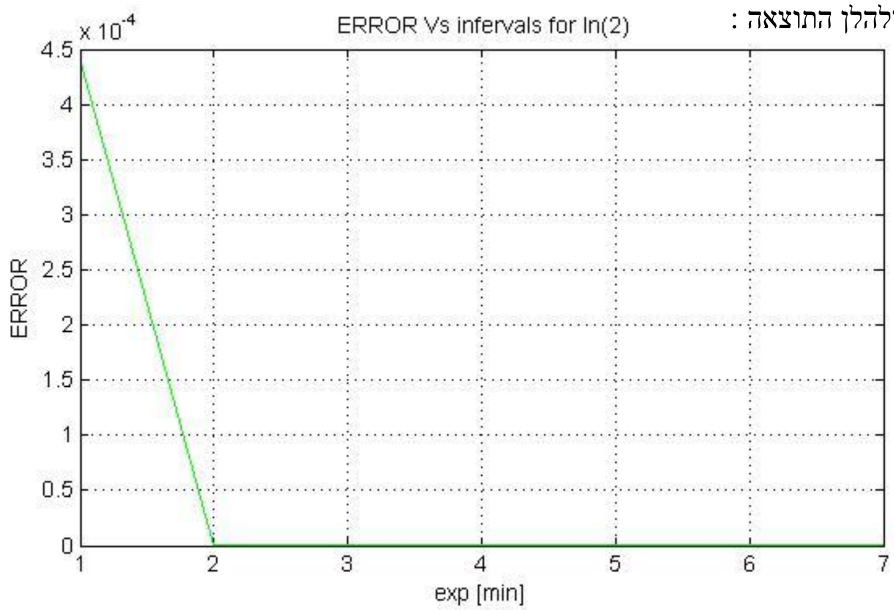
אשתמש בנוסחא זו כדי להעריך את פונקציית הלוגריתמים, אשווה בין גרף הפונקציה המתקבל לגרף הפונקציה של $\ln(x)$ ואציג את השפעת גודל חלוקת האינטרוולים על הדיוק בחישוב.

התוכנה בה השתמשתי היא MATLAB, קוד התוכנה נמצא בנספח.

השפעת גודל חלוקת האינטרוולים ומציאת החלוקה האופטימלית:

את גודל חלוקת האינטרוולים מייצגת האות n, כאשר $10^1 \le n \le 10^7$.

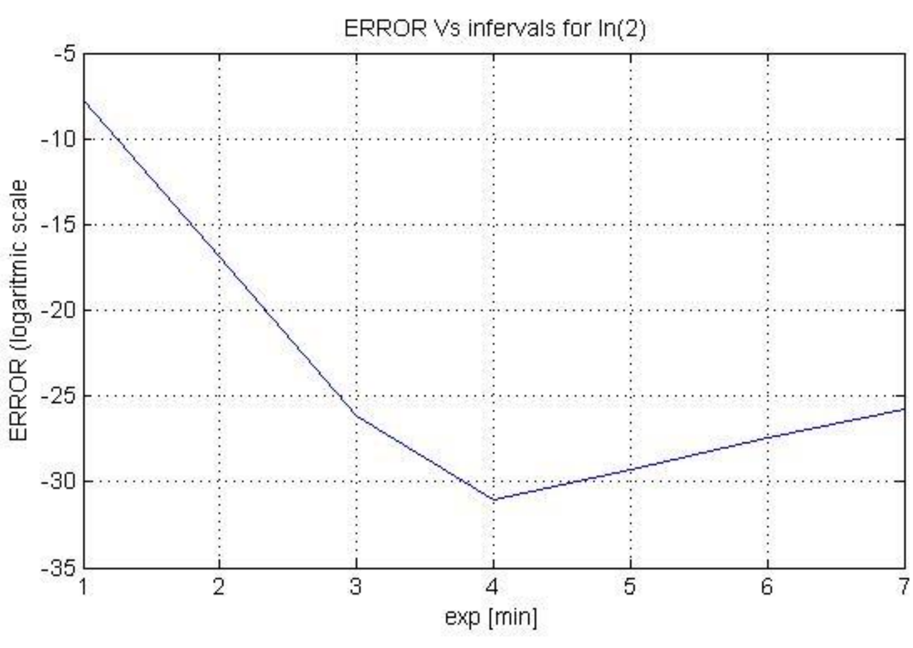
השתמשתי בנוסחא להעריך את $\ln(2)$ וחישבתי את השגיאה היחסית בין שיטת הערכה לערך האמיתי , עבור $\ln(2)$ ולהלן התוצאה :



איור 9 : שגיאת יחסית בין ההערכה לגודל האמיתי עבור $Ln(2)$.

רואים כי השגיאה, כבר בחלוקה הראשונה של האינטרוול ב 10 , מאוד קטנה : 4.5×10^{-4} ואילו חלוקות החל מ $n \ge 10^2$ מניבים שגיאה קרובה מאוד לאפס.

כדי לחקור יותר כיצד מתנהגת השגיאה ב חלוקת אנטרוולים גדולה יותר אמיר את סקלת השגיאה לסקלה לוגריתמית ונקבל הגרף הבא :



איור 10 : שגיאת יחסית בין ההערכה לגודל האמיתי עבור $Ln(2)$, ציר לוגריתמי

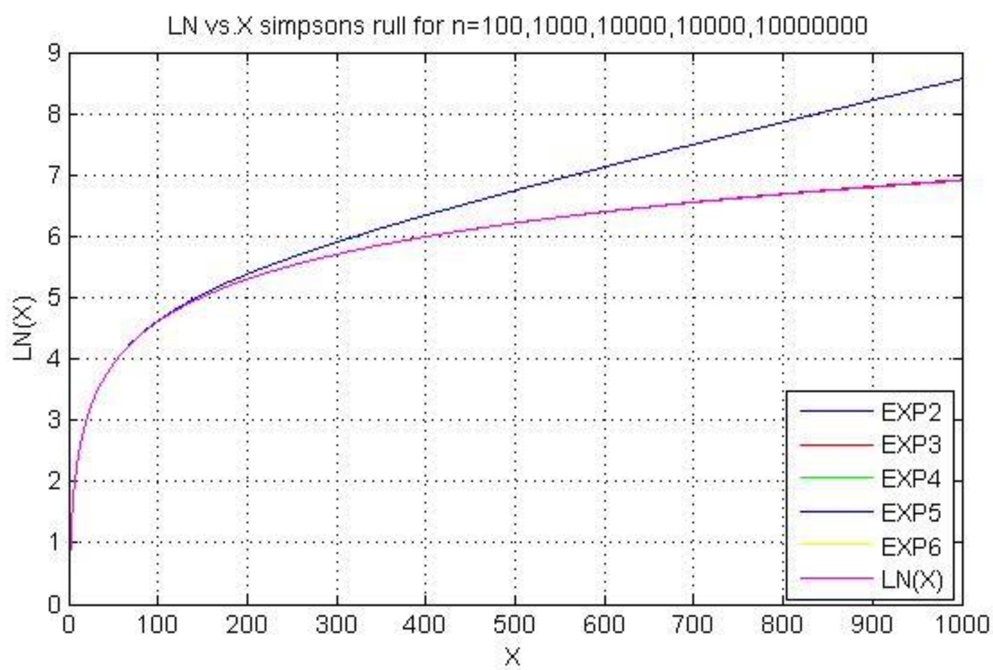
רואים מן הגרף בבירור כי עבור חלוקת אינטרוולים של $n=10^4$ מקבלים את השגיאה הנמוכה ביותר , שגיאה של כ 10^{-30}בין ההערכה לפונקציה האמיתית.

עבור חלוקת אינטרוולים קטנה או גדולה יותר, השגיאה גדלה, נראה מאוד מעניין לחקור בעתיד מדוע עבור חלוקת אינטרוולים גדולה יותר השגיאה גדולה.

השוואה בין שיטת ההערכה לפונקציה $\ln(x)$ עבור $1 \le x \le 1000$עבור מספר חלוקות אינטרוולים שונות:

אשתמש בשיטת הערכה כדי לחשב ערך הפונקציה במספר נקודות , אצייר את הגרף המתקבל ואשווה גרפית לגרף הפונקציה $\ln(x)$.

