בס״ד

<u>עבודת גמר</u>

<u>בתוכנית רוטשילד ויצמן לתואר שני בהוראת המדעים-מכון ויצמן למדע</u>

<u>נושא העבודה: מימד האוסדורף</u>

כותבת: מנוחה סמט

מנחה: פרו׳ יקר קנאי

חשון תשע״ז

נובמבר 2016

*   *   *

ראשי פרקים:

מבוא

א. **פרקטל** - הגדרה, היסטוריה וקצת מוטיבציה.

ב. **קבוצת קנטור** - בנייתה ,מידתה ומבוא לחישוב המימד שלה.

ג. **מימד האוסדורף** - הגדרה ושימושים.

ד. **חישוב מימד של פרקטל** - מימד פרקטלי, חישוב עבור קבוצת קנטור.

מבוא

ההתייחסות הקדומה לממד במתמטיקה, נעשתה בגיאומטריה האוקלידית, שבה מתוארים:

הנקודה כעצם חסר ממדים.

עצמים חד-ממדיים כמו ישר, קו ,קרן.

גופים דו-ממדיים כמישור, מצולע ועוד

גופים תלת-ממדיים :קוביה, כדור ועוד.

הקביעות האלו התבססו על העולם כפי שהוא נראה לעינינו.

הכללה ראשונה של מושג הממד נעשתה עם ההתייחסות לעולם n-ממדי, כאשר n הוא מספר טבעי כלשהו.

על פי תפיסת הממד הקלאסית, ההגדרה למימד (d) של צורה,קשורה לגורם קנה המידה, ליחס בין גודל צורה נתונה לגודל צורת היסוד ממנו נוצרה.

כאשר צורה עוברת שינוי ע"י כפל בקבוע $(s\neq0)$ ביחידה הבסיסית שממנו היא מורכבת ונוצרת צורה חדשה, נוכל לבדוק מה המספר הקטן ביותר של יחידות צורה בסיסיות,שצריך בכדי ליצור את הצורה החדשה שנוצרה בעקבות השינוי.

לדוגמא: ישר שאורכו יחידה,נכפול את ארכו פי 3 ,נצטרך 3^1 יח' מקוריות לכסותו.

רבוע שצלעו יחידה,נכפול את צלעו פי 3 נצטרך $3^2=9$ יחידות מקוריות לכסותו.

קוביה שנפחה יחידה,נכפול את צלעה פי 3 נצטרך $3^3=27$ יחידות מקוריות לכסותו...וכן הלאה.

המימד מוגדר להיות החזקה בה יש להעלות את היחידה המקורית בכדי להגיע לכמות היחידות שנוצרו בתהליך של הגדלת היחידה המקורית.

או בניסוח מתמטי: אם $\boxed{N = S^d}$ אז $\boxed{\mathbf{d} = \frac{log(N)}{\log(S)} \quad \text{(המימד)}}$

כאשר: $\mathbf{S}$ מקדם השינוי (כווץ או מתיחה), $\mathbf{N}$ הנפח החדש, d –המימד.

בניסיון להבין את משמעותם של עצמים שמאוחר יותר קיבלו את השם פרקטל,

ניסה פליקס האוסדורף, להכליל את מושג המימד ליצורים מתמטיים שהמימד שלהם ככל הנראה לא מספר טבעי.

במסגרת העבודה בכוונתי לחקור קבוצות ועקומים בעלי מימד שבור, להבין את הצורך "לשבור" את המימד... ולדעת לחשב אותו.

העבודה תעסוק בנושא המימד של קבוצות ושל עקומים במישור

ותחדד את משמעותם של המושגים עוצמה, מידה ומימד.

העבודה תתמקד בנושאים מתמטיים הקשורים לתורת המידה ולאנליזה.

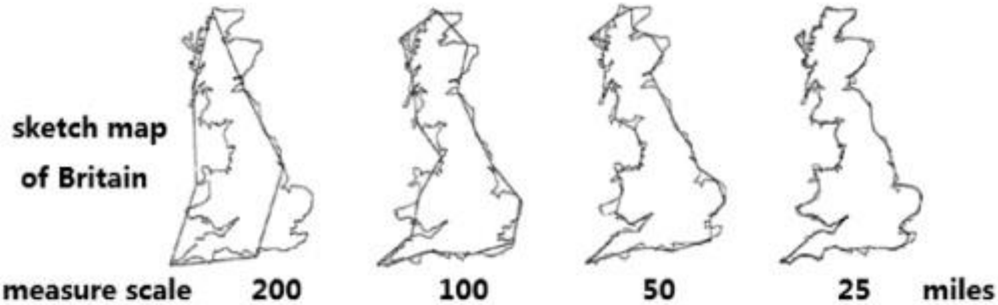
חלק א - פרקטל

פרקטל (Fractal) הוא צורה גיאומטרית הניתנת לשבירה לצורות קטנות, הזהות לשלם שהן מרכיבות. הגדרה דומה היא חלק המכיל את האינפורמציה של השלם כולו – תבנית שנשמרת בכל רזולוציה.הפרקטלים הם יצורים מתמטיים,אך מתברר שגם הטבע והחיים מלאים ביחידות החוזרות על עצמם-פרקטלים. כך למשל, מייצג הדנ״א את כל תכונות הגוף; כך המונח ״חברה פטריארכאלית״ משעתק מבנה משפחתי מסוים לרמת הקבוצה החברתית, הקהילה, החברה וכדומה.

לתכונה זו של הפרקטל קוראים "***self similar*** - דמיון עצמי״ ומשמעותה היא שאם נסתכל על הפרקטל במידות הגדלה שונות, נמשיך לראות את אותה הצורה.

מה אורך החוף של אנגליה? ברור שהתשובה אינה מדוייקת, כיון שאפשר להבחין בבירור בפיתולים של החוף המאריכים אותו מעבר למרחק הישר בין שתי נקודות. מפה טופוגרפית ״תאריך״ את החוף עוד יותר, ואם נלך לאורך החוף נבחין בפיתולים נוספים, הקטנים מידי מלהופיע במפה. בנוסף, כל סלע בולט יגדיל את האורך הנמדד וודאי שהוא יגדל עוד אם נתייחס לחלוקי נחל על השפה ועוד יותר אם נרד לסקאלות מיקרוסקופיות.

