

פרויקט גמר

נושא העבודה: Black body radiation קרינת גוף שחור

מגישים:

מיכל סיגרון

מרב בן-דוד

דפנה כהן – ברנר

מנחים:

פרופסור דוד מוכמל

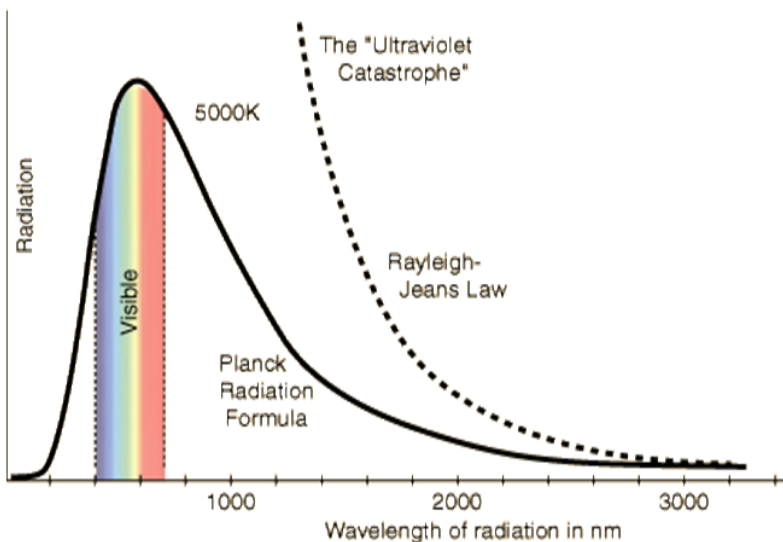
פרופסור ניר דוידסון

דוקטור אמנון חזן

תומכים:

דוקטורנט מיכה ניקסון

דוקטורנט אור כהן



תוכן עניינים:

עמ'	
3-4	1. רציונל
5-8	2. רקע תיאורטי על גוף שחור + סקירה היסטורית
9-22	3. פיתוחים מתמטיים
23-32	4. ניסוי קרינת גוף שחור מנורת להט + עיבודים ומסקנות
33-36	5. יישומים ודוגמאות לקרינת גוף שחור
37-39	6. הנחיות להדמיה של קרינת גוף שחור + דף עבודה
40	7. מקורות מידע

למה קרינת גוף שחור?????????

מעניין.....

מאפשר עריכת ניסוי במעבדה במכון וויצמן....

רלוונטי לחיים....

תיאור תהליך חקר שהתרחש בהיסטוריה של הפיסיקה והוביל למהפכה

מדהימה.....

מורים חוששים לדבר על נושא זה בכיתה...

ובסך הכל מבטא את החזון שלנו כמורות לפיסיקה

תהליך החקר להבנת קרינת גוף שחור בסוף המאה ה-19 ובתחילת המאה ה-20 מהווה דוגמא מצוינת לחקר שמתחיל לכאורה בשאלה אחת קטנה: ניסיון להבין את התפלגות הקרינה הנפלטת מגופים חמים (שמש, גוף האדם, נורת להט). במילים אחרות: מדוע עוצמה הקרינה הנפלטת מהגוף החם אינה ממשיכה להתעצם ככל שאורך הגל של הקרינה קטן? ומה אז – האם העוצמה יכולה להתעצם לאינסוף (ספקולציה זו נקראת: הקטסטרופה של האולטרה סגול)? הרי הדבר לא הגיוני, בסתירה לממצאי המדידות וסותר את עיקרון שימור האנרגיה????

אכן שאלה מטרידה את הקהילייה המדעית באותה תקופה והעולה מנוסחת ריילי ג'ינס (פירוט בפרק "פיתוחים מתמטיים") ורק מאוחר יותר נוסחת פלאנק נתנה הסבר ממצה ל"קטסטרופה של האולטרה סגול".

הרעיון שעמד בבסיס מחשבתו של פלאנק (1901) היה כי הקרינה הנפלטת מגוף שחור הינה במנות בדידות של אנרגיה וכל מנת אנרגיה הינה ביחס ישר לתדירות הקרינה (ב 1918 קיבל פרס נובל על כך). מנת אנרגיה זו נקראה לימים "פוטון".

במובן מסוים פלאנק הקדים את זמנו מכיוון שבדיעבד התברר כי ההנחה שלו פתחה פתח למהפכה רעיונית ששינתה לחלוטין את תפיסת העולם בקרב המדענים אודות חשיבה פיסיקלית. תגליתו של פלאנק הינה תגלית שבפרספקטיבה היסטורית היוותה את ראשיתה של תורת הקוונטים. פלאנק תרם פריצת דרך משמעותית עם ניסויו בגוף שחור.

למעשה, פלאנק היה אבי תורת הקוונטים "במקרה" מבלי להתכוון לכך. הוא בסך הכל רצה לתת הסבר לשאלה מדעית ספציפית אך בפועל פתח לנו צוהר עצום לתורה הקוונטית על כל עוצמתה.

(רקע היסטורי ממצה ומפורט אודות התפתחות החקר של קרינת גוף שחור ניתן למצוא בגוף העבודה)

כיום אנו יודעים עד כמה אבן דרך זו היוותה מהפכה בחשיבה המדעית החל מאותה תקופה, וכל ההתקדמות של הפיסיקה המודרנית מלמעלה ממאה השנים האחרונות הוא בזכות תורה מהפכנית זו.

כיצד נסללה הדרך לתורת הקוונטים? ע"י חשיבה מדעית חוקרת לשאלה אחת קטנה: הסבר לקטסטרופה של האולטרה סגול בקרינת גוף שחור.

עוצמתה של מהפכה זו - מי ישורנה?

פלאנק בבחינת "ניבא ולא ידע מה ניבא", או "חיפש אתונות ומצא עבור כולנו מלוכה".

מבחינתנו כמורות ישנה סמליות רבה בבחירת נושא זה לעבודת הגמר (מלבד העניין שמצאנו בנושא עצמו מבחינה פיסיקלית, מבחינת הניסוי ומבחינת ההיסטוריה וההתפתחות המחשבתית הכרוכה בעיסוק בו):

אנו כמורות לפיסיקה הרואות ייעוד בחינוך המדעי לדור הבא של ילדינו, בהציגנו בפני מורים עמיתים עבודה זו למעשה מתחקות אחר תהליך חקר משמעותי בהיסטוריה של הפיסיקה ומנסות להציג את חזון החינוך המדעי שלנו:

להראות את הקשר והרלוונטיות של השקפת עולם מדעית לחיינו, הבנת העולם בו אנו חיים ושמירה עליו, לשיפור איכות חיינו ולהתפתחותם.

גירוי סקרנות מדעית, הכוונה לתעוזה מחשבתית, והדגמה לתלמידינו כי לפעמים צעד קטן אחד בחקר מדעי יכול להוות צעד גדול ועצום בהתפתחות הפיסיקה בכללותה.

לעיתים התלמיד חוקר ומנסה להבין דבר אחד אבל בעצם מקבל מענה למכלול הרבה יותר מקיף של הפיסיקה. לא לפחד לשאול, לא לפחד לחשוב אחרת, להתנסות ולחקור ולעיתים "מתוך שלא לשמה – בא לשמה".

דווקא עקב העובדה שנושא קרינת גוף שחור הוצא מתוכנית הלימודים בפיסיקה, מן הראוי להקדיש מעט תשומת לב לתופעה זו ולהשלכותיה אודות התפתחות החשיבה המדעית.

תלמידים ומורים לפיסיקה – כי בידינו הדבר!!!

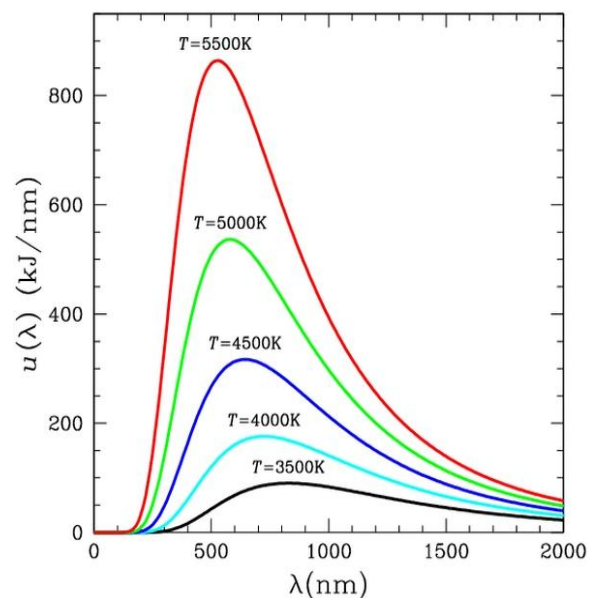
בסיכומה של חוויה מעצבת – שלוש שנים בתכנית רוטשילד במכון וויצמן, תואר שני בהוראת המדעים במטרה לעשות עבודתנו טובה ומודעת יותר – אם כל הלימודים היו העוגה, ביצוע הניסוי והעבודה עם המדענים של המכון הוא הקצפת, הרי שהעבודה כולה על כל היבטיה בנושא קרינת גוף שחור הינה – הדובדבן שבקצפת.

רקע תיאורטי על גוף שחור

גוף שחור הוא גוף תיאורטי הבולע באופן מושלם קרינה אלקטרומגנטית אשר פוגעת בו בכל אורכי הגל ללא החזרות או העברות. הגדרה זו אין משמעותה שגוף שחור איננו פולט קרינה, אלא שהוא איננו מחזיר את הקרינה הנפלטת עליו.

בליעה של הקרינה הפוגעת בגוף השחור גורמת לשינוי בטמפרטורה של הגוף השחור זאת עקב המרת הקרינה האלקטרומגנטית הפוגעת לאנרגיה תרמית בגוף. (אנרגיה תרמית היא האנרגיה פנימית של גוף שמיוחסת לטמפרטורה שלו. אנרגיה פנימית זו, מבטאת את כמות החום האצורה במערכת. האנרגיה התרמית מתארת אנרגיות חלקיות של החלקיקים המיקרוסקופיים, שנעים באקראיות, במהירות ממוצעת הקשורה בטמפרטורה ומכאן, אנרגיה התרמית שווה לסכום האנרגיות הקינטיות של כלל החלקיקים במערכת). מאחר והגוף מתחמם כתוצאה מבליעת הקרינה הנפלטת עליו הוא מתחיל לקרן קרינה אלקטרומגנטית שעוצמתה, ליחידת שטח מהגוף וכתלות באורך הגל, תלויה רק בפרמטר אחד והוא **טמפרטורת הגוף השחור**.

כאשר לגוף שחור יש אנרגיה פנימית (תרמית) הוא פולט קרינה בכל אורכי הגל, בעוצמה התלויה באורך הגל ובטמפרטורה הנתונה, בהתאמה לחוק פלאנק (שנרחיב עליו בהמשך) - הגוף השחור פולט קרינה אלקטרומגנטית בהתפלגות מסוימת של אורכי גל, התלויה אך ורק בטמפרטורה שלו. קרינה שיש לה את המאפיינים הנ"ל נקראת **קרינת גוף שחור** ותיאור עוצמת הקרינה כפונקציה של אורך הגל/תדירות בטמפרטורה מסוימת מכונה ספקטרום קרינה של גוף שחור:



בתרשים: קרינת גוף שחור כפונקציה של אורכי גל שונים

גוף שחור בטמפרטורה הנמוכה מ 430 מעלות צלזיוס (700 מעלות קלווין) פולט מעט מאוד קרינה באור הנראה-400nm) (700nm וקורן בעיקר בתדירויות נמוכות יותר כמו גלי רדיו, מיקרוגל ותת אדום ולכן הוא נראה שחור. גוף שחור אידיאלי הוא קירוב טוב לתיאור הקרינה הנפלטת מגופים חמים רבים, כגון: אור השמש, נורת להט וקרינת תת אדום מבעלי חיים (נרחיב על כך בפרק של היישומים).

סקירה היסטורית- החיפוש אחר מודל מתמטי של קרינת גוף שחור:

קרינת גוף שחור היא תופעה פיסיקלית שהחלה להיחקר לקראת סוף המאה ה-19. בשנת 1860 כינה גורסטב קירכהוף תופעה זו בשם "קרינת גוף שחור", והעבודה המדויקת הראשונה שהתבצעה בגופים שחורים החלה בשנת 1890. תיאור מדויק של התופעה התפתח והשתכלל במהלך השנים, כתוצאה ממחקר ניסויי, מחקירה מתמטית מעמיקה ושנים רבות של חקירת גופים שחורים, הם שהובילו לפריצת דרך דרמטית בפיסיקה.

בסוף המאה ה-19 קהילת הפיסיקאים גילתה עניין רב בשאלה: כיצד בדיוק גופים מחוממים פולטים קרינה. מציאת הסבר ואפילו תיאור להתפלגות הקרינה הנפלטת מגוף שחור היוותה אתגר מרכזי עבור הפיסיקה התיאורטית בסוף המאה ה-19 וראשית המאה ה-20. הייתה הבנה כללית באותה תקופה כיצד קורה התהליך, והיה ידוע כי חום גורם לערור של מולקולות ואטומים בחומרים. משוואות מקסוול ניבאו, כתוצאה מניסוי של הרץ, כי אוסילציות של מטענים תוביל לפליטת קרינה אלקטרו מגנטית (א"מ). (מקסוול והרץ הם רק שניים מיני רבים שעסקו בתחום, היו עוד רבים וטובים שעסקו בנושא חשוב זה). בנוסף, משוואות מקסוול הוכיחו כי הקרינה הא"מ נעה במהירות האור. המסקנה שנבעה מכך שקרינה א"מ נעה במהירות האור הייתה כי אור נראה וקרינת אינפרא אדום (חום), אשר מתנהגת באופן דומה לאור גלוי, הם גלים אלקטרו מגנטיים. ההבנה בתחילת המאה ה-20 הייתה, אם ההנחות נכונות, כי גוף מחומם יפלוט חום ואור נגלה, כתלות בטמפרטורת הגוף. עד לפני פיתוח התורה הקוונטית, לא הייתה הבנה תיאורטית שתסביר את פליטת הקרינה באורכי הגל השונים מגופים חמים כגון חוט להט של נורה או ברזל מלובן. מצאו כי הספקטרום של קרינה זו, המכונה "קרינת חום" הוא ספקטרום רציף, המשתנה עם הטמפרטורה ותלוי רק מעט בסוג החומר: לשני חומרים שונים באותה טמפרטורה יש ספקטרום דומה מאוד של קרינת חום. נעשו ניסיונות להסביר את צורת הספקטרום ואת תלותו בטמפרטורה בעזרת התיאוריה האלקטרומגנטית הקלאסית של האור, אך כל הניסיונות הללו כשלו.

בתחילת המאה ה-20 פותחה באופן אמפירי נוסחה המתארת את ספקטרום הפליטה של גוף שחור, בכל אורכי הגל, עבור טמפרטורה נתונה. נוסחה זו נקראת חוק ריילי-גינס על שם מפתחיה, גון וילאם סטראט ריילי וג'יימס ג'ינס (ראה בפיתוח מתמטי). הנוסחה התקבלה מפיתוחים מתמטיים המתבססים על מודל הגלים האלקטרומגנטיים אשר לפיו קרינה נפלטת ונבלעת ברציפות. הפתרון תאם לתצפיות התפלגות עוצמת הקרינה באורכי הגל הארוכים, אך התגלתה בעיה חמורה ביותר באורכי הגל הקצרים יותר, כי כאשר מבצעים אינטגרציה (סכימה) על משוואה זו מאפס ועד אינסוף, מתקבל כי הפליטה הכוללת בכל אורכי הגל היא אינסופית, דבר שאינו תואם את חוק שימור האנרגיה וגם מנוגד לממצאי ניסויים ולהיגיון, שהרי לא יתכן קרינה אינסופית! אי התאמה זו בין החישובים לניסוי ידוע בשם "הקטסטרופה של האולטרה סגול", משום שהנוסחה אכן מתאימה לאורכי הגל הארוכים יותר, אך מתבדרת בתחום של האולטרה סגול. על פי הפיסיקה הקלאסית, גוף שחור בשיווי משקל תרמי יפלוט קרינה בעוצמה אינסופית.