להלן התוצאה :



איור 11 : השוואה בין הערכת הפונקציה בחלוקות שונות לפונקציה המקורית

ניתן לראות כי עבור חלוקות גבוהות מ 100 , ההבדל בין הגרפים זניח.

עבור חלוקה של 100 , החל מ $\ln(150)$ השגיאה בולטת לעין עבור חלוקה של 100 . גם עבור שאר החלוקות ישנן נקודות שבהן השגיאה בולטת לעין.

ניכר הדמיון לפונקציה המקורית וכעת יש לנו פתרון נוסף לאינטגרל הלא ידוע.

סיכום

מושג הלוגריתם עבר כמה גלגולים מהגדרת הלוגריתמים הבריגיים עד למושג הפונקציה הלוגריתמית.
בהתאם להתפתחות המדעית והטכנולוגית בעשורים האחרונים חלו גם שינויים בהוראת נושא הלוגריתמים. מנוסחא סתומה שניתנה לתלמידים ללא הוכחות, וכל אשר נדרש מהם היה לתרגל את השימוש בה ובלוחות הלוגריתמיים – להבנה מעמיקה של התאוריה , המשפטים והוכחותיהם, והסברת התועלת הנובעת מהשימוש בפונקציה זו – המרת פעולות כפל סבוכות בפעולות חיבור פשוטות.
ישנן מספר דרכים להציגת נושא הלוגרתמים , משרד החינוך בונה את תוכנית הלימודים כך שהנושא נלמד לאחר פונקציות מעריכיות ומתבסס על העובדה כי הפונקציה הלוגריתמית הפוכה לפונקציה המעריכית , בעבודה הבאתי מספר דרכים שונות נוספות – אחת , שהופיעה בעבר בתוכנית הלימודים – הפונקציה הלוגריתמית כפונקציה המקיימת מערכת L והשנייה , דרך לא טרויאלית באנליזה נומרית.
ישנן עוד מספר דרכים שונות ללימוד הפונקציה הלוגריתמית ולגישה שונה שתחשוף התלמידים לצד אחר של המתמטיקה, דרכים שלפי דעתי כדאי לנסות.

נספחים

1. ספרי הלימוד ובחינת הבגרות במתמטיקה

הלוגריתמים בבגרויות

בפרק זה אסקור את הבעיות שלפתרונן נחוץ ידע בלוגריתמים בבחינות הבגרות ואראה כי מגמת משרד החינוך השתנתה מקצה לקצה – בתחילה , יותר שאלות של טכניקה ושימוש בלוחות לוגריתמים וכיום , פחות טכניקה אך כן עידוד לידיעת החוקים הבסיסיים של הלוגריתמים.

עד לשנים 1979 , עדיין נעשה שימוש בלוחות לוגריתמיים שנלמדו בביה"ס.

עדויות לכך ניתן למצוא בבגרויות הבאות שם צוין כי אין להשתמש בלוחות לוגריתמים , כלומר הם היו עדיין בשימוש :

<u>מתוך בחינת אוקטובר 1976 :</u>

א. *עבור אילו ערכים של X קטנים ערכי הפונקציה :* $y=\log_{x-3}(x-1)$ *מ –* 2 ?

ב. *חשב, בלי להיעזר **בלוחות** , את הערך של :* $4^{\frac{1}{\log_5 2}}$

<u>מתוך בחינת ינואר 1979 :</u>

א. קבע עבור אילו ערכים של X גרף הפונקציה : $y=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-8x)+2$ *אינו נמצא מתחת לציר ה –* X.

*ב. קבע,בלי להיעזר **בלוחות לוגריתמים** , האם השבר :* $\dfrac{\log_3 5-\log_5 3}{\log_{0.3} 4-\log_{0.3} 3}$ *הוא חיובי או שלילי. נמק תשובתך.*

<u>מתוך בחינת יוני 1979 :</u>

א. *מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה :* $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(4x^2-5x+1)}$

ב. *חשב, בלי להיעזר **בלוחות** , את הערך של X אם:* $x=7^{1-\log_7 2}$

לאחר 1979 לא ניתן עוד למצוא איזכור למילה לוחות , כנראה בעקבות נרחבות השימוש במחשבוני כיס שניטרלו כליל את הצורך בלוחות וסרגלי לוגריתמים.

החל משנת 1980 ועד היום, ישנה מגמה של הסתכלות יותר גרפית בנושא הלוגריתמים, פחות חישובים , יותר מחשבה וניתוח.

להלן מספר דוגמאות מהבגרויות של זמננו :

<u>חורף תשס"ט :007 שאלה 4 סעיף א</u>

פתור את המשוואה $2\ln 2+(1+\frac{1}{2x})\ln 3=\ln(3^{\frac{1}{x}}+27)$

<u>פתרון :</u>

*לצורך פתרון תרגיל זה חייבים להכיר את חוקי הלוגריתמים ושיטות הטכניקה לפתרון.

טיפול באגף שמאל :

ראשית נשתמש בחוקי הלוגריתמיים לכפל : $2\ln 2+(1+\frac{1}{2x})\ln 3=\ln 2^2+\ln 3^{(1+\frac{1}{2x})}$

כעת נשתמש במעבר מחיבור לכפל : $\ln 2^2+\ln 3^{(1+\frac{1}{2x})}=\ln(2^2\cdot 3^{(1+\frac{1}{2x})})$

ומכאן ההמשך כבר טרוויאלי :

$$\ln(2^2\cdot 3^{(1+\frac{1}{2x})})=\ln(3^{\frac{1}{x}}+27)$$

$$4\cdot 3^1\cdot(3^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{x}}+27$$

$$t^2=3^{\frac{1}{x}},t=3^{(\frac{1}{x})\frac{1}{2}}$$

$$t^2-12t+27=0\to t_{1,2}=6\pm 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{1}{x}}=(6\pm 3^{\frac{3}{2}})^2$$

$$\ln 3^{\frac{1}{x}}=\ln(6\pm 3^{\frac{3}{2}})^2\to\frac{1}{x}=\frac{2\ln(6\pm 3^{\frac{3}{2}})}{\ln 3}$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\ln 3}{2\ln(6\pm 3^{\frac{3}{2}})}$$

בשנים האחרונות נראה כי משרד החינוך אינו מחייב בטכניקת הפתרון לפי חוקי הלוגריתמים אלא מזמין ומעודד להבנה ושימוש בחוקים.

כדי להמחיש את מהות העידוד לשימוש בחוקי לוגריתמים אביא דוגמא מהבגרויות האחרונות ואפתור אותה בשתי דרכים – בשימוש חוקי לוגריתמים וללא שימוש בהם.

חורף תשס"ט :007 שאלה 5

א. נתונה הפונקציה $f(x) = ln\frac{1-x}{1+x}$

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה f(x)

(2) הראה כי לפונקציה f(x) אין נק' קיצון.

ב. נתונה גם הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$

(1) מצא את השיעורים של נק' הקיצון של הפונקציה g(x) וקבע את סוגה.

(2) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה g(x)

ג. חשב את השטח ברביע הרביעי המוגבל על ידי הישר y=2x-1 , על ידי הישר x=1/2 ועל ידי גרף הפונקציה g(x).

פתרון ע"י שימוש בחוקי לוגריתמים של חיסור-חילוק:

$$f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x} = \ln(1-x) - \ln(1+x)$$

$$f`(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-1-x-1+x}{1-x^2} = \frac{2}{x^2-1}$$

וללא שימוש בחוקים אלו:

$$f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$$

$$f`(x) = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-1\cdot(1+x) - 1\cdot(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{-2}{1+x} = \frac{2}{x^2-1}$$

הפתרון לפי חוקי הלוגריתמים יותר פשוט ואלגנטי, ללא ה"הסתבכות" עם גזירה של מנה.

