מכון ויצמן למדע

המחלקה להוראת המדעים

עבודת גמר במסגרת תכנית רוטשילד-ויצמן

גיאומטריה פרויקטיבית - נסיון הרחבה לעולם מושלם

מגישה: חיה מנוחה פרבר

מנחה: פרופ׳ סרגיי יעקובנקו

כסלו תשע״ו

תוכן

הקדמה 2
מבוא 4
הצורך בהרחבה 5
מצב הדדי של שני ישרים 5
חתכי חרוט 5
מספר הפתרונות של שתי משוואות פולינומיאליות 7
הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ 8
הצורך בהרחבה – סיכום 9
תיאור ההרחבה באופן אינטואיטיבי 10
הישר הפרויקטיבי 10
המישור הפרויקטיבי 11
המרחב הפרויקטיבי ה-n ממדי 12
מימוש מתמטי של ההרחבה 13
הישר הפרויקטיבי 13
המישור הפרויקטיבי 15
המרחב הפרויקטיבי ה-n ממדי 17
כיצד מחשבים בעולם הפרויקטיבי? 18
איך פותרים משוואות? 18
חיתוך של *ישפים* 19
חתכי חרוט 21
עקום של פולינום כללי 24
איך עוברים מ"חלון" אחד לאחר? 25
סיכום 28
נספח א' – רקע הסטורי 29
נספח ב' – רקע אמנותי 31
ביבליוגרפיה 34

הקדמה

עבודה זו מציגה תחום מתמטי שאינו כלול בתכנית הלימודים הנלמדת בבתי הספר בישראל. התלמידים עוסקים בגיאומטריה אוקלידית, אך אינם לומדים על הגיאומטריות הלא-אוקלידיות בכלל, ועל הגיאומטריה הפרויקטיבית בפרט.

במהלך עבודתי כמורה בתיכון פגשתי תלמידים מוכשרים רבים המגלים סקרנות ללמוד ולעסוק בנושאים מתמטיים מעבר לנלמד במסגרת תכנית הלימודים.

בעבודה זו בחרתי לעסוק בגיאומטריה הפרויקטיבית, באופן שתלמידי תיכון מוכשרים יוכלו לקרוא בה, ולרכוש בכוחות עצמם היכרות בסיסית עם הנושא. אני מקווה שתלמידים כאלה יגלו עניין בהפתעות המתגלות בגיאומטריה הפרויקטיבית, וכי הקריאה בעבודה זו תעודד אותם להמשיך ולהעמיק את ידיעותיהם בתחום.

מקובל להציג את הגיאומטריה הפרויקטיבית על רקע הצורך באמנות לפרספקטיבה קוית, אשר מתוכו היא נבעה. בסוף העבודה מצורף נספח המדגים את הצורך האומנותי הזה ואת הזיקה בין הגיאומטריה הפרויקטיבית לבין טכניקות אמנותיות שפותחו עם השנים מתוך הצורך הזה.

בעבודה זו בחרתי להציג את הגיאומטריה הפרויקטיבית לא כפתרון לצורך **אמנותי**, אלא כפתרון לצרכים הנובעים מתוך העולם ה**מתמטי** עצמו. בסוף העבודה מצורף נספח העוסק בקצרה בתולדות הגיאומטריות הלא-אוקלידיות בכלל, ובתולדות הגיאומטריה הפרויקטיבית בפרט.

הגיאומטריה הפרויקטיבית כמו גיאומטריות לא-אוקלידיות אחרות – אינה טבעית כמו הגיאומטריה האוקלידית. עובדה זו מקשה על הלומד הנחשף אליה לראשונה להתרגל אל המושגים ואל הסימונים החדשים. על מנת להקל על תהליך ההסתגלות הזה, בחרתי להציג את הנושא באופן הבא: בהתחלה מתואר הצורך בהרחבת העולם הרגיל. אחר כך מובאת ההצעה להרחבה, באופן אינטואיטיבי. רק אחר כך מגיע המימוש המתמטי של ההרחבה. ולבסוף, מובאות דוגמאות הממחישות כיצד פועלים בתוך העולם המורחב החדש, ואיך ההרחבה פותרת את הבעיות שהוצגו בהתחלה. גם האיורים הרבים המלווים את העבודה נועדו להקל על הקורא להבין את העולם החדש המתואר.

מעבר למטרת התוכן המסוים שבו עוסקת העבודה עמדה לנגד עיני גם מטרת-על: לאפשר לתלמיד לחוות את התהליך של תחום מתמטי ה"נולד" מתוך צורך מסוים, ולראות איך אפשר קודם להבין את הרעיונות המתמטיים, ורק אחר כך לממש אותם באופן מתמטי מדויק. משום כך, שולבו בעבודה שני סגנונות כתיבה: פרקי המוטיבציה הכתובים בשפה של "נפנוף ידיים", המקלה על הבנת המושגים והסימונים החדשים, ופרקי המימוש הכתובים בשפה מתמטית.

מכיוון שקהל היעד של העבודה הוא תלמידי תיכון, היה צורך להחליט מתי להביא הגדרות של מושגים שונים שאינם נלמדים בתיכון (כמו הומוגניות), עד כמה לפרט כשמרחיבים נושא כזה (כמו בחתכי חרוט) ומתי לוותר על הפירוט ולאפשר לתלמיד להשלים את החסר בכוחות עצמו (כפי שבחרתי לעשות בעניין הדטרמיננטות).

ישנם קשיים אופייניים הנובעים מהעיסוק בגיאומטריה לא-אוקלידית שנתקלתי בהם.

כשמתבוננים בגיאומטריה הפרויקטיבית דרך המערכת האקסיומטית – נראה כאילו יש כאן צמצום ולא הרחבה, שכן אנו מוותרים על אחת מהאקסיומות. טעות זו כונתה ע"י הרשקוביץ (Hershkowitz, 1987) "עקרון ההכלה הדו כיוונית". ככל שאנחנו מגדירים את האובייקט המתמטי בעזרת תכונות רבות יותר – כך קטנה כמות האובייקטים המקיימים אותו. לדוגמא: כל הריבועים הם קבוצה של חלקית של המלבנים שהם קבוצה חלקית של המקביליות. כשעוסקים בתכונות, לעומת זאת, תכונות המקבילית הן חלק מתכונות המלבן שהן חלק מתכונות הריבוע. ככל שיש יותר כללים – העולם שמתבוננים בו הוא יותר מצומצם, ולהיפך. לכן, כאשר אנחנו

מורידים אקסיומה אחת הרי שהרחבנו את עולם האובייקטים המקיימים את מערכת האקסיומות שנותרה.

קושי נוסף נובע מהשימוש באותם מונחים: נקודה, ישר ומישור גם כשמתייחסים לעולם הרגיל וגם כשדנים בעולם הפרויקטיבי. על מנת למנוע בלבול ולהקל על הקורא בחרתי בסימונים שונים. נקודה בעולם הרגיל סומנה (x, y), ונקודה בעולם הפרויקטיבי סומנה $[x : y]$. המשתנים במשוואות בעולם הפרויקטיבי סומנו באותיות גדולות, והמושגים נקודה וישר נכתבו בגופן כתב יד (*נקודה* ו*ישר*) כאשר הכוונה לעצמים בגיאומטריה הפרויקטיבית.

ברצוני להודות לפרופסור סרגיי יעקובנקו שהיתה לי הזכות לכתוב את העבודה בהנחייתו.

מבוא

"לכל כלל יש יוצא מן הכלל" - אומר הכלל הידוע. האם זה חייב להיות כך?

לפעמים אנחנו מגלים כי קיימת בתוכנו שאיפה ל"עולם מושלם", עולם שבו החוקים נשמרים באופן סדיר יותר, עם פחות חריגות והפרעות, פחות מקרים ה"יוצאים מן הכלל".

בעבודה זו ננסה להצדיק את התחושה שחסר משהו בגיאומטריה האפינית הרגילה המוכרת לנו. נבדוק האם אפשר למצוא אובייקטים מתמטיים שיאפשרו עולם יותר שלם וסדיר. נראה שהגיאומטריה הפרויקטיבית היא סדירה יותר מהגיאומטריה הרגילה, ולכן היא מהווה הצעה טובה לפתרון תחושת החוסר, ולהשלמת התמונה החסרה.

תחילה נדון בצורך בהרחבה, נראה תחומים שונים בהם הגיאומטריה הרגילה שלנו היא חסרה, ולא שלמה. אחר כך נציע איך כדאי לבצע את ההרחבה של העולם הרגיל שלנו. בהמשך נבצע הרחבה כזו באופן מתמטי, כשנעבור מהגיאומטריה הרגילה לגיאומטריה פרויקטיבית. לבסוף, נדגים כיצד פועלים בתוך העולם המורחב שקיבלנו, ואיך הוא מהווה עולם שלם יותר, שבו לא מתקיימות ההפרעות שפגשנו בעולם הרגיל.

בנספחים נסקור בקצרה את תולדות הגיאומטריות הלא-אוקלידיות בכלל ואת תולדות הגיאומטריה הפרויקטיבית בפרט. כמו כן נדגים בעזרת השוואה בין יצירות אמנות שונות את הצורך שהביא לפיתוח הגיאומטריה הפרויקטיבית, ואת הזיקה בינה לבין הטכניקות שהתפתחו באמנות מתוך הצורך הזה.

הצורך בהרחבה

מצב הדדי של שני ישרים

בדרך כלל שני ישרים שונים נחתכים בנקודה יחידה. מה קורה כשהישרים מקבילים?

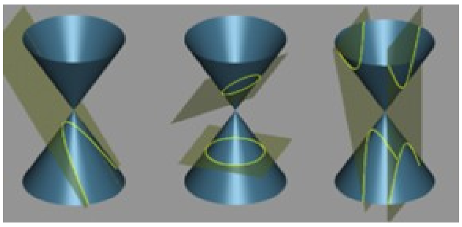
כאשר אנחנו מתבוננים בשני ישרים מקבילים, כמו בפסי הרכבת שבאיור 1, אנחנו יודעים שהם מקבילים זה לזה, כלומר שהם אינם נחתכים, אבל ישנה תחושה כאילו נקודת החיתוך שלהם "בורחת" לאינסוף.

איור 1: ישרים מקבילים ה"נחתכים" בנקודת האופק באינסוף

ננסה להרחיב את המישור הרגיל שלנו כך שיכיל גם את "נקודות החיתוך" של הישרים המקבילים, ואז יתקבל עולם שבו אין ישרים מקבילים שאינם נחתכים, ובו **כל** שני ישרים שונים נחתכים בנקודה יחידה.[1]

חתכי חרוט

כשמישור חותך חרוט כפול נוצרות אליפסה, פרבולה או היפרבולה, כמתואר באיור 2.[2]



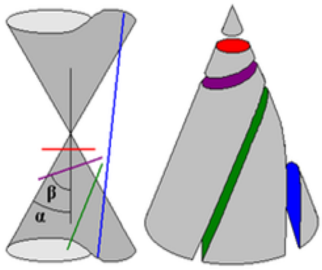
איור 2: מעגל, אליפסה (באמצע), פרבולה (בשמאל) והיפרבולה (בימין)

הצורות השונות מתקבלות בהתאם לזויות: אם α היא הזווית שבין ציר החרוט לקו היוצר שלו,

ו- β היא הזווית שבין ציר החרוט למישור החותך, כמתואר באיור 3, אזי: אם $\beta = 90^0$ מתקבל מעגל, אם $\beta > \alpha$ מתקבלת אליפסה, אם $\beta = \alpha$ מתקבלת פרבולה, ואם $\beta < \alpha$ מתקבלת היפרבולה.