הקטסטרופה העל-סגולית נגרמת כתוצאה מכך שבפיסיקה קלאסית (סטטיסטית) הקרינה מתוארת כגל אלקטרומגנטי (כאשר כל גל באורך גל נתון מתאר דרגת חופש אחת), ולתנודות הרמוניות (דרגות החופש) של המערכת בשיווי משקל יש אנרגיה ממוצעת הפרופורציונאלית לטמפרטורה T.

על פי חוקי האלקטרומגנטיות הקלאסית מתקבל כי מספר התנודות בחלל הגוף או מספר אופני התנודה בתדר מסויים פרופורציונאליות לריבוע התדירות (ראה בפרק "פיתוחים מתמטיים"- נוסחת ריילי-ג'ינס). מכיוון שכל אופן תנודה (מוד) נושא עמו מנה זהה של אנרגיה קבועה ($K_B T$) וכיוון שלתדר של הקרינה הא"מ אין גבול עליון, אזי קיים מספר כולל אינסופי של אופני תנודה (ראה בהוכחת נוסחת ריילי-ג'ינס). כלומר, המסקנה היא שבגוף אגורה אנרגיה כוללת אינסופית- האנרגיה "מתפוצצת"!

מסקנה זו כמובן אינה פסיקלית-משום שסך עוצמת הקרינה הנצפית אינה יכולה להיות אינסופית! וכמו שצינו מסקנה זו זכתה לצינו הקטטורפה של האולטרה סגול. כתוצאה מה"קטטורפה" הוגבל השימוש בנסחה זו לתחום אורכי הגל הארוכים.

את הסתירה יישב בשנת 1901 הפיסיקאי מקס פלנק, אשר הצליח לפתח נוסחה תיאורטית, שהסבירה באופן מושלם את הספקטרום של קרינת הגוף השחור. על מנת לפתח נוסחה שתתאר את קרינת הגוף השחור, הניח פלאנק כי האנרגיה נפלטת מגוף שחור במנות בדידות של אנרגיה (קוונטים של אנרגיה): כלומר, קיימת קוונטיזציה של האנרגיה- מנות האנרגיה הן כפולות של מנה בסיסית, התלויה בתדירות בלבד. הנחה זו היא אחת ההנחות הבסיסיות שהביאו לפיתוח תורת הקוונטים.

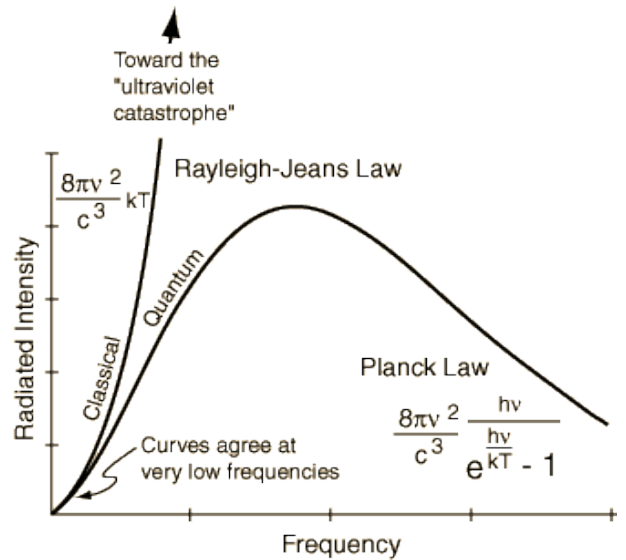
פלנק הניח שאנרגיה אלקטרומגנטית אינה מתוארת על ידי תיאור קלאסי כי האור נפלט ונבלע ע"י גופים באופן רציף, אלא יכולה רק להתנווד או להיפלט בצורה דיסקרטית (בדידה) של כמויות אנרגיה הפרופורציונליות לתדירות. פלאנק השתמש בסטטיסטיקת בולצמן לשם ספירת המודים בתיבה, מתוך סטטיסטיקת בולצמן קיבל שהסיכוי לעירור אופן תנודה הוא לא קבוע אלא דועך עם התדירות. לכן האנרגיה בכל אופן (מוד) אינה פרופורציונלית ל- T (כמו בפיסיקה הקלאסית) אלא יורדת ככל שאופני התנודה בעלי תדר גבוה יותר (ראה פרק "פיתוחים מתמטיים"- נוסחת פלאנק). לכן האנרגיה הכללית במערכת סופית!. התאמת נוסחת פלאנק לספקטרום שנמדד בניסויים הוכיחה כי האנרגיה של חלקיק אור היא hf (h- קבוע פלנק). חבילת האנרגיה של התנודה האלקטרומגנטית שהניח פלאנק נקראה ברבות הימים פוטון.

הצעתו המהפכנית של פלאנק סיפקה כלי לחישוב התפלגות הקרינה הנפלטת מגוף שחור לוחט, ותלותה באורך הגל. תוצאות החישוב התאימו להפליא לתוצאות המדידה של קרינה הנפלטת מגוף שחור. בעזרת הנחתו של פלאנק, מספר אופני התנודה באנרגיה נתונה בתדירויות גבוהות בחלל הגוף קטן משמעותית ועל כן האנרגיה הממוצעת של תדירויות אלו קטנה גם היא. עוצמת הקרינה דועכת לבסוף לאפס בתדירויות "אינסופיות" וסך העוצמה הינה סופית כמצופה מהתוצאות הניסיוניות. כאשר מקס פלאנק פיתח את הנוסחה הוא לא הבין את המשמעות העמוקה וההשלכות שלה, הוא רק חיפש פתרון מתמטי ל"קטטורפה של UV", הוא לא התייחס למנות בדידות אלה כאל ישויות ממשיות, אלא כאל כלי מתמטי בלבד.

בדיעבד התברר כי ההנחה של פלאנק הייתה פריצת דרך למהפכה רעיונית ששינתה לחלוטין את תפיסת העולם הפיסיקלי. למעשה תגליתו של פלאנק הינה תגלית שבפרספקטיבה היסטורית היוותה את ראשיתה של תורת הקוונטים. פלאנק היה פורץ דרך עם ניסויו בגוף שחור. הניסויים הובילו להסתכלות על האור בצורה קוונטית, להתפתחות המכניקה קוונטית ולאלקטרו-דינמיקה קוונטית. רבים רואים בהנחה של פלאנק משנת 1900 צעד ראשון של פיתוח תורת הקוונטים.

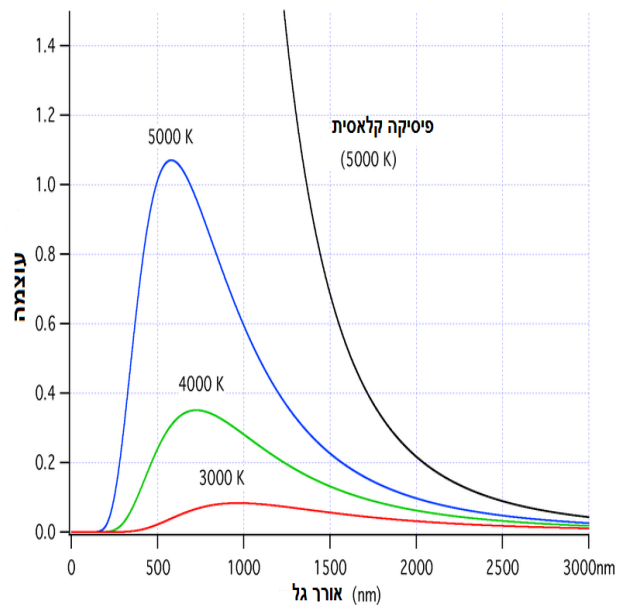
על ההשערה כי האנרגיה הא"מ יכולה להיפלט אך ורק בכפולות של היחידה הבסיסית: $E = h\nu$ קיבל מקס פלאנק פרס נובל לפיסיקה בשנת 1918.

תרשים 1: גרף המתאר את תלות עוצמת הקרינה בתדירות לפי חוק פלאנק ולפי חוק ריילי וג'ונס



תרשים 1 מציג השוואה בין עקומה של גוף שחור לזה שהתקבלה על סמך ניסויים לפי ריילי וג'ונס ממודל הגלים האלקטרומגנטיים (פיסיקה הקלאסית) עם עקומה שהתקבלה באופן תיאורטי לפי פלאנק ממודל הקוונטי. (פיסיקה מודרנית).

תרשים 2: ספקטרום קרינה של גוף שחור - גרף המתאר את תלות עוצמת הקרינה באורך הגל



תרשים 2 מציג גרפים צבעוניים המתארים את עוצמת הקרינה (או צפיפות ההספק) האופיינית מגוף שחור לכל אורכי גל מסוימים בטמפרטורות שונות לפי הפיסיקה המודרנית וגרף אחד לפי התיאוריה הקלאסית (צבע שחור).

ניתן לראות מתרשים 2: כי עוצמת הקרינה הנפלטת מגוף שחור כפונקציה של אורך הגל, נקבעת ע"י טמפרטורת הגוף. ככל שהטמפרטורה גדולה יותר כמות הקרינה הנפלטת גדולה יותר, ואורך הגל שבו הקרינה מקסימאלית נעשה קצר יותר.

באורכי גל ההולכים וגדלים, עוצמת הקרינה הולכת וקטנה וגם באורכי גל קטנים הקרינה הולכת וקטנה בניגוד לגרף המייצג את התיאוריה הקלאסית שבו עוצמת הקרינה הנפלטת עולה לאינסוף כאשר אורכי הגל הולכים ונעשים קצרים יותר.

הוכחת נוסחת ריילי-ג'ינס- טיפול קלאסי: כמות האנרגיה הכללית הנפלטת מגוף שחור בתדר מסוים:

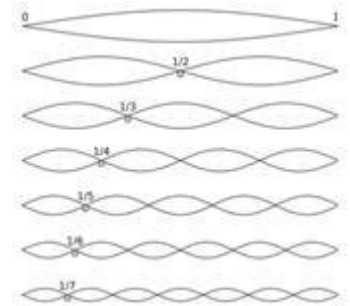
חיפושים אחרי המודל האידיאלי של גוף שחור: הוחלט לקחת קופסה שחורה עם פתח קטן מאוד כך שגלים א"מ יוכלו להיכנס פנימה. כיוון שהפתח קטן הגלים לא יוכלו לצאת וכיוון שאין החזרות, כולם יבלעו לתוך דפנות הגוף. מכאן, הגלים נפליטים (בקירוב) רק כתוצאה מחימום הקופסה.

נמצא את האנרגיה הנפלטת ליחידת נפח, ליחידת תדירות:

כיוון שהגל הא"מ מתאפס בדפנות של הקופסה, ניתן להסיק שמדובר בגלים עומדים אשר מקיימים:

$$L = \frac{n\lambda_n}{2} = \frac{nc}{2f_n} = \frac{nc}{2 \frac{\omega_n}{2\pi}} = \frac{nc\pi}{\omega_n}$$

על מנת לקיים את התנאי בקצוות, המרחק בין הקצוות יהיה חייב להיות כפולה של חצי אורך גל, כבשרטוט:



כאשר L אורך הקופסה, c מהירות האור בריק ו- λ_n, ω_n הם אורך הגל ותדירות זוויתית של הגל כפונקציה של האינדקס n . n - מספר המצב/ מספר המוד / מספר אופן תנודה-סידור מותר כלשהו של גל בתוך הקופסה. n מקבל ערכים בין 1 ל- ∞ . מכאן:

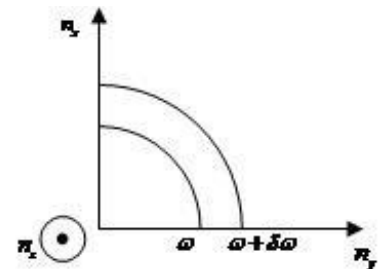
$$(1) n = \frac{L \omega_n}{c\pi}$$

כאשר עוברים לתלת מימד הנוסחה (1) מקבלת צורה:

$$\frac{L \omega_n}{c\pi} = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = r$$

רדיוס הכדור: r

כעת נמצא את מספר המצבים / אופני תנודה (המודים) בין ω ל- $\omega + \delta\omega$. נתבונן בחתך של השמינית החיובית של כדור:



נסכם את כל המצבים שיש בשכבה דקה זאת בין ω ל- $\omega + \delta\omega$ ונציב את r :

$$4\pi r^2 \delta r = 4\pi \left(\frac{L \omega_n}{c\pi}\right)^2 \delta \left(\frac{L \omega_n}{c\pi}\right) * \frac{1}{8} * 2 = L^3 \frac{8\pi}{c^3} \left(\frac{\omega_n}{2\pi}\right)^2 \delta \left(\frac{\omega_n}{2\pi}\right) = V \frac{8\pi}{c^3} (f)^2 \delta f$$

הכפלנו בשמינית כיוון שמדובר רק בשמינית החיובית של הכדור. הכפלנו ב-2 בגלל שקיימים 2 מצבים של הגל (מצבי קיטוב), למשל, אם הוא מתקדם בציר z , אזי שני המצבים הם x או y .

אם נחלק ב- v וב- δf נקבל את מספר המצבים (המודים) ליחידת תדירות וליחידת נפח:

$$(2) \text{ מספר אופני התנודה ליחידת תדירות וליחידת נפח} = \frac{8\pi}{c^3} (f)^2$$

כעת נמצא את האנרגיה הממוצעת של כל אופן תנודה (מוד) לחלקיק בודד:

ע"פ הפיסיקה הקלאסית כל חלקיק נע באוסילטור הרמוני חד ממדי – עבור גוף שחור נצפה למצב בו יש חלקיק הנמצא על קפיץ בתדר מסוים והאנרגיה הכוללת של חלקיק בודד קבועה ושווה לסכום האנרגיה הקינטית והאנרגיה האלסטית שלחלקיק:

$$H = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{kl_i^2}{2}$$

הגדרת אנרגיה ממוצעת:

$$(3) \langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} He^{-\beta H}}{\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta H}}$$

פונקציית המשקל בחישוב ממוצע זה נקראת פונקציית ההסתברות של בולצמן.

בהנחה שכל מצב יכול להיות עם כל ערך של אנרגיה (זה היה הידע באותה תקופה), לכן ניתן להפוך את הסכום לאינטגרל

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} He^{-\beta H}}{\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta H}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} He^{-\beta H} dH}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta H} dH} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{p_i^2}{2m} + \frac{kl_i^2}{2} \right] e^{-\beta \left[\frac{p_i^2}{2m} + \frac{kl_i^2}{2} \right]} dp_i dl_i}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \left[\frac{p_i^2}{2m} + \frac{kl_i^2}{2} \right]} dp_i dl_i}$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{p_i^2}{2m} e^{-\beta \left[\frac{p_i^2}{2m} \right]} \right] dp_i}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \left[\frac{p_i^2}{2m} \right]} dp_i} + \frac{\int_0^{\infty} \left[\frac{kl_i^2}{2} e^{-\beta \left[\frac{kl_i^2}{2} \right]} \right] dl_i}{\int_0^{\infty} e^{-\beta \left[\frac{kl_i^2}{2} \right]} dl_i}$$

ניתן לראות כי האיברים שבסוגריים המרובעים במונה הוא נגזרת של מינוס בטא:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{-\partial \left[\int_{-\infty}^{\infty} dp_i e^{-\beta \left(\frac{p_i^2}{2m} \right)} \right]}{\partial \beta} + \frac{-\partial \left[\int_0^{\infty} dl_i e^{-\beta \left(\frac{kl_i^2}{2} \right)} \right]}{\partial \beta}$$

נסתכל על האיברים שבסוגריים המרובעים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_i e^{-\beta \left(\frac{p_i^2}{2m} \right)} = \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} \quad \text{לפי גאוסין ידוע:}$$

$$\int_0^{\infty} dl_i e^{-\beta \left(\frac{kl_i^2}{2} \right)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{k\beta}} = \sqrt{\frac{\pi}{2k\beta}} \quad \text{חצי גאוסין ידוע:}$$

נציב במשוואה ונגזור:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{-\partial \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}}{\partial \beta} + \frac{-\partial \sqrt{\frac{\pi}{2k\beta}}}{\partial \beta} = \frac{\left(-\frac{2m\pi}{\beta^2} \right)}{2 \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}} - \frac{\left(-\frac{\pi}{\beta^2} \right)}{2 \sqrt{\frac{\pi}{2k\beta}}} = \frac{2m\pi}{\beta^2} + \frac{\pi}{2k\beta^2}$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\beta}$$

$$(4) \langle \varepsilon \rangle = \frac{K_B T}{2} + \frac{K_B T}{2} = K_B T \quad \text{כאשר: } \beta = \frac{1}{K_B T} \quad \text{נקבל}$$

התוצאה תואמת את משפט החלוקה השווה האומר כי כל דרגת חופש ריבועית תורמת $\frac{K_B T}{2}$.