הלוגריתמים בספרי הלימוד

את ההשוואה ההיסטורית בין ספרי הלימוד (הישראלים) בנושא הלוגריתמים חילקתי לשלושה סוגים – סוג ראשון – סדר הופעת הנושאים – האם הלוגריתמים מופיעים בספר הלימוד לאחר או לפני החזקות , סוג שני – הצגת הלוגריתמים – כמעט בכל הספרים מוצגות הנוסחאות של הפונקציה הלוגריתמית ואין הוכחות מלאות לנוסחאות למעט ספר אחד ולבסוף – השוואה בבעיות המילוליות המוצגות בכל ספר.

מבחינת סדר הופעת הנושאים , כל הספרים כתובים לפי אותה המתכונת – הלוגריתמים נלמדים כפונקציה הפוכה לפונקציה המעריכית ולכן נלמדים קודם נושאי החזקות והשורשים ורק לאחר מכן הלוגריתמים . הלוגריתם מוצג בספרים כפעולת החשבון השביעית –"להעלאה בחזקה יש פעולה הפוכה נוספת – **פעולת הלוג ריתמוס.** פעולת הלוג ריתמוס היא פעולת חשבון שבה יש למצוא לפי חזקה ובסיסה את מעריכה "[14].

בשלושה ספרים החל משנות ה – 50 ועד שנות ה – 70 .(עמוס ארליך,ש. מהרשק, דניאל שמיר) מוקדשים פרקים שלמים ל**טכניקה** מייגעת בשימוש הנוסחאות , ולשימוש בלוחות הלוגריתמים.

בספרים העכשווים (בני גורן, האוניברסיטה העברית) תרגילי הטכניקות הצטמצמו להם , התרגול בשימוש בלוחות לוגריתמים נעלם כלא היה והמתודה השולטת היא **הצגת נוסחאות** הלוגריתמים ו**תרגול** בהתאם לנוסחאות.

רק אחד מהספרים שנסקרו, משנות ה 60 (עמוס ארליך) , נבדל מהשאר, בכך שהגדיר ראשית את הלוגריתמים כמערכת בעלת תכונות מיוחדות, ולכל נוסחא בו ניתנה הוכחה שלמה ומפורטת. אביא כאן את הכתוב בספר.

המחבר פתח כך את פרק הלוגריתמים :*"הפונקציות בעלות התכונות L מתארות תופעות טבע מעניינות ...בין השאר נראה כיצד פונקציה כזאת מסייעת בביצוע מהיר של חישובים חשבוניים מרכבים...עובדה היסטורית היא שהפונקציות הנידונות נתגלו (ע"י הסקוטי Jhon Napier , בראשית המאה ה-17) לצורך הקלת חישובים אסטרונומיים מסובכים".* המחבר מוסיף ואומר בצורה מפורשת :*"התועלת החשבונית של הפונקציות האלה נובעת בעיקרה מתכונתן הבאה :* $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$ *- תכונת הכפל".* [עמוס ארליך עמ 475]

בשאר הספרים שסקרתי, הוצגה תכונת הכפל כנוסחא , והנה מופיע ספר אחד בו ישנה אמירה שמכוונת לתועלת מכוחו של הכלי המתמטי החדש.

המחבר מציג את הפונקציה בעלת תכונת הכפל כפונקציה בעלת תכונות פשוטות נוספות :

ה. לכל x ו – y (שבתחום) $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$

ו. $f(x)$ היא פונקציה מונוטונית .

ז. כל המספרים הגדולים מ – 0 נמצאים בתחום של $f(x)$

ח. $f_a(a)=1$

הפרמטר a נקרא בסיס. כל מספר המוצב במקום הפרמטר a נקרא אף הוא בסיס.

הגדרות/תכונות אלו לא מופיעות בשאר הספרים.

המשפטים אותם מציג המחבר וההוכחה שלהם :

משפט עזר א: $f_a(1)=0$

הוכחה :

$$f_a(1)+f_a(a)=f_a(1\cdot a)=f_a(a)$$
$$\Downarrow$$
$$f_a(1)=f_a(a)-f_a(a)=0$$

בשאר הספרים מופיע משפט עזר זה **כאקסיומה** או כערכים מיוחדים.

להלן עוד מספר משפטים שההוכחה להם מובאת רק ב ספר של ארליך :

משפט 1. הבסיס a חייב להיות שונה מ – 1.

הוכחה: $f_a(1)=0$ ואילו $f_a(a)=1$.

משפט 2. הבסיס a אינו יכול להיות שלילי.

הוכחה: ההוכחה תהיה בדרך השלילה. נניח כי a שלילי ונסמן $b=-a$, ואז b חיובי.

$$2=f_a(a)+f_a(a)=f_a(a^2)=f_a(b^2)=f_a(b)+f_a(b)$$

לכן

$$f_a(a)=f_a(b)$$

בעזרת המונוטוניות נובע מכאן כי לכל x שבין a ו – b , $f_a(x)=1$. אם b>1 אז a<1<b ולכן $f_a(1)=1$ בניגוד למשפט העזר. אם $b\le 1$ אז $b^2\le b$ ולכן $a<b^2<b$ ולכן $f_a(b^2)=1$, בעוד שלעיל הוכחנו כי $f_a(b^2)=2$.

ההנחה ש – a שלילי הביאה, איפוא, לידי סתירה.

משפט 3. הבסיס a חייב להיות שונה מ – 0.

הוכחה: $f_a(0)+f_a(0)=f_a(0\cdot 0)=f_a(0)$, לכן חייב $f_a(0)=0$ ואילו $f_a(a)=1$.

המשפט הרביעי יוצא דופן בכך שלא הוכח משום *שהוכחתו של משפט זה היא ארוכה ..!* (עמוס ארליך, עמ' 475), להלן המשפט:

משפט 4. אם $0 < a \neq 1$ אז יש פונקציה בעלת התכונות L עם הבסיס a.

משפט 5 . 0 אינו בתחום של f_a .

הוכחה: אילו היה 0 בתחום היה " $f_a(0)$ " שם של מספר כלשהוא והיו מתמלאים השויונות :

$$f_a(a) + f_a(0) = f_a(0 \cdot a) = f_a(0)$$
$$\Downarrow$$
$$f_a(a) = f_a(0) - f_a(0) = 0$$

וזה מנוגד לתכונה ד' : $f_a(a) = 1$

משפט עזר ב : לכל N שלם , $f_a(a^N) = N$.

הוכחה:

נבחין בשלושה מקרים:

א. N טבעי

ב. N=0

ג. N שלם שלילי

א. $f(a^N) = f(a \cdot a \cdots a) = f(a) + f(a) + ... + f(a) = N \cdot f_a(a) = N \cdot 1 = N$

ב. $N = 0 \Rightarrow a^N = 1$ ועי"פ משפט עזר א' $f(a^N) = f(1) = 0$

ג. N שלם שלילי ולכן N- טבעי ועי"פ א. $f_a(a^{-N}) = -N$.

$$-N + f_a(a^N) = f_a(a^{-N}) + f_a(a^N) = f_a(a^{-N}a^N) = f_a(1) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$f_a(a^N) = 0 + N$$

משפט 6. של מספר שלילי אינו בתחום של f .

הוכחה:

נלך בדרך השלילה, נניח כי x>0 וכי x וגם x– בתחום של f.

$$f(-x)=f(x) \Leftarrow f(-x)+f(-x)=f(x^2)=f(x)+f(x)$$

$a \neq 1$ ולכן קיימים N-ים שלמים הממלאים $a^N < x$ (אם $0<a<1$ נחפש N-ים כאלה בין המספרים החיוביים הגדולים ואם $a>1$ נחפשם בין השליליים בעלי ערך מוחלט גדול) , בפרט קיים N הממלא $N \neq f(x), a^N < x$ כך ש $a^N > 0$ ולכן $-x < a^N < x$.

בגלל המונוטוניות, וכיון ש $f(a^N)=f(x), f(-x)=f(x)$ מאידך , ממשפט עזר ב' נובע כי $f(a^N)=N$ בעוד שאנו בחרנו N השונה מ – f(x).

משפט עזר ג'. אם N שלם (חיובי או שלילי) ו – m טבעי אז $f_a(a^{\frac{N}{m}})=\frac{N}{m}$

הוכחה:

$m \cdot f_a(a^{\frac{N}{m}})=f(a^{\frac{N}{m}})+...+f(a^{\frac{N}{m}})=f(a^{\frac{N}{m}}\cdots a^{\frac{N}{m}})=f[(a^{\frac{N}{m}})^m]=f_a(a^N)=N$ כאשר השוויון השני נובע מתכונת הכפל, השויון האחרון נובע ממשפט עזר ב') .