נתבונן בקירובים שונים למידת אורכו של קו החוף של בריטניה:



measure scale	200	100	50	25	miles
segment amount	7	16	40	96	
total length	1400	1600	2000	2400	miles

בתרשים ובטבלה שתחתיו ניתן להבחין שאורך קו החוף של אנגליה גדל ככל שמקטינים את הסקאלה איתה מודדים. הקירוב הפוליגוני לצורת האי נעשה יותר ויותר קרוב למציאות ונותן אורך מדוייק יותר כאשר היחידה קטנה. אך עד כמה ? האם אורך קו החוף הוא גודל סופי?!? הלא נוכל לרדת ליחידות מידה קטנות יותר ויותר, ותמיד האורך יגדל!

זהו הבסיס ל"יצירת" הפרקטלים. הרעיון שהגודל הוא לא מוחלט אלא תלוי בסקלה שבה מסתכלים הוא לא חדש, אבל עד לשנות השבעים של המאה העשרים לא ניסו לקבוע סדר ושיטה בקביעות האינטואיטיביות האלה. המתימטיקאי בנואה מנדלברוט, שעבד כחוקר במעבדות חברת המחשבים IBM בארה"ב, הבין שיש כאן יותר מאשר קוריוז. בעצם, כמעט כל צורת נוף טבעית מתנהגת כך: ככל שמתבוננים בה יותר מקרוב, רואים בה עוד ועוד פיתולים, שקעים וגבשושיות. אבל גם טענה כללית כזו אפשר לדרג לפי מידת הפיתולים ולנסות לקרב את ה"התנהגות" הזו במודל מתימטי.

הפרקטלים הראשונים החלו להתגלות החל מסוף המאה ה-19, ונחקרו בתור קוריוזים מתמטיים, או דוגמאות נגד לרעיונות שונים.

ב 1883 גאורג קנטור נתן דוגמה לקבוצה בעלת אופי פרקטלי - **קבוצת קנטור**, עליה אפרט בהמשך.

בשנת 1872 מצא המתמטיקאי קארל ויירשטראס פונקציה שהיא רציפה בכל נקודה, אך אין נקודה שהיא גזירה בה, הנקראת **פונקציית ויירשטראס** על שמו. במושגי ימינו , הגרף של פונקציה זו היא פרקטל. (תמונה בנספח)

עקום פאנו הוא מסילה רציפה, הממלאת שטח דו-ממדי או בעל ממד גבוה יותר. עקומים כאלה תוארו לראשונה על ידי המתמטיקאי האיטלקי ג'וזפה פאנו ב 1890, והיו לדוגמה של מה שנודע אחר-כך כפרקטל .(תמונה בנספח)

בשנת 1904 יצר המתמטיקאי השוודי הֶלגֶה פון קוך את **פתית השלג** של קוך, צורה פרקטלית מובהקת. (גם עליה אפרט בהמשך)

בניסיון להבין את משמעותם של עצמים מסוג זה, מתמטיקאים כאברהם בסיקוביץ ופליקס האוסדורף בשנת 1918, הכלילו את מושג הממד, כך שיוכל לקבל גם ערכים שאינם מספרים טבעיים.

תקופה ארוכה התעלמו לחלוטין מן הצורות הפתלוגיות הללו והתנופה המשמעותית לחקר הפרקטלים ניתנה בתחילת שנות השישים של המאה העשרים על ידי המתמטיקאי האמריקאי בנואה מנדלברוט, שעבד במעבדות המחקר של IBM, והתבסס על עבודתו של המתמטיקאי גסטון ג'וליה.

מנדלברוט חקר סדרות של מספרים מרוכבים מהצורה $z_{n+1} = z_n^2 + z_0$ קבוצת מנדלברוט, הקרויה על-שמו, כוללת את המספרים z_0 שעבורם הסדרה $\{z_n\}$ חסומה.

את השם '**פרקטלים**' טבע מנדלברוט בשנת 1975 לאחר שהחל לעסוק בתחום. הוא חיפש שם מוצלח לצורות שמצא. יום אחד ,כששב הביתה עזר לבנו בשעורי הלטינית שלו. במילון מצא את המילה היוונית ***FRACTUM*** שמשמעה שבור, מחוספס, לא רציף וממנה גזר את השם.

חלק ב'

קבוצת קנטור - מפתח להבנת פרקטל

במתמטיקה, **קבוצת קנטור** היא קבוצה שנבנית בצורה האיטרטיבית הבאה:
מסירים מקטע ישר את השליש המרכזי שלו, ומבצעים פעולה דומה בכל אחד משני הקטעים שנותרו, כך שנשארים עם ארבעה קטעים. ממשיכים את התהליך גם על הקטעים שנותרו, וכך הלאה עד אינסוף.

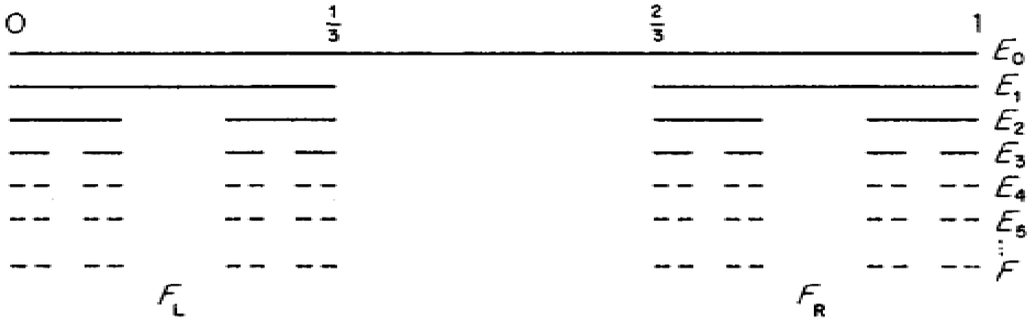


Figure 0.1 Construction of the middle third Cantor set F, by repeated removal of the middle third of intervals. Note that F_L and F_R, the left and right parts of F, are copies of F scaled by a factor $\frac{1}{3}$