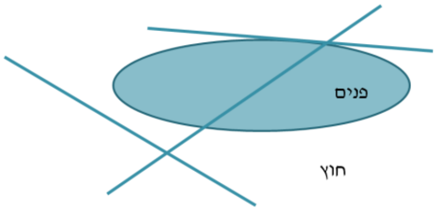
[1] התחושה היא כי החיתוך הזה "מתרחש" בקו האופק שאינו שייך למישור שלנו. מתקבלת תחושה שאם נוסיף למישור שלנו את קו האופק – נוכל לקבל את נקודת החיתוך של הישרים המקבילים. מכאן מקבלים אינטואיציה איך כדאי לבנות את ההרחבה ע"י קווי ראיה במישור האפיני, כפי שנראה בהמשך.

[2] מעגל הוא מקרה פרטי של אליפסה. כמו כן ישנם כמה מקרים מנוונים נוספים אשר לא יפורטו כאן.



איור 3 : חתכי החרוט השונים, בהתאם לזווית החיתוך

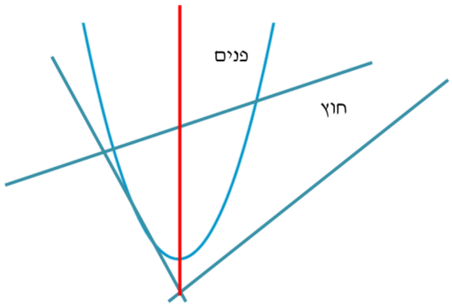
באיור 4 ניתן לראות כי אליפסה מחלקת את המישור לאזורים של פנים וחוץ. הפנים הוא קבוצה חסומה. המצב ההדדי של אליפסה וישר יכול להיות : נחתכים, משיקים, או לא נחתכים.



איור 4 : מצבים הדדיים של אליפסה וישר

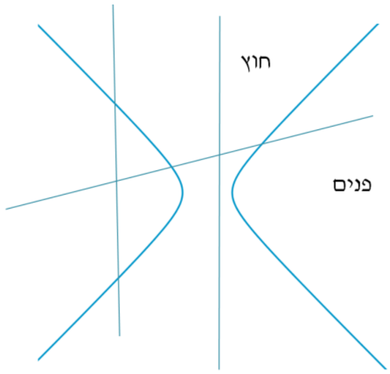
כשנתבונן באליפסה בתור חתך החרוט הסגול שבאיור 3, ונקטין את הזווית β - האליפסה תלך ותגדל, ובסוף נקבל פרבולה כמקרה גבולי של האליפסה.

באיור 5 ניתן לראות כי גם פרבולה מחלקת את המישור לאזורים של פנים וחוץ, אולם בפרבולה הפנים אינו מהווה קבוצה חסומה. כשנתבונן בפרבולה ובישר נראה כי גם כאן המצב ההדדי יכול להיות : נחתכים, משיקים או לא נחתכים. אולם, כאן מתקבל מצב אפשרי חדש : יש ישר (הישר האדום) ה**חותך** את הפרבולה בנקודה יחידה (לא משיק!). כך נוצר מקרה "יוצא מן הכלל". גם כאן ישנה תחושה כאילו נקודת החתוך השניה, שאיבדנו בדרך כשהאליפסה גדלה והפכה לפרבולה – "ברחה" לאינסוף. ברור שזהו סוג נוסף של "הפרעה לשלמות". היינו רוצים שהמצבים ההדדיים יישארו כמו באליפסה ב**כל** המקרים של חתכי החרוט.



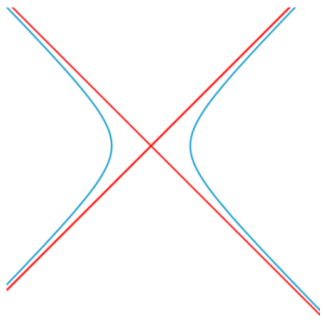
איור 5 : מצבים הדדיים של פרבולה וישר

אם נקטין את הזווית β אפילו יותר – נקבל היפרבולה. באיור 6 ניתן לראות כי גם היפרבולה מחלקת את המישור לאזורים של פנים וחוץ, וכי גם הפעם הפנים אינו מהווה קבוצה חסומה. כמובן גם כאן המצב ההדדי של היפרבולה וישר יכול להיות : נחתכים, משיקים, או לא נחתכים.



איור 6: מצבים הדדיים של היפרבולה וישר

אבל האסימפטוטות הן רק כמעט כמו ישר משיק, כפי שניתן לראות באיור 7. כאן יש תחושה כאילו נקודת **ההשקה** "ברחה" לאינסוף, וגם זה כמובן מקרה "יוצא מן הכלל" המהווה הפרעה לשלמות.



איור 7: היפרבולה והאסימפטוטות שלה

נרצה שההרחבה שלנו למישור הרגיל תהיה כזאת שהעולם המורחב שלנו יכיל גם את נקודות החיתוך ונקודות ההשקה ש"בורחים" לאינסוף, וכך המצב ההדדי של **כל אחד** מחתכי החרוט עם ישר יהיה אחד מהמצבים הקיימים במקרה של אליפסה וישר.

מספר הפתרונות של שתי משוואות פולינומיאליות

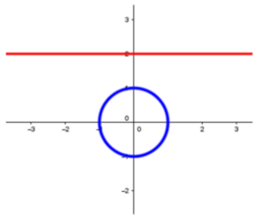
נתבונן בשתי משוואות פולינומיאליות של שני משתנים:

$$\begin{cases} p(x,y)=\mathbf{0} \\ q(x,y)=\mathbf{0} \end{cases}$$

נניח כי דרגות הפולינומים p ו-q הן d ו-b בהתאמה ($\deg(p)=d$ וכן: $\deg(q)=b$). קל להוכיח כי מספר הפתרונות $\leq bd$. ניתן להראות כי לפעמים מספר הפתרונות נמוך מ- bd.

לדוגמא:

נתבונן במשוואת המעגל $x^2+y^2-\mathbf{1}=\mathbf{0}$ ובמשוואת הישר $y-\mathbf{2}=\mathbf{0}$. זוהי מערכת של שתי משוואות פולינומיאליות כאלו. דרגת משוואת המעגל היא 2, ודרגת משוואת הישר היא 1. מכפלת הדרגות היא 2 ומספר הפתרונות הוא 0, כפי שניתן לראות באיור 8.



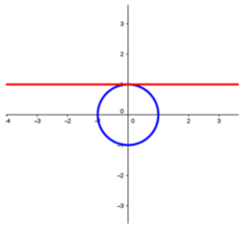
איור 8: המעגל והישר שאינם נחתכים

ניתן לומר כי במקרה זה הפתרונות "ברחו" לאזור המרוכב. אולם, אם נרחיב את R ל-C ונתבונן במישור המרוכב, אז מצב של שני פתרונות ומצב של אין פתרון ממשי – יהיו מבחינתנו אותו מצב.

במקרה של השקה יש שורש כפול, ואנו אומרים כי יש פתרון שמידת הריבוי שלו היא 2.

לדוגמא:

נתבונן במשוואת המעגל $x^2+y^2-\mathbf{1}=\mathbf{0}$ ובמשוואת הישר $y-\mathbf{1}=\mathbf{0}$. כאן יש השקה כמתואר באיור 9, ולכן יש פתרון אחד שמידת הריבוי שלו היא 2.



איור 9: המעגל והישר המשיקים

אם נקבל את מידת הריבוי, ונתייחס למקרה כזה של פתרון שמידת הריבוי שלו היא 2 כאל 2 פתרונות – האם עכשיו יהיה נכון לומר כי אם יש שתי משוואות פולינומיאליות של שני משתנים בדרגות b ו-d אז מספר הפתרונות **שווה** ל- bd?

מסתבר שלא, עדיין יהיו מצבים שבהם מספר הפתרונות נמוך מ- bd. שוויון יתקיים **תמיד** רק אם נספור גם את הנקודות ש"ברחו" לאינסוף.

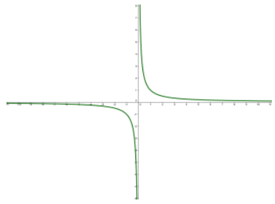
ושוב, נרצה שההרחבה שלנו למישור הרגיל תהיה כזאת שהעולם המורחב שלנו יכיל גם את הפתרונות ש"בורחים" לאינסוף, וכך המצב ה"יוצא מן הכלל" של מספר פתרונות הנמוך מ- bd לא יתקיים, ויהיה נכון לומר כי ב**כל** מערכת של שתי משוואות פולינומיאליות של שני משתנים בדרגות b ו-d מספר הפתרונות **שווה** ל- bd.[3]

הפונקציה $f(x)=\dfrac{1}{x}$

נתבונן בפונקציה $f(x)=\dfrac{1}{x}$. כפי שניתן לראות באיור 10: גרף הפונקציה f(x)=1/xזוהי פונקציה המוגדרת **כמעט** בכל הישר R. הפונקציה הפיכה בתחום הגדרתה ואפילו הפוכה לעצמה. למעשה

[3] המקרים של הישרים המקבילים ושל חתכי החרוט הם מקרים פרטיים של מקרה זה.

$f: R \setminus \{0\} \to R \setminus \{0\}$. אם נתבונן בפונקציה בסביבת הנקודה שבה $x = 0$ נראה כי הפונקציה "בורחת" לאינסוף.



איור 10: גרף הפונקציה f(x)=1/x

אנחנו נרצה שההרחבה שלנו למישור הרגיל תהיה כזאת שבעולם המורחב פונקציה זו תוכל להיות מוגדרת ל**כל** x ללא "יוצא מן הכלל", ועדיין תהיה הפיכה, והפוכה לעצמה.

הצורך בהרחבה – סיכום

ראינו ארבע דוגמאות שבהן העולם הרגיל שלנו אינו שלם, ויש בו מקרים "יוצאים מן הכלל":

1. שני ישרים שונים נחתכים **בדרך כלל** בנקודה יחידה, אך במקרה שהם מקבילים נקודת החיתוך "בורחת" לאינסוף.
2. **בדרך כלל** המצב ההדדי של חתך חרוט ושל ישר יכול להיות: נחתכים, משיקים או לא נחתכים. אולם, ישנם מצבים חריגים: כמו בפרבולה – שיש ישר **החותך** אותה בנקודה יחידה, ונקודת החיתוך השניה "בורחת" לאינסוף, וכמו בהיפרבולה – שיש ישר שהוא **כמעט** משיק לה, אך נקודת **ההשקה** "בורחת" לאינסוף.
3. **בדרך כלל** למערכת של שתי משוואות פולינומיאליות בשני משתנים בדרגות b ו-d יש **בדיוק** bd פתרונות (אם נספור גם פתרונות בעולם המרוכב, ופתרונות בעלי מידה מרובה). אולם לפעמים חלק מהפתרונות "בורחים" לאינסוף ואז מספר הפתרונות **נמוך** מ- bd.
4. הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ מוגדרת **כמעט** לכל x. בתחום הגדרתה היא הפיכה והפוכה לעצמה.

   אך בנקודה שבה $x = 0$ הפונקציה "בורחת" לאינסוף ולכן היא אינה מוגדרת בנקודה זו.

בכל המקרים הנ"ל חשנו את ההפסד כשמוגבלים לעולם הרגיל. בכל המקרים מתקבלת תחושה שאם נוסיף לעולם הרגיל שלנו את "נקודות האינסוף" הללו נוכל לקבל הרחבה שתהווה עולם שלם יותר, ללא כל ההפרעות המתוארות.

לאחר שהבנו מדוע נחוצה הרחבה לעולם הרגיל, ננסה עתה לראות כיצד ניתן לבצע את ההרחבה המתבקשת ולמצוא אובייקטים מתמטיים המאפשרים עולם יותר שלם וסדיר.