נחלק את שני האגפים הקיצוניים ב – m ונקבל $f_a(a^{\frac{N}{m}})=\frac{N}{m}$

משפט עזר ד'. בין כל שני מספרים שונים נמצא לפחות מספר רציונאלי אחד.

הוכחה: יהיו x ו – y שני מספרים שונים ויהי d המרחק שביניהם.נסמן על ציר המספרים את הרציונליים הבאים: תחילה נסמן השלמים, הרוחים שביניהם גדלם 1. אח"כ נסמן את המספרים שצורתם $\frac{Z}{10}$. המרחק בין שני שכנים הוא $\frac{1}{10}$. אח"כ נסמן את המספרים שצורתם $\frac{Z}{100}$. הרוחים שביניהם גדלם $\frac{1}{100}$. באופן זה, נמשיך עד שהרווחים יהיו קטנים מ – d. אחד מהמספרים המתקבלים יהיה בין x ו – y .

משפט 7. לכל x ממשי $f_a(a^x)=x$

הוכחה: משפט עזר ג' מאשר את טענתנו עבור כל x רציונלי. נותר להוכיחה עבור x לא רציונלי:

אם $p<x<q$ אז $a^p<a^x<a^q$ (תנאי המונוטוניות ב - E) ולכן $f(a^p)<f(a^x)<f(a^q)$ (תנאי המונוטוניות ב - L) . אם p ו- q הם רציונליים אז, ע"פ משפט עזר ג', $f(a^p)=p$ ו - $f(a^q)=q$ ולכן $p<f(a^x)<q$.

הוכחנו עד כאן כי לכל p ו- q רציונליים אם x ביניהם גם $f_a(a^x)$ ביניהם. דבר זה אפשרי רק כאשר $f_a(a^x)=x$ כי אילו היו שונים אפשר היה לשרבב ביניהם מספר רציונלי.

משפט 8. הטווח של f מכיל את כל הממשיים.

הוכחה: לכל x ממשי a^x הוא גדול מ – 0 ולכן a^x נמצא בתחום. ממשפט 7 נובע כי x בטווח.

משפט 9. לשום בסיס a אין יותר מפונקציה אחת בעלת התכונות L.

הוכחה: תהיינה f_1 ו - f_2 שתי פונקציות בעלות התכונות L עם הבסיס a .

עלינו להוכיח כי לכל x גדול מ – 0 , $f_1(x)=f_2(x)$ ואומנם, כל x גדול מ- 0 נמצא בטווח של הפונקציה המעריכית ולכן ניתן לכתיבה בצורה a^y .

ע"פ משפט 7 $f_1(x)=f_1(a^y)=y$ וכן $f_2(x)=f_2(a^y)=y$ ומכאן נובע השוויון המבוקש .

ורק כעת , מגדיר המחבר את הפונקציה הלוגריתמית : המשפטים 4 ו – 7 מצטרפים לטענה כי לכל בסיס a הממלא $0<a\neq 1$ יש בדיוק פונקציה אחת בעלת התכונות L. ניתן לה שם: הגדרה: הפונקציה בעלת התכונות L עם הבסיס a המסומן $\log_a x$, קרי : לוגריתמוס לפי בסיס a של x .

מבחינת אופי הבעיות המילוליות שהוצגו לקוראים, כבר בשנות ה -50 ועד אמצע שנות ה – 60, הרבו להביא בספרי הלימוד שאלות שכונו <u>ריבית דריבית</u> ,השאלות היו קצרות ועניינות , לרוב לא יותר משלוש שורות. להלן מספר דוגמאות לשאלות מסוג זה :

(דניאל שמיר, עמ' 167, שאלה ט.74)

"משאית נקנתה במחיר 30000 ל"י ונמכרה אחר 3 שנים במחיר 20000 ל"י, כעבור כמה שנים נוספות ירד ערך משאית זו עד מתחת ל-12000 ל"י ?

(דניאל שמיר, עמ' 165, שאלה ט.60)

"הפחת של מטוסי ריסוס הוא 35% לשנה. כעבור כמה שנים ירד ערכו של מטוס הריסוס מ- 80000 ל"י עד 15000 ל"י ?

(דניאל שמיר, עמ' 164, שאלה ט.47)

"אורך החיים הממוצע של בני האדם גדל בכל שנה באחוז מסויים בגלל התקדמות הרפואה. בשנת 1900 היה אורך החיים הממוצע בישראל 50 שנה ובשנת 1950 היה אורך החיים הממוצע 70 שנה. מה יהיה אורך החיים הממוצע בשנת 1975?

(ש.מהרשק, עמ' 123, 30)

"הלוואה של 600 ל״י ניתנה בתנאי שיחזירו אחר 4 שנים 400 ל״י ואחר 4 שנים נוספות עוד 400 ל״י. מה היה שער הריבית?

באמצע שנות ה – 60 כבר לא קראו לבעיות המילוליות שלפיתרונן נעזרים בלוגריתמים בעיות ריבית דריבית אלא פשוט – בעיות בנושא לוגריתמים. בעיות אלו היו מאוד דומות לבעיות ריבית דריבית של הספרים הקודמים אלא שניתנו שאלות שנגעו בדיספלינות שונות. להלן מספר דוגמאות :

שאלות ריבית דריבית אופיניות :

(עמוס ארליך, עמ' 518 שאלה 1)

"בכמה זמן תגדל קרן בת 7000 לירות עד ל – 10340 לירות ע״פ 5% לשנה (ברד״ר) ?

תצורה יותר מעניינת של שאלה:

(עמוס ארליך, עמ' 519 שאלה 7)

"החוק מתיר לבנקים לגבות מן הלווים ריבית של 11% לשנה.בנק מסויים הודיע כי הוא גובה 0.9% לחודש והריבית מתווספת לקרן כל חודש. האם הבנק עובר על החוק?

לאחר כמה שאלות בסגנון הריבית דריבית שאופינית לשאלות על בנקים וקרנות , מופיעה לראשונה שאלה שאינה לקוחה מהעולם הפיננסי, על התרבות חיידקים :

(ש.מהרשק, עמ' 519 שאלה 8)

"אוכלוסיית חיידקים התרבתה במשך 2.7 ימים פי 12. פי כמה היא מתרבה ביום אחד? בחמשה ימים ?

ישנה עוד שאלה דומה על חיידקים ושתי שאלות נוספות מפתיעות מתחום הפיסיקה/מדעים :

(עמוס ארליך, עמ' 519 שאלה 9)

"אור שעבר דרך שכבת זכוכית כהה בעובי של 8 מ״מ הפסיד שני שלישים מעוצמתו. כמה יפסיד במעבר שכבת זכוכית כנ״ל בעובי של מ״מ אחד? בעובי של 3.5 מ״מ ?

מגדיל מחבר הספר לעשות ומוסיף פרק של*"שימושים לפיסיקה"* , כאן מביא המחבר דוגמא לניסוי וניתוחו , בנושא דעיכה של חומר רדיואקטיבי ובנושא חוק הקירור של ניוטון.

בספר זה ניתן לראות שימוש בולט של המתמטיקה בדיספלינות אחרות:

דעיכה של חומר רדיואקטיבי (עמוס ארליך 529):

"אטומיו של יסוד רדיואקטיבי פולטים קרינה רדיואקטיבית והופכים ע״י כך לאטומים של יסוד אחר.לדוגמא: היסוד פולוניום P_0 (נתגלה ע״י הגברת קירי לפני הרדיום, ונקרא על שם ארץ מולדתה) פולט חלקיקי α והופך

לאיזוטופ של עופרת (P_b^{206}) *. כמות הפולוניום פוחתת איפוא והולכת.אנו מעוניינים לחקור את קצב הירידה של כמות הפולניום!*

בהמשך המחבר מביא תוצאות של מדידות שנעשו בניסוי , מנתח אותן בשימוש גרף לוגריתמי ומוכיח לקורא כי כמות החומר היא מכפלה של מספר קבוע בפונקציה מעריכית ובהמשך לצורך הפתרון משתמש בלוגריתמים.