באופן פורמלי:

- **בשלב הראשון**, מחלקים את הקטע $[0,1]$ לשלושה חלקים שווים. מסירים מהקטע [0,1] את השליש האמצעי, שהוא הקטע הפתוח (1/3 , 2/3). נותרים שני קטעים סגורים, שאורך כל אחד מהם הוא 3^{-1} (כלומר שליש).
- **בשלב השני**, מחלקים כל אחד משני הקטעים שנותרו, כלומר הקטעים [1/3 , 0] ו-[2/3 , 1] לשלושה חלקים שווים ומסירים שוב את הקטע הפתוח האמצעי בכל אחד מהם (במקרה שלנו - את (1/9 , 2/9) ו (7/9 , 8/9)). נותרים 4 קטעים סגורים שאורך כל אחד מהם הוא תשיעית, כלומר. 3^{-2} :
- **בשלב מספר *n*** מחלקים כל קטע שנותר לשלושה חלקים שווים ושוב מסירים מכל קטע את הקטע הפתוח האמצעי. לאחר ההסרה, נותרים 2^n קטעים סגורים, שאורך כל אחד מהם הוא.3^{-n}

נסמן את הקבוצה שהתקבלה בשלב ה-n-י ב A_n-אזי קבוצת קנטור מוגדרת כחיתוך בן-מנייה של כל הקבוצות הללו.

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

כלומר, קבוצת קנטור היא אוסף כל הנקודות בקטע [0,1] שלא הוסרו בתהליך המתואר לעיל.

קבוצה זו תוארה בידי המתמטיקאי גאורג קנטור בשנת 1883 חשיבותה הרבה היא בתכונותיה המיוחדות, שסותרות את האינטואיציה ומציגות מעט ממורכבותו ומייחודו של האינסוף .תכונות אלה דחפו את קנטור לפתח את תורת הקבוצות.

קבוצת קנטור היא בעלת מידה (אורך) אפס *** אך יש בה אינסוף איברים ; למעשה מספר האיברים שלה שווה למספר האיברים בקטע המקורי כולו (ובפרט, יש בה כל-כך הרבה איברים עד שלא ניתן לסדרם בסדרה ,כלומר יותר איברים מאשר כל המספרים הטבעיים יחדיו (עצמתה א)

היינו מצפים שהמימד שלה יהיה 1 ,כי היא נוצרה מישר (מימד 1) שהוסרו ממנו קטעים. או 0 כי נשארו בה רק נקודות....

אבל קבוצת קנטור אינה מכילה אף קטע... ולכן היה צורך להגדיר מימד חדש . . .

***באופן כללי, נאמר שקבוצה E בישר הממשי היא בעלת מידה אפס אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים כיסוי בן-מניה של קטעים פתוחים המכסה את E וששכום אורכיו קטן מאפסילון.

קבוצת קנטור מכילה בכל שלב איטרטיבי – ***n*** י 2^n קטעים שאורך כל קטע כזה הוא $(1/3)^n$ ולכן בכל שלב ניתן לכסות אותה על ידי קטעים באורך כנ"ל. בשלב ה-***n***י של הבניה האיטרטיבית אנו מכסים את קבוצת קנטור בקטעים שסכום הארכים שלהם שווה ל $(2/3)^n$ אך מכיוון שסדרה זו שואפת לאפס כאשר $n \to \infty$, המידה של קבוצת קנטור היא אפס.

<u>חלק ג׳- מימד האוסדורף</u>

במתמטיקה, הממד הוא מספר (לרוב מספר טבעי) המתאר את מספר דרגות החופש במרחב . בתחומים שונים של המתמטיקה קיימות דרכים שונות למדוד ולהגדיר ממד, שלכל אחת מהן יישומים אחרים.
בגאומטריה הקלאסית היו ידועים עצמים אפס ממדיים (כגון נקודה) עצמים חד-ממדיים (כגון קו ישר) עצמים דו-ממדיים (כגון המישור) ועצמים תלת-ממדיים (כגון קובייה וכדור)

כהכללה של מושג זה, קיימים מרחבים וקטוריים מכל ממד: הממד של מרחב וקטורי סופר כמה קואורדינטות נחוצות כדי לתאר כל נקודה במרחב, ומוגדר כמספר האברים בבסיס של המרחב.

לדוגמא: $\mathbb{R}^n$ בתור מ״ו, המימד שלו $\boldsymbol{n}$ וזה בא מהגדרה גאומטרית.
יש קבוצות שהמימד הגאומטרי לא מתאר אותן. הן מורכבות יותר ,לכן חיפשו להגדיר מימד שיותר רגיש <u>לצורה</u> .

בכדי להגדיר את מימד האוסדורף היה צורך להגדיר מידה חדשה, עליה תישען הגדרת המימד. ההגדרה של <u>מימד</u> האוסדורף קשורה <u>למידה</u> של המרחב,
נגדיר **<u>מידת האוסדורף:</u>**

<u>בטרם נגדיר מידת האוסדורף נקדים ונזכיר מספר הגדרות הקשורות לתהליך:</u>

תהי $\boldsymbol{U}$ תת קבוצה לא ריקה במרחב אוקלידי $\boldsymbol{n}$ מימדי $\boldsymbol{R^n}$.

- <u>*diam*</u>״הקוטר״ של $\boldsymbol{U}$ מוגדר כך ש:

$$diam(U) = |U| = sup\{ \ |x - y| \ ; \ x,y \varepsilon U \}$$

שזהו המרחק הגדול ביותר בין כל 2 נקודות של $\boldsymbol{U}$.

יהי $\{u_i\}$ אוסף סופי של קבוצות שהקוטר שלהן קטן מ δ , אשר מכסה את S

כך ש: $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} u_i$ כאשר: $0 < |u_i| < \delta$ $i \in I$

אזי $\{u_i\}$ הוא <u>**δ -כיסוי**</u> של S.

