מכון ויצמן למדע

מדרשת פיינברג – המחלקה להוראת המדעים

אוקטובר 2012

שיטת הצבירה של תכונות ועקומים אקזוטיים

מנחה: פרופ' סרגיי יעקובנקו

מגישה: מריאנה שוורצמן

ת.ז : 320873391

תוכן עניינים

מבוא

האסוציאציה הטבעית עבור המילה 'עקום' היא קו ישר שעליו הופעלו עיקום ופיתול, מבלי "לקרוע" אותו. אבל מה הוא קו? אפילו אוקלידס בספרו "יסודות" לא נתן הגדרה מדויקת אלא כתב "קו הוא אורך ללא רוחב" (אוקלידס, יסודות, ספר ראשון, הגדרות **Error! Reference source not found.Error! Reference source not found.** [1]). לאורך מאות שנים, מתמטיקאים בכל העולם חקרו ו"בנו" מתמטיקה בלי להסתמך על הגדרה מדויקת, אלא רק על הבנה אינטואיטיבית מהו קו.

במאה ה-19, מתמטיקאים רבים עסקו בשאלה הגדרה פורמלית לעקום. ז'ורדן[1] הציע לראות את הקו בתור העקבה של נקודה קטנה שזזה במישור ללא קפיצות במשך פרק זמן מסוים. מכיוון שהנקודה היא קטנה, אפשר להזניח את רוחב העקבה. במילים אחרות, עקום לפי ז'ורדן הוא *"התמונה של פונקציה רציפה המוגדרת על קטע היחידה [0,1]"*. פיאנו[2] גילה כי הגדרה זו הינה בעייתית, מאחר שהיא רחבה מדי וכוללת גם צורות כמו משולש, ריבוע ומעגל. בסוף המאה ה-19, גאורג קנטור[3] נעזר בתורת הקבוצות כדי להגדיר קו בתור *"רצף במישור שלא קיים ריבוע המכיל רק אותו"* [10].

ההגדרה המודרנית של עקומה משלבת בתוכה את ההגדרות לפי ז'ורדן וקנטור יחד. *עקום הוא מרחב טופולוגי מקומית הומאומורפי לישר, כשניתן להגדירה ע"י פונקציה שתחומה הוא קטע של מספרים ממשים והטווח שלה הוא מרחב טופולוגי כלשהו*. בצורה זו נשמרת התמונה האינטואיטיבית של קו "עקום ומפותל", ויחד עם זאת מושג תיאור מדויק.

לאור הזהות בין עקומה ופונקציה, נפנה לחקור מהי פונקציה. ראשית התפתחות מושג הפונקציה לפני 4000 שנה, אשר 3700 מהן היו שנים של הכנות [**Error! Reference source not found.**],[**Error! Reference source not found.**]. כשמתבוננים בכתבים מתמטיים עתיקים מנקודת המבט של המתמטיקה המודרנית, אפשר לזהות שמתמטיקאים בבלים (כ-2000 שנה לפני הספירה) עסקו בפונקציות, גם אם לא ניסחו זאת במונחים האלה. גם בימי יוון העתיקה היה מוכר רעיון התלות בין ערכים מסוימים [**Error! Reference source not found.**]. בעת החדשה, דקארט[4] ופרמה[5] עשו שימוש הלכה למעשה בפונקציות, מבלי לכנותן כך. כך למשל, דקארט תיאר ב- 1638 משוואות של עקומים רבים [**Error! Reference source not found.**3], אבל אף פעם לא יצר עקום ע"י הצבת נקודות במשוואה. המונח "פונקציה" מופיע לראשונה

[1] **קאמי ז'ורדן** (בצרפתית: Marie Ennemond Camille Jordan; 5 בינואר 1838 – 22 בינואר 1922) מתמטיקאי צרפתי שעסק בתחומים רבים במתמטיקה ובין היתר היה ממשיך דרכו העיקרי של גלואה בפיתוח שיטתי של תורת החבורות

[2] **ג'וספה פיאנו** (באיטלקית: Giuseppe Peano 27 באוגוסט 1858- 20 באפריל 1932) מתמטיקאי איטלקי שהביא תרומתו ללוגיקה, אוקסיאומטיקה ופילוסופיה מתמטית

[3] **גאורג קנטור** (בגרמנית: Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor: 3 במרץ 1845 – 6 בינואר 1918) מתמטיקאי גרמני, אבי תורת הקבוצות העומדת בבסיס המתמטיקה המודרנית.

[4] **רנה דקארט** (בצרפתית René Descartes 31 במרץ 1596 – 11 בפברואר 1650) פילוסוף ומתמטיקאי צרפתי.

[5] **פייר דה פֶּרְמָה**(בצרפתית; Pierre de Fermat ; 17 באוגוסט 1605 – 12 בינואר 1665) מתמטיקאי צרפתי

בכתביו של לייבניץ[6] בשנת 1673. הוא התייחס לפונקציה במובן של קטעים התלויים במיקומה של הנקודה על העקום, כמו אורך של משיק או נורמל, כשהעקום עצמו נתון ע"י משוואה [**Error! Reference source not found.**]. בשנת 1694 פרסם לייבניץ מאמר ובו השתמש במילה פונקציה (Journal des Scavans). עם זאת, לייבניץ נתן אז למושג פונקציה משמעות הרבה יותר צרה מהמשמעות המודרנית. [**Error! Reference source not found.**]

חברו של לייבניץ, המתמטיקאי ברנולי[7], השתמש במילה פונקציה במאמרו ב- 1698 בפתרון בעיה הקשורה לעקומים. הוא היה הראשון שנתן הגדרה פורמלית: "פונקציה של משתנה היא כמות המורכבת בכל דרך שהיא מהמשתנה עצמו ומקבועים"[8] [7].

בשנת 1748 תלמידו של ברנולי, המתמטיקאי אוילר[9], תיקן והדגיש שפונקציות הן ביטוי אנליטי[10]. אוילר היה הראשון שהשתמש באות *f* לסימון הפונקציה. עם זאת ברנולי ואוילר לא הבדילו בין פונקציה לבין ערך של פונקציה, ואף לא דרשו חד-ערכיות של פונקציה.[**Error! Reference source not found.**]

במאה ה-19, המתמטיקאי הגרמני דיריכלה[11] טבע את ההגדרה המודרנית: *"פונקציה היא כלל התאמה בין שתי קבוצות, המתאימה לכל איבר בקבוצה אחת (המכונה 'תחום') איבר יחיד בקבוצה אחרת (המכונה 'טווח')".*

ההגדרה של דיריכלה אפשרה לבנות פונקציות בצורה כללית יותר, מבלי לדרוש קיום של נוסחה יחידה המגדירה אותה. מתמטיקאים בני המאה ה-19 כינו פונקציות עם תכונות בלתי צפויות (למשל פונקציות לא גזירות באף נקודה) בשם 'פונקציות אקזוטיות' ואנחנו ממשיכים לקרוא להן כך עד היום. בעבודה הזו אגדיר פונקציה אקזוטית כפונקציות שאי אפשר להגדיר אותה בעזרת נוסחאות אלמנטריות או שלא קיים גרף המתאר אותה.

---

[6] **גוטפריד וילהלם פון לייבניץ** (בגרמנית: Gottfried Wilhelm von Leibniz ; 1 ביולי 1646 – 14 בנובמבר 1716) מתמטיקאי, פילוסוף ואיש אשכולות גרמני.