שאלה נוספת, הבולטת באופיה השונה:

(עמוס ארליך, עמ' 530 שאלה 8):

"איזה חומר קורן קרינה רדיואקטיבי יותר חזקה, זה שתקופת מחצית חייו ארוכה או זה שתקופת מחצית חייו קצרה ?"

בהמשך מביא עוד דוגמא לניסוי מפורט בנושא : חוק הקירור של ניוטון , בו מתבקש הקורא לבצע ניסוי בעצמו , לאסוף הנתונים לצייר גרף על נייר חצי לוגריתמי ולנתחו.

להלן הניסוי (עמוס ארליך, עמ' 536 שאלה 9):

"הניסוי הבא ניתן לביצוע במעבדתו של כל בית-ספר ואפילו בביתו של התלמיד.

הציוד הדרוש: כוס מים חמים וטרמומטר (לא טרמומטר רפואי).

הטמפ' שמורה הטרמומטר היא, כידוע , ההפרש בין טמפ כוס המים שבניסוי ובין טמפ הקפאון של המים. טמפ הקפאון של המים אינה קשורה באופן ישיר במחקר שלנו ולכן נעדיף למדוד את ההפרש בין טמפ' כוס המים וטמפ' הסביבה המקררת את כוס המים (טמפ' החדר).

בתחילת הניסוי נמדוד, איפוא, את טמפ החדר. אח"כ נמדוד (כל 10-15 דקות) את טמפ המים ונסמן ב - $T(x)$ *את ההפרש בין טמפרטורות המים וטמפרטורות החדר בזמן* x.

א. *בצע את הניסוי הנ"ל והכן טבלה של* $T(x)$.

ב. *סרטט על נייר מילימטרי רגיל גרף של* $T(x)$.

ג. *סרטט על נייר חצי-לוגריתמי גרף של* $\log T(x)$

ד. *מצא בעזרת ג' ביטוי אלגברי ל -* $T(x)$ *(כלומר – מצא את חוק הקירור של המים)*

ה. *נסה לשער כיצד יראה חוק הכירור הכללי (גוף חם מסוגים שונים . סביבה מקררת מסוגים שונים).*

ו. *סמן את הטמפרטורה שמורה הטרמומטר (ההפרש בין זו של הכוס וטמפרטורת הקפאון של המים ב -* $T^*(x)$ *וכתוב את הביטוי האלגברי המתאים.*

ז. *נסח את חוק הקירור הכללי (חוק הקירור של ניוטון) בעזרת* $T(x)$.

המחבר מוסיף ומציע: *"ציר המספרים הלוגריתמי משמש בסיס לסרגלי החישוב הלוגריתמים ואפשר ללמוד את השימוש בהם במקום זה. סרגל חישוב פשוט (ולא מדויק) ניתן לבנייה בעזרת שני סרטים של נייר חצי-לוגריתמי. סרגלי חישוב קטנים אך טובים למדי (דיוק של שלש ספרות) ניתנים להשגה במחיר של כ – 10 ל"י. לסרגלים אלה מצורפת לרוב חוברת קטנה (באנגלית) על דרכי השימוש בהם"*. (עמוס ארליך 540)

*את השאלה הנ"ל הצגתי למורה הפיסיקה בבית ספרינו שמאוד התרשם ואפילו החליט שהשאלה תופיע כבחינת מתכונת לתלמידי הפיסיקה שעתידים להיבחן במעבדת-פיסיקה בשנה הבאה.
שאלה זו היא פעילות מאלפת בכיתה כהכרות עם הלוגריתמים ואין לי ספק כי החל מהשנה הקרובה איישמה בכיתתי.

כיום, בספרי הלימוד לא מופיעות שאלות המשתוות לניסוי שהוזכר קודם, אלא שאלות בנושא ריבית דריבית כאשר הנוסח השתנה וכמות המילים גדלה.

דוגמאות לשאלות בנות ימינו:

(האוניברסיטה העברית, עמ' 161 שאלה 1):

"כמות העץ ביער גדלה לפי גידול מעריכי של הזמן $(u(t)=u_0a^t)$. *בשנה מסוימת היו ביער* $5\cdot10^7$ *טונות של עץ וכעבור שלוש שנים היו בו* $6.3\cdot10^7$ *טונות של עץ.*

8. *מצא את קצב הגידול.*
9. *מצא כעבור כמה שנים היתה כמות העץ* $1.4\cdot10^8$ *טונות"*

(האוניברסיטה העברית, עמ' 162 שאלה 3):

"במדינה מסוימת נערך מפקד אוכלוסין אחת ל- 10 שנים. ב- 1.1.1960 היו במדינה 2,700,000 תושבים, וב- 1.1.1970 היה בה 3,250,000 תושבים. ידוע כי גידול האוכלוסיה הוא מעריכי. חשב את גודל האוכלוסיה בתאריכים הבאים:

א. *1.1.1980*

ב. *1.1.2000*

ג. *1.1.1940*

ד. *1.7.1957"*

(האוניבסיטה העברית, עמ' 162 שאלה 9):

"בתרבית אחת היו בשעה 8.00 בבוקר 80,000 חיידקים, וכעבור שעה היו בה 90,000 חיידקים. בתרבית אחרת היו באותו יום בשעה 8 בבוקר 20,000 חיידקים, וכעבור שעה היו בה 30,000 חיידקים.

נסמן ב – t את הזמן שחלף מהשעה 8.00 עד אשר בתרבית הראשונה היו פי שניים חיידקים מאשר בתרבית השנייה;

נסמן ב – s את הזמן שחלף מהשעה 8.00 עד אשר בתרבית השנייה היו פי שניים חיידקים מאשר בתרבית הראשונה;

בהנחה שלא יחולו שינויים בתנאי הגידול, הוכח כי $\frac{s}{t}=3$ ".

(האוניברסיטה העברית, עמ' 163 שאלה 15):

"ערכו של בניין בשעת הבנייה היה 700,000 ש"ח. הודות לעליית מחירי הנדל"ן עלה ערכו של הבניין כעבור 4 שנים(אחוז קבוע מדי שנה) ל – 900,000 ש"ח. במשך 5 שנים הבאות עלה ערכו באחוז כפול מאשר בשנים הראשונות. מצא את הערך של הבניין כעבור 9 שנים מבנייתו".

כפי שניתן לראות מהדוגמאות שהבאתי , ישנו גיוון מסוים בשאלות למרות שנראה שהשאלות באותו סיגנון אם כי ארוכות קצת יותר , אך בכל זאת השתדלתי להביא דווקא את השאלות המיוחדות יותר שניתן גם אותן ליישם בכיתה.

2. שימושים לפונקציה הלוגריתמית בפיסיקה

גילוי הפונקציה הלוגריתימית איפשר את מידולן המתמטי של תופעות פיזיקליות רבות. אדגים כאן כמה מהן:

התפרקות חומרים רדיואקטיביים

רדיואקטיביות היא פליטה של חלקיקים מגרעין אטום. רדיואקטיביות היא פליטה ספונטאנית הגורמת לגרעין בלתי יציב להיות יציב יותר, על ידי הנמכת האנרגיה שלו. החלקיקים הנפלטים הם קרינה מייננת, כלומר קרינה באנרגיה גבוהה, שמסוכנת לבעלי חיים. סוגי הקרינה הראשונים שנתגלו הם קרינת אלפא, קרינת בטא וקרינת גמא, ונקראו כך על סמך הפיצול של אלומות הקרינה בשדה חשמלי או מגנטי ומחוסר במידע אחר עליהן. מאוחר יותר נתגלו גם סוגי קרינה נוספים.

כיום ידוע שקרינה רדיואקטיבית מסוכנת ביותר לרקמות חיות, אולם דבר זה לא היה ידוע לחוקרים הראשונים אשר זכו בפרסי נובל על עבודתם, אך גם סיכנו את חייהם.