- עבור כיסוי $C = \{u_i\}_{i \in I}$ של S מגדירים:

$$\boldsymbol{mesh(c) = sup\{diam(u_i \,|i \in I\}}$$

נקח X מרחב . תהי S קבוצה, $S \subseteq X$.

יהי $d > 0$. נבחר: δ>0

לכל δ בוחרים $\{\,\mathbf{Ui}\,\}_{i \in I}$ כיסויים ל S כך שהקוטר של כל כיסוי קטן מ δ.

נגדיר:

$$H_\delta^d(S) := \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(U_i)^d \middle| \{U_i\} \text{ is } \delta\text{-cover} \right\}$$

נתבונן בכל הכיסויים האפשריים של S ע״י קבוצות כיסוי שהקוטר שלהן קטן מ δ,

$H_\delta^d(S)$ מבטא את המספר הקטן ביותר של תיבות d ממדיות בעלות $mesh$ קטן מ δ,

הנדרשות לכיסוי הקבוצה S.

אם נשאף לצמצם את מספר הכיסויים ה d ממדיים, נצטרך להגדיל את δ.

נראה כי ככל שδ קטן , המספר של הכיסויים האפשריים מצטמצמת, והאינפימום הנ״ל גדל כי צריך יותר כיסויים לקבוצה הנתונה.

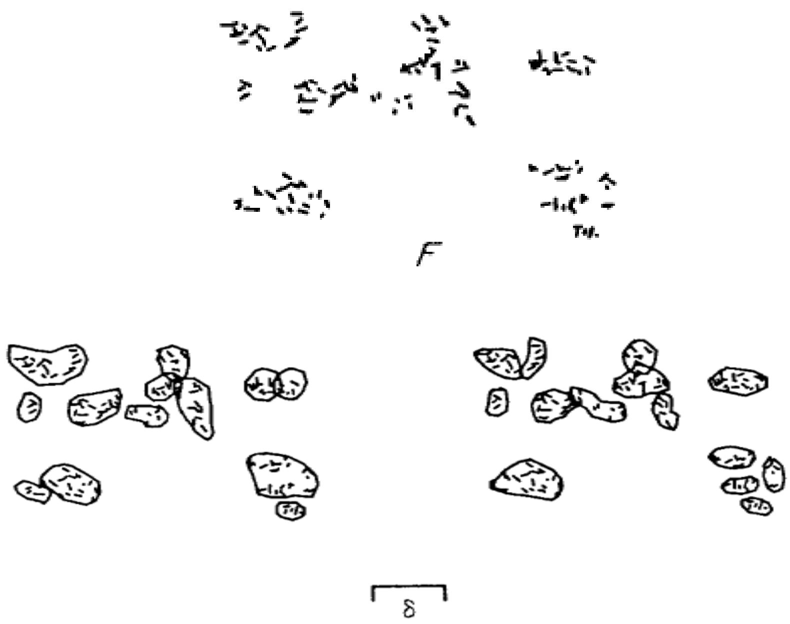


Figure 2.1 A set F and two possible δ-covers for F. The infimum of $\Sigma|U_i|^s$ over all such δ-covers $\{U_i\}$ gives $\mathcal{H}^s_\delta(F)$

בתרשים נוכל לראות כיסויים שונים לקבוצה ***F*** שהקוטר של כל כיסוי קטן מ δ

באופן כללי אפשר לראות את הסכום $\sum(\, diam(Ui)^d \,)$ כאורך של קטע (***d=1***)
או סכום שטחים ***(d=2)*** או נפחים...אשר מכסים קבוצה נתונה.

<u>לדוגמא:</u>

ב R^1 . אם נבחר כיסוי של נקודות (***d=0***) לקטע **S=[0,1]** ,נצטרך אינסוף כאלו,
כי לא נוכל לכסות את הקטע ע״י מספר סופי של נקודות... $H^{d=0}_{\delta>0} = \infty$
אם נבחר כיסוי שטוח חד מימדי,אזי לכל $\delta>0$, $H^d_\delta(S)$ יהיה 1 כי אי אפשר להסתדר עם פחות... $H^{d=1}_{\delta=0.25} = 1$
נבחין כי אם נעלה את ***d*** כלומר נבחר כיסויים ממימד 2 לקטע הנתון,(יש דרגת חופש של מימד) נוכל להקטין את δ ולמצוא כיסויים שהגודל הסופי שלהם מאד קטן.
נניח ונכסה את [0,1] בכיסויים כאשר ***d =2*** , δ =0.25
נקח ריבועים בגודל 0.25***X***0.25 יספיקו לנו 4 כיסויים אבל הגודל הסופי שלהם הוא ***1x0.25=0.25***

ואם נעבור לתיבות ***d=3*** ? גם כן יספיקו 4 כיסויים אך 'הנפח' הסופי של כל הכיסויים יהיה ***4x0.25x0.25x0.25=0.0625***

למרות שה $\boldsymbol{mesh(s)}$ גדול שווה ל 1, ה: H_δ^{d} עבור כל $d>1$ בקטע [0,1] הוא אפס.

כי לוקחים את ה ***INF*** של כיסויים שהקוטר שלהם קטן מ δ.

אם כן נקבל: $H_{\delta=0.25}^{d\geq 2} = 0$

ראינו שעבור אותה קבוצה S , ה $H_\delta^d(S)$ קטן לאפס כאשר הגדלנו את d.

באותו אופן ,אם היינו לוקחים את S להיות תת קבוצה של המישור ב R^2

$\mathbf{S=[0,1]x[0,1]}$ ונבחר כיסוי חד מימדי כאשר $d=1$, אז עבור כל $\delta > 0$ $H_{\delta>0}^{d=1}$

$H_\delta^d(S)$ יהיה אינסוף כי לא נוכל לכסות את המישור ע"י קוים. (יוכח לעיל)

אך עבור $d=2$ נקבל: $H_{\delta>0}^{d=2} = 1$ **ועבור** $d > 2$ נקבל: $H_{\delta>0}^{d>2} = 0$

נסכם:

אם **d** הוא מימד של קבוצה **S** ואנו מנסים למדוד את הקבוצה **S** עם כיסויים

ממימד **p** אז אם: $p < d$, ה H_δ^p יהיה אינסוף. ואם $p>d$ אז H_δ^p יהיה אפס.