נכפיל את ביטוי (4) במספר אופני התנודה (ביטוי 2) בתדר מסוים ונקבל את האנרגיה הכללית הנפלטת ליחידת נפח ליחידת תדירות:

$$(5) u(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \langle \varepsilon \rangle \quad \text{מכאן}$$

$$(6) u(f, T) = \frac{8\pi}{c^3} (f)^2 K_B T$$

$$\rightarrow (7) \frac{\langle E \rangle}{V} = \frac{8\pi}{c^3} K_B T \int_0^\infty (f)^2 df \quad \text{האנרגיה הכללית ליחידת נפח:}$$

קיבלנו את נוסחת ריילי-ג'ינס על שם מפתחיה, גון וילאם סטראט ריילי וג'יימס ג'ינס.

$$\infty \leftarrow E, \quad \infty \leftarrow u(f, T), \quad \infty \leftarrow f \quad \text{שכאשר}$$

דבר זה אינו תואם את חוק שימור האנרגיה. אי התאמה זו בין המודל המתמטי למציאות מכונה "הקטסטרופה של האולטרה סגול", מכיוון שבאורכי גל הקצרים האנרגיה מתבדרת.

כתוצאה מה"קטסטרופה של האולטרה סגול" הוחלט להגביל את הנוסחה רק עבור אורכי גל ארוכים

נכתוב את נוסחת ריילי ג'ינס כפונקציה של אורך גל על מנת להשוות לתוצאות הניסיוניות:

$$\left[\begin{array}{l} \text{החלפת משתנים:} \\ f = \frac{c}{\lambda} \\ df = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda \end{array} \right]$$

$$(7) \frac{\langle E(f, T) \rangle}{V} = \frac{8\pi K_B T}{c^3} \int_0^\infty df (f)^2 = \frac{8\pi K_B T}{c^3} \int_\infty^0 -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda \left(\frac{c}{\lambda}\right)^2$$

$$(8) \frac{\langle E(f, T) \rangle}{V} = 8\pi K_B T \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^4}$$

$$(9) u(\lambda, T) = \frac{8\pi}{\lambda^4} K_B T$$

האנרגיה הכללית של N חלקיקים:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{P_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N \frac{kl_i^2}{2}$$

הגדרת אנרגיה ממוצעת:

$$(3) \langle E \rangle = N \langle \epsilon \rangle = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} He^{-\beta H}}{\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta H}}$$

$$N \langle \epsilon \rangle = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} He^{-\beta H}}{\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta H}} = \frac{-\partial Q}{\partial \beta} = \frac{-\partial \ln Q}{\partial \beta}$$

פונקציית החלוקה- נחשב את פונקציית החלוקה: Q

$$Q = \frac{1}{h^N N!} \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \dots dp_N e^{-\beta \left(\sum_{i=1}^N \frac{P_i^2}{2m} \right)} \int_0^{\infty} dl_1 \dots dl_N e^{-\beta \left(\sum_{i=1}^N \frac{kl_i^2}{2} \right)} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \dots dq_N$$

$$Q = \frac{1}{h^N N!} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dp_i e^{-\beta \left(\frac{P_i^2}{2m} \right)} \right]^N \left[\int_0^{\infty} dl_i e^{-\beta \left(\frac{kl_i^2}{2} \right)} \right]^N V^N$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_i e^{-\beta \left(\frac{P_i^2}{2m} \right)} = \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} \quad \text{לפי גאוסין ידוע :}$$

$$\int_0^{\infty} dl_i e^{-\beta \left(\frac{kl_i^2}{2} \right)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{k\beta}} \quad \text{חצי גאוסין ידוע :}$$

מכאן:

$$Q = \frac{1}{h^N N!} \left[\sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} \right]^N \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{k\beta}} \right]^N V^N = \frac{1}{h^N N!} \left[\frac{2m\pi}{\beta} \right]^{N/2} \left[\frac{\pi}{2k\beta} \right]^{N/2} V^N$$

$$\ln Q = \ln \frac{1}{h^N N!} + \ln \left[\frac{2m\pi}{\beta} \right]^{N/2} + \ln \left[\frac{\pi}{2k\beta} \right]^{N/2} + \ln V^N$$

נציב באנרגיה הממוצעת ונגזור:

$$N \langle \epsilon \rangle = \frac{-\partial \ln Q}{\partial \beta} = \frac{-\partial \ln Q}{\partial \beta} = - \left(\frac{N}{2} * \frac{1}{\frac{2m\pi}{\beta}} * \left(-\frac{2m\pi}{\beta^2} \right) + \frac{N}{2} * \frac{1}{\frac{\pi}{2k\beta}} * \left(-\frac{\pi}{\beta^2} \right) \right) = \frac{N}{2\beta} + \frac{N}{2\beta} = \frac{N}{\beta}$$

$$N \langle \epsilon \rangle = NK_B T \quad \text{(4) כאשר : } \beta = \frac{1}{K_B T} \quad \text{נקבל}$$

ולכן האנרגיה הממוצעת לחלקיק בודד היא כפי שקיבלנו בהוכחה הראשונה:

$$\langle \epsilon \rangle = K_B T$$

הוכחת נוסחת פלאנק- טיפול קוואנטי: כמות האנרגיה הכללית הנפלטת מגוף שחור בתדר מסוים:

בניגוד לנאמר קודם, טען פלאנק שלא ניתן להפוך את הסכום לאינטגרל בהגדרה של אנרגיה ממוצעת, היות והאנרגיה לא רציפה ולכן חייבים לעשות סכום מאפס עד אינסוף כאשר האנרגיה יכולה להיפלט אך ורק בכפולות של hf .

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_1^\infty nhfe^{-\beta nhf}}{\sum_1^\infty e^{-\beta nhf}} : \text{ההגדרה של אנרגיה ממוצעת של קרינה בתדר מסוים בטמפרטורה}$$

$$\left[\begin{array}{l} \sum_1^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \text{ לפי טור הנדסי} \\ \sum_1^\infty e^{-\beta nhf} = \frac{1}{1-e^{-\beta hf}} \text{ לכן המכנה} \end{array} \right] \quad \text{קודם נטפל במכנה- נשתמש בנוסחת סכום של סידרה הנדסית:}$$

נציב:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_1^\infty nhfe^{-\beta nhf}}{1 - e^{-\beta hf}}$$

לגבי המונה: נכתוב את הסכום בכתיבה של נגזרת ושוב נפעיל טור הנדסי במונה:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_1^\infty nhfe^{-\beta nhf}}{1 - e^{-\beta hf}} = \frac{-\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_1^\infty e^{-\beta nhf}}{1 - e^{-\beta hf}} = \frac{-\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta hf}} \right)}{1 - e^{-\beta hf}}$$

נגזור את המונה ונקבל:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{-\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta hf}} \right)}{1 - e^{-\beta hf}} = \frac{-\frac{0 - hfe^{-\beta hf}}{\left(\frac{1}{1 - e^{-\beta hf}} \right)^2}}{1 - e^{-\beta hf}} = \frac{hfe^{-\beta hf}}{1 - e^{-\beta hf}}$$

קיבלנו את האנרגיה הממוצעת לתדר מסוים:

$$(7) \quad \langle \varepsilon \rangle = \frac{hfe^{-\beta hf}}{1 - e^{-\beta hf}} = \frac{hf}{e^{\beta hf} - 1}$$

$$(5) \quad u(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \langle \varepsilon \rangle \quad : \text{כאשר נציב במשוואה 5}$$

נקבל את נוסחת פלאנק בצורה זו:

$$(8) \quad u(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \frac{hf}{e^{\beta hf} - 1} \quad \text{או} \quad (9) \quad u(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \frac{hf}{\left(e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1 \right)} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{\left(e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1 \right)}$$

ניתן לראות מהנוסחה שהאקספוננט דועך ולא נותן לפונקציה להתבדר, האינטגרל מתכנס ולכן גם בתדרים גבוהים האנרגיה שואפת לאפס (ולא לאינסוף כמו בנוסחה של ריילי-ג'ינס).

$$0 \leftarrow E : \text{מכאן} , \infty \leftarrow e^{\beta hf} , \infty \leftarrow f$$

$$(13) \quad \frac{\langle E(f, T) \rangle}{V} = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{f^3 df}{\left(e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1 \right)} \quad : \text{מכאן האנרגיה הכללית אינה מתבדרת, מספר סופי!}$$

$$E = \sum_k n_k(\varepsilon) \varepsilon_k = \sum_{k_x} \frac{\Delta k_x}{\Delta k_x} \sum_{k_y} \frac{\Delta k_y}{\Delta k_y} \sum_{k_z} \frac{\Delta k_z}{\Delta k_z} n_k(\varepsilon) \varepsilon_k = \frac{1}{\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y dk_z n_k(\varepsilon) \varepsilon_k$$

$$\left[\Delta k_x = \Delta k_y = \Delta k_z = \frac{2\pi}{L} \right]$$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} d^3k = \int_{-\infty}^{\infty} \sin\theta d\theta d\varphi k^2 dk = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty k^2 dk = \int_0^\infty 4\pi k^2 dk \right]$$

$$E = \frac{1}{\frac{8\pi^3}{L^3}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k n_k(\varepsilon) \varepsilon_k = \frac{V}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} 4\pi k^2 n_k(\varepsilon) \varepsilon_k dk$$

וכעת נציב במשוואה ונקבל: $n_k(\varepsilon) = \frac{2}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$ היות וקרינת גוף שחור היא פוטונים אזי:

$$E = \frac{V}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk 4\pi k^2 \frac{2}{e^{\beta\varepsilon} - 1} \varepsilon_k$$

$$\left[\varepsilon_k = \hbar\omega = c\hbar k \quad \text{אנרגיה של פוטון} \quad \left[\omega = ck \right] \right]$$

$$E = \frac{V}{8\pi^3} \int_0^\infty dk 8\pi k^2 \frac{1}{e^{\beta c\hbar k} - 1} c\hbar k$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{החלפת משתנים:} \\ k = \frac{\omega}{c} \\ dk = \frac{d\omega}{c} \end{array} \right]$$

$$E = \frac{V}{8\pi^3} \int_0^\infty \frac{d\omega}{c} 8\pi \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{1}{e^{\beta c\hbar \frac{\omega}{c}} - 1} c\hbar \frac{\omega}{c} = \frac{V}{\pi^3} \int_0^\infty \frac{d\omega \pi \hbar \omega^3}{c^3} \frac{1}{e^{\beta c\hbar \frac{\omega}{c}} - 1} = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{d\omega \omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

$$(10) E = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{d\omega \omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{החלפת משתנים:} \\ \omega = 2\pi f = 2\pi \frac{c}{\lambda} \\ d\omega = 2\pi c \left(-\frac{1}{\lambda^2}\right) d\lambda \end{array} \right] \text{נרשום את האנרגיה הכללית כפונקציה של אורך גל על מנת להשוות לתוצאות הניסיוניות:}$$

$$E = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \int_{-\infty}^0 \frac{2\pi c \left(-\frac{1}{\lambda^2}\right) d\lambda \left(2\pi \frac{c}{\lambda}\right)^3}{e^{\beta\hbar 2\pi \frac{c}{\lambda}} - 1} = \frac{V\hbar 16\pi^4 c^4}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) d\lambda}{e^{\beta\hbar 2\pi \frac{c}{\lambda}} - 1} = V\hbar 16\pi^2 c \int_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) d\lambda}{e^{\beta\hbar 2\pi \frac{c}{\lambda}} - 1}$$

$$\left[\beta = \frac{1}{k_B T} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad \text{נציב:} \right]$$

$$\frac{E}{V} = \frac{h}{2\pi} 16\pi^2 c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\beta \frac{h}{2\pi} 2\pi c \lambda} - 1 \right)} = 8\pi h c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{1}{k_B T} h c \lambda} - 1 \right)} = 8\pi h c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1 \right)}$$

קיבלנו את נוסחת פלאנק בביטוי עם אורך גל:

$$(11) \frac{E(\lambda, T)}{V} = 8\pi h c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1 \right)}$$

נרשום את האנרגיה הכללית כפונקציה של התדירות:

$$\left[\begin{array}{l} \text{החלפת משתנים:} \\ \lambda = \frac{c}{f} \\ d\lambda = -\frac{c}{f^2} df \end{array} \right]$$

$$(13) \frac{E(f, T)}{V} = 8\pi h c \int_0^\infty \frac{-\frac{c}{f^2} df}{\left(\frac{c}{f}\right)^5 \left(e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1 \right)} = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{f^3 df}{\left(e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1 \right)}$$

$$(14) u(f, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{\left(e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1 \right)} = \frac{8\pi f^2}{c^3} \frac{hf}{\left(e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1 \right)}$$

וזאת בעצם הנוסחה שקיבלנו גם בהוכחה הראשונה.

$$(10) E = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{d\omega \omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

$$\hbar\omega \ll K_B T \leftarrow \beta\hbar\omega \ll 1$$

בתדרים נמוכים (אורכי גל ארוכים): $0 \leftarrow \omega$

במכנה נעזר בפיתוח טיילור של האקספוננט עד האיבר השני, בהזנחת שאר האיברים נקבל:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^x = 1 + X \quad \text{נזניח את שאר האיברים}$$

נציב:

$$(10) E \cong \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{d\omega \omega^3}{1 + \beta\hbar\omega - 1} = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{d\omega \omega^3}{\beta\hbar\omega} = \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{d\omega \omega^2}{\beta}$$

$$\beta = \frac{1}{K_B T} \quad \text{כאשר:}$$

$$\frac{E}{V} \cong \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{d\omega \omega^2}{\beta} = \frac{K_B T}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^2$$

נמשיך לפתח כדי לקבל את הנוסחה של ריילי-ג'ינס- פיזיקה קלאסית- בביטוי של תדירות:

$$\left[\begin{array}{l} \text{החלפת משתנים:} \\ \omega = 2\pi f \\ d\omega = 2\pi df \end{array} \right]$$

$$\frac{E}{V} \cong \frac{K_B T}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^2 = \frac{K_B T}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty 2\pi df (2\pi f)^2 = \frac{8\pi K_B T}{c^3} \int_0^\infty df (f)^2$$

$$(15) \frac{E}{V}(f, T) \cong \frac{8\pi K_B T}{c^3} \int_0^\infty df f^2$$

$$(16) u(f, T) \cong \frac{8\pi f^2}{c^3} K_B T \quad (5) \quad u(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \langle \varepsilon \rangle$$

בהשוואה למשוואה (5) נקבל כמו שקיבלנו בהוכחה הראשונה שהאנרגיה הממוצעת לפי ריילי-ג'ינס שווה:

$$\langle \varepsilon \rangle \cong K_B T$$

$$0 \leftarrow u, \quad 0 \leftarrow f \quad \text{כבר מכאן ניתן לראות}$$

$$\infty \leftarrow u, \quad \infty \leftarrow f \quad \text{וכאשר}$$

ניתן לראות כי ככל שהטמפרטורה גדלה האנרגיה גדלה. בטמפרטורה מסוימת ככל שהתדירות גדלה, כך האנרגיה גדלה, יש אין סוף תדירויות ולכן יש התבדרות באנרגיה (זו פרבולה)-אין גבול עליון לתדר ולכן אין סוף לאנרגיה- "קטסטרופה של האולטרה סגול".

$$(10) E = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{d\omega \omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

$$\hbar\omega \gg K_B T \leftarrow \beta\hbar\omega \gg 1$$

$$e^{\beta\hbar\omega} \gg 1 \text{ אז } \omega \gg 1$$

ולכן ניתן להזניח את מספר אחד במכנה:

$$(19) \frac{E}{V} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{d\omega \omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^3 e^{-\beta\hbar\omega}$$

$$u(\omega; T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \omega^3 e^{-\beta\hbar\omega}$$