ההתפרקות הרדיואקטיבית היא תופעה קוונטית בעיקרה ולכן הסתברותית. כלומר: אי אפשר לדעת מתי בדיוק יתפרק חלקיק מסוים אך אפשר לדעת מה ההסתברות שלו להתפרק בכל זמן נתון. זמן ההתפרקות של חלקיק הוא משתנה מקרי T המתפלג מעריכית עם קבוע דעיכה λ האופייני לחלקיק ושניתן לחשבו באמצעות מכניקת הקוונטים. אחד חלקי קבוע הדעיכה ($\frac{1}{\lambda}$), הוא זמן החיים הממוצע של חלקיק בודד, או תוחלת החיים שלו. פרמטר שקול לכך, שיותר קל למדוד בניסוי, הוא זמן מחצית החיים שנתון על ידי $\frac{\ln 2}{\lambda}$: זהו הזמן שבו מחצית מהחלקיקים במדגם יתפרקו.

מאחר ותיאור הדעיכה הוא הסתברותי, הוא שימושי ביותר דווקא עבור מדגמים סטטיסטיים המכילים מספר רב של חלקיקים (למשל: מספר אבוגדרו של נייטרונים), ואז גודל המדגם בזמן t כלשהו נתון על ידי

$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, כאשר N_0 הוא המספר ההתחלתי של חלקיקים במדגם.

הוכחה:

כדי להוכיח זאת אשתמש בשיטת הפרדת משתנים t, m לפתרון המשווא הדיפרנציאלית הבאה :

$$dN = -\lambda N dt$$

נחלק ב N את שני האגפים ונקבל : $\frac{dN}{N} = -\lambda dt$.

כעת נאנטגרל ונקבל את המודל הפיסיקלי : $\ln(N) = -\lambda t + c$

ומכאן : $N(t) = e^{-\lambda t + c} = e^{c} \cdot e^{-\lambda t}$

אם נציב t=0 נקבל כי : $N(0) = e^{c}$

ולכן נוכל לכתוב : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. משל.

הוכחת זמן מחצית חיים :

$t_{\frac{1}{2}}$ זמן מחצית חיים, לפי הגדרת זמן זה לעיל מתקיים : $N(t_{\frac{1}{2}}) = \frac{N_0}{2}$

כעת נציב נציב זאת בנוסחא למודל ונקבל : $\frac{N(0)}{2} = N(0) \cdot e^{-\lambda t}$

קל להבחין כי : $\frac{1}{2} = e^{-\lambda t}$

נפעיל ln על שני האגפים ונקבל : $\ln\frac{1}{2} = \ln e^{-\lambda t} \Rightarrow -\lambda t = \ln(2^{-1})$

נכפול במינוס ונשתמש בחוק הבא : $n \cdot \ln(a) = \ln(a^n)$ ונקבל : $t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$. משל.

התנהגות זו היא הבסיס לשיטות תיארוך ארכאולוגיות וגאולוגיות באמצעות מדידות דעיכה של איזוטופים רדיואקטיביים מתאימים שונים. לדוגמה, בארכאולוגיה מקובל מאוד השימוש בפחמן 14, שהוא איזוטופ רדיואקטיבי של פחמן.

חוק הקירור של ניוטון

חוק הקירור של ניוטון הוא חוק פיזיקלי המתאר את קצב השתנות הטמפרטורה של גוף ביחס לסביבתו, עקב מעבר חום. כאשר בסוף התהליך, טמפ' הגוף תשתווה לטמפ' הסביבה.

במקרה זה קצב ירידת טמפרטורה של הגוף עומד ביחס ישר להפרש הטמפרטורות. אם נסמן את הפרש הטמפרטורות ב- ΔT אזי קצב ירידת הטמפרטורה הוא נגזרת ההפרש הנ"ל לפי הזמן ונקבל שמתנהג כמו:

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -\alpha \Delta T$$

כאשר α הוא קבוע פרופורציה חיובי.

פתרון המשוואה הדיפרנציאלית הוא $\Delta T(t) = \Delta T(0) e^{-\alpha t}$

כאשר $\Delta T(0)$ הוא הפרש הטמפרטורות ההתחלתי בין הגוף לסביבה.

כפי שניתן לראות, גילוי הפונקציה הלוגריתמית גרר בעקבותיו התקדמות אדירה בתחומי הפיזיקה, אסטרונומיה, גאולוגיה, הנדסה, ולא תהיה זו הגזמה לומר כי הלוגריתמים מהדהדים בחיי היומיום של כולנו.

דעיכה של חומר רדיואקטיבי:

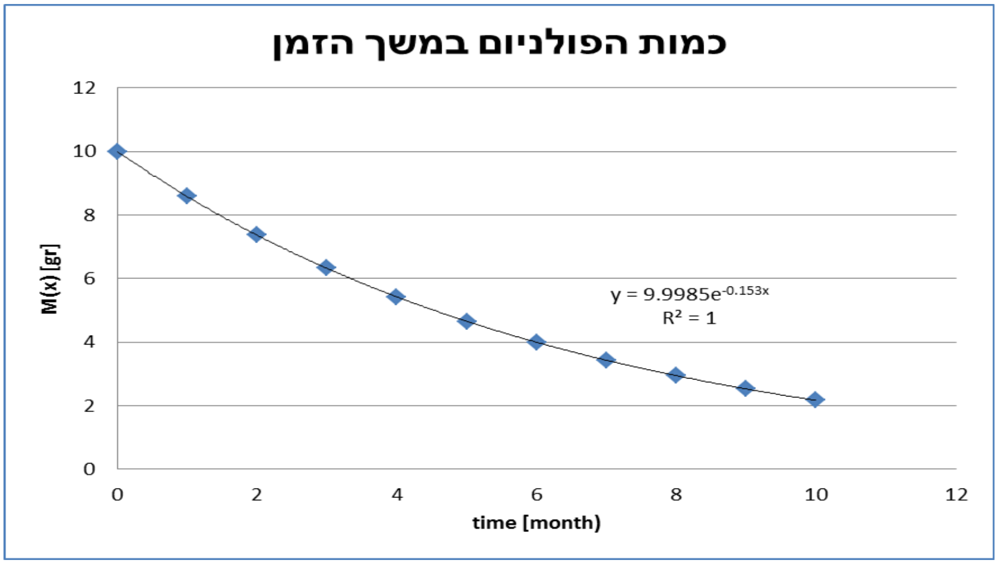
אטומיו של יסוד רדיואקטיבי פולטים קרינה רדיואקטיבית והופכים ע"י כך לאטומים של יסוד אחר.לדוגמא: היסוד פולוניום P_0 (נתגלה ע"י הגברת קיריף לפני הרדיום, ונקרא על שם ארץ מולדתה) פולט חלקיקי α והופך לאיזוטופ של עופרת (P_b^{206}) . כמות הפולוניום פוחתת איפוא והולכת.אנו מעוניינים לחקור את קצב הירידה של כמות הפולניום.

תהי $M(0)$ כמות התחלתית של פולוניום. אנו מעוניינים למצוא את $M(x)$ שהיא הכמות הנותרת אחרי x חודשים (30 יום יחשבו לחודש אחד).