כדי שנוכל להשתמש בנוחות בH_δ^d נגדיר מידה חדשה:

מידת האוסדורף

הגדרה: $M_d(s) = \lim_{\delta\to 0^+} H_\delta^d(s)$.

נראה תחילה ש $H_\delta^d(s)$ היא פונקציה **מונוטונית יורדת** של δ ולכן יש לה גבול.

כלומר נוכיח כי לכל: $\delta_1 < \delta_2$ $\leftarrow$ $H_{\delta_1}^{d}(s) \geq H_{\delta_2}^{d}(s)$.

הוכחה:

$$0<\delta_1<\delta_2 \rightarrow \left(mesh(c) \le \delta_1 \rightarrow mesh(c) \le \delta_2 \right)$$

$$\rightarrow \underbrace{\left\{ \sum_i (diam(u_i))^d \middle| c=\{u_i\}_{i\in I} \wedge mesh(c)<\delta_1 \right\}}_{R_1} \subseteq \underbrace{\left\{ \sum_i (diam(u_i))^d \middle| c=\{u_i\}_{i\in I} \wedge mesh(c)<\delta_2 \right\}}_{R_2}$$

$$\rightarrow \quad inf R_1 \ge inf R_2 \quad \rightarrow \quad H_{\delta_1}^{d}(s) \ge H_{\delta_2}^{d}(s)$$

□

כיוון ש: $H_\delta^d(s)$ היא פונקציה מונוטונית יורדת של δ בתחום $0<\delta<\infty$

הגבול $lim_{\delta\rightarrow 0^+} H_\delta^d(s)$ קיים במובן הרחב (סופי או אינסופי) ולכן:

נגדיר את **<u>מידת האוסדורף</u>** להיות הגבול הזה:

$$\boxed{M_d(s) = \lim_{\delta\rightarrow 0} H_\delta^d(s)}$$

ראינו שככל ש δ יותר גדול, H_δ^d קטן.

ולהפך אם δ קטנה, H_δ^d גדל.

אם נסתכל על H_δ^d כפונקציה של δ עבור אותו d. נקבל פונקציה מונוטונית יורדת.

נקח $0 \rightarrow \delta$ אזי H_δ^d גדל. ובגבול זה יהיה ה $SUP\ (H_\delta^d)$.

נחזור להגדרה של מידת האוסדורף. משם קל להבחין כי לכל קבוצה S נתונה ו $\delta<1$

$H_\delta^d(s)$ לא יגדל אם נגדיל את d.

ממילא גם $M_d(s)$ לא יגדל כי הוא הגבול העליון.

למעשה אם נקח $t>d$ ו: יהיה $\{Ui\}_{i\in I}$ כיסוי לS נקבל:

$$\sum_i |u_i|^t \le \delta^{t-d} \sum_i |u_i|^d$$

כלומר:

$$H_\delta^t(s) \le \delta^{t-d} H_\delta^d(s)$$

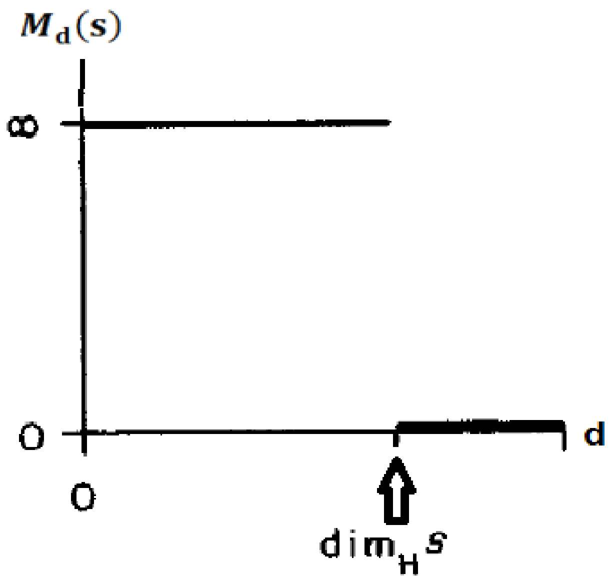
כדי לעבור למידת האוסדורף נקח את הגבול כאשר: $\delta \to 0$

אז אם: $M_d(s) < \infty$ (מספר סופי) אז בהכרח $M_t(s) = 0$

מכאן נסיק שקיים **d** מסויים מאד שבו מידת האוסדורף משתנה מאינסוף לאפס.

הd הזה יהיה **__מימד האוסדורף.__**

נראה בגרף את הקשר בין $M_d(s)$ ל **d**:



__הגדרה למימד האוסדורף בסיקוביץ'__:

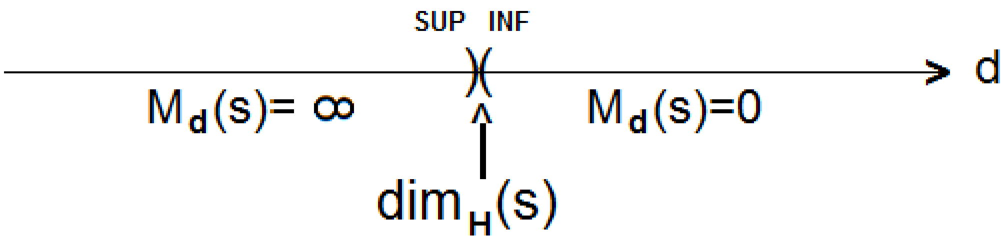
$$\boldsymbol{dim_H(s) = inf\{d\ |M_d(s) = 0\}}$$

$$\boldsymbol{dim_H(s) = sup\{d\ |M_d(s) = \infty\}}$$

כמו״כ נוכל לנסח מהכוון ההפוך :

$$M_d(s) = \begin{cases} \infty & if \ d<dim_H S \\ 0 & if \ d\geq dim_H S \end{cases}$$

כפי שמתואר בתרשים :



נוכל להראות שההגדרה הנ״ל למידת האוסדורף לא משנה את ההגדרות האחרות שאנו מכירים למידה.