תיאור ההרחבה באופן אינטואיטיבי

נתחיל דווקא בפונקציה $f(x)=\frac{\mathbf{1}}{x}$. נרצה שהפונקציה תהיה מוגדרת לכל x, ושהיא תישאר הפיכה, והפוכה לעצמה.

נניח שנגדיר כי $f(\mathbf{0})=*$. במצב כזה הפונקציה תהיה "שלמה" ונוכל לומר כי $f:R\rightarrow R\cup\{*\}$. על מנת שהיא תהיה הפיכה, היא תצטרך להיות חח"ע ועל. במקרה כזה נצטרך כי גם ל-0 (בטווח) יהיה מקור (בתחום) שיקיים $f(x)=\mathbf{0}$ כדי שהפונקציה תהיה על הטווח. על מנת לשמור על כך שהפונקציה חח"ע נצטרך להרחיב גם את התחום להיות: $R\cup\{*\}$. ואז נגדיר כי $f(*)=\mathbf{0}$. כך נקבל פונקציה חדשה, הפיכה: $f:R\cup\{*\}\rightarrow R\cup\{*\}$, שמקיימת:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\mathbf{1}}{x} & , \quad x\neq\mathbf{0},* \\ * & , \quad x=\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & , \quad x=* \end{cases}$$

. קל לראות כי הפונקציה ההפוכה היא הפונקציה הזו עצמה.

זוהי כמובן הרחבה במקרה החד-ממדי, הרחבנו את הישר R להכיל את נקודת האינסוף שסומנה ב-*.

הרחבה זו מתאימה לציפיותינו ש:

$$\lim_{x\rightarrow\mathbf{0}}(\frac{\mathbf{1}}{x})=\infty$$

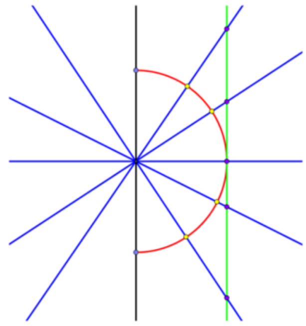
$$\lim_{x\rightarrow\infty}(\frac{\mathbf{1}}{x})=\mathbf{0}$$

באופן זה פתרנו את הבעיה האחרונה שהוצגה, לגבי הפונקציה $f(x)=\frac{\mathbf{1}}{x}$. אך זהו פתרון נקודתי למקרה זה. איך נרחיב את העולם הרגיל באופן כללי יותר, שיתן מענה לכל המקרים שהוצגו לעיל?

הישר הפרויקטיבי

אנחנו רוצים להרחיב את הישר האפיני הרגיל R כך שנוסיף לו "נקודת אינסוף". איך נמצא נקודה שאיננה חלק מ-R?

נתבונן בחצי הימני של מעגל היחידה (באדום), ובישר $x=\mathbf{1}$ (בירוק), כמתואר באיור 11. נעביר ישר (כחול) דרך מרכז המעגל (ראשית הצירים) אל **כל** נקודה על הישר.



איור 11: הרחבת הישר הרגיל לישר פרויקטיבי

ברור כי הישר הירוק ($x=1$) שקול לישר R. בדרך זו לכל נקודה (סגולה) על הישר הירוק, יש בדיוק נקודה אחת (צהובה) המתאימה לה על חצי המעגל האדום (נקודת ההשקה היא כמובן גם סגולה וגם צהובה), וכן בדיוק ישר אחד (כחול) מתאים לה העובר דרך ראשית הצירים.

נשים לב כי ציר ה-y (הקו השחור) הוא הישר **היחיד** העובר דרך ראשית הצירים שלא הותאם לאף נקודה על הישר הירוק! לכן, אם כל ישר כחול מייצג נקודה על הישר R, אז הישר השחור יכול להוות נקודה נוספת, ולייצג את "נקודת האינסוף" שחיפשנו.

באופן דומה, נשים לב כי נקודות הקצה של חצי המעגל האדום הן הנקודות **היחידות** על חצי המעגל שלא הותאמו לאף נקודה על הישר הירוק! לכן, אם כל נקודה על חצי המעגל מייצגת נקודה על הישר R, אז נקודות הקצה יכולות להוות נקודות נוספות, ולייצג את "נקודות האינסוף" שחיפשנו. אם נתבונן בנקודות על חצי המעגל האדום נראה כי שתי נקודות הקצה של חצי המעגל הן הנקודות היחידות על חצי המעגל שנמצאות על אותו ישר העובר דרך ראשית הצירים. לכן, אם נסתכל על הישר הפרויקטיבי כעל **כל** נקודות חצי המעגל האדום - נזהה בין שתי נקודות הקצה שלו, ובכך בעצם נסגור אותו להיות **מעגל** אדום. הנקודה של חיבור שתי נקודות הקצה היא "נקודת האינסוף".

מעניין לשים לב כי מישר אינסופי עברנו לחצי מעגל, חסום. הוספנו רק נקודה אחת לשני הקצוות, ובעצם מבחינה טופולוגית הפכנו את הישר למעגל (כל נקודותיו של המעגל חוץ מאחת הן נקודות רגילות של הישר הרגיל, והנקודה האחרונה היא "נקודת האינסוף" שהוספנו. היתרון הגדול בגישה זו הוא שהפכנו ישר לא קומפקטי לעצם קומפקטי, וכך אין לאן "לברוח". חשבנו שהוספנו נקודה, והגדלנו את היקום, אבל בפועל סגרנו, והיקום הפך לקטן מאד.[4]

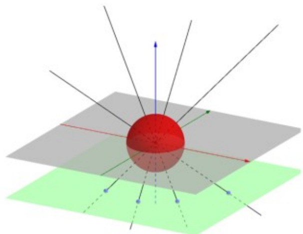
המישור הפרויקטיבי

באופן דומה נרחיב גם את המישור הרגיל R^2.

---

[4] המצב המעגלי הזה איננו טוב לחשבון, כי אי אפשר לדבר על מספרים שליליים. מתחילים ללכת מ-x לכיוון חיובי ופתאום נמצאים בצד השני של 0, כי סגרנו את הישר. אם נתבונן בהתנהגות הפונקציה שקיבלנו כשהרחבנו את הפונקציה $f(x)=\dfrac{1}{x}$ נראה כי גם שם תתקבל התנהגות דומה. ואכן, בגיאומטריה פרויקטיבית לא מדברים על גדלים ואין אריתמטיקה, כפי שנראה להלן. מרחקים אינם נשמרים. הטופולוגיה נשמרת באופן חלקי. ברוב הנקודות יש דמיון, אבל קרוב לנקודות האינסוף ניתקל בהתנהגות שונה. בישר R נקודות השואפות ל-∞ רחוקות מאד מנקודות השואפות ל-$-\infty$, אך בישר הפרויקטיבי הן קרובות.

נתבונן בחצי התחתון של כדור היחידה (באדום), ובמישור $Z=-\mathbf{1}$ (בירוק), כמתואר באיור 12. נעביר ישר דרך מרכז הכדור (ראשית הצירים) אל כל נקודה על המישור.



איור 12: הרחבת המישור הרגיל למישור פרויקטיבי

ברור כי המישור הירוק ($Z=-\mathbf{1}$) שקול למישור R^2. בדרך זו לכל נקודה על המישור הירוק, יש בדיוק נקודה אחת המתאימה לה על שפת חצי הכדור האדום (נקודת החיתוך של הישר עם הכדור), וכן בדיוק ישר אחד (שחור) מתאים לה העובר דרך ראשית הצירים.

נשים לב כי כל הישרים העוברים בראשית הצירים שהם מוכלים במישור האפור לא הותאמו לאף נקודה על המישור הירוק! לכן, אם כל ישר שחור מייצג נקודה על המישור R^2, אז הישרים המוכלים במישור האפור יהיו "נקודות באינסוף".

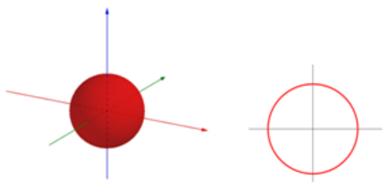
באופן דומה, נשים לב כי כל הנקודות על "קו המשווה" של חצי הכדור האדום (חיתוכו עם המישור האפור) הן הנקודות על חצי הכדור שלא הותאמו לאף נקודה על המישור הירוק! לכן, אם כל נקודה על חצי הכדור מייצגת נקודה על המישור R^2, אז נקודות "קו המשווה" שלו יכולות להוות נקודות נוספות, ולייצג את "ישר האינסוף" שכל נקודותיו הן "נקודות אינסוף" של המישור המורחב.

כמו שקודם הישר הפך למעגל כך עכשיו המישור הפך לכדור.

המרחב הפרויקטיבי ה-n ממדי

באופן דומה נוכל להרחיב כל מרחב מהצורה R^n למרחב פרויקטיבי n ממדי.

אם בישר (מרחב חד-ממדי) השתמשנו בחלק ממעגל שהוא ספירה דו-ממדית, ובמישור (מרחב דו-ממדי) השתמשנו בכדור שהוא ספירה תלת-ממדית (ראה איור 13), אז במרחב ה-n ממדי – נשתמש בספרה n+1 ממדית.



איור 13 : מעגל - ספירה דו-ממדית, וכדור - ספירה תלת-ממדית

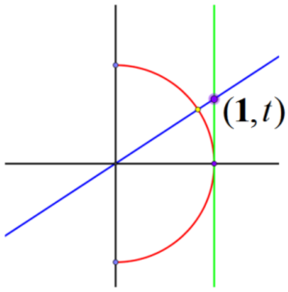
מימוש מתמטי של ההרחבה

בפרק הקודם תארנו את ההרחבה של העולם הרגיל לעולם הפרויקטיבי באופן אינטואיטיבי. מתמטיקאים יאמרו שתארנו את ההרחבה ב"נפנוף ידיים". בפרק זה נראה איך הופכים את ההרחבה לפורמאלית.

הישר הפרויקטיבי

ראינו כי את כל נקודות הישר אפשר להתאים באופן חד-חד-ערכי לישרים העוברים דרך נקודה נתונה (ראשית הצירים), אבל יש כיוון הסתכלות אחד ללא נקודה מתאימה.

ניזכר כי הישר הירוק באיור 11 הוא $x = \mathbf{1}$ (השקול כמובן לישר R).



איור 14 : מישר במישור הרגיל לנקודה בישר הפרויקטיבי

נתבונן בישר כלשהו העובר דרך הנקודה $(\mathbf{0,0})$ (ראה איור 14) ומשוואתו: $y = tx$ או: $tx - y = \mathbf{0}$ או: $\mathbf{2}tx - \mathbf{2}y = \mathbf{0}$, או למעשה: $ax + by = \mathbf{0}$, בתנאי ש: $a = -tb$. כל משוואה כזו תתן ישר, בתנאי ש: a ו-b אינם מתאפסים בו זמנית.

אם הישר $y = tx$ שקול לישר $ax + by = \mathbf{0}$, בתנאי ש: $a = -tb$, אז אפשר לזהות כל ישר מהצורה $ax + by = \mathbf{0}$ עם הנקודה $t = -\dfrac{a}{b}$, וכמובן למשוואות שקולות נקבל אותה נקודה. נשים לב כי כאשר $b \to \mathbf{0}$ הנקודה t "בורחת" לאינסוף.

כל קו ישר כזה העובר דרך ראשית הצירים מתואר על ידי זוג סדור $(a,b) \neq (\mathbf{0,0})$. נסמן את קבוצת הישרים העוברים דרך הראשית: $L = \{(a,b) \mid (a,b) \neq (\mathbf{0,0})\}$. ניתן להגדיר בקבוצה L יחס שקילות שבו לכל $\lambda \neq \mathbf{0}$ מתקיים כי: $(a,b) \approx (\lambda a, \lambda b)$. קל להראות כי יחס כזה הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי ולכן הוא יחס שקילות, ולכן יש קבוצת מנה.