[7] **יוהאן ברנולי** (בגרמנית: Johann Bernoulli ; 27 ביולי 1667 – 1 בינואר 1748) מתמטיקאי שוויצרי

[8] *"A function of a variable is a quantity composed in any way from this variable and constants"*

[9] **לאונרד אוילר** (Leonhard Euler ; 15 באפריל 1707 – 18 בספטמבר 1783) מתמטיקאי ופיזיקאי שוויצרי, תלמידו של ברנולי

[10] *A function of a variable quantity is an analytic expression composed in any way from this variable quantity and numbers or constant quantities*

[11] **יוהאן פטר גוסטב לז'ן דיריכלה** (Peter Gustav Lejeune Dirichlet; 13 בפברואר 1805 – 5 במאי 1859) מתמטיקאי גרמני שלזכותו נרשמים הישגים רבים, בעיקר בתורת המספרים

פונקציות אקזוטיות

כאמור בפרק המבוא, מושג הפונקציה האקזוטית נטבע על ידי דיריכלה. הדוגמה הראשונה לפונקציה אקזוטית מיוחסת לדיריכלה, נקראת על שמו ('פונקציית דיריכלה') ומוגדרת לפי הכלל:

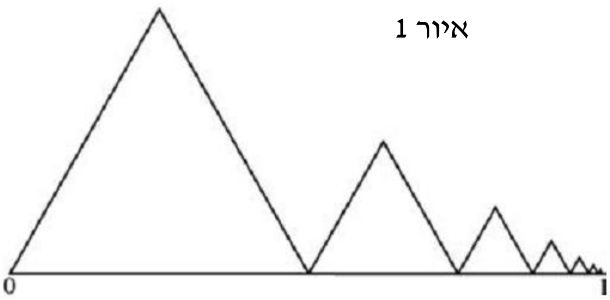
$$D(x)=\begin{cases}0, & if \;\; x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ 1, & if \;\; x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

מבחינת מתמטיקאים בני המאה ה-17, הכלל הנ"ל אינו מגדיר פונקציה מאחר שלא ניתן להגדיר אותה בעזרת נוסחה יחידה, ואי אפשר לשרטט את הגרף שלה. עם זאת, התאמה זו עונה על ההגדרה המודרנית לפונקציה. כמו כן היא נחשבת לפונקציה אקזוטית לאור התכונה המיוחדת שלה - היא לא רציפה באף נקודה.

נעבור כעת לדון בפונקציות רציפות שיש להן תכונות בלתי צפויות.

<u>פונקציה רציפה שמקבלת אינסוף נקודות מקסימום ומינימום בקטע סופי</u>: ניקח את הקטע $[0,1]$, נחלק אותו לשני חלקים שווים, בקטע $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ נבנה משולש שווה צלעות. את הקטע $\left[\frac{1}{2},1\right]$ נחלק שוב לשניים ובחצי השמאלי (בקטע $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$) נבנה עוד משולש שווה צלעות. נחזור על הפעולה בצורה רקורסיבית ונקבל ש

שרת הרים שגובהם שואף ל-0.



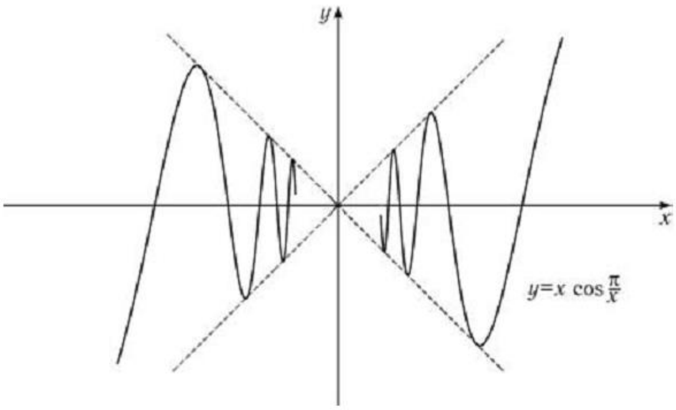
איור 1

נזהה את העקום המתקבל עם הגרף של פונקציה $f(x)$ כלשהי, המוגדרת בכל נקודה בקטע $[0,1]$ ונגדיר $f(1)=0$. קיבלנו פונקציה לפי ההגדרה של דיריכלה, שהיא רציפה בכל נקודה ועם מספר בן מניה של נקודות מקסימום ומינימום ($f(x)$ רציפה כי כשמתקרבים ל-1, ערכיה שואפים ל-0).

המתמטיקאים בני המאה ה-17 היו צריכים לשלב הרבה נוסחאות אלמטריות עד שהיו מגלים שלפונקציה

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x\cos\frac{\pi}{x},\ if\ \ x\neq 0 \\ 0,\qquad\ \ if\ \ x=0 \end{cases}$$

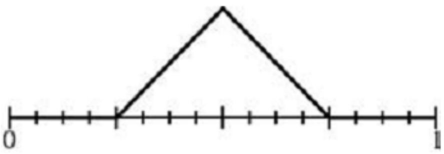
גם יש אינסוף נקודות מינימום ומקסימום בקטע $\left[0,1\right]$.



איור 2

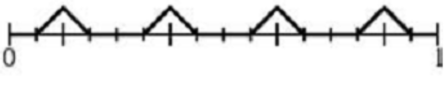
במשך מאות שנים, מתמטיקאים עבדו רק עם עקומים חלקים או כאלה שיש להם מספר סופי של נקודות "שבירה". כמה גדולה הייתה ההפתעה כשהמתמטיקאי הצ׳כי בולצנו[12] בנה לראשונה פונקציה שאינה גזירה באף נקודה, באופן דומה לפונקציה הבאה:

ניקח את הקטע $\left[0,1\right]$ ונחלק אותו לארבעה קטעים שווים. מעל שני החלקים האמצעים נבנה משולש שווה צלעות.



איור 3

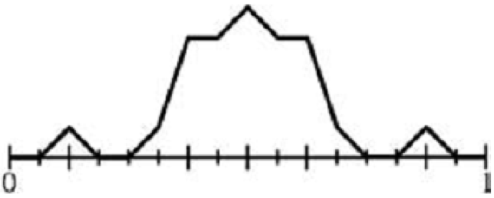
הקו המתקבל הוא גרף של פונקציה כלשהי שנסמנה $y=f_1\left(x\right)$. כעת נחלק כל אחד מארבעת הקטעים לארבעה קטעים נוספים ונבנה בכל זוג חלקים אמצעים משולש שווה צלעות.



איור 4

[12] **ברנרד בולצנו** (בצ׳כית: Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano) היה מתמטיקאי, לוגיקן, פילוסוף, תאולוג וכומר קתולי.

נסמן את הקו המתקבל ב- $y=f_2(x)$. אם נחבר בין פונקציה ראשונה לפונקציה שניה נקבל $y=f_1(x)+f_2(x)$ והגרף שלה:



איור 5

בשלב הבא נחלק את כל אחד מ- 16 הקטעים ל-4 חלקים ונבנה 16 משולשים שווי צלעות. את העקום המתקבל נזהה עם גרף הפונקציה ונקרא לה $f_3(x)$. נחבר אותה ל- $y=f_1(x)+f_2(x)$ ונקבל עקום עם יותר חודים (Cusps) מהעקום הקודם. כשנמשיך את התהליך בצורה רקורסיבית, נקבל עקום רציף עם הרבה מאוד נקודות "שבירה" ובגבול נגיע לעקום עם "חוד" בכל נקודה.[10]

לא נוכל להקדיש בעבודה זו מקום לכל הפונקציות האקזוטיות, אך ננסה למצוא חוט המקשר בין הפונקציות שהזכרנו עד כה. בשתי הדוגמאות שהוצגו, התחלנו מפונקציה פשוטה ובכל שלב שינינו אותה קצת והוספנו תכונות רצויות כדי שהיא תהפוך לקרובה יותר לפונקציית היעד, תוך שמירת כל התכונות הקיימות. שיטת בניה זו נקראת 'שיטת צבירת התכונות'. .