הטבלה שלפנינו מתארת את תוצאות המדידות שנעשו מדי חודש :

x	**M(x)**
0	10.000
1	8.580
2	7.364
3	6.320
4	5.423
5	4.648
6	3.993
7	3.427
8	2.941
9	2.523
10	2.166

נסרטט גרף בהתאם לנתונים ונקבל :



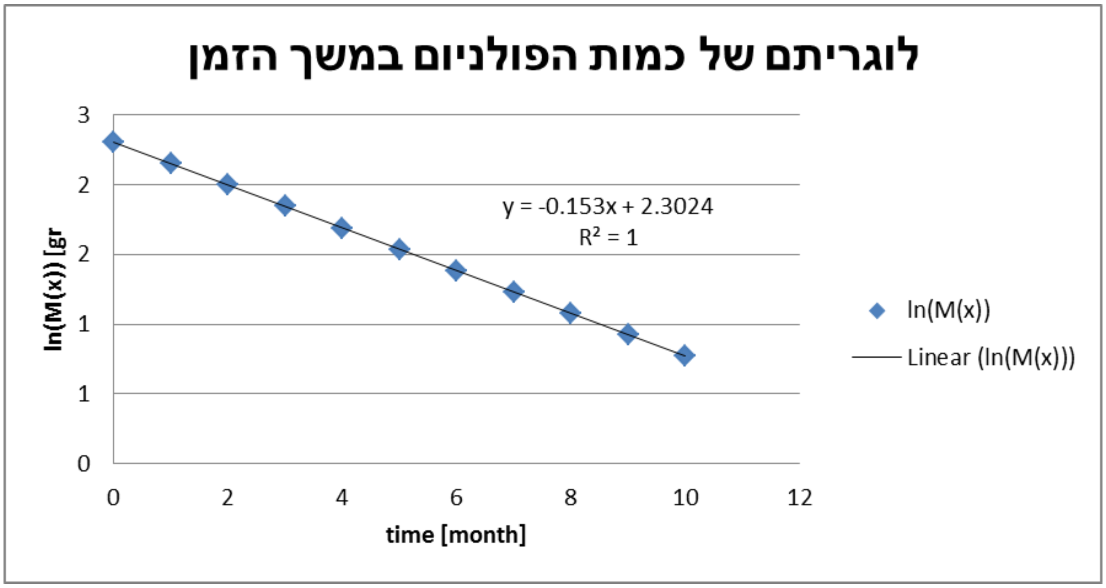
נוסיף קו מגמה , מידת התאמת קו המגמה ונוסחא לקו ונראה כי צורתו של הגרף כשל פונקציה מעריכית או מכפלה של מספר קבוע בפונקציה מעריכית.

לכן כדאי להעביר את הגרף למערכת צירים עם ציר y לוגריתמי, כך שנקבל קו ליניארי.

לצורך כך אוסיף עוד עמודה לטבלה בה אחשב את $\ln(M(x))$ שיהווה את הערכים של ציר y

x	M(x)	ln(M(x))
0	10.000	2.303
1	8.580	2.149
2	7.364	1.997
3	6.320	1.844
4	5.423	1.691
5	4.648	1.536
6	3.993	1.385
7	3.427	1.232
8	2.941	1.079
9	2.523	0.925
10	2.166	0.773

ואצייר את הגרף בהתאם :



גם כאן , נוסיף קו מגמה , מידת התאמת קו המגמה ונוסחא לקו ונראה כי צורתו של הגרף הוא ישר.

נקדים ונציין כי בזאת נתאמתה השערתנו ש - M(x) היא מכפלה של מספר קבוע בפונקציה מעריכית שהרי מצאנו כי קיימים a ו – b שמקיימים : $\ln(M(x)) = ax + b$

ולכן $M(x) = e^{ax+b} = e^b \cdot (e^a)^x$.

טענה : $e^b = M(0)$

הוכחה : $\ln(M(0)) = 0 \cdot x + b = b \Rightarrow e^b = M(0)$

נסמן את e^b ב – q ונקבל : $M(x) = M(0) \cdot q^x$

בטבלת תוצאות הניסוי נמצא כי $M(0) = 10$. כן נמצא , למשל כי $M(6) = 3.993$ ומכאן כי :

$$3.993 = 10 \cdot q^6$$

$$\ln(\frac{3.993}{10}) = \ln(q^6)$$

$$\ln(\frac{3.993}{10}) = 6 \cdot \ln(q)$$

$$\frac{\ln(\frac{3.993}{10})}{6} = \ln(q)$$

$$\Downarrow$$

$$q = e^{\frac{\ln(\frac{3.993}{10})}{6}} = 0.8582$$

בדיקה : $M(1) = 10q^1 = 10 \cdot 0.8582 \approx 8.580$

מסקנה: $M(x) = 10 \cdot 0.8582^x$

תרגילים

1. מה יישאר מ – 3 גרם פולוניום אחרי 12 חודשים?
2. במשך כמה זמן הופכים $\frac{2}{3}$ מאטומיה של כמות פולניום נתונה לעופרת? (יש לחפש t כך ש: $M(t) = \frac{1}{3} M(0)$)

הגדרה: משך הזמן הדרוש למחיצתה של כמות חומר רדיואקטיבי להפוך לחומר אחר קרויה " תקופת מחצית חיים".

3. מהי תקופת מחצית החיים של פולוניום?
4. האם ניתן היה להגדיר "תקופת כל החיים " באופן דומה? נמק!

ניסויים בחומרים רדיואקטיביים אחרים מראים כי הנוסחא $M(x) = M(0) \cdot q^x$ טובה גם לחומרים הרדיואקטיביים האחרים וגם ליחידות זמן אחרות

5. תקופת מחצית החיים של סטרונציום-90 היא 25 שנה. מצא נוסחאת הדעיכה שלו.
6. תקופת מחצית החיים של רדיום היא 1600 שנה. במשך כמה זמן נכפלת כמות רדיום נתונה פי $\frac{2}{3}$?
7. אחרי 12.75 ימים נותרים מ – 10 גרם רדון גרם אחד בלבד. מהי תקופת מחצית החיים של רדון?
8. איזה חומר קורן קרינה רדיואקטיבית יותר חזקה, זה שתקופת מחצית חייו ארוכה או זה שתקופת מחצית חייו קצרה?

<u>חוק הקירור של ניוטון :</u>

הניסוי הבא ניתן לביצוע במעבדתו של כל בית-ספר ואפילו בביתו של התלמיד.

הציוד הדרוש: כוס מים חמים וטרמומטר (לא טרמומטר רפואי).

הטמפ' שמורה הטרמומטר היא, כידוע , ההפרש בין טמפ כוס המים שבניסוי ובין טמפ הקפאון של המים. טמפ הקפאון של המים אינה קשורה באופן ישיר במחקר שלנו ולכן נעדיף למדוד את ההפרש בין טמפ' כוס המים וטמפ' הסביבה המקררת את כוס המים (טמפ' החדר).

בתחילת הניסוי נמדוד, איפוא, את טמפ החדר. אח"כ נמדוד (כל 10-15 דקות) את טמפ המים ונסמן ב - $T(x)$ את ההפרש בין טמפרטורות המים וטמפרטורות החדר בזמן x.

תרגיל 9:

א. בצע את הניסוי הנ"ל והכן טבלה של $T(x)$.
ב. סרטט על נייר מילימטרי רגיל גרף של $T(x)$.
ג. סרטט על נייר חצי-לוגריתמי גרף של $\log T(x)$
ד. מצא בעזרת ג' ביטוי אלגברי ל - $T(x)$ (כלומר – מצא את חוק הקירור של המים)
ה. נסה לשער כיצד יראה חוק הכירור הכללי (גוף חם מסוגים שונים . סביבה מקררת מסוגים שונים).
ו. סמן את הטמפרטורה שמורה הטרמומטר (ההפרש בין זו של הכוס וטמפרטורת הקפאון של המים ב - $T^*(x)$ וכתוב את הביטוי האלגברי המתאים.
ז. נסח את חוק הקירור הכללי (חוק הקירור של ניוטון) בעזרת $T(x)$.

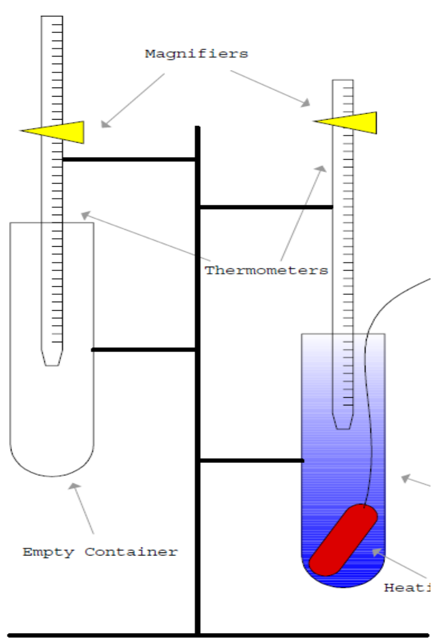
הצעה : ציר המספרים הלוגריתמי משמש בסיס לסרגלי החישוב הלוגריתמים ואפשר ללמוד את השימוש בהם במקום זה. סרגל חישוב פשוט (ולא מדויק) ניתן לבנייה בעזרת שני סרטים של נייר חצי-לוגריתמי. סרגלי חישוב קטנים אך טובים למדי (דיוק של שלש ספרות) ניתנים להשגה במחיר של כ – 10 ל"י. לסרגלים אלה מצורפת לרוב חוברת קטנה (באנגלית) על דרכי השימוש בהם.