אם נסתכל על הזוג $(\mathbf{1}, t)$ הוא מתאים לנקודה t בישר R. נבחר לייצג כל מחלקת שקילות ע"י זוג סדור כזה, כך שבמייצג של כל מחלקת שקילות שעור ה-x ישאר תמיד 1, ו-t יכול לקבל כל ערך ב-R כולל 0 (במקרה של הישר האופקי). אם ניקח את הנקודה $(\mathbf{0,1})$ כנקודה הנוספת - היא תתאים לישר $x = \mathbf{0}$, וכך מצאנו נקודה נוספת שאינה חלק מהישר הרגיל R, וביחד איתה יש לנו התאמה חד-חד-ערכית **לכל** הישרים העוברים דרך ראשית הצירים. כל הנקודות יחד מהוות את הישר הפרויקטיבי.

נשים לב כי כל נקודה המיוצגת בישר R ע"י מספר אחד, מיוצגת בישר הפרויקטיבי ע"י **זוג מספרים**, אבל היחס ביניהם הוא הקובע, ולכן במקום לכתוב (x,y) נכתוב כך: $[x:y]$. אנו עוסקים רק בזוגות כאלה שמקיימים $[\mathbf{0}:\mathbf{0}]\neq[x:y]$, וכן מתקיים: לכל $\lambda\neq\mathbf{0}$ ש: $[x:y]\approx[\lambda x:\lambda y]$.

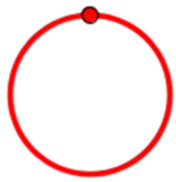
מבחינה גיאומטרית כל נקודה (x,y) במישור הרגיל (R^2) – הישר העובר דרכה ודרך ראשית הצירים מהווה **נקודה** בישר הפרויקטיבי!

נסמן ב- P^1 את הישר הפרויקטיבי. ברור כי הוא הרחבה של הישר הרגיל ולכן: $R^1\subset P^1$. איך הישר הרגיל R^1 "יושב" בתוך הישר הפרויקטיבי P^1? – לכל נקודה t מתקיים כי: $t\approx[\mathbf{1}:t]$ והחלק הנוסף שקיים בישר הפרויקטיבי ולא בישר הרגיל הוא: $P^1\setminus R^1=[\mathbf{0}:\mathbf{1}]$.

אבל, זו אינה הדרך היחידה להכניס את R^1 לתוך P^1. בדרך דומה, אם נתחיל בישר $y=\mathbf{1}$ ובחצי העליון של מעגל היחידה, נקבל כי: $s\approx[s:\mathbf{1}]$ ו: $P^1\setminus R^1=[\mathbf{1}:\mathbf{0}]$.

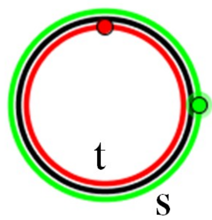
בדרך הראשונה "נקודת האינסוף" היתה $[\mathbf{0}:\mathbf{1}]$, ובדרך השניה "נקודת האינסוף" תהיה $[\mathbf{1}:\mathbf{0}]$.

קודם הסתכלנו על הישר הפרויקטיבי כאל מעגל. בלי נקודה אחת זה R^1, ואם נוסיף את הנקודה הזו ("נקודת האינסוף") - מתקבל המעגל השלם שהוא P^1 (ראה איור 15).



איור 15: המעגל המייצג את הישר הפרויקטיבי

הישר האפיני הוא R^1 ו- t היא נקודה אפינית. נתאר את הישר הפרויקטיבי בדרך הראשונה שראינו, ע"י המעגל האדום, ונתאר את הישר הפרויקטיבי בדרך השניה שראינו, ע"י המעגל הירוק, כמתואר באיור 16.



איור 16: שני מעגלים המייצגים את הישר הפרויקטיבי בשתי דרכים

מתברר, שהנקודה ה"מיוחדת" שהוספנו למעגל האדום, היא נקודה רגילה לחלוטין כשמתבוננים ב"חלון" הירוק, וכמובן גם להיפך. בדרך זו אם נתבונן בשני ה"חלונות" נוכל לראות את כל הנקודות בישר הפרויקטיבי כנקודות רגילות.[5]

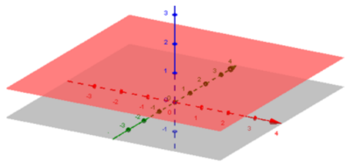
מה היחס בין s ל-t? - בכל הנקודות חוץ מהנקודות המסומנות קיים t אדום ו-s ירוק ומתקיים: $[\mathbf{1}:t]\approx t=s\approx[s:\mathbf{1}]$ ולכן: $s=\frac{\mathbf{1}}{t}$ ו: $t=\frac{\mathbf{1}}{s}$. כך נוכל לעבור מ"חלון" אחד לאחר ולתאר אותה נקודה בדרכים שונות.

נניח שמישהו יכול לראות בכל שדה הראיה חוץ מבנקודה אחת בעורפו. אם הוא מסתובב הוא רואה הכל חוץ מנקודה אחרת. אם הוא עומד רגע כך ורגע כך הוא יכול "לכסות" את כל הנקודות. באופן דומה על כל נקודה בישר הפרויקטיבי ניתן להסתכל דרך ה"חלון" האדום או דרך ה"חלון" הירוק ולראותה כנקודה רגילה, וכמובן על רוב הנקודות ניתן להסתכל כך דרך שני ה"חלונות".

המישור הפרויקטיבי

כאשר דיברנו על הישר הפרויקטיבי – כל ישר (במישור) העובר דרך ראשית הצירים בעולם הרגיל - היה נקודה בישר הפרויקטיבי. כדי למנוע בלבול בין נקודה בעולם הרגיל לבין *נקודה* כזו בעולם הפרויקטיבי – נקדיש מעתה גופן מיוחד לציון *נקודות* כאלו, בעולם הפרויקטיבי.

אם ב*ישר* הפרויקטיבי כל *נקודה* היתה זוג: $[x:y]\neq[\mathbf{0}:\mathbf{0}]$ וכן מתקיים: לכל $\lambda\neq\mathbf{0}$ ש: $[x:y]\approx[\lambda x:\lambda y]$, אז ב*מישור* הפרויקטיבי (מרחב פרויקטיבי דו-ממדי) כל *נקודה* (שגם היא למעשה מהווה ישר העובר דרך ראשית הצירים במרחב התלת-ממדי הרגיל) תהיה שלשה: $[x:y:z]\neq[\mathbf{0}:\mathbf{0}:\mathbf{0}]$ וכן מתקיים: לכל $\lambda\neq\mathbf{0}$ ש: $[x:y:z]\approx[\lambda x:\lambda y:\lambda z]$.

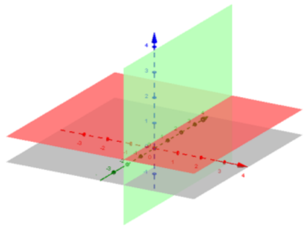


איור 17 : המישור Z=1

על מנת לראות איך מישור ה-XY הרגיל מוכל בתוך ה*מישור* הפרויקטיבי הזה נתבונן באיור 17. נזהה בין נקודה (x,y) לבין השלשה $[x:y:\mathbf{1}]$, שמתארת כמובן נקודה כללית על המישור $Z=\mathbf{1}$ (האדום) המקביל למישור ה-XY (האפור) הרגיל (וכמובן שקול לו). כל נקודה על מישור זה מזוהה עם הישר המחבר אותה לראשית הצירים, והיא מהווה *נקודה* ב*מישור* הפרויקטיבי.

באופן זה "כמעט" כל הישרים העוברים דרך ראשית הצירים מיוצגים על ידי שלשות כאלה, מלבד הישרים המוכלים במישור ה-XY. לצורך כך נניח שה"חלון" שבו עסקנו עד עכשיו הוא "חלון" אדום, ונבנה "חלון" חדש, ירוק, באופן דומה.

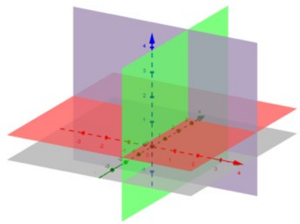
[5] אם נחשוב על דוגמת פסי הרכבת הנקודה שנראית מכאן כנקודת האופק היא בוודאי נקודה רגילה, וכשנתבונן מנקודה זו על הנקודה שבה אנחנו עומדים כעת – דווקא היא תראה כאילו היא נקודת אופק.



איור 18 : המישור Z=1 והמישור X=1

הפעם (ראה איור 18) נסתכל על המישור $X=\mathbf{1}$ (הירוק). ואז כל נקודה (y,z) תזוהה עם השלשה $[\mathbf{1}:y:z]$.

עכשיו כבר כיסינו את רוב הישרים העוברים דרך ראשית הצירים. ב"חלון" הירוק נמצאים כל הישרים שאינם מקבילים למישור $X=\mathbf{1}$. אך, אם נתבונן בציר ה-y, נראה כי הוא לא מיוצג לא ב"חלון" האדום ולא ב"חלון" הירוק.



איור 19 : המישור Z=1, המישור X=1 והמישור Y=1

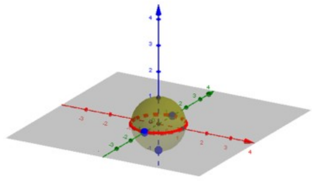
לצורך כך נבנה "חלון" שלישי, סגול, באופן דומה (ראה איור 19), כאשר הפעם נסתכל על המישור $Y=\mathbf{1}$. עכשיו נזהה כל נקודה (x,z) עם השלשה $[x:\mathbf{1}:z]$.

עכשיו **כל** אחד מהישרים העוברים דרך ראשית הצירים במרחב התלת-ממדי מהווה *נקודה* במרחב הפרויקטיבי הדו-ממדי שבנינו.

ב"חלון" האדום נראה *נקודות* מהצורה: $[x:y:\mathbf{1}]$, ב"חלון" הירוק נראה *נקודות* מהצורה: $[\mathbf{1}:y:z]$ וב"חלון" הסגול נראה *נקודות* מהצורה: $[x:\mathbf{1}:z]$.

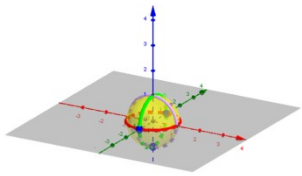
יש *נקודות* שאינן נראות ב"חלון" האדום, אך נראות ב"חלונות" האחרים. לדוגמא, ה*נקודה*: $[x:y:\mathbf{0}]$ אינה נראית ב"חלון" האדום, שבו יש רק *נקודות* מהצורה: $[x:y:\mathbf{1}]$ אולם היא יכולה להיראות ב"חלון" הירוק, או ב"חלון" הסגול. אם ה*נקודה* היא $[\mathbf{0}:\mathbf{1}:\mathbf{0}]$ אז היא לא תיראה ב"חלון" האדום, וגם לא ב"חלון" הירוק אבל כן ב"חלון" הסגול!

כל ה*נקודות* שניתן לראות לפחות באחד משלושת ה"חלונות" מהוות ביחד את ה*מישור* הפרויקטיבי, או: המרחב הפרויקטיבי הדו-ממדי P^2.



איור 20 : ה׳ישר באינסוף לפי ה״חלון״ האדום

אם נתבונן בנקודות שעל פני כדור היחידה המתואר באיור 20, ונזהה כל שני קצוות של קוטר, אז : ״קו המשווה״ של הכדור הוא ה״ישר באינסוף״ לפי ה״חלון״ האדום. כל שאר הנקודות יראו ב״חלון״ זה כנקודות רגילות.