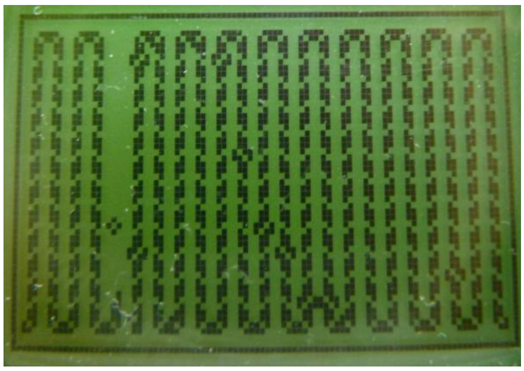
כעת נשתמש בשיטת צבירת התכונות על מנת לשחזר עבודה של פיאנו, המוכיחה את קיומו של קו רציף הממלא את הריבוע. בהמשך נדבר על תכונות מיוחדות נוספות של 'עקום פיאנו', ולבסוף נזכיר עקום אחר שלמרות היותו אקזוטי מבחינה מתמטית, הוא מתאר תופעה פיזיקאלית אמיתית.

עקום פיאנו

האם אפשר להעביר קו שעובר דרך כל נקודות הפנים של ריבוע?

האינטואיציה המתמטית תרמוז לנו שאפשר להעביר קו כזה. הנימוק הטריוויאלי הינו שהן העוצמה של קו ישר והן העוצמה של ריבוע שוות לעוצמת הרצף. עם זאת, הוכחתו של קנטור מבטיחה קיום של התאמה חד-חד-ערכית בין שתי הקבוצות, אך לא כי ההתאמה תהיה פונקציה רציפה.

ניתן לתרגם את הבעיה לניסוח מוחשי ולשאול האם אפשר לצבוע דף נייר בעזרת עפרון שקוטר חודו אפסי. במקרה זה, גם אנשים חסרי רקע מתמטי ישיבו על פי רוב בחיוב על השאלה. את הדוגמה המתבקשת ממחיש צילום מסך מתוך משחק הטלפון המפורסם Snake.


איור 6

נתחיל את הצביעה בפינה השמאלית התחתונה, נעלה עד לפינה השמאלית העליונה, נפנה ימינה ונרד למטה עד לתחתית, נפנה שמאלה וכן הלאה. למרות הקסם שבפשטותו של פתרון זה, יש בו בעיה מהותית: צפיפות. נניח שהעברנו קו אחד מלמטה למעלה ועכשיו ברצוננו לרדת בחזרה כמה שיותר קרוב לקו הראשון. לא נוכל לעשות זאת, מאחר שבין הקו נוסף לבין הקו הראשון תמיד תמצא נקודה שלא שייכת לאף אחד מהקווים, מאחר שבין כל שני מספרים ממשיים קיים מספר רציונלי. לפיכך, שיטת צביעה זו אינה מתאימה לפתור את הבעיה.

פתרון אחד לבעיה זומכונה 'עקום פיאנו'. קיומו של עקום זה מוכיח שריבוע דו ממדי הוא אכן עקומה במובן של ז'ורדן. כפי שראינו בפרק המבוא, נקודה עדינה זו חייבה שינוי של הגדרת העקום.

הוכחת קיומו של עקום פיאנו נעשית בעזרת שיטת צבירת התכונות שהוזכרה בפרק הקודם. נתחיל בפונקציה ליניארית יסודית ובכל שלב נוסיף לה רכיבים ליניאריים כדי למלא חלקים נוספים בריבוע. בכל שלב נקבל פונקציה רציפה עם מספר סופי של נקודות לא גזירות, שאורכה סופי ושטחה אפס. עם זאת, כתוצאה מתהליך בניה אינסופי נקבל פונקציה רציפה, שלא גזירה באף נקודה, אורכה אינסופי ושטח הריבוע שהיא ממלאת הוא 1.

אחרי שהצגנו את הבעיה ואת שיטת ההוכחה, נעבור להוכחה עצמה.

הוכחה:

נסמן: $S=[0,1]\times[0,1]$ $(square)$ ריבוע יחידה שדרך כל נקודה שלו יעבור עקום פיאנו.

$I=\left[0,1\right]$ - קטע

ברצוננו למצוא פונקציה רציפה $f:I\to S$ שתהיה <u>על</u> S. טענה זו שקולה לקיום של מסילה העוברת דרך כל הנקודות של ריבוע היחידה הנתון.

שלבי ההוכחה:

1. נבנה סדרת פונקציות $\{f_n\}$ ליניארית למקוטעין ונראה שכל איבריה הם פונקציות רציפות. התמונות של f_n הן קטעים ב- S המקבילים לישרים $x=y$ או $x=-y$.
2. נוכיח שלסדרה $\{f_n\}$ קיימת פונקציה גבולית f^* (נוכיח ש- $\{f_n\}$ מקיימת תנאי קושי במרחב מטרי $C^0[0,1]$).
3. נראה שהפונקציה הגבולית f^* היא <u>על</u>.

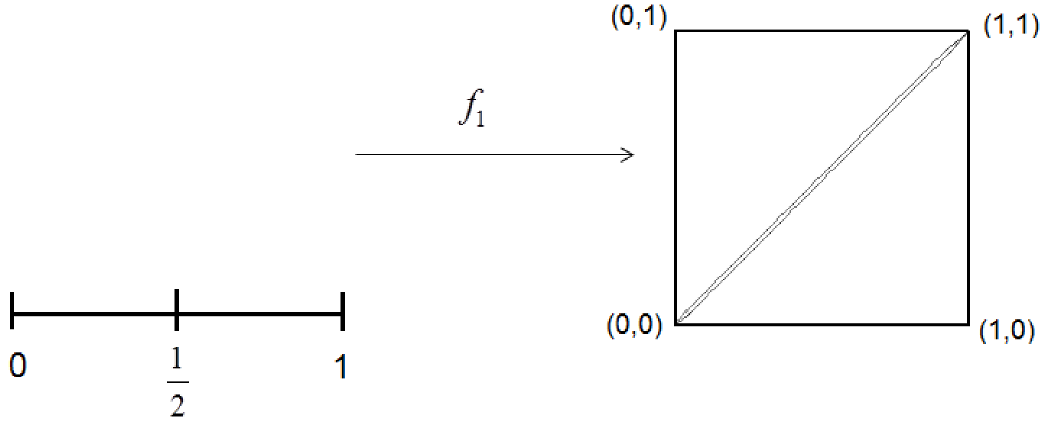
<u>שלב 1</u>

בנייה של סדרת פונקציות ליניאריות (אפיניות) למקוטעין $\{f_n\}$.

לכל $0<n$ נגדיר $f_n : I \to S$ כך ש- $f_n(t)=(x,y)$

עבור $n=1$

$$f_1=\begin{cases}(2t,2t) & 0\le t<\frac{1}{2}\\ (-2t+2,-2t+2) & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

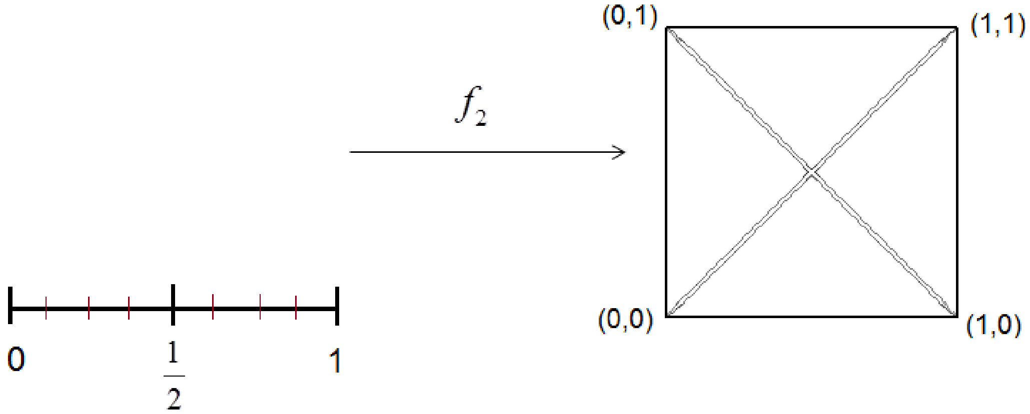


איור 7

עבור $n=2$

פונקציה f_1 רציפה וליניארית למקוטעין, ניקח כל קטע ב- I שבו היא ליניארית, נחלק אותו לארבעה חלקים שווים ונגדיר את f_2 באופן הבא:

$$f_2=\begin{cases}(4t,\ 4t) & 0\le t<\frac{1}{8}\\ (-4x+1,\ 4x) & \frac{1}{8}\le t<\frac{1}{4}\\ (4t-1,\ -4t+2) & \frac{1}{4}\le t<\frac{3}{8}\\ (4t-1,\quad 4t-1) & \frac{3}{8}\le t<\frac{1}{2}\\ (-4t+3,-4t+3) & \frac{1}{2}\le t<\frac{5}{8}\\ (4t-2,-4t+3) & \frac{5}{8}\le t<\frac{3}{4}\\ (-4t+4,\ 4t-3) & \frac{3}{4}\le t<\frac{7}{8}\\ (-4t+4,-4t+4) & \frac{7}{8}\le t\le 1\end{cases}$$