כבר מכאן ניתן לראות: $\omega \leftarrow \infty$, $e^{-\beta\hbar\omega} \leftarrow 0$, מכאן: $u \leftarrow 0$

האקספוננט דועך ולא נותן לפונקציה להתבדר ולכן בתדרים גבוהים הנוסחה לא מתבדרת. נוסחת פלאנק פותרת את הבעיה של קרינת גוף שחור (כלומר איך יראו אורכי הגל האלקטרומגנטי שיפלוט כל גוף הנמצא בשווי משקל תרמודינמי בטמפרטורה נתונה)- הן באורכי גל הארוכים והן באורכי גל הקצרים. נוסחה זו מיישבת את הסתירה של "הקטסטרופה של האולטרה סגול":

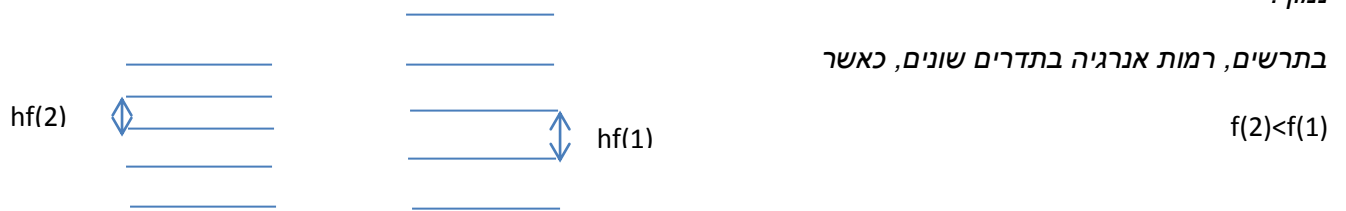
הראנו כי: $\omega \leftarrow 0$, אז $u \leftarrow 0$

וגם כאשר: $\omega \leftarrow \infty$, אז $u \leftarrow 0$

הבנה פיזיקלית של נוסחת פלאנק:

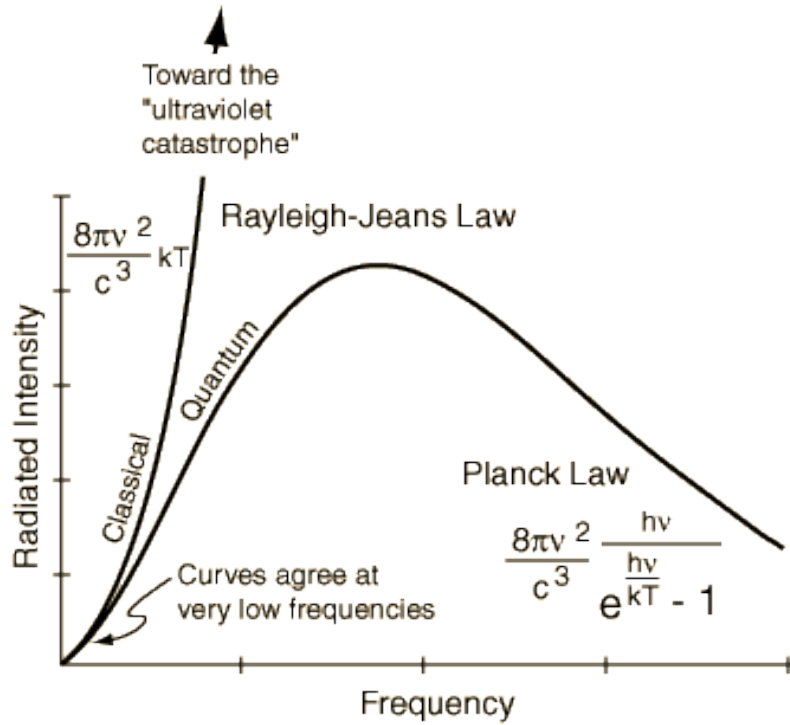
מקס פלאנק מצא נוסחה חדשה אשר פותרת את הבעיה של התבדרות האנרגיה. הוא השיג זאת בעזרת הטענה שהאנרגיה לא רציפה, אלא האנרגיה מקוונטת. כל מצב יכול לקבל אנרגיה מסוימת והאנרגיה יכולה להיות רק ברמות בדידות של $E = nhf$

בתדר גבוה הפרש רמות האנרגיה גדל, לכן הסיכוי לעירור לרמות גבוהות נמוך יותר מאשר הסיכוי לעירור לרמות גבוהות בתדר נמוך.



מבחינה אינטואיטיבית ברור כי ככל שהאנרגיה עולה יש פחות ופחות סיכוי למצוא מצב באנרגיה ברמות גבוהות, כלומר יש הסתברות גבוהה יותר למצוא מצבים באנרגיות נמוכות ולכן האנרגיה בתדרים גבוהים לא תגדל ולא תתבדר.

	מספר המצבים או אופני התנודה (מודים) ליחידת תדירות וליחידת נפח	האנרגיה הממוצעת לכל מצב(מוד)
לפי הפיזיקה הקלאסית (ריילי-ג'נס)	$\frac{8\pi f^2}{c^3}$	$K_B T$
לפי הפיזיקה הקוואנטית (פלאנק)	$\frac{8\pi f^2}{c^3}$	$\frac{hf}{\left(e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1\right)}$



נוסחאות של פלאנק וריילי-ג'נס בצורות שונות:

פיזיקה קלאסית	פיזיקה מודרנית
$\frac{E}{V}(\lambda, T) = 8\pi K_B T \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^4}$ $u(\lambda, T) = \frac{8\pi}{\lambda^4} K_B T$	$\frac{E}{V} = 8\pi h c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1 \right)}$ $u(\lambda, T) = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{\left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1 \right)}$
$\frac{E}{V}(f, T) = \frac{8\pi K_B T}{c^3} \int_0^\infty df f^2$ $u(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} K_B T$	$\frac{E}{V}(f, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{f^3 df}{\left(e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1 \right)}$ $u(f, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{\left(e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1 \right)}$

נחזור לנוסחה (10):

$$(10) E = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{d\omega \omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{החלפת משתנים} \\ \beta\hbar\omega = X \\ \beta\hbar d\omega = dX \\ d\omega = \frac{dX}{\beta\hbar} \end{array} \right]$$

$$\frac{E}{V} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{d\omega \omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\frac{dX}{\beta\hbar} \left(\frac{X}{\beta\hbar}\right)^3}{e^{\beta\hbar \frac{X}{\beta\hbar}} - 1} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3 (\beta\hbar)^4} \int_0^\infty \frac{dX(X)^3}{e^X - 1} = \frac{1}{\pi^2 c^3 \beta^4 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{dX(X)^3}{e^X - 1}$$

כאשר: $\beta = \frac{1}{K_B T}$

$$(20) \frac{E}{V} = \frac{1}{\pi^2 c^3 \beta^4 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{dX(X)^3}{e^X - 1} = \frac{(K_B T)^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{dX(X)^3}{e^X - 1}$$

$$\left[\int_0^\infty \frac{dX(X)^3}{e^X - 1} = \frac{\pi^4}{15} : \text{ידוע כי} \right]$$

נציב את האינטגרל ונקבל:

$$(21) \frac{E}{V} = \frac{(K_B T)^4 \pi^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3 15} = \frac{K_B^4 \pi^2}{c^3 \hbar^3 15} T^4$$

מכאן ניתן לראות שהאנרגיה הכללית ליחידת נפח תלויה ביחס ישר לטמפרטורה ברביעית של הגוף השחור.

(כאשר $\hbar = \frac{h}{2\pi}$)

$$(22) \frac{E}{V} = \frac{8K_B^4 \pi^5}{c^3 \hbar^3 15} T^4$$

שטף הקרינה שווה להספק הקרינה ליחידת שטח (אנרגיה כללית ליחידת זמן ליחידת שטח):

$$I = \frac{P}{A} = \frac{\frac{E}{t}}{A} = \frac{E}{tA}$$

ניתן להראות עבור חלקיקים שמתקדמים במהירות האור ומתפזרים במרחב בצורה הומוגנית (לכל הכיוונים) $\left[\begin{array}{l} A = \frac{L}{v} \\ L = ct \end{array} \right]$

$$(23) I = \frac{E}{tA} = \frac{E}{t \frac{L}{v}} = \frac{EL}{tL} = \frac{EL}{4Vt} = \frac{cE}{4V} \rightarrow I = \frac{cE}{4V} \quad \text{ששטף הקרינה היוצא רבע מצפיפות האנרגיה} :$$

נציב משוואה (21) או (22) במשוואה (23) ונקבל:

$$(24) I = \frac{c E}{4V} = \frac{c}{4} * \frac{K_B^4 \pi^2}{c^3 \hbar^3 15} T^4 = \frac{c}{4} * \frac{8K_B^4 \pi^5}{c^3 \hbar^3 15} T^4$$

מכאן ניתן למצוא את קבוע סטפן-בולצמן:

$$\sigma = \frac{c}{4} * \frac{K_B^4 \pi^2}{c^3 \hbar^3 15} = \frac{c}{4} * \frac{8K_B^4 \pi^5}{c^3 \hbar^3 15} = 5.67 * 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

$$(25) I = \sigma T^4$$

שטף הקרינה תלוי ביחס ישר לטמפרטורה ברביעית של גוף שחור.

כמו כן ניתן להראות את הקשר בין שטף הקרינה הנפלטת לבין צפיפות האנרגיה כך:

$$I = \frac{c E}{4V} = \frac{c}{4} * 8\pi h c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1 \right)}$$

$$\rightarrow I(\lambda) = \frac{c}{4} u(\lambda) = \frac{c}{4} * 8\pi h c \frac{1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1 \right)} = 2\pi h c^2 \frac{1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1 \right)}$$

$$e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1 = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5 I} \quad \text{: נעביר אגפים}$$

נעלה \ln לשני האגפים:

$$\frac{hc}{k_B T \lambda} = \ln \left(\frac{2\pi h c^2}{\lambda^5 I} + 1 \right)$$

$$\frac{hc}{k_B \lambda} = T \ln \left(\frac{2\pi h c^2}{\lambda^5 I} + 1 \right)$$

נקבל גרף ליניארי ששיפועו מייצג את הטמפרטורה של גוף שחור. בגרף $\frac{hc}{k_B \lambda}$ כפונקציה של $\ln \left(\frac{2\pi h c^2}{\lambda^5 I} + 1 \right)$

(ראה בניתוח ממצאים על קרינת נורת להט את גרף זה)

הוכחת נוסחת ויין: מציאת אורך גל שבו עוצמת הקרינה מקסימלית בטמפרטורה מסוימת של הגוף.

נכתוב את נוסחת פלאנק עם ביטוי לאורך גל:

$$(12) u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1\right)}$$

כדי למצוא את האורך הגל שבו הקרינה מקסימלית, עלינו למצוא את נקודת המקסימום:

$$\frac{du(\lambda)}{d\lambda} = 0$$

$$\frac{du(\lambda)}{d\lambda} = -5 * 8\pi hc \lambda^{-6} \frac{1}{\left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1\right)} + \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{0 - 1 * e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} * \frac{hc}{k_B T} * \left(\frac{-1}{\lambda^2}\right)}{\left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1\right)^2} = 0$$

$$\frac{du(\lambda)}{d\lambda} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1\right)} \left[\frac{-5}{\lambda} - \frac{e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} * \frac{hc}{k_B T} * \left(\frac{-1}{\lambda^2}\right)}{\left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1\right)} \right] = \frac{8\pi hc}{\lambda^6} \frac{1}{\left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1\right)} \left[-5 + \frac{e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} * \frac{hc}{k_B T} * \left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1\right)} \right] = 0$$

נכפיל את שני צדי המשוואה ב $\left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1\right)$

$$\frac{8\pi hc}{\lambda^6} \left[-5 \left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1\right) + e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} \left(\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) \right] = \frac{8\pi hc}{\lambda^6} \left[-5e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} + 5 + e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} \left(\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) \right] = 0$$

ניקה את הגורם עם הסוגריים המרובעות ונשווה לאפס:

$$\left[-5e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} + 5 + e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} \left(\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) \right] = 0$$

$$5 = \left(5 - \frac{hc}{k_B T \lambda}\right) e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}}$$

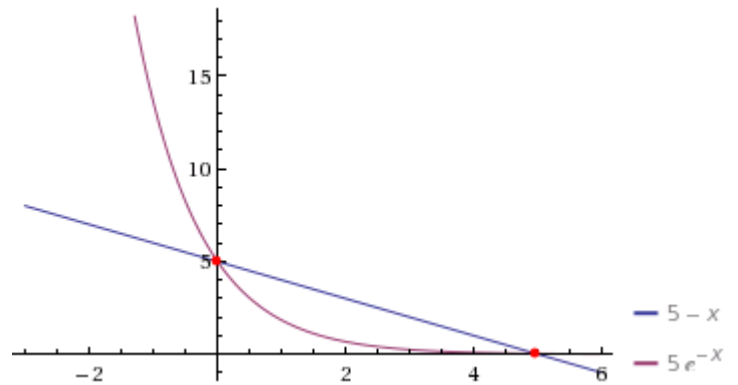
$$\frac{hc}{k_B T \lambda} = x \quad \text{נגדיר } x$$

$$5 = (5 - x)e^x \quad \rightarrow \quad 5e^{-x} = 5 - x$$

נמצא את פתרון המשוואה בעזרת תוכנת:

<http://www.wolframalpha.com/>

ונקבל את נקודת החיתוך של שני המשוואות $5 - x$, $5e^{-x}$



נקודות החיתוך הן: $(0, 5)$ ו- $(4.9651, 0.03488)$ ולכן:

$$\frac{hC}{k_B T \lambda_{max}} = x_1 = 0 \quad \text{או} \quad \frac{hC}{k_B T \lambda_{max}} = x_2 = 4.9651$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\frac{hC}{k_B x_1} = T \lambda_{max} \quad \text{או} \quad \frac{hC}{k_B x_2} = T \lambda_{max}$$

הפתרון הראשון לא פיזיקלי כי אנחנו הוכחנו שכאשר אורך גל שואף לאינסוף הקרינה שואפת לאפס (ואינה מקסימלית).

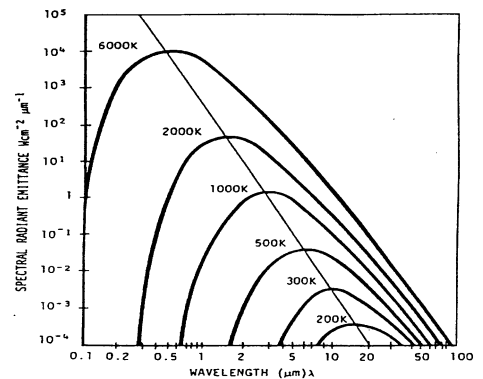
והפתרון השני הוא הרלוונטי לפתרון המשוואה, נציב את הערכים ונקבל:

$$T \lambda_{max} = \frac{hC}{k_B x_2} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 4.9651} = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ mK}$$

ומכאן קיבלנו את נוסחת ויין:

$$T \lambda_{max} = 2.898 \cdot 10^6 [K \cdot \text{nm}]$$

חוק ההעתקה של ויין קובע את אורך הגל בו יש לספקטרום הקרינה של גוף שחור מקסימום. מתוך נוסחה זו ניתן לראות שככל שהטמפרטורה גדלה אורך הגל שבו עוצמת הקרינה מקסימלית מתקצר (קטן יותר):



שימו לב, ש- λ_{max} נמצא ביחס הפוך לטמפרטורה המוחלטת של הגוף השחור (ראו הקו הישר באיור).

ניסוי: קרינת גוף שחור מנורת להט

מטרת:

1. לראות אופיין של קרינת גוף שחור כתלות בטמפרטורה.
2. התאמת ספקטרום קרינת נורת להט לאופיין קרינת גוף שחור.
3. מציאת הטמפרטורה של נורת להט במתחים שונים.
4. הכרת התיאוריה של קרינת גוף שחור ובדיקתה ניסיונית.
5. קישור הניסוי לנוסחת פלאנק, נוסחת סטפן-בולצמן ונוסחת ויין.