איור 21 : ה׳ישרים באינסוף לפי שלושת ה״חלונות״

באופן דומה המעגל הירוק באיור 21 הוא ה״ישר באינסוף״ לפי ה״חלון״ הירוק, וכמובן המעגל הסגול הוא ה״ישר באינסוף״ לפי ה״חלון״ הסגול. כל יתר הנקודות יראו **בכל** ה״חלונות״ כנקודות רגילות.

המרחב הפרויקטיבי ה-n ממדי

כמובן, כשם שהרחבנו את R^1 ל- P^1 , וכשם שהרחבנו את R^2 ל- P^2, ניתן באופן אנלוגי להרחיב גם את R^n ל- P^n, כאשר כל נקודה תהיה וקטור עם $n+1$ רכיבים.

כיצד מחשבים בעולם הפרויקטיבי?

לאחר שהכרנו את העולם הפרויקטיבי נרצה לדעת איך ניתן לבצע חשבון בתוך העולם הזה? בעולם הפרויקטיבי אין גדלים, ולא נרצה לבצע אריתמטיקה. לנקודות הנוספות אין סימן ולכן מאבדים את היכולת לומר איפה הסימן חיובי ואיפה הוא שלילי. עם זאת, כן אפשר להתעניין בעולם הפרויקטיבי בפתרון משוואות, במציאת נקודות חיתוך וכדומה. בהחלט ניתן לפתור משוואות בעולם שתארנו, רק צריך לזכור להשתמש ב"חלונות" שונים.

איך פותרים משוואות?

אם נרצה לבנות משוואה המתארת נקודה אחת או יותר בישר הפרויקטיבי אז זו תצטרך להיות משוואה עם שני משתנים כי לכל נקודה יש שתי קואורדינטות.

לצורך ההמשך נגדיר כאן את מושג ההומוגניות.

הגדרה: פונקציה הומוגנית מסדר n היא פונקציה, שכאשר **כל** הארגומנטים בה מוכפלים במספר קבוע c, ערך הפונקציה מוכפל ב- c^n.

כל משוואה בשני משתנים שנעסוק בה תהיה הומוגנית כי: $(x,y)\approx(\lambda x,\lambda y)$ ולכן צריך להתקיים כי: $p(x,y)=0 \Leftrightarrow p(\lambda x,\lambda y)=0$ עבור כל $\lambda\neq 0$.

נראה כי פולינום שבו כל האיברים הם באותה דרגה הוא פולינום הומוגני. קל לראות כי הפולינום $p(x,y)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i y^{n-i}$ הוא פולינום בשני משתנים, שבו כל האיברים הם באותה דרגה n. נראה כי הוא הומוגני מסדר n:

$$p(\lambda x,\lambda y)=\sum_{i=0}^{n}a_i(\lambda x)^i(\lambda y)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^{i+n-i}x^i y^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^n x^i y^{n-i}=\lambda^n\sum_{i=0}^{n}a_i x^i y^{n-i}=\lambda^n p(x,y)$$

לכן כשכופלים פי λ לא משנים את ההתאפסות.

מסקנה: אפשר לתאר קבוצה של נקודות בישר הפרויקטיבי על ידי פולינום הומוגני בשני משתנים.

באופן זה ניתן להראות שלמשוואה הומוגנית מדרגה 2 יהיו **תמיד** שני פתרונות, בניגוד לעולם הרגיל.

אם הפולינום הוא מדרגה 2 אז המשוואה תהיה: $ax^2+bxy+cy^2=0$.

נרצה לדעת מה נראה ב"חלון" האדום, כלומר בצורה: $[1:t]$, ומה ב"חלון" הירוק, כלומר בצורה: $[s:1]$. נציב כל אחד מהם במשוואה ונקבל:

$$\begin{cases} a+bt+ct^2=0 \\ as^2+bs+c=0 \end{cases}$$ שתי המשוואות הללו הן אותה משוואה בשני "חלונות" שונים!

בדרך כלל נראה את שני הפתרונות גם ב"חלון" הירוק, וגם ב"חלון" האדום, מלבד כמה מקרים נדירים, שבהם פתרונות "בורחים" לאינסוף. למשל כאשר $c = \mathbf{0}$, המשוואה הראשונה הפכה ללינארית, ובמשוואה השניה נקבל שאחד הפתרונות הוא $s = \mathbf{0}$. זו הנקודה שלא רואים ב"חלון" האדום שהרי $t = \dfrac{\mathbf{1}}{s}$.

האם יתכן ששני הפתרונות "בורחים" לאינסוף? – כן, אם גם $b = \mathbf{0}$ (a לא! כי לא יתכן שכולם מתאפסים בו זמנית) נקבל משוואה שאין לה פתרון בכלל ב"חלון" האדום אבל יש לה פתרון כפול ב"חלון" הירוק. כך, לדוגמא, למשוואה $\mathbf{1} = \mathbf{0}$ שהיא חסרת משמעות בעולם הרגיל, כאן יש משמעות, ושני הפתרונות שלה "ברחו" לאינסוף, ולכן נראה אותם כפתרון כפול ב"חלון" אחר.

בדרך זו קל לראות כי עכשיו כבר אין "יוצאים מן הכלל", ו**תמיד** יהיו למשוואה כזו שני פתרונות, השאלה היא רק כמה מהם רואים בכל "חלון".

חיתוך של *ישרים*

עד עתה ביצענו חישובים ב*ישר* הפרויקטיבי. עכשיו נחשב ב*מישור* הפרויקטיבי. איך נראה *ישר* ב*מישור* הפרויקטיבי? - באופן כללי *ישר* פרויקטיבי הוא כמו מישור דו-ממדי בעולם הרגיל.

באופן דומה גם *מישור* פרויקטיבי הוא כמו מרחב תלת-ממדי בעולם הרגיל, כי לכל *נקודה* יש שלוש קואורדינטות.

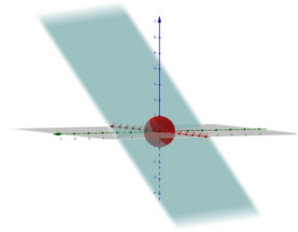
במישור הרגיל משוואה של פולינום לינארי המתאר קו ישר היא הצורה: $ax + by + c = \mathbf{0}$. אם נכפול במספר (שונה מאפס) הישר ישאר אותו ישר. אבל אם $a, b = \mathbf{0}$ ואילו $c \neq \mathbf{0}$ אז הישר "נעלם". כלומר: אנחנו לא רואים נקודות שמקיימות את משוואתו. לאן "ברחו" כל הנקודות? – לאינסוף. בנינו את העולם הפרויקטיבי כדי לקבל "עולם מושלם" בלי "הפרעות" כאלו.

נתבונן באותה משוואה כמעט (שהרי לכל *נקודה* יש שלוש קואורדינטות) בעולם הפרויקטיבי: $aX + bY + cZ = \mathbf{0}$. נשים לב שעבור $(x, y, \mathbf{1})$ שהוא החלק הרגיל בתוך העולם הפרויקטיבי נקבל אותה משוואה! כאשר $Z = \mathbf{0}$ נקבל את ה*נקודות* באינסוף שעל ה*ישר*.

איך עושים ויזואליזציה? איך ניתן "לראות" את ה*ישרים* ב*מישור* הפרויקטיבי?

במרחב תלת-ממדי רגיל משוואה כזאת לא תיצג ישר אלא מישור. כאמור, כל *נקודה* פרויקטיבית היא ישר בעולם הרגיל, וכל *ישר* פרויקטיבי הוא מישור בעולם הרגיל. זה בניגוד לאינטואיציה שלנו, ולכן קשה לנו "לראות" את זה.

איך פותרים זאת?



איור 22 : ויזואליזציה של ישר פרויקטיבי

אחת הדרכים האפשריות היא להסתכל על הכדור (שמייצג, כאמור את המישור הפרויקטיבי) ולבדוק איפה המישור חותך את הכדור, כמתואר באיור 22. החיתוך יהיה במעגל והמעגל הזה הוא הישר הפרויקטיבי הנדון. על מנת למנוע כפילויות אפשר לזהות נקודות שהן קצוות של אותו קוטר או לקחת מראש חצי כדור, מצומצם.[6]

אם נבצע הטלה ממרכז הכדור דרך שפתו על מישור ה"רצפה" (לדוגמא) אז כל מעגל כזה יתן ישר במישור - וזה החלק הרגיל בתוך המישור הפרויקטיבי. אבל "קו המשווה" הוא הישר באינסוף והטלה שלו לא תגיע למישור ה"רצפה". ישרים מקבילים יתקבלו מישרים שעוברים דרך אותן נקודות אינסוף (על "קו המשווה"). כשנקבל חיתוך (*) על הכדור נקבל גם במישור הרגיל חיתוך (*), אבל חיתוך בנקודות האינסוף – יתן במישור הרגיל ישרים מקבילים.

איך נמצא את נקודת החיתוך של שני ישרים?

בגיאומטריה אנליטית רגילה כותבים מערכת משוואות של שני הישרים:

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ ופותרים את המערכת. אחד המקדמים הקשורים (a או b) שונה מאפס, מבודדים, מציבים, ופותרים.

לפעמים מתאפסת הדטרמיננטה: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ ואז הקוים מקבילים ואין פתרון.[7] נראה כי הסיבוך הזה נעלם במישור הפרויקטיבי. מערכת המשוואות המתקבלת עבור שני ישרים היא:

$\begin{cases} a_1X + b_1Y + c_1Z = 0 \\ a_2Z + b_2Y + c_2Z = 0 \end{cases}$. אם שני הישרים שונים אז המישורים לא מקבילים ואז אחד המינורים (הדטרמיננטה של המטריצה הריבועית שתתקבל לאחר מחיקת עמודה אחת) שונה מאפס. אם זה המינור המתקבל כשמורידים את העמודה החופשית (השלישית) – אז זה המקרה הרגיל: יש

[6] למעשה גם חצי הכדור הזה אינו שלם וצריך להוריד נקודות משפתו כך שניקח רק חצי מ"קו המשווה" שלו, וגם בחצי הזה ניקח רק אחת משני קצות הקוטר.

[7] מי שאינו מכיר את נושא הדטרמיננטות יכול לדלג לדוגמא שבסוף סעיף זה, שלאחריה מגיעה הכללה.

חיתוך אחד רגיל. אבל אם זה המינור המתקבל על ידי העמודה הראשונה - זה אומר ששני ה*ישרים* נחתכים ב*נקודת* אינסוף.

וכך **כל** שני *ישרים* פרויקטיביים שונים נחתכים ב*נקודה* יחידה ואין בכלל *ישרים* מקבילים!

דוגמא:

נתבונן במשוואות של שני ישרים בעולם הרגיל: $\begin{cases} x+2y=1 \\ x+2y=2 \end{cases}$. קל לראות כי בעולם הרגיל משוואות אלו מתארות שני ישרים מקבילים שאין להם נקודת חיתוך ולמערכת המשוואות אין פתרון. מה יקרה בעולם הפרויקטיבי? נעבור למשוואות הומוגניות: $\begin{cases} X+2Y-Z=0 \\ X+2Y-2Z=0 \end{cases}$. אם נחפש את הפתרון המייצג את נקודת החיתוך של ה*ישרים* ונקבל מיד כי $Z=0$. אכן, *נקודת* החיתוך של הישרים היא *נקודת* אינסוף. עבור המשך הפתרון יש דרגת חופש אחת ולכן פתרון אפשרי הוא: $Y=1$ ו- $X=-2$ (וכמובן $Z=0$). כלומר: ה*ישרים* אינם מקבילים. קיימת *נקודת* חיתוך יחידה (זו ש"ברחה" לאינסוף, ואפילו מצאנו אותה (-2:1:0).