כל קובץ
בכיתותיו
למעט אח)

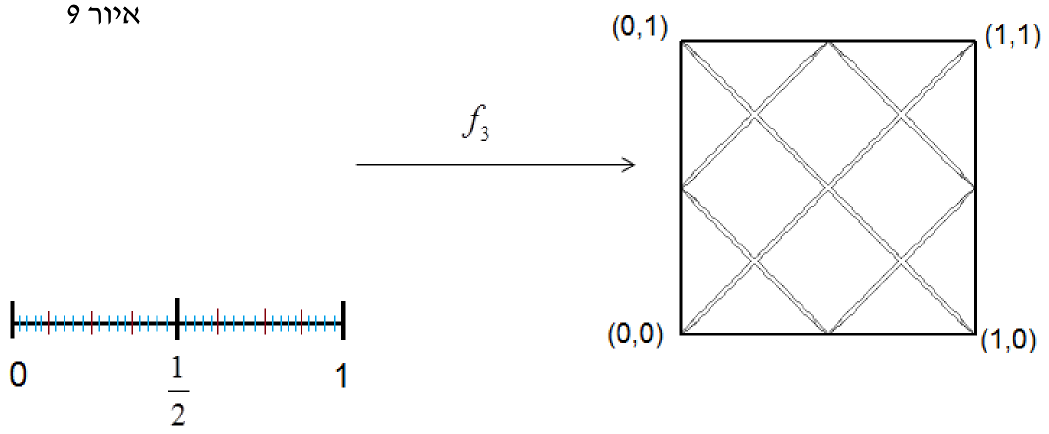
ק

איור 8

עבור $n=3$

נשים לב שהפונקציה f_2 היא רציפה וליניארית למקוטעין בשמונה קטעים שווים של I. לא נביא את ההגדרה המפורשת של f_3 כדי לא להעמיס על הקורא, אך בהמשך נגדיר את הסדרה בצורתה הכללית. כאן לצורך ההבהרה נביא דוגמא ויזואלית, של התמונה המתקבלת מהפעלת f_3.

איור 9



באופן כללי, עבור $1<n$

בשלב ה-n, התחום I מחולק ל- $k=2^{2(n-1)-1}$ קטעים שבהם הפונקציה f_{n-1} ליניארית למקוטעין.

נסמן ב- $a_0, a_1, \dots a_k \in I$ את הקצוות של הקטעים בהם f_{n-1} ליניארית.

נחלק כל קטע $[a_i, a_{i+1}]$ לארבעה קטעים שווים ונסמן אותם:

$$[b_{4i}, b_{4i+1}], [b_{4i+1}, b_{4i+2}], [b_{4i+2}, b_{4i+3}], [b_{4i+3}, b_{4i+4}]$$

נגדיר את f_n בצורה רקורסיבית. f_n פועלת על הקטעים הנ"ל

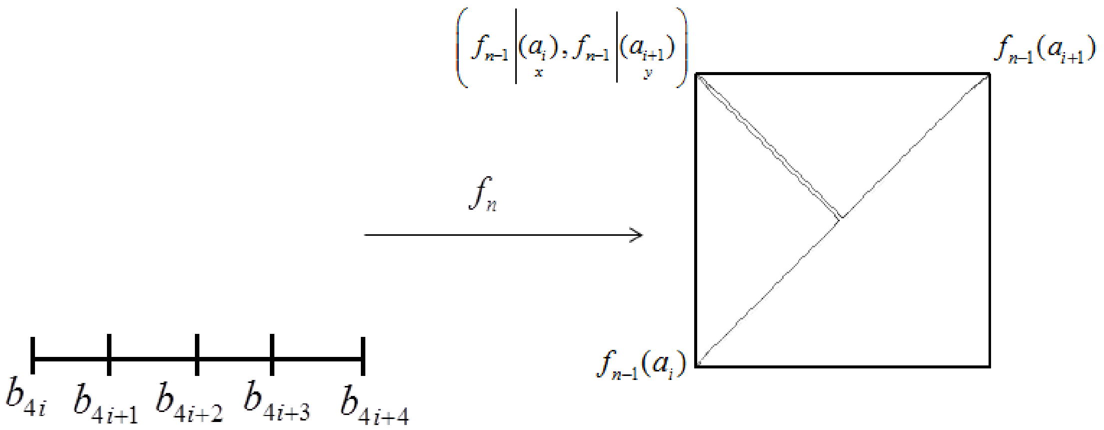
$$f_n\left[b_{4i},\ b_{4i+1}\right]=\left[\ f_{n-1}(a_i),\quad f_{n-1}(\frac{a_i+a_{i+1}}{2})\ \right]$$

$$f_n\left[b_{4i+1},b_{4i+2}\right]=\left[\ f_{n-1}(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}),\ \left(x_{f_{n-1}(a_i)},y_{f_{n-1}(a_{i+1})}\right)\right]$$

$$f_n\left[b_{4i+2},b_{4i+3}\right]=\left[\ \left(x_{f_{n-1}(a_i)},y_{f_{n-1}(a_{i+1})}\right),\ f_{n-1}(\frac{a_i+a_{i+1}}{2})\right]$$

$$f_n\left[b_{4i+3},b_{4i+4}\right]=\left[\ f_{n-1}(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}),\ \ f_{n-1}(a_{i+1})\ \right]$$

הפונקציה f_n הוגדרה באופן המתואר לעיל על מנת להבטיח כי בשלב ה-n, הפונקציה f_n תופעל על כל אחד מבין $2^{2(n-1)-1}$ הקטעים $I \supseteq [a_i, a_{i+1}]$ שבהם f_{n-1} ליניארית. באמצע כל קטע $f_{n-1}[a_i, a_{i+1}]$ פונקציה f_n "בונה" קטע חדש המאונך לו (ראה איור 9). אורכו של הקטע הנבנה ע"י f_n הוא חצי מאורכו של $f_{n-1}[a_i, a_{i+1}]$. קצה אחד של הקטע החדש המחובר ל- $f_{n-1}[a_i, a_{i+1}]$ הוא נקודת האמצע של הקטע הישן, כלומר $f_{n-1}\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)$ ושיעורי הקצה השני הם שיעור ה-x של $f_{n-1}(a_i)$ ושיעור ה-y של $f_{n-1}(a_{i+1})$.



איור 10

קל לראות כי כל איבר בסדרת הפונקציות הוא פונקציה מוגדרת היטב ורציפה וכי כל פונקציה היא איחוד של פונקציות ליניאריות. בנוסף, נקודות החיבור מוגדרות היטב: עבור חלוקה b_{ij} של הקטע I, הערך של הפונקציה f_n בקצה של $[b_{4i}, b_{4i+j}]$ שווה לערך של הפונקציה f_n בנקודת ההתחלה של $[b_{i+1}, b_{i+j+1}]$.