בניסוי זה נאמת את נוסחת פלאנק ואת נוסחת סטפן בולצמן, ע"י בחינת התפלגות עוצמת הקרינה כפונקציה של אורכי הגל עבור נורת להט.

צפיפות האנרגיה ליחידת אורך גל ליחידת נפח כפונקציה של הטמפרטורה ואורך הגל תוארה ע"י מקס פלאנק באופן הבא:

$$\frac{E}{V} = 8\pi hc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1 \right)}$$

כאשר h הוא קבוע פלנק ($6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$), c היא מהירות האור ($3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$), λ הוא אורך גל, K הוא קבוע בולצמן ($1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$), T היא הטמפ' בקלווין.

והוכחנו כי שטף הקרינה תלוי ביחס ישר לטמפרטורה ברביעית של גוף שחור:

$$I = \frac{c}{4} * \frac{K_B^4 \pi^2}{c^3 \hbar^3 15} T^4 = \frac{c}{4} * \frac{8K_B^4 \pi^5}{c^3 \hbar^3 15} T^4 = \sigma T^4$$

כאשר קבוע סטפן-בולצמן:

$$\sigma = \frac{c}{4} * \frac{K_B^4 \pi^2}{c^3 \hbar^3 15} = \frac{c}{4} * \frac{8K_B^4 \pi^5}{c^3 \hbar^3 15} = 5.67 * 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{K}^{-4}$$

וגם הראנו את הקשר בין שטף הקרינה הנפלטת לבין צפיפות האנרגיה:

$$I = \frac{cE}{4V} = \frac{c}{4} * 8\pi hc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1 \right)}$$

$$\rightarrow I(\lambda) = \frac{c}{4} u(\lambda) = \frac{c}{4} * 8\pi hc \frac{1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1 \right)} = 2\pi hc^2 \frac{1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1 \right)}$$

שטף הקרינה שווה להספק הקרינה ליחידת שטח (אנרגיה כללית ליחידת זמן ליחידת שטח):

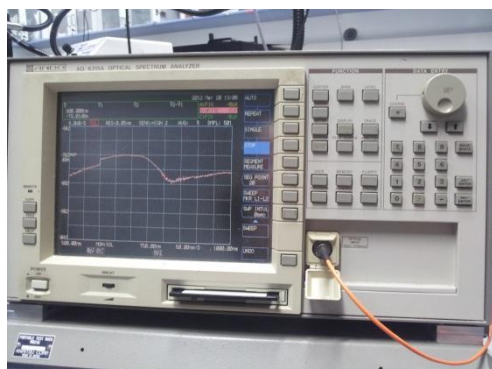
$$I = \frac{P}{A}$$

נעלה אגפים ונעביר \ln לשני האגפים: (ראה בפיתוח המתמטי) נקבל את הקשר הבא:

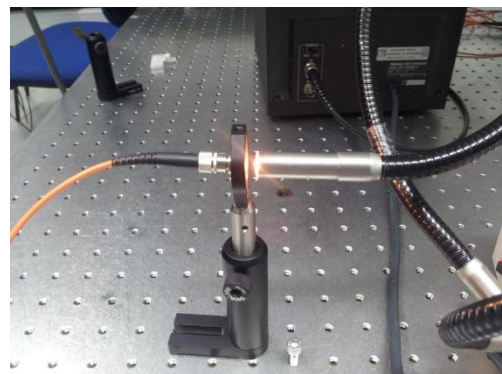
$$\frac{hc}{k_B \lambda} = T \ln \left(\frac{2\pi A h c^2}{\lambda^5 p} + 1 \right) \quad I = \frac{p}{A} \quad \text{נציב:}$$

תיאור מערכת הניסוי:

המערכת מורכבת מנורת ליבון המהווה מקור אור, שנתונה: 12V ו- 100W . הנורה מחוברת לספק כוח משתנה. בתוך הנורה יש סליל להט עשוי טונגסטן אשר משמש כגוף שחור בניסוי שלנו (הפילוג הספקטראלי של מקור אור כזה דומה לזה של גוף שחור שהטמפרטורה שלו $2300\text{--}3500$ מעלות קלווין). חלק מהאור שנפלט מנורת הליבון עובר דרך סיב אופטי אל תוך הספקטרומטר האופטי (ראה צילום 1 וצילום 2).



צילום 2: סיב האופטי מחובר לספקטרומטר



צילום 1: חלק מהנורה נכנס לסיב האופטי

האור של הנורה פוגע בסריג עקיפה הנמצא בספקטרומטר ומתנפץ לאורכי גל שונים, וכל אורך גל מוסט בזווית אחרת. בזמנית הספקטרומטר מודד את עוצמת הקרינה לכל אורך גל ומאפשר לנו לבנות התפלגות הקרינה כתלות באורך גל.

הכנות לניסוי:

1. קירור החדר לטמפ' האפשרית הנמוכה ביותר, על מנת להקטין את הקרינה התרמית של החדר. טמפ' החדר בזמן הניסוי הייתה כ- 22°C – השפעת הבדלי הטמפ' זניחה ביחס לשגיאת חישוב הטמפ' חוט הלהט כאשר הנורה דולקת ולכן בחרנו להזניח הפרש זה.
2. שבירת הזכוכית העוטפת את נורת הליבון, כדי להתקרב כמה שיותר לסליל הלהט ובכך להגדיל את עוצמת האור הנכנסת לסיב האופטי.
3. קיבוע נורת הלהט וקיבוע סיב האופטי קרוב מאוד לנורה ככל האפשר, כדי שהמערכת תהיה יציבה.
4. חיבור הסיב האופטי לספקטרומטר האופטי.
5. חיבור נורת הליבון לספק כוח משתנה, $0\text{--}12\text{V}$ (חיבור אמפרמטר בטור והוולטמטר במקביל למעגל החשמלי נמצא בתוך ספק הכוח).
6. כיול מכשיר הספקטרומטר האופטי- הפלט של המכשיר הוא עוצמת אור יחסית, על כן עלינו להגדיר עבורו מהו חושך (0% קרינה), כאשר "חושך" מוגדר כאשר מקור האור מוסתר או מכובה, הכיול מתבצע בעזרת תוכנת מחשב הנמצאת במכשיר.
7. קביעת תחום אורכי הגל במכשיר הספקטרומטר שבו נמדוד את הקרינה. ביצענו את המדידות בתחום שבין $600\text{--}1700$ ננומטר, ניתן להניח שבתחום זה רגישות הגלאי קבועה, ומכיוון שאנו מתעניינים בעוצמה יחסית ולא אבסולוטית- לא היה צורך לבצע תיקון לתוצאות.
8. רצוי לכבות את אור החדר על מנת השפעת האור של הסביבה לניסוי. (למרות שראינו כי אין הבדל ניכר לעין כאשר מבצעים את הניסוי עם חדר מואר היות והסיב האופטי מוצמד קרוב מאוד לנורה).

1. הפעלת מתח על הנורה עד לשלב בו ניתן לראות את חוט הלהט מתלהט (5V).
2. המתנה של מס' שניות עד להתייצבות המתח והזרם במד הזרם ובמד המתח.
3. רישום ערכי הזרם והמתח.
4. הפעלת הספקטרומטר וקבלת הפלט מן המכשיר.
5. רישום ושמירת הנתונים במחשב ווידוי כי התקבל גרף תקין.
6. העלאת המתח ל 7V ול- 9V .
7. חזרה על שלבים 2 עד 6.

נעיר כי, התחלנו את המדידה במתח של 5V, כי מתחת למתח זה עוצמת האור של הנורה הייתה חלשה מדי, בהתחשב בעובדה שרק חלקה עובר לסיב האופטי וגם החלק שעובר ומגיע לסריג מתפזר לסדרים שונים ולכן הרעש התרמי מהחדר יש לו השפעה משמעותית לניסוי.

תוצאות הניסוי:

א. טבלת ערכי הזרם והמתח של הנורה:

V(V)	9	7	5
I(A)	3.78	3.31	2.75

ב. דוגמאות לתוצאות הגולמיות מהמדידות של הספקטרומטר עבור מתחים: 5V,7V,9V .
עמודה הראשונה היא אורכי הגל בננומטר, ושלושת העמודות הבאות הן של עוצמת הקרינה הנפלטת מהנורה בוואט במתחים השונים.

אורך גל nm	נורה 5V	נורה 7V	נורה 9V
500	1.34E-07	5.96E-07	1.68E-06
501.3	1.39E-07	6.07E-07	1.70E-06
502.6	1.44E-07	6.18E-07	1.72E-06
503.9	1.47E-07	6.33E-07	1.76E-06
505.2	1.50E-07	6.49E-07	1.80E-06
506.5	1.44E-07	6.57E-07	1.81E-06
			...
1758.4	1.88E-06	3.01E-06	4.14E-06
1759.7	1.94E-06	3.03E-06	4.25E-06
1761	2.01E-06	3.06E-06	4.37E-06
1762.3	2.02E-06	3.10E-06	4.35E-06
1763.6	2.03E-06	3.15E-06	4.32E-06
1764.9	2.01E-06	3.15E-06	4.29E-06
1766.2	1.98E-06	3.14E-06	4.25E-06
1767.5	1.97E-06	3.05E-06	4.22E-06
1768.8	1.96E-06	2.96E-06	4.20E-06
1770.1	1.92E-06	3.00E-06	4.18E-06

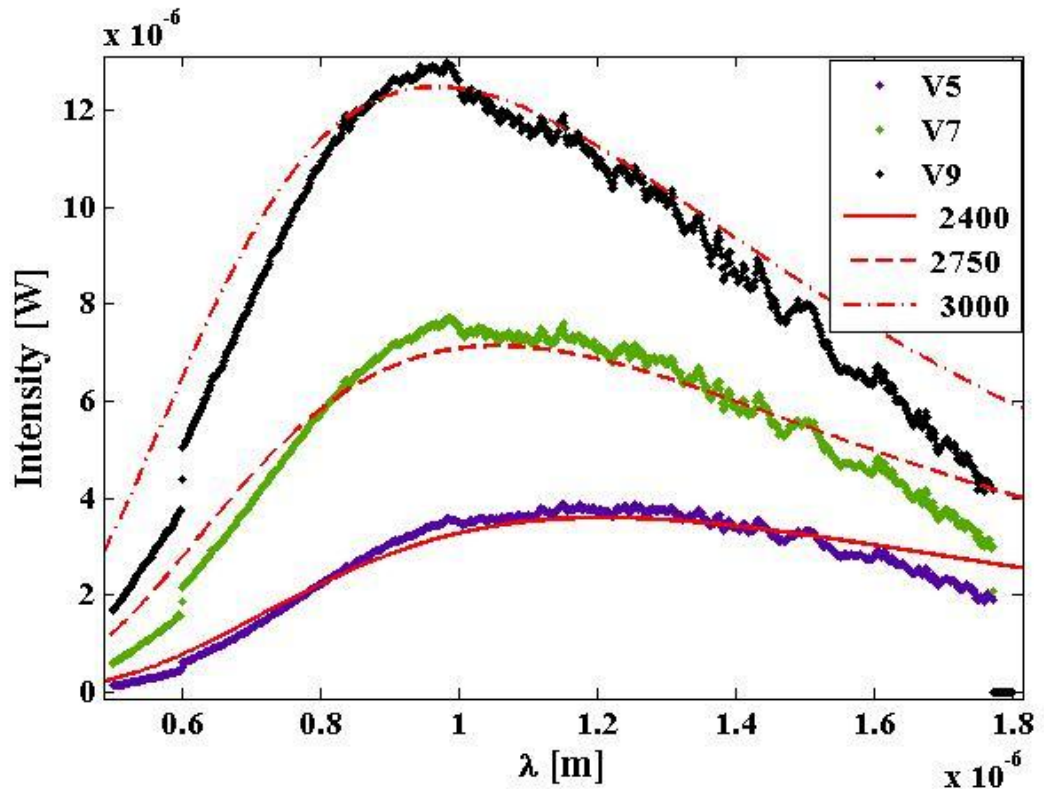
עיבוד וניתוח תוצאות: לפניך ארבע דרכים שונות למציאת הטמפרטורה של נורת הלהט:

עיבוד 1: מציאת טמפרטורה של נורת להט ע"י התאמות העקומות שהתקבלו מתוך הניסויים לעקומות תיאורטיות המתקבלות מנוסחת פלאנק ונוסחת סטפן בולצמן.

הגרפים הצבעוניים מציגים את הספק עוצמת הקרינה (W) של נורת להט במתחים השונים כתלות באורך הגל (m).

$$p = A \frac{c}{4} u(\lambda) = A \frac{c}{4} * 8\pi hc \frac{1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1 \right)}$$

ההתאמות לתיאוריה



ניתן לראות שעוצמת הקרינה גדלה ככל שמתח הנורה עולה. בנוסף, ככל שעוצמת הנורה גדלה אורך הגל שבו הקרינה מכסימלית מתקצר. כלומר, הגרף עולה וזז שמאלה ככל שמתח הנורה גדל.

לפי ההתאמה ניתן למצוא את הטמפרטורה של נורת הלהט במתחיה השונים:

מתאימים את העקומות התיאורטיות של ספקטרום קרינת גוף שחור (הקו האדום) ככל האפשר לעקומות שהתקבלו בניסוי (הגרפים הצבעוניים), בעזרת שימוש בתוכנת matlab ("שיחקנו" עם ערך הטמפרטורה עד שהגענו למקסימום חפיפה בין העקומות).

התאמות לקשר בין נוסחת פלאנק לנוסחת סטפן בולצמן לגרפים שהתקבלו בתוכנית matlab: כאשר התאמה של a נעשתה ע"י המחשב והתאמה של T נעשתה על ידנו, כלומר אנחנו הצבנו את הטמפרטורה והתאמנו את הגרף לפי מראית עין.

x מייצג אורך גל במטרים, T מייצג את הטמפרטורה בקלווין (k) , ו- a מייצג את הקבוע $\frac{A}{4}$.
 התלוי בשטח החתך של הקרינה A ביחידות m^3/s .

5 Volt

General model:

$$f(x) = a * 4.9989e-024/x^5 * (1/(exp(0.0144/(T*x))-1))$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$T = 2400K \quad (2397K, 2403K)$$

$$a = 2.639e-010 \text{ m}^3/s \text{ (fixed at bound)}$$

7 Volt

General model:

$$f(x) = a * 4.9989e-024/x^5 * (1/(exp(0.0144/(T*x))-1))$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$T = 2750K \quad (2747K, 2753K)$$

$$a = 2.652e-010 \text{ m}^3/s \text{ (fixed at bound)}$$

9 Volt

General model:

$$f(x) = a * 4.9989e-024/x^5 * (1/(exp(0.0144/(T*x))-1))$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$T = 3000K \quad (2997K, 3003K)$$

$$a = 2.7e-010 \text{ m}^3/s \text{ (fixed at bound)}$$

מכאן מצאנו את ערך הטמפרטורה של נורת הלהט במתחים השונים:

5V: 2400K (שגיאה ± 6)

7V: 2750K (שגיאה: $\pm 6K$)

9V: 3000K (שגיאה: $\pm 6K$)

נבדוק את התאמת הגרפים לקשר בין שטף הקרינה הנפלטת לבין צפיפות האנרגיה של פלאנק:

$$I = \frac{c E}{4 V} = \frac{c}{4} * 8\pi h c \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1 \right)}$$

$$\rightarrow I(\lambda) = \frac{p}{A} = \frac{c}{4} u(\lambda) = \frac{c}{4} * 8\pi h c \frac{1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1 \right)} = 2\pi h c^2 \frac{1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1 \right)}$$

ע"י העברת אגפים והפעלת פונקציית ln על שני האגפים נקבל את הקשר הבא:

$$\frac{hc}{k_B \lambda} = T \ln \left(\frac{2\pi A h c^2}{\lambda^5 p} + 1 \right)$$

הספק הקרינה P-, שטח החתך שבו פוגעת הקרינה-A.