מצורף תוצאות מדידות וסכמת הניסוי לנוחות המשתמשים

מדידות

T(t) [0c]	Ts(t) [0c]	t [sec]
90.00	24.40	0.00
86.00	24.40	79.00
82.00	24.40	156.00
78.00	24.40	240.00
74.00	24.40	337.00
70.00	24.40	445.00
66.00	24.40	572.00
62.00	24.40	722.00
58.00	24.40	897.00
54.00	24.40	1103.00
50.00	24.40	1347.00
46.00	24.20	1642.00
42.00	24.00	2020.00
38.00	23.80	2488.00

תאור המערכת



3. קשר מפתיע לאיתור תרמיות – חוק בנפורד

(ניתן להביא כאנקדוטה בשיעור לאחר סיכום נושא הלוגריתם, היות ותלמידים בני ימינו לא משתמשים בלוחות לוגריתמים,מתוך תוכנית הרדיו : " עושים היסטוריה")

ספר לוחות הלוגריתמים היה אחד העזרים המתמטים הנפוצים בתקופה שלפני עידן המחשב. התוצאות בו נרשמו בטבלאות דחוסות בכתב קטן וצפוף ולכן כל מי שהשתמש בהן היה עוקב אחר העמודות והשורות בעזרת האצבע המורה, כדי שלא להתבלבל.

ב- 1881 הבחין האסטרונום האמריקאי סיימון ניוקום (Simon Newcomb) בתופעה מרתקת.

ניוקום נעזר בספר הלוגריתמים באופן שוטף , באחד מביקוריו בספרייה הוא הבחין שבכל העותקים של ספר הלוגריתמים , הדפים הראשונים של הספר היו מלוכלכים מטביעות אצבעות הרבה יותר מדפיו האחרונים. הטבלאות בספר הלוגריתמים מסודרות לפי סדר עולה של המספרים 100,101,102 וכו', עובדה זו פירושה שבדפים הראשונים של הספר נמצאים המספרים שהספרה השמאלית ביותר שלהם היא 1, מדוע שאל ניוקום את עצמו מתעניינים האסטרונומים דווקא בחישובים ובמדידות שמתחילים במספר 1? , הרי אין בזה שום הגיון , הטבע ניטרלי,אקראי, אין שום סיבה להניח שכאשר מודדים מרחקים , זמנים , או גדלים דומים , תוצאות המדידה תהיינה מוטות דווקא למספרים שמתחילים בספרה למשל , 153 , 1254 , 1234561.

אבל כשבדק ניוקום את העיניין בפועל זה בדיוק מה שהוא גילה , במדידות רבות באסטרונומיה התוצאה המתקבלת היא מספר שהספרה הראשונה שלו היא 1 . המספר 1 מופיע כספרה השמאלית ביותר בשכיחות גבוהה באופן מובהק – כ 30% מהמיקרים. הספרה 2 מופיעה כספרה הראשונה במדידות בשכיחות נמוכה יותר , אך עדיין גבוהה יחסית , הספרה 9 היא הנדירה ביותר עם שכיחות של פחות מ- 5% כספרה הראשונה במדידות. ניוקום לא הצליח להסביר את התוצאה שקיבל אבל הוא פירסם אותה במאמר מקצועי , לרוע מזלו אף אחד לא לקח אותו ברצינות והמאמר נשכח.

57 שנים מאוחר יותר, 1938 הבחין פיזקאי בשם פרנק בנפורד (Frank Benford) באותה תופעה בדיוק. גם הוא כמו ניוקום השתמש בלוחות הלוגריתמים וגם העותק שלו היה מלוכלך מאוד בדפים הראשונים. בנפורד השקיע מאמצים אדירים , הרואים ממש , כדי לוודא שההשערה שלו לגבי השכיחות המוגזמת של המספר 1 כספרה הראשונה בכל מדידה אכן תקפה. הוא בחן כ 20000 מדידות וטבלאות נתונים מכל הסוגים – שטחי מערות , משקלים אטומים של יסודות, מספרים שמופיעים בדיווחי עיתונות ואפילו סטטיטיקות של משחקי בייסבול – בכל מקום שבו הביט התוצאה הייתה זהה – הספרה הראשונה הייתה , בכ – 30% מהמיקרים, 1.

פרנק בנפורד כתב מאמר על מחקריו , הפעם זכה המאמר להתעניינות הקהילה המדעית והתופעה המשונה הזו זכתה לכינוי – חוק בנפורד.

דוקא הכלכלנים גילו בחוק זה עיניין מיוחד , בפרט הנהלת חשבונות . מנהלי חשבונות מנסים כל הזמן למצוא שיטות חדשות ומתוחכמות לאתר רמאויות פיננסיות – בשנות ה – 70 הציע פרופסור אל-ורנה (הכלכלן

הראשי של גוגל כיום) להשתמש בחוק בנפורד כדי לגלות אי סדרים בספרי חשבונות; אם הדוחות הפיננסיים תקינים, המספרים המופיעים בהם אמורים לציית לחוק בנפורד- הספרה השמאלית ביותר שתהיה 1 תופיע בכ – 30 % מהמקרים , 2 בכ – 17% מהמיקרים , 3 בכ-12% מהמקרים וכן הלאה, אבל אם ספרי החשבונות טופלו ועוותו , המספרים לא יצייתו לחוק בנפורד .

4. תוכנה

השפעת חלוקת האינטרוולים על גודל השגיאה :

```
clear all
close all
clc

k=1;
while k<8
    a=1;
b=2;
n=10^k;
X=[a:(b-a)/n:b;];

i=4;
sum_1=(1/X(2));

while i<n+1
sum_1=sum_1+(1/X(i));

i=i+2;
end

j=5;
sum_2=(1/X(3));

while j<n
sum_2=sum_2+(1/X(j));
j=j+2;
end

I=(b-a)*(1/a+1/b+4*sum_1+2*sum_2)/(3*n);
E(k)=abs(I-log(b))*100/log(b);
T(k)=k;

k=k+1;
end
```

השוואה בין הפונקציה המקורבת לפונקציה המקורית עבור $1<x<1000$:

```
clear all
close all
clc

b=2;
while b<1000
    a=1;

n=10^2;
X=[a:(b-a)/n:b;];

i=4;
sum_1=(1/X(2));

while i<n+1
sum_1=sum_1+(1/X(i));

i=i+2;
end

sum_1;
sum_11=1/X(2)+1/X(4)+1/X(6)+1/X(8)+1/X(10);

j=5;
sum_2=(1/X(3));

while j<n
sum_2=sum_2+(1/X(j));

j=j+2;
end

sum_2;
sum_22=1/X(3)+1/X(5)+1/X(7)+1/X(9);

I(b)=(b-a)*(1/a+1/b+4*sum_1+2*sum_2)/(3*n);
L(b)=log(b);

b=b+1;
end
```

ביבליוגרפיה

1. Napier,J.:The Construction of the Wonderful Cannon of Logarithms. Dawsons, London, 1966.
2. Smith,D.E.: A Source Book in Mathematics. McGraw-Hill, New York,1929.
3. Eves,H.: An Introduction to the History of Mathematics. Holt Reinhart, Winston, 1969.
4. עמוס ארליך: מתמטיקה לכיתה י', אלגברה. תשכ"ה
5. Steven C. Chapra, Eaymond P. Canale : Numerical Methods for Enfineers 4th ED.
6. ד"ר ב.בן יהודה: הוראת המתמטיקה בבית הספר התיכון. הוצאת מסדה בע"מ, ת"א תש"ן.
7. ש.מהרשק – אלגברה חלק שלישי מהדורה רביעית תל-אביב תשי"ג .
8. דניאל שמיר – שאלון אלגברי אוסף בעיות באלגברה המסודר לפי נושאי לימוד בצירוף תשובות לבעיות הוצאת "חידוש" בע"מ תל-אביב