מידת האוסדורף החדשה מסתדרת היטב עם הרעיונות המוכרים לגבי : אורך, שטח ונפח.

להלן דוגמאות :

<u>דוגמא 1 : מידת ומימד האוסדורף של קבוצה סופית</u>

תהא קבוצה סופית של נקודות : $A=\{a1 , a2 , a3 , ... ,an \}$

נראה שמימד האוסדורף שלה אפס.

נחשב $M_0(A)$ ניקח בתור δ את המרחק הקטן ביותר בין 2 נקי ב A .

לכל $0<\mathcal{E}<\delta$ כל קבוצת כיסוי $\{u_i\}$ מכילה לכל היותר נקודה אחת של A .

לכן נצטרך לפחות n יחי כיסוי.

נסתכל על $H_{\mathcal{E}}^{A}$ הוא יהיה האינפימום על הקבוצה .לא נשכח ש $d=0$ לכן

$1=(diam(Ui)^d)$

ממילא $\sum(diam(Ui)^d)$ יהיה גדול או שווה n. (כי אולי יש יותר...)

בכל מקרה האינפימום =**n** ולכן : $H_{\varepsilon}^{A}=n$

ניקח $\varepsilon\to 0$ ולכן גם בגבול נקבל : $M_0(A)=n$.

בסה"כ קיבלנו מספר ! ולכן **d**=*0* הוא המימד האוסדורף של הקבוצה A .

<u>דוגמא 2 :מידת ומימד האוסדורף של קטע.</u>

נתבונן בקטע **[0,1]** כתת קבוצה של R^2 נראה ש :

$M_2[0,1]=0$ וגם $M_1[0,1]=1$

ולכן **1** הוא מימד האוסדורף של הקטע **[0,1]**.

הוכחה :

עבור $\delta>0$ ניתן לכסות את הקטע **[0,1]** *ע"י מספר סופי של מלבנים שלכל אחד שטח קטן מ* δ *;* עבור מספר טבעי n נחלק את הקטע **[0,1]** ל n קטעים שווים ונגדיר מלבנים ברוחב $\frac{1}{n}$ ובאורך $\frac{\delta}{2}$. סכום שטחי המלבנים הוא: $n\cdot(\frac{1}{n}\cdot\frac{\delta}{2})=\frac{\delta}{2}<\delta$

מהגדרת $H_{\delta}^{2}[0,1]$ כאינפימום נקבל ש : $0\le H_{\delta}^{2}[0,1]\le\delta$

ולכן: $M_2[0,1]=lim_{\delta\to 0^+}H_{\delta}^{2}[0,1]$.

כיוון ש $M_d[0,1]$ היא פונקציה מונוטונית יורדת של d נקבל שלכל $d\ge 2$ מתקיים $M_d[0,1]=0$.
במילים פשוטות :אין נפח ממימד 2 ומעלה לקטע **[0,1]**.ולכן בהכרח המימד קטן מ2!

נראה ש $M_1[0,1]=1$:
לכל $\delta>0$ ניתן לכסות את הקטע *[0,1]* ע"י n קטעים זרים שלכל אחד מהם אורך קטן מ δ. (***diam*** נבחר n כך ש $\frac{1}{n}<\delta$) הקטעים זרים ומכסים את כל הקטע לכן

סכום האורכים הוא לפחות 1 ולכן מהגדרת $H_{\delta}^{1}[0,1]$ כאינפימום נקבל

$H_{\delta}^{1}[0,1]=1$ לכל $\delta>0$. כלומר $H_{\delta}^{1}[0,1]$ קבועה לכל δ ושווה ל 1 ולכן גם הסופרימום יהיה 1 $M_1[0,1]=lim_{\delta\to 0^+}H_{\delta}^{1}[0,1]=1$. מידת האוסדורף 1 וגם מצאנו **d=1** שהוא מימד האוסדורף של הקטע.

ראינו שמימד האוסדורף של קבוצת נקודות יצא אפס ושל קטע יצא אחד. ובכלל לכל משטח N מימדי, מימד האוסדורף שלו N (כלומר ההגדרה החדשה לא מקלקלת את מה שהכרנו...)

נראה שהיתרון של ההגדרה החדשה הוא שהיא תציג לנו מציאות חדשה על קבוצות וצורות מיוחדות. פרקטלים.

חלק ד'- חישוב מימד של פרקטל

<u>*self similar* / דמיון עצמי</u> - לאובייקט ניתן לשייך את התכונה "דמיון עצמי" אם הוא נראה בקרוב אותו דבר,בכל קנה מידה.

פרקטלים הם קבוצה מעניינת במיוחד של אובייקטים עם דמיון עצמי.

קב' קנטור שהזכרתי בחלק ב' הנה פרקטל עם דמיון עצמי.כל קטע שנבחר בכל שלב שהוא דומה לקטע המקורי, וההתפתחות ממנו והלאה, זהה לתהליך שהתפתח מהקטע המקורי **[0,1]**.

פתית השלג של קוך, הנו דוגמא לפרקטל נוסף שיש לו תכונת "דמיון עצמי".

הפתית נבנה ע"י קטע ,שמחלקים אותו ל-3 . ואת החלק האמצעי מחליפים ב-2 קטעים שכל אחד מהם בגודל של שליש הקטע שהוסר. וכן הלאה,כפי שמתואר