לכן אם נצייר גרפים של $\frac{hc}{k_B \lambda}$ כפונקציה של $\ln \left(\frac{2\pi A h c^2}{\lambda^5 p} + 1 \right)$ כאשר הנורה דלקה במתחים שונים (5V, 7V, 9V) נקבל גרף ליניארי ששיפועו מייצג את הטמפרטורה של הנורה.

נעיר כי A אינו נתון, אך הוא אינו משפיע על שיפוע הגרף רק על נקודת חיתוך עם ציר ה-x. היות וניתן לראות מהנתונים

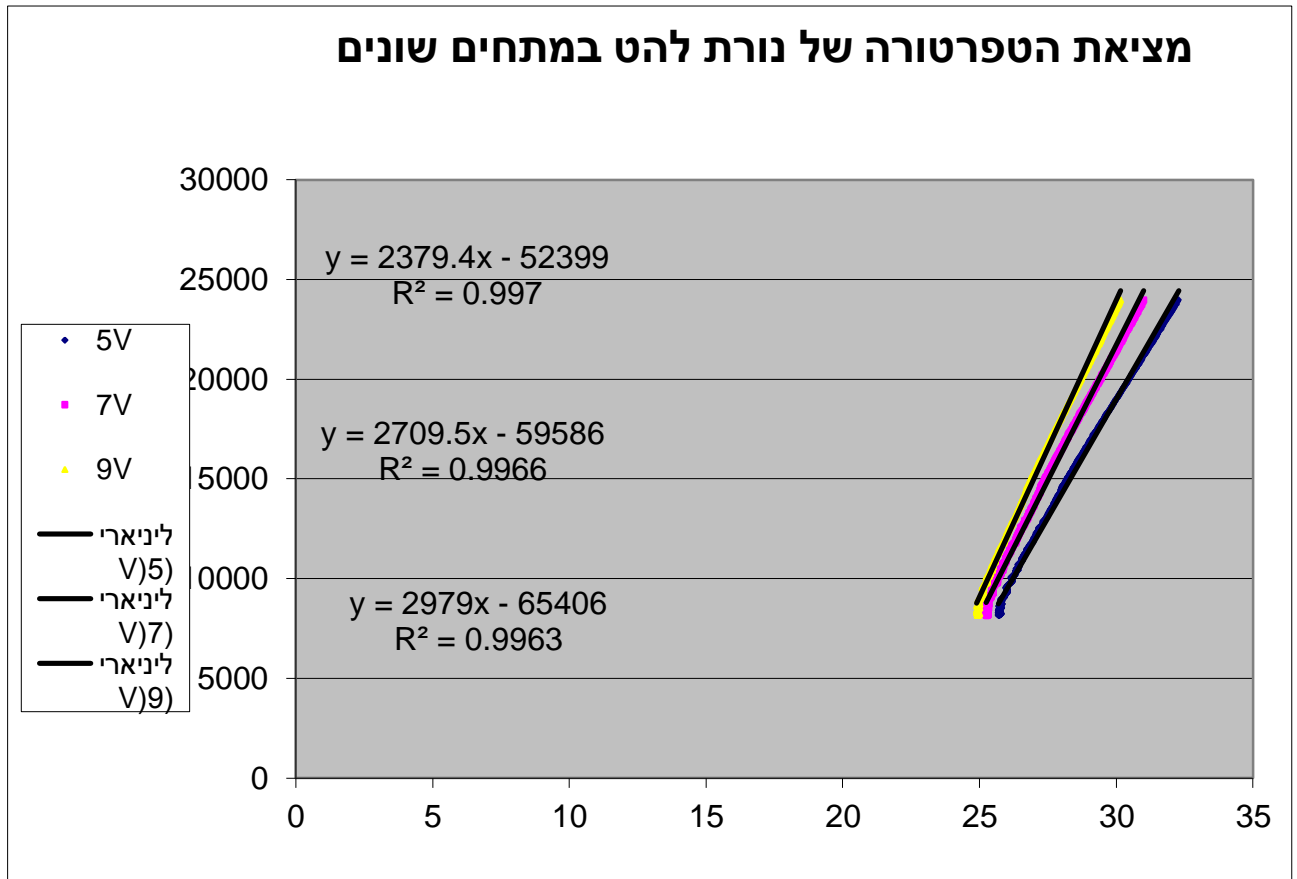
שהאיבר הראשון בתוך ה-ln: $\left(\frac{2\pi A h c^2}{\lambda^5 p} \right)$ גדול מאוד מ-1 ולכן ניתן להזניח את האיבר השני בתוך ה-ln – שהוא מספר 1.

$$\ln \left(\frac{2\pi A h c^2}{\lambda^5 p} \right) = \ln \left(\frac{c}{4} A \right) + \ln \left(\frac{8\pi h c}{\lambda^5 p} \right)$$

לפינים חלק מעיבוד התוצאות: ציר y מייצג: $\frac{hc}{k_B \lambda}$ וציר x מייצג $\ln \left(\frac{8\pi h c}{\lambda^5 p} \right)$ כאשר $\ln \left(\frac{c}{4} A \right)$ מייצגת נק' חיתוך עם ציר ה-y. כל זוג צירים מייצג נורה במתח מסוים אחר.

ציר X1	ציר Y1	ציר X2	ציר Y2	ציר X3	ציר Y3
נורה 5V	נורה 5V	נורה 7V	נורה 7V	נורה 9V	נורה 9V
34.57883	28456.16	33.06172	28456.16	32.04977	28456.16
34.60857	28383.31	33.03679	28383.31	32.03033	28383.31
34.5609	28310.83	33.00404	28310.83	32.00389	28310.83
34.51375	28238.72	32.97172	28238.72	31.97713	28238.72
34.47633	28166.98	32.94421	28166.98	31.95324	28166.98
.....					
25.78591	8196.681	25.3161	8196.681	24.9975	8196.681
25.74927	8190.625	25.30479	8190.625	24.96616	8190.625
25.71368	8184.579	25.29354	8184.579	24.93579	8184.579
25.70403	8178.541	25.27394	8178.541	24.93738	8178.541
25.69442	8172.513	25.25459	8172.513	24.939	8172.513
25.70362	8166.493	25.25313	8166.493	24.94391	8166.493
25.71299	8160.482	25.25199	8160.482	24.94913	8160.482
25.71387	8154.48	25.27643	8154.48	24.95112	8154.48

ציר y מייצג: $\frac{hc}{k_B \lambda}$ **ציר x מייצג:** $\ln\left(\frac{8\pi hc}{\lambda^5 \rho}\right)$ (כאשר הקבוע $\frac{c}{4} A$ אינו ידוע וכמו שהסברנו קודם, אי הצבה זו אינה משפיעה על שיפוע הקו, שבו אנחנו מעוניינים)



בדרך זו, על פי שיפוע הגרף נקבל את הטמפרטורה של נורת הלהט במתחים השונים:

$$5V: 2379.4K \pm 7K$$

$$7V: 2709.5K \pm 9K$$

$$9V: 2979K \pm 11K$$

עיבוד 3: מציאת טמפרטורה של נורת להט ע"י מציאת אורך הגל שבו עוצמת הקרינה מקסימלית שימוש בנוסחת ויין: $T \lambda_{max} =$

$$2.898 \cdot 10^{-3} [mK]$$

מציאת אורכי הגל המקסימלי (שבו עוצמת הקרינה מקסימלית) מתוך האקסל:

$$5V: 1202nm \quad (\text{עוצמת הקרינה בוואט: } 3.78 \cdot 10^{-6})$$

$$7V: 1072nm \quad (\text{עוצמת הקרינה בוואט: } 7.42 \cdot 10^{-6})$$

$$9V: 953.7nm - 990nm \rightarrow 9V: 971.9nm \quad (\text{היה קשה למצוא את האורך הגל, ניקח את האורך גל האמצעי שבתחום:})$$

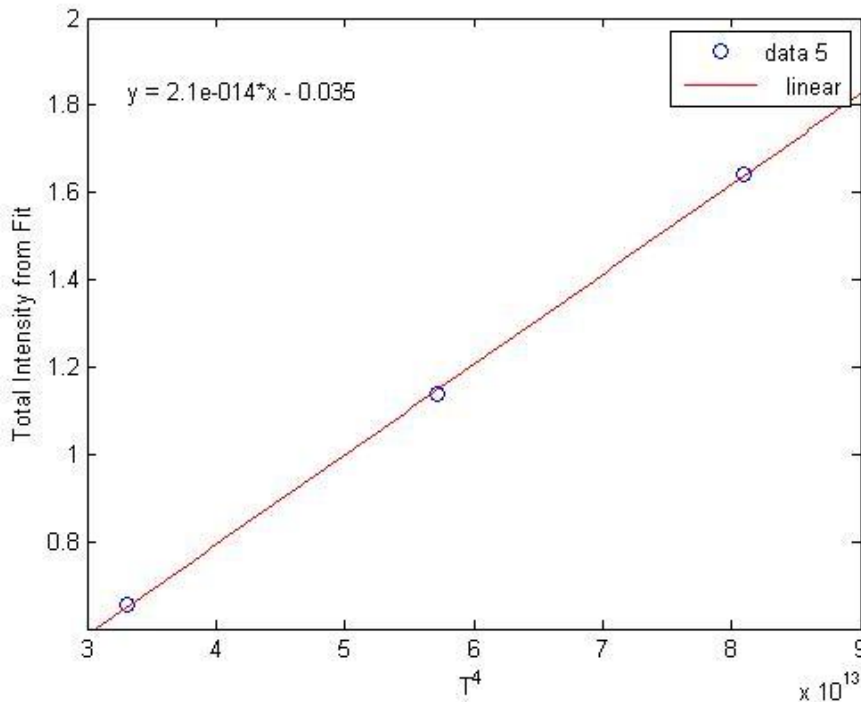
נמצא את הטמפרטורה מתוך נוסחת ויין:

$$5V: 2410.9K$$

$$7V: 2703.3K$$

$$9V: 2981.7K$$

עיבוד 4: מציאת קשר בין שטף הקרינה לטמפרטורה נורת הלהט ברביעית. שטף הקרינה קיבלנו מהשטח שמתחת לעקומות התיאורטיות (אינטגרל לפונקציית פלאנק). ואת הטמפרטורה של נורת הלהט במתחים השונים לקחנו מתוצאות הגרפים הליניאריים.



מתוך גרף זה מתקבל קשר ליניארי בין שטף הקרינה של נורת הלהט לטמפרטורה נורת הלהט ברביעית וממצא זה תואם לחוק סטפן בולצמן (בקירוב טוב גם הגרף עובר דרך הראשית):

$$I = \sigma T^4$$

היות ובניסוי לא מדדנו את כל קרינת נורת הלהט אלא רק את חלקה באמצעות הסיב האופטי ובנוסף יש החזרה מהזכוכית הנמצאת מסביב לנורה (כ- 0.96 מהאור עובר אל הספקטרומטר) לכן שיפוע גרף זה אינו מייצג את קבוע סטפן בולצמן. כדי לקבל מהניסוי את קבוע סטפן אנחנו צריכים למצוא קודם את החלק היחסי של הקרינה שהוכנסה לסיב, שהיה צמוד לזכוכית הנורה:

$$4\pi R^2 \quad R=1\text{cm} \quad \text{מרחק הנורה מהסיב, ושטח המעטפת של הנורה:}$$

$$2r=30 \cdot 10^{-6}\text{m} \quad \text{קוטב הסיב}$$

לכן החלק היחסי של הקרינה הנכנסת לספקטרומטר הוא:

$$\frac{\pi r^2}{4\pi R^2} = 0.5625 \cdot 10^{-6}$$

מציאת קבוע סטפן מתוך הגרף: כאשר נציב את שיפוע הגרף

$$\sigma = \frac{m(\text{שיפוע})}{\frac{\pi r^2}{4\pi R^2}} = \frac{2.1 \cdot 10^{-14}}{0.5625 \cdot 10^{-6}} = 3.7 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$$

בהשוואה לתיאוריה קבוע סטפן שווה ל:

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$$

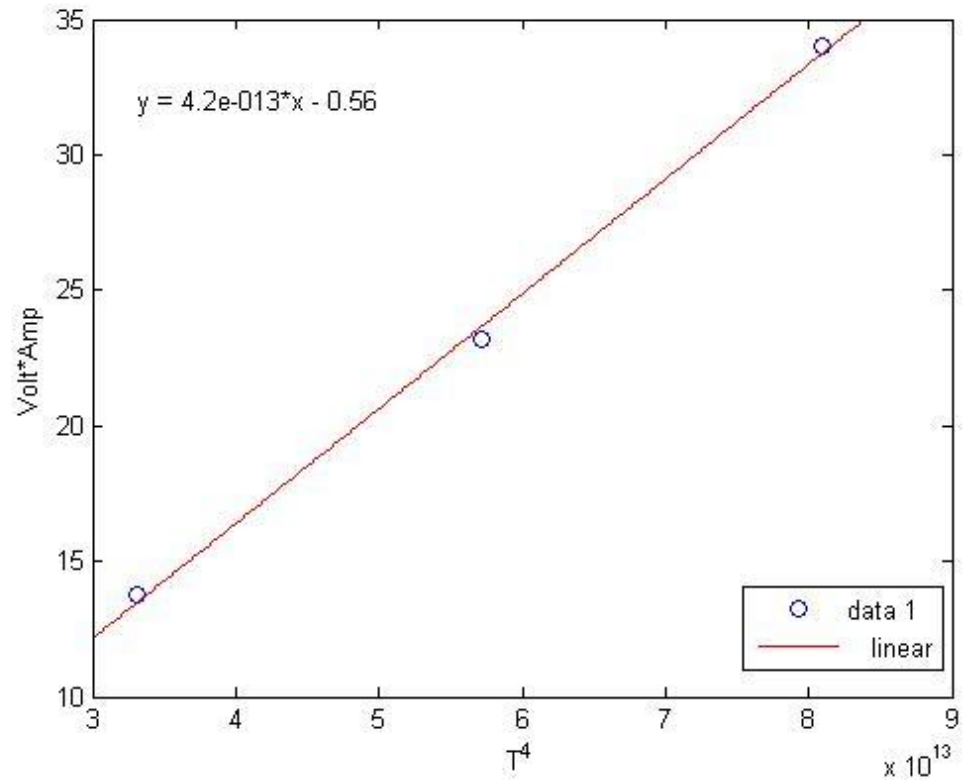
בהשוואה לתיאוריה קבוע סטפן בולצמן המתקבל מתוצאות הניסוי מאוד קרוב בסדר גודל לתיאוריה.

עיבוד 5: מציאת קשר בין הספק החשמלי של נורת להט לטמפרטורה של הנורה ברביעית.

כאשר ההספק החשמלי חושב מהמדידות של מתח וזרם בנורה:

V(V)	9	7	5
I(A)	3.78	3.31	2.75
P(W)	34.02	23.17	13.75

ואת הטמפרטורה של נורת הלהט במתחים השונים לקחנו מתוצאות הגרפים הליניאריים.



גם כאן ניתן לראות שהקשר הוא ליניארי, כפי שציפינו מהתיאוריה: הספק החשמלי של הנורה הוא ביחס ישר לשטף הקרינה הנפלטת. לפי חוק סטפן שטף הקרינה ביחס ישר לטמפרטורת גוף השחור ברביעית.

סיכום ומסקנות מהניסוי:

ניתן לראות כי התוצאות משלושת העיבודים הראשונים השונים למציאת הטמפרטורה של נורת להט קרובות זו לזו ובאותו סדר גודל:

מציאת הטמפ' מתוך ההתאמות	מציאת הטמפ' מתוך גרף לינארי	מציאת הטמפ' מתוך נוסחת ויין ע"י מציאת λ_{max} מתוך האקסל	
2400K±6K	2379.4K±7K	2410.9K	נורה במתח 5V
2750K±6K	2709.5K±9K	2703.3K	נורה במתח 7V
3000K±6K	2979K±11K	2981.7K	נורה במתח 9V

בנוסף טמפ' נורת הלהט שנמצאה מעיבוד הניסוי מתאימה לערכים הידועים של נורת ליבון (2300K-3400K).

מתוך התוצאות שקיבלנו יש התאמה בין התיאוריה לבין הניסוי:

קיבלנו באופן סביר התאמה בין העקומות מתוך הניסוי לבין אופיין תיאורטי של ספקטרום קרינת גוף שחור בטמפרטורה שונות. ולמעשה, אנו מקבלים אימות של חוק פלאנק (עבור תחום המדידה שלנו).