<u>שלב 2</u>

המטרה: להוכיח שלסדרת הפונקציות $\{f_n\}$ קיימת פונקציה גבולית f^* והיא רציפה.

ההוכחה מורכבת מ- 3 שלבי ביניים:

א. נוכיח כי- $C^0[0,1]$ מרחב מטרי שלם עם מטריקה $d_{\sup}$

ב. נוכיח שסדרת הפונקציות מקיימת את תנאי קושי אם ורק אם קיימת פונקציה גבולית כך שסדרת הפונקציות מתכנסת אליה במידה שווה.

ג. נוכיח שאם סדרת הפונקציות הרציפות מתכנסת במידה שווה לפונקציה גבולית, אז גם הפונקציה הגבולית היא רציפה.

סימון: $C^0[0,1]$ - קבוצה של פונקציות רציפות מהקטע I ל- □. מכיוון ש- I קומפקטי, הפונקציות חסומות (לפי משפט וייארשטראס).

$X \subset C^0[0,1]$ קבוצת פונקציות רציפות מ- I ל- S.

אנו יכולים להתבונן בנורמה $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I}|f(x)|$ ו- X הוא מרחב נורמי ביחס לנורמה $\|\cdot\|_\infty$

עבור X נורמה מגדירה מטריקה $d_{\sup}(f,g) = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$

<u>טענה 2.1</u>

$d_{\sup}$ - מטריקה

<u>הוכחה 2.1:</u>

יהיו $f,g,h \in X$

$$1)\ d_{\sup}(f,g) = \sup_{x\in I}|f(x)-g(x)| = 0 \Leftrightarrow \underset{x\in I}{f(x)=g(x)}$$

$$2)\ d_{\sup}(f,g) = \sup_{x\in I}|f(x)-g(x)| \underset{\substack{\downarrow \\ symetry\ of\ |\ |}}{=} \sup_{x\in I}|g(x)-f(x)| = d_{\sup}(f,g)$$

$$3)\ d_{\sup}(f,h)=\sup_{x\in I}\left|f(x)-h(x)\right|=\sup_{x\in I}\left|f(x)-g(x)+g(x)-h(x)\right|\le\leftarrow\quad \text{Triangle inequality}$$
$$\sup_{x\in I}\left|f(x)-g(x)\right|+\sup_{x\in I}\left|g(x)-h(x)\right|=d_{\sup}(f,g)+d_{\sup}(g,h)$$

משלושת התנאים הנ"ל נובע ש- $d_{\sup}$ היא מטריקה ולכן X הוא מרחב מטרי

כעת נרצה להוכיח שהמרחב הוא גם שלם, משמע שכל סדרת קושי מתכנסת. התכנסות במרחב הפונקציות היא במידה שווה.

<u>הגדרה 2.2</u> תהי $\{f_n\}$ סדרת הפונקציות $f_n : I\to S$

נאמר כי $\{f_n\}$ **מתכנסת במידה שווה** לפונקציה $f^*: I\to S$ בקטע $[0,1]$ אם מתקיים:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}\ \ \forall n\in\mathbb{N}\quad n>N\Rightarrow d_{\sup}(f,f^*)<\varepsilon$$

<u>הגדרה 2.3</u> נתונה סדרת פונקציות $\{f_n\}$ בקטע I

נאמר שהסדרה מקיימת את **תנאי קושי במידה שווה** ב I - אם מתקיים:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}\ \ \forall n,m\in\mathbb{N}\quad n>N\wedge m>M\Rightarrow\ d_{\sup}(f_n,f_m)<\varepsilon$$

<u>משפט 2.2</u> סדרה של פונקציות $\{f_n\}$ מקיימת תנאי קושי במ"ש בקטע I אם ורק אם קיימת פונקציה גבולית f^* כך ש $\{f_n\}$ מתכנסת ל- f^* במידה שווה.

<u>הוכחה 2.2:</u>

כיוון אחד: נניח כי קיימת f^* כזו ויהי $\varepsilon>0$.

לפי ההנחה מתקיים $(\exists N\in\mathbb{N})\ (\forall n\in\mathbb{N})\left(n>N\Rightarrow d_{\sup}\left(f_n,f^*\right)<\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$.

יהיו $N<m,n$ ו- $x\in I$, אזי

$$d_{\sup}(f_n,f_m)\le d_{\sup}\left(f_n,f^*\right)+d_{\sup}\left(f^*,f_m\right)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

כיוון שני: נניח שקריטריון קושי מתקיים.

נשים לב שלכל $x \in I$, $f_n(x)$ הנה סדרת קושי ב- $\mathbb{R}$ ולכן סדרה מתכנסת. על-כן נוכל להגדיר $f^*(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ עבור $x \in I$, ולכן צ"ל $f_n \to f^*$ במ"ש.

בהינתן $\varepsilon > 0$ יהי $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. לפי הנחת קריטריון קושי, עבור $0 < \varepsilon'$ קיים $n \in \mathbb{N}$ אשר מבטיח

$$(*) \quad (\forall n,m \in \mathbb{N})\left(n,m > N \Rightarrow d_{\sup}(f_n, f_m) < \varepsilon'\right)$$

נקבע את n במקום, נעבור לגבול כאשר $m \to \infty$ ב-(*) ונקבל $(\forall n > N)\ d_{\sup}(f_n, f^*) \le \varepsilon' < \varepsilon$

<u>**משפט 2.3**</u> אם $\{f_n\}$ סדרת הפונקציות רציפות מתכנסת ל- f^* במידה שווה בקטע I אז f^* רציפה בקטע I

<u>הוכחה 2.3:</u>

הרעיון: פונקציה רציפה אם היא רציפה בכל נקודה. בגלל ההתכנסות במ"ש נוכל למצוא n מספיק גדול כך ש- $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$.

תהי $x \in I$ ונראה ש-f^* רציפה ב- x, יהי $\varepsilon > 0$.

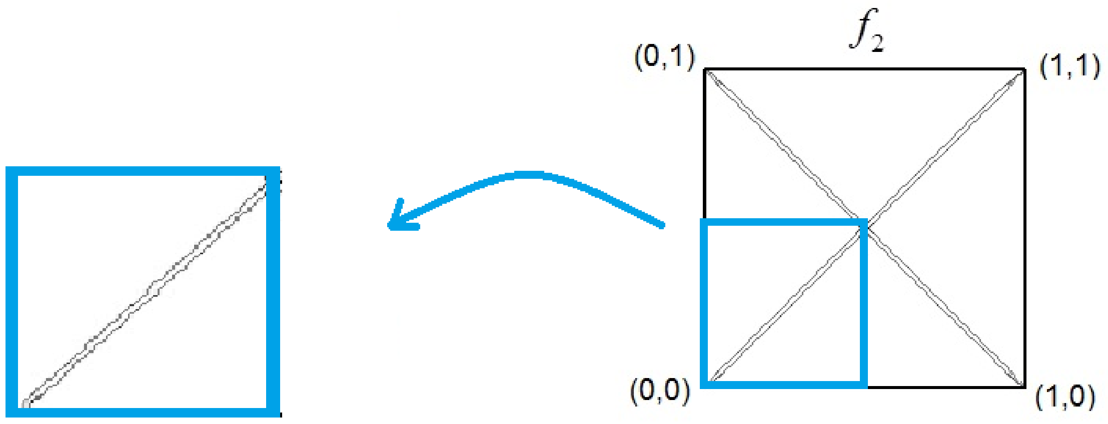
1. לפי התכנסות במ"ש ב- I של סדרה $\{f_n\}$, נבחר $n \in \mathbb{N}$ אשר מבטיח
   $f_n(y) - f^*(y) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ לכל $y \in I$.
2. f_n רציפה ב- I, על כן עבור אותו $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ אשר מבטיח ש-
   $(\forall y \in I)\left(|y-x| < \delta \Rightarrow |f_n(y) - f_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}\right)$ וזהו ה-$\delta > 0$ הרצוי

$$(\forall y \in I)\ (|y-x| < \delta) \Rightarrow |f^*(y) - f^*(x)| \le$$
$$\le |f^*(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f^*(x)| = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ובכך f^* רציפה ב- I.