ובאופן כללי: כל מערכת של שתי משוואות המייצגות שני ישרים מקבילים בעולם הרגיל ניתן להביא לצורה הבאה: $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ax+by+d=0 \end{cases}$ בהנחה ש- $c \neq d$. כשנעבור לקואורדינטות הומוגניות תתקבל המערכת: $\begin{cases} aX+bY+cZ=0 \\ aX+bY+dZ=0 \end{cases}$. קל לראות כי יש פתרון למערכת כאשר $Z=0$, כלומר: שני ה*ישרים* אכן נחתכים ב*נקודת* אינסוף, וכך **כל** שני *ישרים* פרויקטיביים שונים נחתכים ב*נקודה* יחידה ואין בכלל *ישרים* מקבילים!

חתכי חרוט

איך נראים חתכי חרוט בעולם הרגיל?

המשוואה הכללית של חתך חרוט היא: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. במשוואה יש 6 מקדמים. נתבונן רק במקדמים של האיברים מדרגה 2, ונתבונן בדטרמיננטה: $\begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{vmatrix}$. לפי הדטרמיננטה יודעים אם חתך החרוט המסוים הוא מעגל, אליפסה, פרבולה או היפרבולה.

איך זה יראה בעולם הפרויקטיבי?

כמובן צריך לכתוב את המשוואה עם שלושה משתנים X, Y, Z, כך שעבור $(x,y,1)$ שהוא החלק הרגיל בתוך העולם הפרויקטיבי נקבל אותה משוואה. כמו כן המשוואה חייבת להיות הומוגנית, כמו כל משוואה בעולם הפרויקטיבי, כדי לשרוד כפל בקבוע. אם יחסר בדרגה נכפול ב-1 (שהוא "עקבות" של Z). באופן זה תתקבל המשוואה הריבועית ההומוגנית הבאה:

$$AX^2+BXY+CY^2+DXZ+EYZ+FZ^2=0 .$$

המטריצה המתקבלת היא: $\begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{pmatrix}$

מתברר שכמו שראינו ב*ישרים*, כשבחננו את המינורים, שההבדל בין *ישרים* נחתכים לבין *ישרים* מקבילים נעלם בעולם הפרויקטיבי, כך גם בחתכי החרוט, מבחינה פרויקטיבית ההבדל בין אליפסה, פרבולה והיפרבולה נעלם!

בגיאומטריה **אוקלידית** אם מותחים צורה – אז משנים אותה, כי יש משמעות לגודל. בגיאומטריה **אפינית** מותר למתוח צורה כי פעולת מתיחה שומרת על תלות או אי תלות לינארית, ולכן שומרת על הקבלה. בגיאומטריה **פרויקטיבית** אין צורך לשמור על הקבלה, שהרי אין ישרים מקבילים, והדרישה היחידה היא ש*ישרים* ישארו *ישרים*.

אם האליפסה היא על פני הכדור המייצג את ה*מישור* הפרויקטיבי, והאליפסה נמתחת עד שהיא משיקה ל*ישר* באינסוף - אז *נקודת* החיתוך השניה "ברחה" לאינסוף והתקבלה פרבולה. אם נגדיל עוד את האליפסה נקבל שתי *נקודות* חיתוך, וזו היפרבולה.

באליפסה – אין *נקודות* באינסוף, בפרבולה – יש אחת ובהיפרבולה – יש שתי *נקודות* באינסוף.

כאן אסימפטוטות של היפרבולה הן ה**משיקים** להיפרבולה ב*נקודות* באינסוף.

ראינו באיור 16 כי ב*ישר* הפרויקטיבי *נקודת* אינסוף יכולה להפוך ל*נקודה* רגילה ולהיפך, בהתאם ל"חלון" שבו נבחר להתבונן. באופן דומה בגיאומטריה פרויקטיבית אפשר לסובב את הקואורדינטות כך שכל *ישר* באינסוף יכול להפוך ל*ישר* רגיל ולהיפך. לכן, אם יש אליפסה שאין לה *נקודות* באינסוף, אם נתבונן ב"חלון" אחר היא יכולה לחתוך את ה*ישר* באינסוף פעם אחת, ואז היא תיראה כפרבולה, וב"חלון" נוסף היא יכולה לחתוך פעמיים את ה*ישר* באינסוף ואז היא תיראה כהיפרבולה. למעשה, המיקום של "קו המשוה" על הכדור הוא שרירותי ולכן ניתן להעבירו כך שיחתוך את האליפסה פעמיים, שישיק לה (פעם אחת) או שלא יחתוך אותה כלל. בהתאמה, נקבל את חתך החרוט כהיפרבולה, פרבולה או אליפסה.[8]

איך נבדיל בין המקרים האלה כשנקבל משוואה של חתך חרוט?

נקח את המשוואה ההומוגנית הנ"ל: $AX^2+BXY+CY^2+DXZ+EYZ+FZ^2=\mathbf{0}$. *נקודות* באינסוף זה כאשר $Z=\mathbf{0}$. נחפש פתרונות כאלה, ולכן נשאר עם משוואה אחת ריבועית: $AX^2+BXY+CY^2=\mathbf{0}$. זו משוואה הומוגנית, ורוצים לדעת כמה פתרונות יש לה. אם יש פתרון הומוגני אפשר לבחור $X=\mathbf{1}$ או $Y=\mathbf{1}$. נקבל משוואה ריבועית במשתנה אחד ואז מתקבלות

[8] בטכניקה זו אפשר להשתמש גם עבור עקומים חלקים באופן כללי, כשרוצים להעבירם מעקום שנמצא במישור הפרויקטיבי P^2 למישור הרגיל R^2. העקום מצויר על הכדור. נשרטט מעגל שרירותי שהוא "קו המשוה" המייצג את ה*ישר* באינסוף של המישור הפרויקטיבי. בהתאם יתקבלו הענפים השונים של העקום כפי שיראו במישור הרגיל.

שלוש אפשרויות: או שיש שורש כפול ואז זו פרבולה, והשורש הוא נקודת החיתוך עם הישר באינסוף, או שיש שני שורשים ממשיים ואז זו היפרבולה, או שהם דמיוניים ואז זו אליפסה.

דוגמא א':

נתבונן ב**פרבולה**: $z = y^2$ במישור ה-YZ הרגיל. כשנעבור לתאור בעולם הפרויקטיבי נניח: $x = \mathbf{1}$. על מנת לתאר זאת במשוואה הומוגנית נכתוב: $z - y^2 = \mathbf{0}$ ואיפה שחסר בדרגה נכפול ב-1, שהוא "עקבות של x". בדרך זו נקבל את המשוואה ההומוגנית: $XZ - Y^2 = \mathbf{0}$ המתארת את הפרבולה שלנו בעולם הפרויקטיבי. אם נתבונן באותה משוואה $XZ - Y^2 = \mathbf{0}$ ב"חלון" שבו $Y = \mathbf{1}$ נקבל: $xz - \mathbf{1} = \mathbf{0}$ או: $xz = \mathbf{1}$. זו משוואת **היפרבולה** במישור ה-XZ הרגיל. כלומר: מה שנראה כפרבולה ב"חלון" אחד, נראה כהיפרבולה ב"חלון" אחר!

ומה קורה למשוואה זו ב"חלון" שבו $Z = \mathbf{1}$? נקבל: $x = y^2$, כלומר שוב התקבלה **פרבולה** במישור ה-XY הרגיל!

ממש כמו שראינו שישרים הנראים ב"חלון" אחד כאילו הם מקבילים, ב"חלון" אחר רואים שהם נחתכים, כך גם כאן אותה צורה נראית בשני "חלונות" כפרבולה, וב"חלון" שלישי כהיפרבולה.

דוגמא ב':

נתבונן במשוואה: $X^2 + Y^2 - Z^2 = \mathbf{0}$ אם נציב $X = \mathbf{1}$ או $Y = \mathbf{1}$ נקבל **היפרבולה**, ואם נציב $Z = \mathbf{1}$ נקבל **מעגל**!

אם אין הבדל בין חתכי החרוט אז צריך להתקיים שתמיד המצב ההדדי של ישר ושל חתך חרוט הוא חיתוך בשתי נקודות (בהתאם להנחות שצוינו לעיל). ננסה להבין למה בעולם הפרויקטיבי לא מתקבל מצב שבו פרבולה וישר **נחתכים** רק בנקודה אחת.

דוגמא א':

ראינו כי $z - y^2 = \mathbf{0}$ היא פרבולה במישור ה-YZ הרגיל. הפכנו אותו למשוואה ההומוגנית: $XZ - Y^2 = \mathbf{0}$. נחפש את נקודות הפרבולה באינסוף. לצורך כך נציב $Z = \mathbf{0}$ ונקבל $Y^2 = \mathbf{0}$. יש כאן שורש כפול ולכן זו השקה, הישר באינסוף **משיק** לפרבולה.

ננסה עתה להבין מה המצב ההדדי בעולם הפרויקטיבי בין היפרבולה לבין הישרים שהם האסימפטוטות שלה.

דוגמא ב':

המשוואה $x^2 - y^2 - \mathbf{1} = \mathbf{0}$ מתארת היפרבולה במישור ה-XY הרגיל. נהפוך אותה למשוואה הומוגנית עם שלושה משתנים ונקבל: $X^2 - Y^2 - Z^2 = \mathbf{0}$. נחפש את נקודות ההיפרבולה באינסוף. לצורך כך נציב $Z = \mathbf{0}$ ונקבל $x^2 = y^2$. בעולם הרגיל אלו האסימפטוטות של

ההיפרבולה: $y=\pm x$. אבל בעולם הפרויקטיבי כל אסימפטוטה חותכת את הישר באינסוף בנקודה אחת. בהמשך נראה כי בנקודות אלו יש השקה בין האסימפטוטות להיפרבולה!

עקום של פולינום כללי

נניח שיש עקום אלגברי פולינומיאלי: $p(x,y)=\mathbf{0}$. נרצה לדעת איך הוא יראה בעולם הפרויקטיבי.

ראשית, נכתוב אותו כמשוואה הומוגנית בשלושה נעלמים. הפולינום הוא סכום של איברים הומוגניים בדרגות שונות: $p=p_n+p_{n-1}+\ldots+p_{\mathbf{0}}$. ב- p_n, לדוגמא, יש איברים שסכום המעריכים של x ושל y בהם הוא n. נרצה להפוך אותו להומוגני. נכתוב אותו כך: $p=p_n+Zp_{n-1}+Z^{\mathbf{2}}p_{n-2}+\ldots+Z^n p_{\mathbf{0}}$. זוהי משוואה הומוגנית, וכך נקבל: $p(X:Y:Z)=\mathbf{0}$.

נרצה לחקור את העקום הזה: לאן שואפים הענפים הלא חסומים שלו? איפה הוא חותך את הישר באינסוף?

נציב $Z=\mathbf{0}$ וכך יעלמו כל האיברים שיש בהם Z. כמו שבפולינום רגיל המקדם הראשי משפיע על ההתנהגות בסביבת ∞, כך גם כאן. p_n הוא החלק ההומוגני העליון של הפולינום, ולכן הוא המשפיע. נתבונן איך נראה p_n:

$$p_n=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}Y+\ldots+a_{\mathbf{1}}XY^{n-1}+a_{\mathbf{0}}Y^n.$$

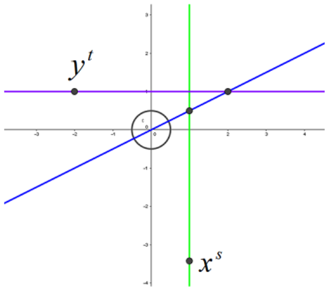
כל הפתרונות שלו הם זוגות של מספרים $[x:y]$ בישר פרויקטיבי, בישר באינסוף (כי $Z=\mathbf{0}$).

איך נזהה את הפתרונות? - כל פתרון אפשר לכתוב או בצורת $[x:\mathbf{1}]$ או בצורת $[\mathbf{1}:y]$.