בנוסף הגרפים שקיבלנו מתאימים למסקנה הנובעת מנוסחת ויין: ככל שעוצמת הנורה גדלה אורך הגל שבו הקרינה מכסימלית מתקצר.

משני הגרפים האחרונים ניתן להסיק ששטף של קרינת נורת להט נמצאת ביחס ישר לטמפרטורה של הנורה ברביעית, בהתאם לחוק סטפן-בולצמן. מכאן ניתן לומר, שנורת להט היא בקירוב גוף שחור, ובמובן זה הניסוי הצליח.

מתוך התוצאות שקיבלנו מצאנו התאמה בין התיאוריה לניסוי, טמפ' נורת הלהט מתאימה לערכים הידועים- במובן זה הניסוי היה להצלחה. ההצלחה הייתה גם במובן אחר- השעות הרבות שהשקענו בהתגברות על מכשולים טכניים שצצו בכל שלב, בעיות שקשה היה למצוא להם הסבר, התמודדות עם תיאוריה לא פשוטה ופיתוחים מתמטיים ברמה גבוהה, הכריחה אותנו לצאת מהמסגרת, ללמוד דברים חדשים, להרחיב אופקים ולמודעות על חשיבות הנושא. במסגרת ביצוע העבודה הקדשנו חלק ניכר לניסוי זה ולניתוח תוצאותיו. החוויה חשפה אותנו בהזדמנות פז לשיח מדעי בין חוקרים, תהליך חקר ברמה אקדמית עם ציוד משוכלל ושיתוף פעולה בינו לבין מדענים בכירים במכון. ההתרגשות בחשיפה להזדמנות כזו נותנת "דלק" להמשך עבודתנו בבית הספר. נקווה "להדביק" גם מורים אחרים בהתלהבותנו.

גורמי שגיאה של הניסוי:

1. יש השפעה של רעש התרמי מהחדר (בעיקר משפיע בטמפרטורה נמוכה של נורת הלהט).
2. בטמפרטורות גבוהות יתכן שחוט הלהט החל להיות צר יותר, דבר שמעלה ערכו האמיתי של התנגדות הנורה ולכן הטמפ' שמחושבת היא "לנורה אחרת".
3. רגישות מכשיר הספקטרומטר האופטי לאורכי גל שונים אינו אחיד.
4. בליעת של פוטונים באוויר ובגז שבתוך הנורה באורכי גל מסוימים גורמת להורדת עוצמת הקרינה ולכן קיבלנו "שיני מסור" בעקומות שלנו ולכן לא נמדדת כל עוצמת הקרינה הנפלטת.
5. החזרה של האור הנפלט מהנורה מפגיעת בזכוכית(בשתי דפנות הזכוכית) ובפגיעה בסיב האופטי מורידה את ערך עוצמת הקרינה הנפלטת.
6. הקושי למצוא באופן מדויק את אורך הגל שבו העוצמה היא מקסימלית היות וקיבלנו "שיני מסור" (בעיקר כאשר הנורה במתח 9V).
7. הגרף הלינארי נגזר מרב הנתונים היות וחלק מהנקודות היו רחוקות במקצת מקו המגמה (הנקודות שמתחת ל600 ננומטר) שהחלטנו לא להכניסן לגרף כדי שהגרף יהיה מדויק יותר.
8. לא ידענו להסביר את הירידה החדה בעוצמת הקרינה באורכי הגל הקצרים, יתכן ולמכשיר הספקטרומטר יש בעיה, יתכן שהמכשיר עבר לגלאי אחר באורכי גל הקצרים.

מושג הגוף שחור הינו מושג אידיאלי ולא קיים באמת במציאות, אך ישנם מקרים שקרובים להתנהגות של גוף שחור. הדרך הטובה ביותר להתקרב לגוף שחור אידיאלי היא יצירת חלל אטום כלשהו עם פתח קטן, כך שכל קרינה שתיכנס דרכו תיבלע בדפנות לפני שתצא. הניסיון מלמד כי הקרינה שתיפלט דרך החור הינה רציפה ואינה תלויה בחומר ממנו עשויות דפנות המיכל, אלא רק בטמפ' של הדפנות.

תופעת פליטת הקרינה הא"מ של גופים חמים נמצאת בכל מקום סביבנו- החל בחוט הלהט במנורת הליבון, דרך צבעה של הלבנה בהתפרצויות וולקניות, צבע גופי חימום של תנורים שונים, ברזל מלוכלך ואפילו קרינת אינפרא אדום הנפלטת מבעלי חיים שונים ומאדם, וכלה באור השמש והכוכבים. גם לחור שחור יש טמפרטורה והוא פולט קרינה בהתאם והוא דוגמה ספציפית לגוף שחור. כל דבר שפולט קרינה בהתאם לטמפ' שלו נקרא גוף שחור. (דרך אגב - נורת פלורסנט למשל איננה גוף שחור כי היא פולטת אור בגלל מעברי אנרגיה של אלקטרונים באטום הניאון ולא פולטת אור בגלל הטמפרטורה כמו נורת להט).

קרינת השמש מתנהגת כמו גוף שחור, קרינה שהספקטרום שלה תלוי אך ורק בטמפרטורת הכוכב. קרינת הגוף השחור מגיעה מן השמש מכיוון שבטמפרטורה גבוהה כל כך האטומים של היסודות השונים בשמש מצויים במצב המעורער, ולכן מתרחשת תופעת פליטה של פוטונים בכל אורכי הגל. ואלה נפלטים בקרינה באופן רציף, מה שאמור ליצור לכאורה ספקטרום רציף המכיל את כל הצבעים הנראים. (אולם על כדור הארץ וגם מחוצה לו אין רואים ספקטרום רציף לגמרי של השמש, אם מביטים היטב על רצף הצבעים ניתן להבחין בפסים כהים, אלה הם קווי פראונהופר- קווים אלה מופיעים עקב תופעת הבליעה שמתרחשת בכרומוספירה של השמש). נשים לב כי טמפרטורת פני השטח של השמש היא בערך 6000 מעלות קלווין, לכן השמש פולטת הכי הרבה אור בתדרים הנראים, מה שהופך את הגלאים שיש לנו בעין למועילים כל כך (היות ועקומת הרגישות של העין זהה לעקומת ההתפלגות הספקטרלית של קרינת השמש, ושיא הרגישות שלה הוא באור ירוק, שהוא גם שיא הפליטה של קרינת השמש). לעומת זאת, גוף שחור בטמפרטורה 300 מעלות קלווין (טמפרטורת החדר) פולט קרינה בלתי נראית לעין, בתחום האינפרא אדום. לכן, אפשר לראות אדם בלילה ע"י גלאי אינפרא אדום.

ויין הראה כי תדירות שיא הפליטה משתנה עם הטמפרטורה, ככל שהטמפרטורה גבוהה תדירות שיא הפליטה גדל. עובדה אחרונה זו ידועה לכל מי שחיים אי פעם מסמר בלהבת תנור. המסמר אינו משנה את צבעו בהתחלת החימום, אך לאחר זמן חימום מסויים צבעו הופך אדום עמוק, אח"כ אדום בהיר, ואח"כ צהוב בוהק. דוגמה נוספת המעידה כי התדירות האור (צבע האור) מתכונתי עם הטמפרטורה היא להבת הנר אשר צבעה צהוב לעומת צבע להבה היוצאת מכיריים של גז בעלת טמפרטורה גבוהה יותר הוא כחול.

גוף שחור כאמור הוא גוף המסוגל לבלוע קרינה אלקטרומגנטית בכל תדירות שהיא באופן מושלם. בליעת כל הקרינה גורמת לשינוי בטמפרטורה של הגוף השחור ופולט קרינה אלקטרומגנטית בהתפלגות מסוימת של אורכי גל, שתלויה רק בטמפרטורה שלו. תכונות אלו של גוף שחור נוצלו בעשורים האחרונים ליישומים טכנולוגיים לתועלת האדם בתחומי רפואה, צבא ותחזוקת מבנים. בשנים האחרונות הואצו מאוד תהליכי הפיתוח של מצלמות וגלאים והם שופרו ודוייקו יותר כך שהשימוש בהם רווח מאד בתחומים דלעיל והשפעתם ניכרת.

נדגיש כי במציאות לא קיים גוף שחור אידיאלי הבולע קרינה אלקטרומגנטית בכל התדירויות וכל הדוגמאות והיישומים מסתמכים על "קירוב" לקרינת גוף שחור.

נציג לקמן מספר יישומים של קרינת גוף שחור ודוגמאות מעניינות מן הקוסמוס.

1. הדמיה תרמית – תרמוגרפיה.

זהו תחום מדעי (פיסיקלי הנדסי) העוסק בהדמיה המבוססת על פליטת קרינה תת אדומה מגופים עפ"י עיקרון קרינת גוף שחור. המכשירים להדמיה הינם גלאים ומצלמות הקולטים קרינה אלקטרומגנטית בתחום האינפרא אדום (אורכי גל של 9000-14000 ננומטר). להדמיות אלו ישנם יישומים רבים ומגוונים.

א. בדיקות לא-הורסות לאיבחון גידולים סרטניים.

מכיוון שסביב איזור הגידול קיימת זרימת דם מואצת (כך הגידול מוזן), הטמפרטורה שם גבוהה יותר מאזורים בריאים בגוף. המצלמה רגישה לשינויים אלו בטמפרטורה המשליכים על קרינת האינפרא אדום הנפלטת מהם, היא ממירה את הקרינה לאותות אלקטרוניים ומציגה אותם על צג בצבעים שונים. הצבעים המתקבלים על המסך מייצגים אזורים שונים של הגוף בהתאם לטמפרטורה. צבעי סגול כחול מייצגים טמפרטורות גבוהות וצבעי צהוב, כתום, אדום – טמפרטורות נמוכות. המכשירים הקיימים כיום נמצאים ברמת דיוק של 0.1 מעלות צלזיוס לכל נקודה. זוהי מידת דיוק בהחלט מספקת לאיבחון בזמן אמת של גידולים סרטניים אפילו בראשית התהוותם.

ב. אמצעי ראיית לילה.

ניתן לדמות בחושך מוחלט אנשים ובעלי חיים ע"י מצלמות ההדמיה אשר "אוספות" את הקרינה האינפרא אדומה הנפלטת מגופים חיים ומציגות אותם על צג. יישום זה שימושי מאוד לצבא אך גם למעקבים מחקריים אודות התנהגותם בטבע של בעלי חיים בלילה.

ג. בדיקות לא הורסות לזיהוי מוקדי נזילות ורטיבות דרך קירות וריצוף.

גם בבדיקות אלו מבוצעות בעזרת גלאים על פי עיקרון פעולה דומה לעיל. היתרון העצום בבדיקות אלו הוא החיסכון בשבירת ריצוף או קירות של מבנים.

ד. מד טמפרטורה.

טמפרטורה היא מדד לכמות האנרגיה בחומר או במערכת הנמדדת. כאשר חומר כלשהו מתחמם פירוש הדבר שהמולקולות/האטומים נעים יותר מהר, יש יותר התנגשויות בין החלקיקים והתנגשויות יותר עוצמתיות. את הטמפרטורה מודדים ע"י מד טמפרטורה או מדחום. הראשון להמציא ולהשתמש במד טמפרטורה היה גלילאו גליליי, בסוף המאה ה-16. מד הטמפרטורה שהמציא היה מבוסס על התפשטות והתכווצות האוויר בטמפרטורות שונות. במהלך מאות השנים הבאות חוקרים שונים הציעו שיפורים ושינויים שונים. במאה ה-18, גרמני בשם דניאל פרנהייט פיתח את מד הטמפרטורה הפועל על אלכוהול ובהמשך גם בעזרת כספית ושכלל אותם למוצר המוכר לנו היום. ישנם מדי טמפרטורה נוספים למשל – מקדם התפשטות-המבוסס על מגע בין שתי מתכות (לרוב פלדה ונחושת) בעלות מקדם התפשטות שונה. כאשר הטמפרטורה משתנה המתכות מתכווצות או מתפשטות ביחס שונה. או גביש נוזלי- משנה את צבעו בתלות בטמפרטורה. או צמד תרמי (Thermocouple) – מבוסס על 2 מתכות בעלות מקדם עבודה שונה. כאשר הטמפרטורה משתנה נוצר מתח חשמלי (וולט) בין המתכות. המתח הוא בר מדידה וניתן להמירו לשינוי בטמפרטורה. סוג נוסף של מד חום (הרלוונטי לנושא שלנו) – אינפרה (תת) אדום – המבוסס על עיקרון קרינת גוף שחור. מכיון שגוף האדם קורן בתחום אינפרא אדום בהתפלגות אופיינית לטמפרטורה שלו, גלאי לקרינה תת אדומה מודד את הקרינה המוקרנת מן הגוף ועל פי ההתפלגות המתקבלת ניתן לדעת את טמפרטורת הגוף (ה"פיק" של אופיין התפלגות הקרינה).

ה. פירומטר אופטי.

פירומטר (pyrometer) הנו מכשיר המודד את קרינת החום של גוף ללא מגע איתו ולכן הוא יעיל למדידת גופים בתנועה או כאלה שאי אפשר לגעת בהם.



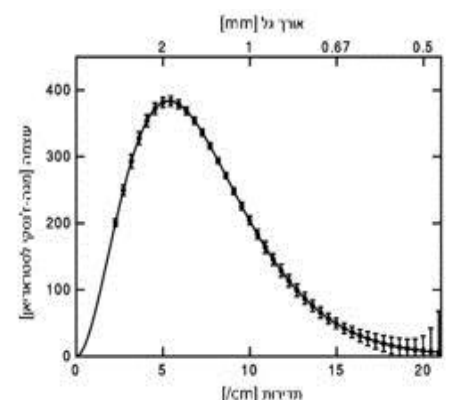
פירומטר אופטי (Optical pyrometer) מאפשר השוואה בעין בין הבהירות והצבע של גוף חם לבהירות וצבע של חוט להט בעל טמפרטורה ידועה המצוי בתוך המכשיר. מכשיר זה מצוי בשימוש למדידת גופים בעלי טמפרטורה גבוהה, לרוב מעל 700 מעלות צלזיוס, מעל לטמפרטורה שמדי הטמפרטורה הרגילים יכולים למדוד. מנגד, הגוף החם חייב לזהור כדי שהפירומטר יוכל להשוות אליו ובכך למדוד אותו. דרך מערכת עדשות ומסננים מסתכלים על הגוף החם כאשר חוט הלהט של המכשיר מצוי אף הוא בשדה הראייה של המודד. הפעלת המכשיר מעבירה זרם בחוט הלהט וגורמת לחימומו. כתוצאה מכך חוט הלהט מתחיל לזהור וצבעו משתנה. כאשר צבע חוט הלהט זהה לצבע הגוף הזהור ניתן לדעת את טמפרטורת הגוף.

2. קרינת רקע קוסמית

המקור הטבעי ביותר לקרינת גוף שחור הינו קרינת הרקע הקוסמית. קרינת הרקע הקוסמית הינה קרינת רדיו אחידה והומוגנית, בקרוב טוב, בתחום המיקרוגל. קרינה זו פוגעת בכדור הארץ בתחום קרינת גלי המיקרו אף עוצמתה חלשה מזו של מיקרוגל ביתי. לקרינת הרקע יש ספקטרום של גוף שחור.

הספקטרום של קרינת הרקע הקוסמית מאופיין, ברמת ההתאמה גבוהה מאוד, ע"י ספקטרום הקרינה של גוף שחור. באיור מוצג ספקטרום הקרינה המדוד, לאחר חישוב ממוצע ע"י פני כל הכיוונים מהצופה במרחב, של קרינת הרקע הקוסמית. צורת הספקטרום של גוף שחור מאופיינת על ידי פרמטר אחד בלבד (טמפרטורה) שקובע את צורתו. הספקטרום של קרינת הרקע מתאים בדיוק רב (עם סטיות קטנות בלבד) לספקטרום התאורטי של גוף שחור.