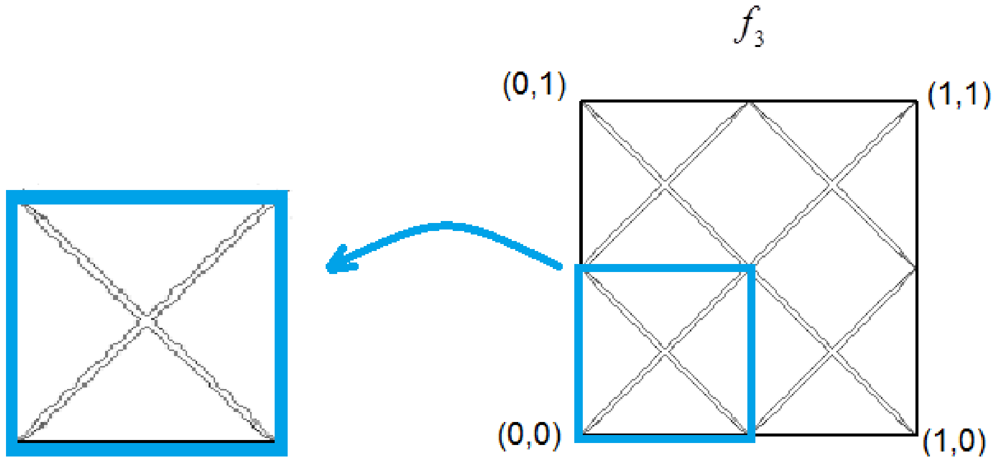
כעת נחזור לסדרת הפונקציות שלנו ונוכיח שהיא מקיימת את תנאי קושי

ראשית נפתח באינטואיציה. כשנתבונן בגרף הדו ממדי f_n של פונקציה, נראה עקום המורכב מקטעים ליניאריים. נבחר קטע ליניארי כלשהו ונצטמצם לריבוע שבו הקטע הוא האלכסון, לפי הדוגמה המתוארת באיור 11.



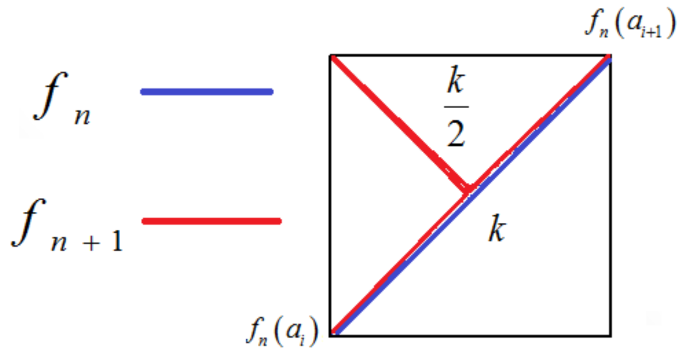
איור 11

כעת נתבונן באותו ריבוע קטן מתוך ריבוע היחידה רק בגרף של f_{n+1} , לפי דוגמה באיור 12.



איור 12

נצליב את שתי התמונות ונתמקד למען הפשטות רק בחצי מהריבוע. נצבע בכחול את גרף הפונקציה f_n ובאדום את הגרף של f_{n+1} . נתבונן בתמונה המתקבלת באיור 13.



איור 13

לפי אופן בניית הפונקציה, בשלב ה- n, אורך כל קטע ליניארי $\left[f_n(a_i), f_n(a_{i+1}) \right]$ הוא $k = \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}$

ובשלב ה- $n+1$ אורך כל קטע ליניארי ארוך יותר הוא $\frac{k}{2}$. לפי משפט פיתגורס נקבל

$$d_{\sup}\left(f_n, f_{n+1} \right) \le \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \frac{k^2}{4}} = \sqrt{\frac{k^2}{2}} = \frac{k}{\sqrt{2}} \Rightarrow d_{\sup}\left(f_n, f_{n+1} \right) \le \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

ככל שנתקדם בסדרה $\left\{ f_n \right\}$, המרחק בין הפונקציות קטן מעריכית, לכן הן מקיימות את תנאי קושי.

לאחר הבנת המשמעות האינטואיטיבית, נעבור להוכחה הפורמלית. ניקח ערך ε חיובי כלשהו, עבורו נמצא מספר טבעי N כך שכל הפונקציות שמספרם הסידורי גדול מ- N יהיו קרובות אחת לשנייה עד כדי ε.

יהי $\varepsilon > 0$ נבחר $N = \log_2 \frac{1}{\varepsilon} + 1$ אז עבור כל $N < m, n$ (בה״כ נניח ש $m = n + r$) מתקיים

$$d_{\sup}\left(f_n, f_m \right) = \sup_{x \in I} \left| f_n(x) - f_m(x) \right| \le \sup_{x \in I} \left| f_n(x) - f_{n+1}(x) \right| + \ldots + \sup_{x \in I} \left| f_{n+r-1}(x) - f_m(x) \right| \le$$

$$\le \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+r-2}}}_{r} \le \underbrace{\frac{1}{2^N} + \ldots + \frac{1}{2^{N+r-1}}}_{r} = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{2^{N+i}} \underset{\text{Sum of geometric progression}}{\Big\downarrow{=}} \frac{\frac{1}{2^N}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^r - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2^N}\left(\frac{1}{2^r} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{2}{2^N 2^r} + \frac{2}{2^N} = \frac{1}{2^{N-1}}\left(1 - \frac{1}{2^r}\right) < \frac{1}{2^{N-1}} \underset{N = \log_2 \frac{1}{\varepsilon} + 1}{\Big\downarrow{=}} \frac{1}{2^{\log_2 \frac{1}{\varepsilon} + 1 - 1}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

מכאן נובע שהסדרה $\{ f_n \}$ מקיימת את תנאי קושי במידה שווה במרחב מטרי X. לפי משפט 2.2 לעיל, קיימת פונקציה $f^* \in X$ שהיא הגבול של $\{ f_n \}$. בשלב 2 הוכחנו ש- $\{ f_n \}$ סדרת פונקציות רציפות וממשפט 3.3 נובע ש- f^* רציפה.

<u>שלב 3</u>

המטרה: להראות שפונקציה הגבולית f^* היא <u>על</u>. נעשה את זה בשלושה צעדים

סימון: L שריג ב $S -$ עם קואורדינטות רציונליות דיאדיות[13]

א. נראה שכל אחת מהפונקציות f_n עוברת דרך כל הנקודות עם שיעורים רציונליים דיאדיים, בהן המכנה אינו גדול מ- 2^n.

ב. נראה שהפונקציה הגבולית f^* עוברת דרך כל הנקודות שדרכן עוברות כל פונקציות מהסדרה- $\{f_n\}$

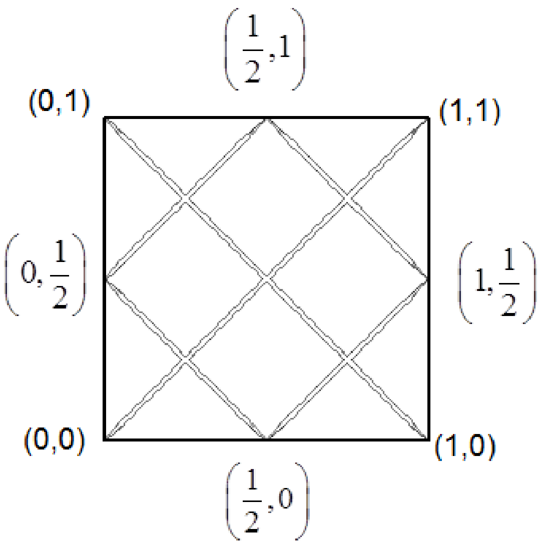
ג. נוכיח ש- f^* עוברת דרך כל הנקודות שלא נמצאות ב- L.