אם $a_n=\mathbf{0}$ אז y הוא שורש של $p_n=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}Y+\ldots+a_{\mathbf{1}}XY^{n-1}+a_{\mathbf{0}}Y^n$ ויש סכנה לאבד אותו, ואולי זה שורש כפול!

אבל אם $a_n\neq\mathbf{0}$ אז כל השורשים הם מהצורה $[x:\mathbf{1}]$ ויש רק פתרונות שבהם $y\neq\mathbf{0}$. אם $a_{\mathbf{0}}\neq\mathbf{0}$ נמצא את כל הפתרונות מהצורה $[\mathbf{1}:y]$. ואם שניהם מתאפסים ($a_n=a_{\mathbf{0}}=\mathbf{0}$)? - אז אפשר להוציא xy מכל האיברים ולכתוב: $xy\cdot q_{n-2}([X:Y])$. אם נמשיך כך - תמיד נוכל להוציא x ו-y בחזקות מסוימות ולקבל בסוף: $x^s y^t\cdot r([X:Y])$, כאשר $r([X:Y])$ הוא פולינום הומוגני שבו לא המקדם המוביל ולא המקדם האחרון מתאפסים, ולכן נראה את כל שורשיו בשני ה"חלונות". כמובן יתכן כי $t=s=\mathbf{0}$.

לסיכום: מיון הפתרונות, כפי שניתן לראות באיור 23, יהיה כך: x^s יהיו בישר הירוק, y^t יהיו בישר הסגול, וכל יתר הפתרונות יהיו בשני הישרים.



איור 23 : מיון הפתרונות

זו שיטה המאפשרת לדבר על עקום אלגברי שמשיק לישר מסוים באינסוף.

איך עוברים מ"חלון" אחד לאחר?

במקרה של הישר הפרויקטיבי ראינו שהמעבר מ"חלון" אחד לאחר מתבצע ע"י: $s=\frac{1}{t}$ ו: $t=\frac{1}{s}$.

כבר ראינו כי ב"חלונות" שונים הדברים נראים אחרת. נתבונן במשוואה: $\sin(x)=\mathbf{0}$. קבוצת הפתרונות של המשוואה היא: $\{x=\pi n \mid n\in Z\}$. זוהי כמובן סדרה חשבונית. איך תראה קבוצת הפתרונות הזו ב"חלון" השני? - $\left\{y=\frac{\mathbf{1}}{\pi n} \mid n\in Z\right\}$ כלומר: ב"חלון" הזה היא הופכת להיות סדרת פתרונות המתכנסת לאפס!

כמו במקרה החד-ממדי גם במקרה הדו-ממדי נרצה לדעת איך עוברים מ"חלון" אחד לאחר. במקרה הדו-ממדי ההעתקה המתארת מעבר בין ה"חלונות" השונים מסובכת יותר. נתבונן במפה שהיא העתקה מהמישור הפרויקטיבי למישור הרגיל: $P^2\to R^2$, שהופכת שלשה לזוג, כך שכפל ב-k בשלשה לא ישנה בזוג. נעשה זאת בשני אופנים, כך: (x,y) כאשר $Z=\mathbf{1}$, $y=\frac{Y}{Z}$, $x=\frac{X}{Z}$

או כך: (u,v) כאשר $v=\frac{Z}{X}$, $u=\frac{Y}{X}$, $X=\mathbf{1}$. ברור כי זו אותה נקודה בשני ה"חלונות". אנחנו נרצה למצוא טרנספורמציה בין ה"חלון" של (x,y) ל"חלון" של (u,v). קל לראות כי ע"י הנוסחאות: $\begin{cases} u=\frac{y}{x} \\ v=\frac{\mathbf{1}}{x} \end{cases}$ ניתן לבצע טרנספורמציה כזו, מה"חלון" האדום, שבו הנקודות הן מהצורה: $[x:y:\mathbf{1}]$ ל"חלון" הירוק שבו הנקודות הן מהצורה: $[\mathbf{1}:y:z]$.

את המעבר מה"חלון" הירוק לסגול נסביר בדרך שונה מעט: כל נקודה ב- P^2 אפשר למצא לה לפחות נציג אחד ב: $[x:y:\mathbf{1}]\in R^2$ או ב: $[x:\mathbf{1}:z]\in R^2$, או ב: $[\mathbf{1}:y:z]\in R^2$.[9] לרוב הנקודות יש שלושה נציגים, בכל ה"חלונות". מה הקשר ביניהם?

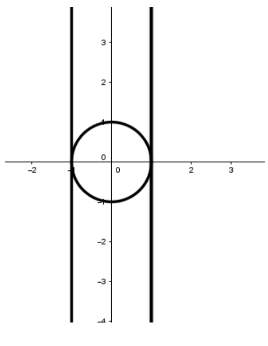
- כדי להבדיל בין הנקודות ב"חלונות" השונים נסמן אותן באותיות שונות: במקום $[\mathbf{1}:y:z]$ נכתוב $[\mathbf{1}:u:v]$, במקום $[x:\mathbf{1}:z]$ נכתוב: $[r:\mathbf{1}:s]$ ואת $[x:y:\mathbf{1}]$ נשאיר כפי שהוא.

מכיוון שמדובר באותה נקודה, לכן נקבל כי: $\begin{cases} s=v \\ ru=\mathbf{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=v \\ \frac{r}{\mathbf{1}}=\frac{\mathbf{1}}{u} \end{cases}$ ובאופן דומה במשתנים האחרים.

דוגמא א':

התבוננו קודם במשוואה $x^2-y^2=\mathbf{1}$. זוהי כמובן משוואת ההיפרבולה בקואורדינטות (x,y). נעבור לקואורדינטות (u,v).

$\begin{cases} x=\frac{\mathbf{1}}{v} \\ y=\frac{u}{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\frac{y}{x} \\ v=\frac{\mathbf{1}}{x} \end{cases}$ נחליף משתנים ונקבל: $(\frac{\mathbf{1}}{v})^2-(\frac{u}{v})^2=\mathbf{1}$. זוהי כמובן אותה היפרבולה בקואורדינטות החדשות. אבל עכשיו ניתן לכפול ב- v^2 ולקבל: $\mathbf{1}-u^2=v^2$ או: $u^2+v^2=\mathbf{1}$. כלומר: מה שרואים מכיוון אחד כהיפרבולה נראה עכשיו מעגל![10] קל לראות כי בקואורדינטות החדשות הישר באינסוף הוא כאשר $v=\mathbf{0}$. בהיפרבולה הנתונה משוואות האסימפטוטות הן: $x\pm y=\mathbf{0}$. אם נעבור לקואורדינטות (u,v) נקבל: $\frac{\mathbf{1}}{v}\pm\frac{u}{v}=\mathbf{0}$. נכפול ב-v ונקבל: $\mathbf{1}\pm u=\mathbf{0}$ או: $u=\pm\mathbf{1}$. אלו כמובן שני הישרים האנכיים לציר ה-u, המשיקים למעגל היחידה שאליו הגענו כשהעברנו את ההיפרבולה לקואורדינטות החדשות מימין ומשמאל, כמתואר באיור 24.



איור 24: המעגל ושני המשיקים

[9] ליתר דיוק $(y,z)\in R^2$, אך אנו מזהים בינו לבין $[\mathbf{1}:y:z]$, ובדרך דומה לגבי שאר הנקודות.

[10] שני החצאים של ההיפרבולה הפכו עכשיו להיות שני חצאים של מעגל.

כשראינו את המשוואה כהיפרבולה האסימפטוטות נחתכו בנקודה $(\mathbf{0,0})$ ועכשיו כשאנחנו רואים את המשוואה כמעגל החיתוך שלהן "בורח" לאינסוף, אבל עכשיו רואים את ההשקה. כלומר: ע"י הטרנספורמציה מקואורדינטות כאלו לאחרות אפשר לבטא מה קורה באינסוף במונחים שקל לראות בעין. ברור כי צריך לזכור שיש "חלון" שלישי (שבו $Y = \mathbf{1}$).

דוגמא ב':

נתבונן במשוואה $xy = \mathbf{1}$. כמובן גם זו משוואת היפרבולה בקואורדינטות (x, y).

נעבור לקואורדינטות (u, v) ונקבל: $\begin{cases} x = \dfrac{\mathbf{1}}{v} \\ y = \dfrac{u}{v} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\mathbf{1}}{v} \cdot \dfrac{u}{v} = \mathbf{1} \Rightarrow \dfrac{u}{v^2} = \mathbf{1} \Rightarrow u = v^2$

כלומר, הפעם נראה זאת לא כמעגל אלא כפרבולה, וכך גם ב"חלון" הנוסף.

לסיכום: כאשר יש מקרים הנראים כ"יוצאים מן הכלל" כי הנקודות "בורחות" לאינסוף – ניתן להתבונן במפה אחרת כדי לראות את פתרון הבעיות.

סיכום

ראינו כמה דוגמאות בהן נוצרת תחושה כי העולם הרגיל הוא חסר וכי ישנן נקודות ה"בורחות" לאינסוף. ניסינו למצוא עולם מורחב יותר שבו יהיו פחות "הפרעות" והוא יהיה שלם וסדיר יותר.

בהתחלה ראינו איך ניתן להרחיב את העולם הרגיל, כך שיכיל את נקודות האינסוף אך תיאור הדברים היה באופן אינטואיטיבי והמחשנו את הדברים ע"י ציורים.

חיפשנו אובייקטים מתמטיים שיאפשרו את ההרחבה הזו, כך שנוכל לא רק לצייר ציורים אלא גם לחשב. חיפשנו שיטה שתאפשר לבצע עם האובייקטים הללו חישובים "כשרים" מבחינה מתמטית.

תארנו שיטה המאפשרת לבצע זאת באמצעות קואורדינטות הומוגניות. בדרך זו ראינו כי ניתן תמיד לחשב ולפתור משוואות אך צריך לזכור כי יש "חלונות" שונים. המעבר בין הקואורדינטות השונות מאפשר לבדוק מה קורה כאשר נקודה "בורחת" לאינסוף, פשוט ע"י התבוננות באותו מקרה דרך "חלון" אחר.

ראינו כי ה*נקודות* הנראות מיוחדות, כ*נקודות* באינסוף הן למעשה *נקודות* רגילות כשמסתכלים דרך "חלון" אחר, וכי האופן שבו בוחרים את ה"חלון" היא שרירותית לחלוטין. באופן דומה גם ה*ישר* באינסוף נבחר באופן שרירותי. כאשר מתבוננים במפות של כדור הארץ קל לראות כי לנקודות הקוטב יש תכונות מיוחדות במפה, אך למעשה קביעתן היא שרירותית ובפועל הן נקודות רגילות ככל הנקודות על פני הכדור. עובדה זו מאפשרת להתבונן בכל *נקודה* דרך "חלון" שיאפשר להתבונן בה כרגילה.

לאחר שהשתמשנו ב"חלונות" השונים ראינו כי שני ישרים שונים נחתכים **תמיד** בנקודה יחידה, ואין ישרים מקבילים. ראינו כי **כל** חתכי החרוט זהים, וממילא אין שום הבדל בין חתכי החרוט השונים לגבי המצב ההדדי של חתך חרוט ושל ישר. נוכחנו כי למערכת של שתי משוואות פולינומיאליות בשני משתנים בדרגות b ו-d יש תמיד **בדיוק** bd פתרונות, ולא פחות (במגבלות ההנחות שצוינו לעיל). וכמובן הצלחנו להרחיב את הגדרת הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$, כך שתהיה מוגדרת $f: P^1 \to P^1$ **לכל** x בתחום, וכן הפיכה, והפוכה לעצמה.