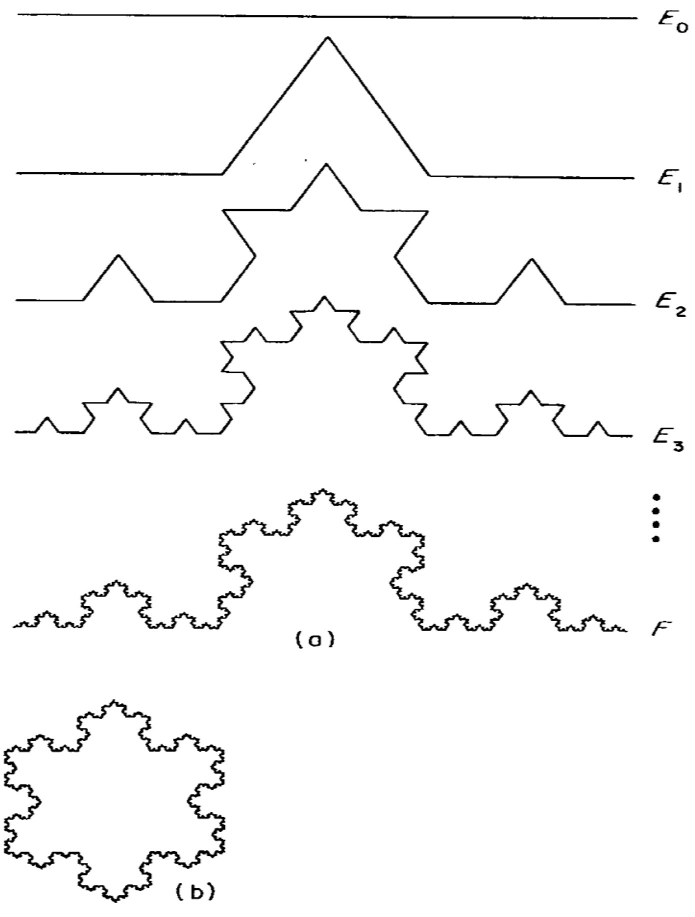


Figure 0.2 (a) Construction of the von Koch curve *F*. At each stage, the middle third of each interval is replaced by the other two sides of an equilateral triangle. (b) Three von Koch curves fitted together to form a snowflake curve

בתרשים:

בכל שלב באיטרציה, קטע מתארך פי 4/3 מאורכו.

מימד פרקטלי

ממד האוסדורף לרוב קשה מאוד לחישוב. עבור פרקטלים מסוימים ממד האוסדורף מתלכד עם הממד הפרקטלי. את הממד הפרקטלי קל יותר לחשב ולכן הוא שימושי יותר. נוסחת הממד הפרקטלי פועלת על פרקטל בעל תכונת הדמיון העצמי, שבה הפרקטל מורכב ממספר העתקים מוקטנים של עצמו.

יש דרך גסה לבדוק מימד של פרקטל. אם הוא מספיק יפה (מסודר) נוכל לחשב את המימד שלו ע"י צפיה בתהליך הבניה.וזה מתאים לפרקטלים שהם ' ***self similar*** '

ואם נגדיר:

m – כמות היחידות שיש בשלב ה***n***י
r - גורם הכווץ (היחס בין הגודל המקורי לגודל השנוצר בכל איטרציה.)
d- המימד של הפרקטל

אז נקבל את הקשר: $\boldsymbol{m = r^{d}}$

נרצה לבודד את חזקה, נקבל ע"י הפעלת לוגריתם על שני האגפים:

$$\boxed{d = \frac{\log(m)}{\log(r)} = \log_r(m)}$$

באופן כללי ב $\boldsymbol{R^n}$:

נקח את הקטע **[0,1]** נבנה קוביה **n** מימדית $\boldsymbol{I^n}$

הנפח שלה הוא בודאי 1 $(*1*1*1*1* \ldots.=\mathbf{1^n})$
נכפול כל קטע פי ***K***.
"הנפח" יגדל פי $\boldsymbol{K^n}$
וע"י חישוב נראה שהמימד הוא ***n*** (כמצופה)

$$\mathbf{d} = \frac{\boldsymbol{log(K^n)}}{\mathbf{log(K)}} = \boldsymbol{n}$$

נתבונן שוב בקבוצת קנטור,שאלנו:מהו המימד שלה? אולי 1 כי מקורה בקטע? אולי 0 כי לא נותר אף קטע בגבול?

נתבונן בתהליך הבניה: מכל 3 חלקים בשלב כלשהו הסרנו את האמצעי ונותרו 2 .

באיטרציה ה N יש לנו 2^N עותקים כאשר כל עותק אורכו קטן פי 3^N מהאורך המקורי. לכן

$$d = \frac{\log(2^N)}{\log(3^N)} = \frac{N\log(2)}{N\log(3)} = \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0.63$$

נראה שהחישוב תואם את מימד האוסדורף כפי שהוגדר לעיל...

תהי F קב׳ קנטור נראה שאם : $d = \dfrac{\log(2)}{\log(3)}$ אזי $\dim_H F = d \sim 0.63$.

<u>הוכחה:</u>

קבוצת קנטור F מתפצלת לחלק ימני ולחלק שמאלי :

$$\mathbf{F_L} = \mathbf{F} \cap \left[\mathbf{0}, \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right] \qquad \mathbf{F_R} = \mathbf{F} \cap \left[\tfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}, \mathbf{1}\right]$$

החלקים בברור דומים גאומטרית ל F אבל מוכפלים פי שליש.

כלומר $F_L \equiv F_R \equiv \tfrac{1}{3}F$

כמו״כ : $F = F_L \cup F_R$ ע״י איחוד הקבוצות הזרות.

אז לכל d :

$$M_d(F) = M_d(F_L) + M_d(F_R)$$

$$M_d(F) = M_d(\tfrac{1}{3}F) + M_d(\tfrac{1}{3}F)$$

$$M_d(F) = (\tfrac{1}{3})^d\, M_d(F) + (\tfrac{1}{3})^d\, M_d(F)$$ (מתכונת גורם הכווץ)

בהגדרה של מידת האוסדורף ראינו שקיימת נקודה קריטית של d בה $d = \dim_H F$
נצמצם את המשוואה ב $M_d(F) = 1$

נקבל: $1 = 2(\tfrac{1}{3})^d$

ולכן:

$$d = \frac{\log(2)}{\log(3)}$$

כפי שציפינו.

קיבלנו שהמימד של קבוצת קנטור אינו אלא 0.63 בקרוב.

בספר: 'The geometry of fractal sets' של Falconer K. מ 1985 בעמוד 14

למטה ,ניתן לראות את החישוב של $d = \frac{\log(2)}{\log(3)}$ וזאת ע"י שמוש בכיסויים, לפי הגדרת מימד האוסדורף.