<u>**טענה 3.1**</u> לכל $n \in \mathbb{N}$, הפונקציה f_{n+2} עוברת דרך כל נקודות השריג L שהמכנה של שיעוריהן לא יותר גדול מ- 2^n.

<u>הוכחה 3.1:</u>

עבור $n=1$, הפונקציה f_3 עוברת דרך נקודות ב- L עם קואורדינטות שהמכנה שלהן לא יותר גדול מ- $2^1 = 2$.

אלה הנקודות שקואורדינטות שלהן הם קומבינציות שונות של המספרים 0, 1 ו-2.



איור 13

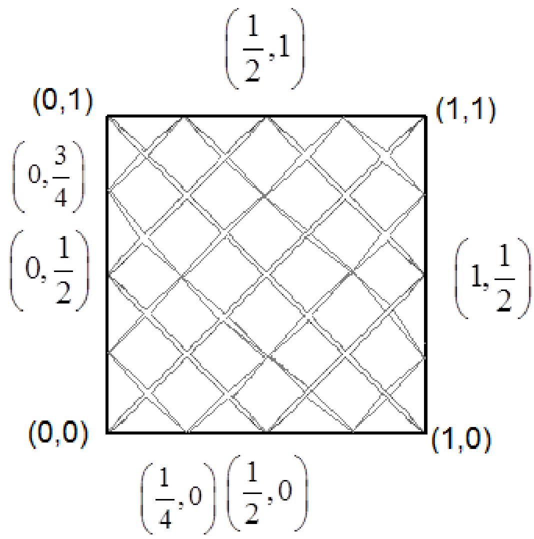
---

[13] רציונליים דיאדיים – רציונליים עם מכנה זוגי

עבור $n=2$ פונקציה f_4 עוברת דרך נקודות עם קואורדינטות שמכנה שלהן לא יותר גדול מ- $2^2=4$.

ז״א קואורדינטות של הנקודות מורכבות מקומבינציות שונות של המספרים 0, 1, 2 ו – 3 (במכנה רק חזקות של 2)

f_4



איור 14

עבור $2<n$

כל פונקציה f_n עוברת את כל הנקודות של S שבהן עברה f_{n-1} וגם עוברת בנקודות נוספות שקואורדינטות שלהם הן רציונליים דיאדיים עם מכנה ששווה ל- 2^n. קואורדינטות שמורכבות מהמספרים קטנים מ- 2^n ובמכנה רק חזקות של שתיים הקטנות מ- 2^n.

<u>טענה 3.2</u>

הפונקציה הגבולית f^* עוברת דרך כל הנקודות L (השריג) שהן $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m<2^n}\frac{m}{2^n}\right)\times\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m<2^n}\frac{m}{2^n}\right)$

<u>הוכחה 3.2 :</u> תהי $r\in L$ אפשר להציגה כ- $\left(\frac{m}{2^n},\frac{w}{2^v}\right)$ כש- L הוא השריג, $m,n,v,w\in\mathbb{N}$ וכמובן $m<2^n,\ w<2^v$. נניח בה"כ $n>v$. לכן לפי טענה 3.1 קיימת פונקציה f_{n+2} שעוברת דרך כל הקואורדינטות של L שהמכנה שלהן לא יותר גדול מ- 2^n. מכיוון ש- f^* היא פונקציה גבולית היא גם עוברת דרך הנקודות שדרכן עוברת f_{n+2}.

מכיוון שהטענה נכונה עבור כל $r\in L$, f^* עוברת דרך כל נקודות השריג L שהן $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m<2^n}\frac{m}{2^n}\right)\times\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m<2^n}\frac{m}{2^n}\right)$

<u>טענה 3.3</u>

L צפוף ב- S

<u>הוכחה 3.3 :</u> צריך להוכיח $\forall q\in S\ \ \exists r\in L:\ \forall\varepsilon>0\quad |r-q|<\varepsilon$

יהי $q\in Q$, ו- $\varepsilon>0$ נבחר $m=\left\lfloor\log_2\frac{1}{q-\varepsilon}\right\rfloor+1$ ו- $r=\frac{1}{2^m}$ בהתאמה אז נקבל

$$\left|q-\frac{1}{2^m}\right|=\left|q-\frac{1}{2^{\log_2\frac{1}{q-\varepsilon}}}\right|<\left|q-\frac{1}{2^{\log_2\frac{1}{q-\varepsilon}}}\right|=\left|q-\frac{1}{\frac{1}{q-\varepsilon}}\right|=\left|\frac{\frac{q}{q-\varepsilon}-1}{\frac{1}{q-\varepsilon}}\right|=\left|\left(\frac{q}{q-\varepsilon}-1\right)\cdot\frac{q-\varepsilon}{1}\right|=|q-q-\varepsilon|=\varepsilon$$

מכאן נובע שלכל איבר ב- S אפשר למצוא בכל סביבה של ε איבר מ- L, ולכן L צפוף ב- S.

<u>טענה 3.4</u>

פונקציה גבולית f^* היא <u>על</u> S (משמע, עוברת דרך כל הנקודות בריבוע היחידה S שדרך כל נקודה שלו צריכה לעבור הפונקציה הגבולית)

<u>הוכחה 3.4 :</u>

יהי $a \in S$, לפי טענה 3.3 L צפוף ב- S ולכן אפשר למצוא סדרה $\{r_n\} \in L$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} r_n = a$

לפי טענה 3.2 לכל r_i קיים $x_i \in I$ כך ש- $f^*(x_i) = r_i$.

מכיוון ש- I תחום קומפקטי קיימת ל- $\{x_n\}$ תת- סדרה מתכנסת $\{x_{n_k}\} \to \tau$.

מכיוון ש f^* רציפה אם $\{x_{n_k}\} \to \tau$ ו- $\{r_{n_k}\} \to a$ אז מתקיים $f(\tau) = a$.

ובכך הוכחנו ש- f^* היא על S.

לסיכום הוכחנו בעזרת שלושת השלבים לעיל שקיימת פונקציה רציפה מקטע סגור ב- $\mathbb{R}$ העוברת דרך כל נקודות הריבוע והיא f^* .

תכונות מיוחדות של עקום פיאנו:

- עקום פיאנו הוא פונקציה רציפה מ- $\mathbb{R}$ <u>על</u> ריבוע ב- $\mathbb{R}^2$
- הפונקציה אינה גזירה באף נקודה
- האורך של הפונקציה אינסופי למרות שלכל אחת מהפונקציות בסדרה האורך היה סופי
- לעקום שטח אפסי אך הוא ממלא ריבוע בעל שטח 1
- הפונקציה היא לא חח״ע

קיומן של התכונות לעיל (למעט האחרונה) נובע מהגדרתו של עקום פיאנו. ברור מאליו שהמסילה- כפי שהגדרנו אותה- עוברת דרך נקודות מסוימות יותר מפעם אחת. השאלות הנותרות הן- האם קיימת פונקציה רציפה שתקיים את כל התנאים לעילומה נותן קיומה?

הזכרנו בפרק הקודם שקיום פונקציה זו אפשר לפיאנו להוכיח שלפי הגדרת ז׳ורדן, גם ריבוע הוא עקום. לעומת זאת, לפי ההגדרה המודרנית, עקום חייב להיות מקומית הומאומורפי לישר, דהיינו יש דרישה ששטח העקום יהיה אפסי. לפיכך, ישר וריבוע אינם הומאומורפים, כי אם נוציא נקודה פנימית

מהישר הוא נהיה לא קשיר[14], בעוד ריבוע נשאר קשיר אם נוציא נקודה פנימית. במילים אחרות לא קיימת פונקציה רציפה עם תכונות פיאנו – הריבוע הוא לא עקום.