ניתן לראות כי ההרחבה שביצענו אכן פותרת את המקרים ה"יוצאים מן הכלל" שתוארו לעיל. באופן זה העולם הפרויקטיבי אכן מסייע לנו להגיע לעולם שיש בו פחות "הפרעות", לעולם שהוא יותר סדיר ויותר שלם.

נספח א' – רקע הסטורי

הגיאומטריה האוקלידית מבוססת על מערכת של אקסיומות שתוארו ע"י אוקלידס בספרו "יסודות". הגיאומטריות הלא-אוקלידיות מתקבלות כאשר משנים חלק מהאקסיומות.

במשך מאות שנים נחשבה הגיאומטריה האוקלידית לגיאומטריה שמתארת את הטבע. האקסיומה החמישית של אוקלידס, אקסיומת המקבילים קובעת כי דרך נקודה מחוץ לישר עובר ישר אחד ויחיד שהוא מקביל לישר. אקסיומה זו נראית פחות טבעית, ולכן רבים ניסו להוכיחה כמשפט, כלומר ניסו להוכיח שהיא נובעת משאר האקסיומות. מאמצים אלה עלו בתוהו במשך מאות שנים, עד שבראשית המאה ה-19 הבינו מתמטיקאים אחדים שנדרש כיוון שונה.

גאוס היה הראשון שהגיע לרעיון שניתן להחליף את אקסיומת המקבילים באקסיומה אחרת, ובכך לקבל גיאומטריה שונה מהגיאומטריה האוקלידית, אך תקפה באותה מידה. גאוס חשש לפרסם רעיון כה חדשני. הוא גילה רבות מהתכונות היסודיות של הגיאומטריה הלא אוקלידית (או, באופן ספציפי יותר, של הגיאומטריה ההיפרבולית).

אחריו, בשנות העשרים של המאה ה-19, הגיעו לרעיון באופן בלתי תלוי המתמטיקאי הרוסי לובצ'בסקי וקצין הצבא ההונגרי בויאי.

לפי הגיאומטריה ההיפרבולית, אחת מהגרסאות הלא־אוקלידיות, דרך נקודה מחוץ לישר עוברים אינסוף ישרים מקבילים לישר. לפי הגיאומטריה הפרויקטיבית, ולפי הגיאומטריה הכדורית שפותחו ע"י רימן, תלמידו של גאוס, כל שני ישרים - נפגשים. בגיאומטריות אלו לא קיימים ישרים מקבילים.

מאוחר יותר פיתח רימן את הגיאומטריה הרימנית שהכלילה את כל הגיאומטריות הנ"ל, והניחה את היסודות לתחום הנקרא גיאומטריה דיפרנציאלית. בשנות השבעים של המאה ה-19 חיבר פואנקרה את הרעיונות האלה אל הנושאים המרכזיים במתמטיקה של תקופתו, והפך אותם לכלי חיוני בתורת המספרים האנליטית.

עד סוף המאה ה-19 התברר שהגיאומטריות הלא־אוקלידיות אינן רק משחק באקסיומות. כשם שהגיאומטריה האוקלידית מהווה בסיס למכניקה של ניוטון, כך מהווה הגיאומטריה הדיפרנציאלית (שמאפשרת מרחב לא-אוקלידי) בסיס לתורת היחסות הכללית, והיא הגיאומטריה שמתארת נאמנה את המרחב-זמן.

הדרך הטובה ביותר להשתכנע שהתורה החדשה עקבית ונטולת סתירות, היא לבנות מודל שלה במסגרת תאוריה אחרת, מקובלת יותר. פירושו של דבר הוא שבמסגרת התאוריה הוותיקה, בוחרים קבוצה שתייצג את המישור בגיאומטריה הלא-אוקלידית, ומאפיינים את הנקודות ואת הקווים הישרים במישור זה. כל שנדרש מן המודל הוא שהקווים והנקודות שלו יקיימו את האקסיומות של התורה החדשה. אם קיים מודל כזה, אז העקביות של התאוריה החדשה נובעת מזו של התאוריה הישנה.

באופן צפוי (אך אירוני), המודלים המקובלים לגיאומטריה לא-אוקלידית הם במסגרת הגיאומטריה האוקלידית. קיומם של מודלים כאלה מוכיח כי **אם** הגיאומטריה האוקלידית עקבית, הרי שבהכרח תכונה זו חלה על הגיאומטריה הלא-אוקלידית.

הגיאומטריה הפרויקטיבית נולדה מתוך הצרכים המעשיים של אמני הציור. בימי הביניים היה הציור רוחני וסמלי. לקראת הרנסנס עלתה קרנו של הציור המדויק – הדומה לנראה בעין. החייאת הכתבים הקלאסיים, והאמונה שבבסיס הטבע עומדים עקרונות מתמטיים, הובילה את הציירים והמתמטיקאים בני התקופה לנסות ולמצוא שיטה סדורה לציור העולם התלת-ממדי על בד ציור דו-ממדי.

האמנים הראשונים בתחום זה שמשנתם ידועה לנו היו ברונלסקי, ואלברטי - שחיבר את הטקסט הראשון הידוע כיום בנושא, שכותרתו "על הציור". אנשי מפתח מאוחרים יותר בתחום זה הם דלה פרנצ׳סקה, דה וינצ׳י, דירר ואחרים.

המתמטיקאי דזרג היה ממניחי היסודות התאורטיים לגיאומטריה הפרויקטיבית, ועסק בה יחד עם פסקל. באחד מחיבוריו מתאר דזרג מתכון שלם לציור עצם בפרספקטיבה מנקודת מבט מסוימת, מתוך תרשימי הבסיס והצד שלו. הענף נזנח במשך כמאתיים שנים, בין היתר עקב ההתפתחויות המטאוריות של הגיאומטריה האנליטית והחשבון האינפיניטסימלי באותה התקופה. כתביהם של דזרג ושל פסקל אבדו.

פונסלה נחשב למחיה הגיאומטריה הפרויקטיבית. הוא שרת כקצין בצבא נפוליאון ונפל בשבי בזמן הפלישה לרוסיה. בזמן שהותו בשבי, בשנים 1813-1814 שחזר פונסלה את אשר למד בתחום הגיאומטריה ממורו מונז והצליח לפתח תוצאות חדשות בגיאומטריה פרויקטיבית. מחקריו של פונסלה הובילו לחקר מחדש של הנושא, וממשיכיו העמיקו חקר מעבר לתוצאות של דזרג ופסקל.

בשנת 1845 נתקל המתמטיקאי הצרפתי שאל בעותק שכוח בכתב יד של מאמר של דזרג בנושא (שעסק בחתכי חרוט). כך נודע היקף עבודתו של דזרג בנושא. בזמן זה שוחזרו כבר רוב תוצאותיו של דזרג בידי מתמטיקאים בני התקופה. באותה עת תרמו לגיאומטריה הפרויקטיבית גם שטיינר וקיילי. גישתו של קליין לגיאומטריה דרך סימטריות חיברה את הגיאומטריה הפרויקטיבית לאלגברה. בסוף המאה ה-19 ובתחילת המאה ה-20 תרמו לתחום גם הילברט, ובלן ויאנג שפיתחו את הגישה האקסיומטית.

אחד השימושים של הגיאומטריה הפרויקטיבית נוגע לבעיות בניה. יש בעיות רבות העוסקות בבניה באמצעות סרגל ומחוגה. קל לראות שאי אפשר לבצע אותן פעולות אם נשתמש רק בסרגל ולא במחוגה. האם כל בניה שניתנת לביצוע בעזרת סרגל ומחוגה ניתנת לביצוע גם בעזרת מחוגה בלבד? התשובה חיובית, וההוכחות נובעות מהגיאומטריה הפרויקטיבית.

נספח ב' – רקע אמנותי

בעבר לא היו ידועות לאמנים טכניקות ליצירת תחושת עומק בציור. היצירה "הבתולה מולדימיר" המיוחסת לשנת 1130 בקירוב, מהווה דוגמא אופיינית לציורים של תקופת ימי הביניים בהם אין פרספקטיבה קווית.

הציור מעיד על תקופה בה האמנים לא ידעו להתמודד עם רקע ולתאר עומק ולכן צבעו את הרקע בזהב.

ציורו של האמן דוצ'ו, המתאר את המדונה (מריה הבתולה) והילד (ישו התינוק) הוא מתקופה מעט מאוחרת יותר. הציור מיוחס לתחילת המאה ה-14, תקופה שבה החלו לגלות עניין בעומק ברקעים.

בציור זה ניתן לראות מחד שאריות של סגנון ימי ביניים שאינו יודע להתמודד עם עומק ופרספקטיבה. לכן הרקע הוא אטום וצבוע זהב, והדרך להדגיש את הדמויות החשובות היא על ידי מיקומן במרכז והיותן גדולות באופן יחסי לדמויות הסובבות אותן. מאידך, בתקופה זו מתחילה לחלחל ההבנה שצריך לנסות לתעד את מה שהעיניים רואות וזה מבוצע על ידי נסיון להעניק נפח בקפלי הבגדים וכן באמצעות הכיסא עליו יושבת המדונה.

בתקופתו של דוצ'ו חי האמן ג'וטו, שנחשב לאמן הרנסנס הראשון שצייר רקעים בהם מופיעים נופים, עם ניסיון ליצור עומק בציור.

אולם, טכניקות המאפשרות ליצור עומק על ידי פרספקטיבה קוית החלו להתפתח רק במאה ה-15. בתקופת הרנסנס המציאו את הטכניקה הזו, פיתחו אותה והביאו לשיא את השימוש בה.

פרה (האח, הנזיר) פיליפו ליפי הוא אמן רנסנס מוקדם. בציורו "הבשורה", המיוחס לשנת 1440 בקירוב כבר ניתן לראות היטב הצגה של עומק באמצעות הטכניקה של פרספקטיבה קוית.

על מנת להציג עומק בטכניקה זו האמנים השתמשו לרוב (לפחות בהתחלה, לפני שהשיטה התפתחה יותר) בתיאור הסצנה בסביבה של ארכיטקטורה. באמצעות קווי הבניין ניתן ליצור את הקוים של הפרספקטיבה המתרכזים בנקודה אחת באופק של הציור, וכך יוצרים אשליה של עומק.

בציור "אסכולת אתונה" של רפאל, משנת 1509 האמן מציג פרספקטיבה קוית באמצעות הקשתות בתקרה, מבנה הקירות, ואפילו השיש שברצפה, וכך יוצר תחושה חזקה של עומק.

על מנת לפתח את הטכניקה המאפשרת יצירת עומק בציורים, היה צורך להתגבר על התפישה הנאיבית שקוים מקבילים – לא יתכן לצייר אותם כנפגשים. רק ההבנה שאפשר ורצוי לצייר ממש כפי שאנחנו רואים, כאילו הקוים נפגשים באיזו שהיא נקודה באופק – איפשרה את יצירת תחושת העומק.

בימי קדם היה קיים קשר הדוק בין האמנים לבין אנשי המדע, ולכן הטכניקה התפתחה באמנות רק אחרי שאנשי המדע תארו את המודל המתמטי לשרטוט פרספקטיבה קוית.

מעניין לציין כי מורים לאמנות טוענים כי גם בהתפתחות האישית של כל תלמיד – חיוני לעבור את המחסום הרגשי הזה, ולהבין שצריך לראות את הקוים כנפגשים בנקודת אופק כלשהי. המחסום הרגשי מקשה גם על תפיסת הרעיונות הראשונים בגיאומטריה פרויקטיבית.

ביבליוגרפיה

Hershkowitz R. (1987). The acquisition of concepts and misconceptions in basic geometry—Or when "a little learning is a dangerous thing." In J. D. Novak (Ed.), *Proceedings of the second international seminar on misconceptions and educational strategies in science and mathematics* (Vol. 3, pp. 238–251). Ithaca, NY: Cornell University.