באופן דומה נוכל לחשב את המימד של פתית השלג של קוך, אשר מימד האוסדורף שלו בין 1 ל 2 :

נתבונן בתהליך הבניה: מכל 3 חלקים בשלב כלשהו הסרנו את החלק האמצעי ונוצרו 4 קטעים שוים.

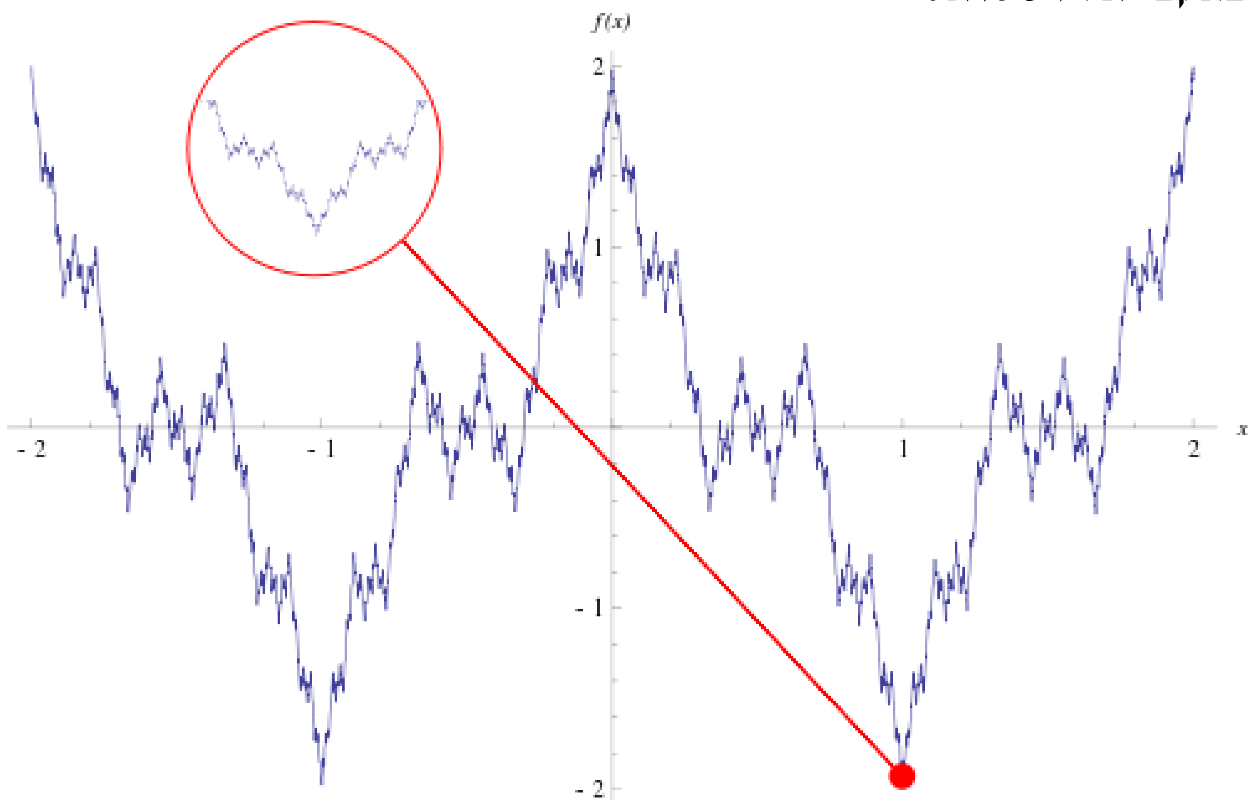
באיטרציה ה N יש לנו 4^N עותקים כאשר כל עותק אורכו קטן פי 3^N מהאורך המקורי. לכן

$$d = \frac{\log(4^N)}{\log(3^N)} = \frac{N\log(4)}{N\log(3)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1.261$$

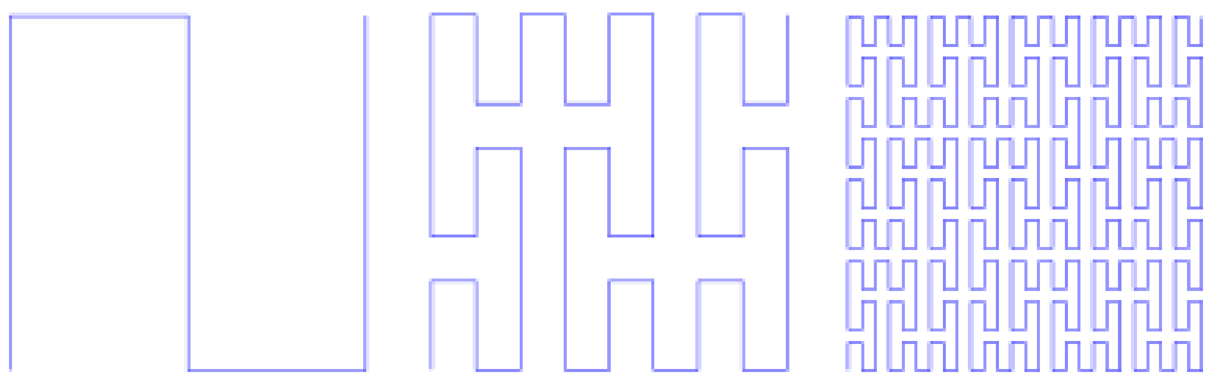
זהו מימד האוסדורף של פתית השלג,אשר אינו 1 ואינו 2...

<u>נספח</u>

פונקציית וירשטראס



עקום פיאנו



:ביבליוגרפיה

Falconer K.(1990), Fractal geometry, John Wiley & Sons, Chichester,.

Falconer K.(1985), The geometry of fractal sets, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

Mandelbrot, B.B. (1977). Fractals: Form, Chance, and Dimension. San Francisco: W.H. Freeman & Co.

Mandelbrot, B.B. (1982). The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: W.H. Freeman & Co.

Devaney, R.(1990), "Chaos, Fractals, and Dynamics*" : Computer Experiments in Mathematics*. Melno Park, California: Addison-Wesley Publishing Co.