הקו השחור מתאר את ספקטרום הקרינה התאורטי של גוף שחור בטמפרטורה של 2.725 קלווין. שגיאות המדידה על גבי כל אחד מנק' המדידה קטנות פי 400 מקווי השגיאה בסרטוט והוגדלו על מנת שיהיה ניתן להבחין בהם. המדידות הנ"ל מראות כי הספקטרום של קרינת הרקע הקוסמית מתאים בדיוק רב (עם סטיות קטנות בלבד) לספקטרום התיאורטי של גוף שחור.

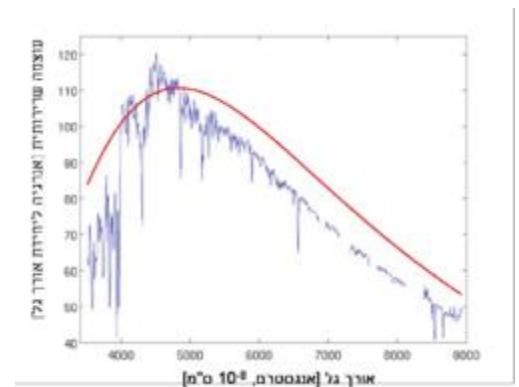


קרינת הרקע מגיעה מכל כיוון ואנו לא יכולים להצביע על מקור מסוים הפולט אותה. מהיכן מגיעה אם כן הקרינה, מהו מקורה? מקור הקרינה שהתגלתה הוא בראשית היקום ממש כלומר, במפץ הגדול עצמו. כידוע, על פי תאוריית המפץ הגדול, היקום התחיל בנקודה סינגולריות כבידתית. המפץ הגדול מתאר את האירוע שהתרחש בנקודה זו ובמהלכו נוצר היקום. בראשיתו, היקום היה מאוד מאוד חם ומורכב רק מחלקיקים אלמנטריים ופוטונים. בשניות ובדקות הראשונות לאחר המפץ הגדול, הטמפרטורה והלחץ התחילו לצנוח במהירות, זאת עקב ההתפשטות המהירה של היקום. אלקטרונים מפזרים קרינה באופן יעיל מאוד, אך הקרינה ביקום הצעיר לא יכלה להתקדם בחופשיות; למעשה היקום הצעיר היה אטום לקרינה. עם המשך ההתפשטות של היקום הוא הלך והתקרר אל כ-3000 מעלות קלווין, ובשלב זה נוצרו אטומי מימן. כלומר פוטונים ואלקטרונים התחברו. בשלב זה של היקום, הקרינה יכלה להתפשט ולהתפזר, מפני שבשלב זה רוב האלקטרונים היו לכודים בתוך אטומי מימן, ועל כן הקרינה יכלה להתקדם בחופשיות ולהתפזר. במהלך הזמן היקום התפשט לכדי היקום המוכר לנו כיום. על פי תאוריה זו של המפץ הגדול, קרינה זו הינה קרינת הרקע הקוסמית! הפוטונים של קרינת הרקע הקוסמית נעים ביקום מתפשט וזו למעשה הסיבה להתקררות הקרינה. קרינת הרקע הקוסמית מהווה תמונת מצב של היקום באותה עת, וניתן לומר שקרינת הרקע היא למעשה מעין שריד לאירוע המפץ הגדול והינה חלק מהוכחה לתאוריה זו. קרינה זו התקררה יחד עם היקום, ככל שהיקום הלך והתפשט כך גם הטמפרטורה שבו הלכה והתקררה וכיום קרינת הרקע נמדדת ב-2.725 מעלות קלווין כלומר כ-270- מעלות צלסיוס והיא ממלאת את כל היקום. בממוצע, כל ס"מ מעוקב של היקום מכיל כ-410 פוטונים של קרינת הרקע הקוסמית.

3. קרינת גוף שחור של כוכבים

בטבע, כוכבים בד"כ פולטים קרינה שהיא בקירוב קרינת גוף שחור. הסיבה לכך היא שכמות הקרינה המוחזרת מהכוכב קטנה מאד ביחס לכמות הקרינה המיוצרת ע"י הריאקציות התרמו-גרעיניות בליבת הכוכב. בפועל קיימים הבדלים בין קרינת גוף שחור והקרינה המגיעה מכוכבים מאחר והגז בפוטוספירה של הכוכב בולע קרינה באורכי גל מסוימים ועל כן מופיעים קווי בליעה.

בגרף משמאל ניתן לראות בכחול ספקטרום (עוצמת הקרינה כתלות באורך גל) של כוכב דמוי שמש בעל טמפרטורה אפקטיבית של 6000 קלווין. הקו האדום מייצג קרינת גוף שחור תאורטי בטמפרטורה של 6000 קלווין. הספקטרום של הכוכב מראה קווי בליעה רבים הנוצרים באטמוספירה שלו והוא מתואר רק בקירוב גס ע"י קרינת גוף שחור.



מאחר והספקטרום של הכוכבים מתואר רק בקירוב ע"י עקומת גוף שחור, נהוג להגדיר גודל הקרוי טמפרטורה אפקטיבית (Effective temperature) של כוכב כטמפרטורה של גוף שחור שפולט את אותו שטף קרינה (מיחידת שטח).

הרלוונטיות של קרינת גוף שחור לחיינו

הרלוונטיות של קרינת גוף שחור לתופעות יומיומיות - נורת להט, קרינת אור השמש, קרינה הנפלטת מאדם וכדומה הופכת את הנושא למעניין ומסקרן יותר – הרצון להבין את התופעות שאנו רואים מידי יום.

היישומים של קרינת גוף שחור נחלקים לשני גורמים עיקריים:

1. בפיתוחים טכנולוגיים למצלמות הדמיה תרמיות, מכשירי ראיית לילה, מכשירי אבחון רפואיים מדי טמפרטורה וכדומה.
2. קרינת הרקע הקוסמית הממלאת תפקיד חשוב בעולמינו.

הנחיות להדמיה של קרינת גוף שחור ומטרותיה

קישור להדמיה (מקור ההדמיה מ phET).

<http://stwww.weizmann.ac.il/ptc/applets/black-body-radiation.swf>



הנחיות הפעלה

ניתן לשנות את טמפרטורת הגוף הפולט קרינה באמצעות הזזת זחלן השליטה בטמפרטורה, כבתמונה משמאל. את הטמפרטורה רואים גם כערך מספרי, וגם על מד הטמפרטורה בצבע אדום.

כפתורי הרצת ההדמיה

ההדמיה פועלת כל הזמן, מכיוון שאין בה דברים המשתנים מעצמם. רק ברגע שמשנים פרמטר, רואים את השינוי על המסך.

תצוגות ההדמיה

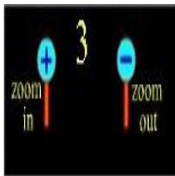
היתרון בהדמיה זו הוא היכולת לבצע התמקדות בתופעה באמצעות שינוי קנה המידה של הצירים:

- ציר x המתאר את אורך הגל (Wavelength).

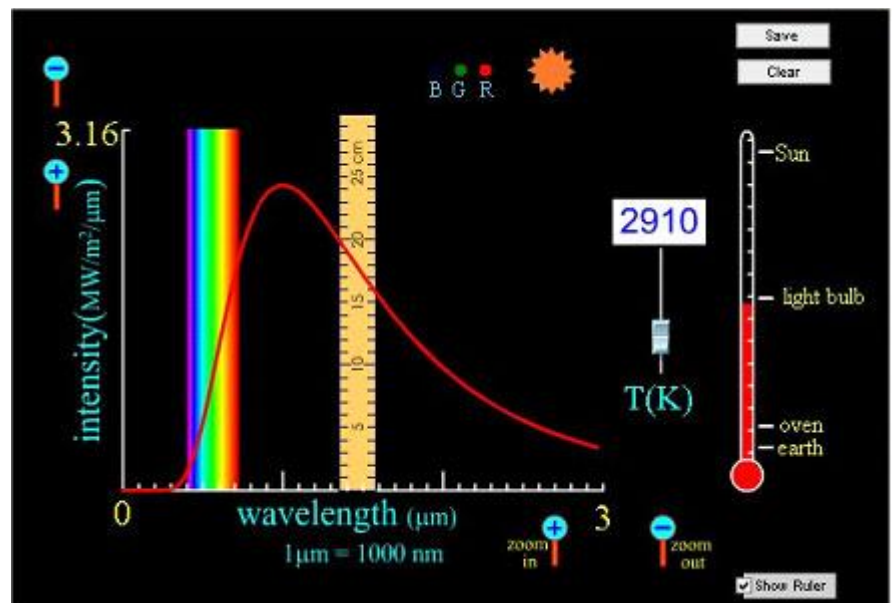
- ציר y המתאר את עוצמת הקרינה האלקטרומגנטית הנפלטת.

שינוי קנה המידה של ציר x מתבצע באמצעות לחיצה על הכפתורים (+) Zoom Out (-) Zoom In

המופיעים ליד כל ציר, ראה תמונה



דוגמה היא הקרינה הנפלטת מנורת להט (ראה תמונה), בה ניתן לראות את חלק הקרינה הנפלט בתחום הספקטרום הנראה:



מטרות ההדמיה

ישנם גופים בטבע שמתנהגים בקירוב כמו גוף שחור, למשל השמש, כדור הארץ, נורת להט, ברזל מלוכלך ואפילו קרינת אינפרא אדום הנפלטת מבעלי חיים שונים ומהאדם. דף עבודה זה מאפשר למורים ולתלמידים המעוניינים להרחיב את ידיעותיהם בפיזיקה לחקור דוגמאות שונות של גופים שקרובים להתנהגות של גוף שחור.

עיקר השימוש בהדמיה זו הוא להכיר את אופיין הספקטרום של קרינת גוף שחור, ליצור את הקשר המחשבתי בין טמפרטורת הגוף הפולט את האור לבין ספקטרום הקרינה הנפלטת ממנו, לקשר בין ההדמיה לתיאוריה ולנוסחאות שמסבירות את הקרינה של גוף שחור (נוסחת פלאנק, נוסחת סטפן-בולצמן ונוסחת ויין).

ובאמצעות הדמיה זו ניתן להסביר את קרינת האינפרא אדום של התנור או של האדם, את ספקטרום הקרינה הנפלטת מהשמש, ואת האחוז היחסי הקטן של אור בתחום הספקטרום הנראה שנפלט מנורת להט.

דף עבודה להדמיה של קרינת גוף שחור

א. הזז את הזחלן של הטמפרטורה לפי הערכים הרשומים בטבלה, ורשום את הערך של האורך הגל שבו עוצמת הקרינה מקסימלית בשורה השנייה בטבלה (שים לב שציר x ביחידות של מיקרומטר).
צריך להיעזר בכפתורים Zoom in (+) ו Zoom Out (-) שבכל ציר כך שהגרף המתקבל יהיה נוח לקריאה.
השתמש בסרגל והעזר בקנה המידה של ציר x כדי לקרוא את האורך הגל שבו העוצמה מקסימלית.

T (k)	300	650	1500	3000 (כטמפ')	5700
טמפ' בקלווין	(כטמפ' החדר, האדם)	(כטמפ' תנור)		נורת להט (100W)	(כטמפ' פני השמש)
λ_{max} (m)					
מתוך ההדמיה					
λ_{max} (m)					
מתוך הנוסחה					

מהי מסקנתך מן הטבלה?

ב. תאר את השינויים החלים בעקומות כאשר אתה עובר מטמפרטורה נמוכה לטמפרטורה גבוהה- התייחס בתשובתך לשטף הקרינה (השטח שמתחת לגרף), לערך המקסימלי של עוצמת הקרינה ולאורך הגל שבו עוצמת הקרינה מקסימלית.
אינך חייב להשתמש בערכי הטמפרטורה שבטבלה ואף רצוי שהגרפים השונים יהיו באותה מערכת צירים כדי שתוכל להבחין בשינויים בייתר קלות.

ג. כיצד תיאוריך מתאימים לנוסחאות המתארות את קרינת גוף שחור:
נוסחת סטפן בולצמן:

$$I = \sigma T^4$$

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$$

ונוסחת ויין:

$$T\lambda_{max} = 2.898 \cdot 10^{-3} [\text{K} \cdot \text{m}]$$

כאשר I - שטף הקרינה של הגוף, σ - קבוע סטפן בולצמן, T - טמפרטורה (K), λ_{max} - אורך הגל שבו הקרינה מקסימלית (m).

ד. חשב את האורך הגל שבו העוצמה מקסימלית מתוך נוסחת ויין כתוב את תוצאותיך בשורה השלישית בטבלה.
השווה את החישוב המדויק מתוך הנוסחה (שורה שלישית) למדידותיך מתוך ההדמיה (שורה שנייה).
האם ההבדלים ניכרים? אם כן, ציינו סיבות אפשריות לשגיאה

ה. בהדמיה זו מופיע הספקטרום של האור הנראה בטמפרטורות מסוימות (ספקטרום צבעוני). מצא בעזרת ההדמיה את הטמפרטורה שבה האור הנראה הוא רב הקרינה הנפלטת מהגוף השחור. נסה לדייק כמה שיותר כך שהשטח של ספקטרום האור הנראה נמצא במרכז העקומה. השווה את הטמפרטורה שמצאת לטמפרטורת השמש והסבר מדוע העין, הרגישה לאור הנראה, היא גלאי טוב לשמש?

ו. הסבר מדוע העין אינה גלאי טוב לגופים כגון: תנור, באדם? ומדוע אפשר לראות אדם ובע"ח בלילה ע"י גלאי אינפרא אדום (אמצעי ראיית לילה - שימושי בצבא)?

ז. חזור לערך טמפרטורה של 3000 מעלות קלווין – טמפרטורה של נורת להט של 100 ואט. והערך את נצילות של הנורה לאור הנראה? כלומר, הערך את האחוז היחסי של אור בתחום הספקטרום הנראה שנפלט מנורת הלהט.

ח. בונס: חשב את נצילות נורת הלהט של 100W ע"י שימוש בנוסחת פלאנק ובנוסחת סטפן בולצמן: צפיפות האנרגיה ליחידת אורך גל ליחידת נפח כפונקציה של הטמפרטורה ואורך הגל תוארה ע"י מקס פלאנק באופן הבא:

$$\frac{E}{V} = 8\pi hc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1 \right)}$$

כאשר h הוא קבוע פלנק, C היא מהירות האור, λ הוא אורך גל, K הוא קבוע בולצמן, T היא הטמפ' בקלווין שטף הקרינה תלוי ביחס ישר לטמפרטורה ברביעית של גוף שחור:

$$I = \sigma T^4$$

כאשר קבוע סטפן-בולצמן:

$$\sigma = 5.67 * 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

הקשר בין שטף כל הקרינה הנפלטת לבין צפיפות האנרגיה:

$$I = \frac{c E}{4 V} = \frac{c}{4} * 8\pi hc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1 \right)}$$

רמז:
$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

ט. קיבלת בסעיף ז או ח שנצילות נורת הלהט לאור הנראה נמוכה מאוד. הסבר איך נורת פלורסנט מתגברת על מחסום נצילות זה?

י. מדוע עדיף להשתמש בנורת להט של 200 ואט לעומת 2 נורות של 100 ואט? התייחס בתשובתך לחלק היחסי של תחום האור הנראה בקרינה הנפלטת משתי הנורות (הטמפרטורה ביחס ישר להספק)

יא. האם ההדמיה עזרה לך להבנת הקשר בין טמפרטורת גוף שחור לבין ספקטרום הקרינה הנפלט מהגוף? דרג את תשובתך מ-1-5 (כאשר 5-הרבה מאוד ו-1 בכלל לא)

http://galileo.phys.virginia.edu/classes/252/black_body_radiation.html

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/mod6.html>

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/rayj.html#c4>

<http://myforum.bgu.ac.il/phpBB3/viewtopic.php>

http://en.wikipedia.org/wiki/Planck%27s_law

http://en.wikipedia.org/wiki/Black_body

<http://library.thinkquest.org/C007571/english/advance/background4.htm>

<http://woland.ph.biu.ac.il/uploaded/166.pdf>

<http://davidson.weizmann.ac.il/online/askexpert/physics>

<http://davidson.weizmann.ac.il/online/askexpert/physics>

גריבין ג. (2010) ההיסטוריה של המדע , הוצאת ספרי עליית הגג וידיעות ספרים.