סיכום

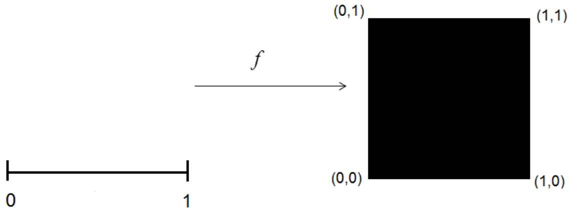
במשך מאות שנים עשו מתמטיקאים שימוש בעקומים ופתרו בעיות בפונקציות מבלי להגדיר שני מושגים אלה ובלי לקרוא לפונקציה בשמה. רק במאה ה-19, המתמטיקאי דיריכלה טבע את ההגדרה המודרנית לפונקציה, אותה לומדים תלמידים בחטיבת הביניים: *"פונקציה היא כלל התאמה בין שתי קבוצות, המתאימה לכל איבר בקבוצה אחת (המכונה 'תחום') איבר יחיד בקבוצה אחרת (המכונה 'טווח')"*. ההגדרה המודרנית של עקום כוללת בתוכה את מושג הפונקציה: *'עקום הוא מרחב טופולוגי מקומית הומאומורפי לישר, כשניתן להגדירה ע"י פונקציה שתחומה הוא קטע של מספרים ממשים והטווח שלה הוא מרחב טופולוגי כלשהו"*.

מרגע שהגדיר דיריכלה את מושג הפונקציה בנפרד מביטוי אנליטי, התחילו מתמטיקאים לחקור פונקציות עם תכונות בלתי צפויות שאי אפשר להגדירן בעזרת פונקציות אלמנטריות או לשרטט גרף שלהן. "מפלצות" אלה היו שונות מהתפישה הקלאסית של מושג הפונקציה ולכן כונו "פונקציות אקזוטיות". בנוסף, כפי שראינו בעבודה זו, עקומים אקזוטיים הם פונקציות אקזוטיות.

בעבודה ראינו כמה דוגמאות של פונקציות אקזוטיות. סקרנו את פונקציית דיריכלה שאינה רציפה באף נקודה ואי אפשר לשרטט את גרף שלה במדויק. בנוסף, הגדרנו פונקציה רציפה המקבלת אינסוף נקודות מינימום ומקסימום בקטע סגור ופונקציה רציפה שלא גזירה באף נקודה.

אחרי שהתנסינו בבניית פונקציות אקזוטיות, הגדרנו שיטה לבניית פונקציות שנקראת 'שיטת צבירת התכונות'. בשיטה זו מתחילים בפונקציה פשוטה ומעדכנים אותה בהדרגה על ידי הוספת תכונות רצויות, תוך שמירת כל התכונות הקיימות.

דוגמה מרכזית היא עקום פיאנו, הממלא משטח דו ממדי. אי אפשר להגדירו כביטוי אנליטי ואם נרצה לשרטט את הגרף שלו אז נקבל את התמונה המפורסמת של קזימיר מלביץ[15].



[14] קבוצר שתי תת קבוצות פתוחות ולא ריקות (שלה).

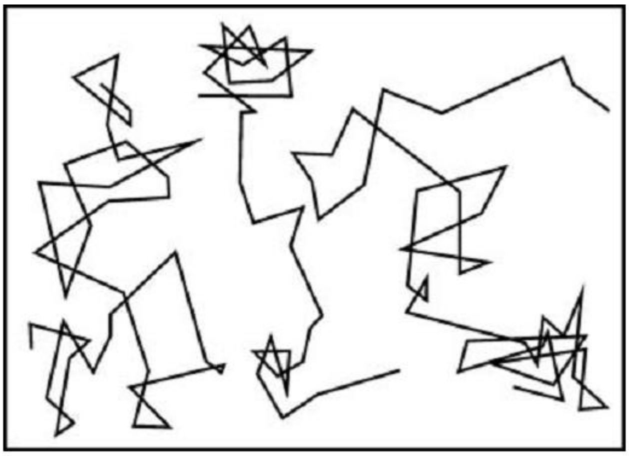
[15] **קזימיר סברינוביץ** 2 בספטמבר 1878- 15 במאי 1935) צייר ומעצב אוקראיני שצ

כדי להוכיח את קיומו של עקום פיאנו, בנינו סדרה של פונקציות רציפות ליניאריות למקוטעין. הוכחנו שסדרה זו מקיימת תנאי קושי במרחב של פונקציות רציפות חסומות ולכן קיימת פונקציית גבול רציפה. כדי להוכיח שפונקציית הגבול היא 'על' השתמשנו בתכונה של צפיפות הרציונליים הדיאדיים[16] ב- $[0,1]\times[0,1]$ וברציפותה של פונקציית הגבול.

התכונות הלא צפויות של עקום פיאנו הן קיומו וחוסר האפשרות לבניית פונקציה דומה שתהיה חח"ע.

שימושי הפונקציות האקזוטיות

מודלים המתאימים לתופעות פיזיקאליות נוטים לרוב להיות מתוארים על ידי פונקציות אקזוטיות ולא על ידי פונקציה אלמנטרית . לדוגמא, המדען הצרפתי פרן[17] עקב אחרי התנהגותם של חלקיקים זעירים שמבצעים תנועה בראונית[18]. במשך התצפית, הוא סימן מדי חצי דקה את מיקום החלקיקים. התמונה שהתקבלה בסוף התצפית הייתה דומה לזו שבאיור 16 להלן:



איור 16

תנועתם של החלקיקים מתוארת על ידי עקומים עם נקודות שבירה רבות, אך הקטעים שנראים כקו ישר באיור אינם ישרים במציאות. אם פרן היה מקטין מרווחי הדגימה מחצי דקה לחצי שניה, ניתן היה לראות שקטעים ישרים אלו היו הופכים לעקומים שבורים.

[16] רציונליים דיאדיים – מספרים רציונליים עם מכנה שהוא חזקה של 2.

[17] פרנסיס פרן (בצרפתית:Francis Perrin ; 17 באוגוסט 1901- 4 ביולי 1992) היה פיזיקאי צרפתי שבעסק בפיזיקה מולקולרית .

[18] **תנועה בראונית**- התופעה הפיזיקלית שבה חלקיקים זעירים, שקועים בנוזל או צפים על פניו, נעים באקראיות

המתמטיקאי האמריקאי וינר[19] הראה שתנועתו של חלקיק זעיר, שאפשר להזניח את המסה שלו, היא מסילה שאין באף נקודה שלה משיק.[**Error! Reference 10Error! Reference source not found.**]**source not found.**

בזמן העבודה על הפרויקט נחשפתי לספרות רבה במתמטיקה ובהיסטוריה של המתמטיקה. אני חשה שיישמתי את הידע התיאורטי שצברתי במשך שש שנות לימוד באקדמיה והבנתי מדוע צריך היה ללמוד משפטים מתמטיים בעל פה. אני חושבת שהפונקציות המכונות בעבודה זו "אקזוטיות" עונות על ההגדרה הפורמלית ושכינוי זה הינו דעה סובייקטיבית של מתמטיקאים בני המאה ה-19. גם אם קשה לחקור אותן, אנחנו יודעים את התכונות המיוחדות שלהן. בנוסף, בימינו ניתן להיעזר בתוכנות מחשב שממחישות את הבניה של פונקציות אלו באמצעות שיטה של צבירת התכונות. כדאי לחשוף את קיומן של פונקציות אלו כבר בזמן הלימודים בתיכון. אני מאמינה שהמתמטיקאים שיגדלו על הפונקציות האלה כבר לא יתייחסו אליהן כאל אקזוטיות.

[19] **נורברט וינר** (באנגלית: Norbert Wiener; 26 בנובמבר 1891- 18 במרץ 1964) היה מתמטיקאי אמריקאי יהודי, הידוע בעיקר כמייסד הקיברנטיקה

ביבליוגרפיה

.1	אוקלידס, יסודות. גרסה דיגיטלית של הספר נמצאת ב- http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/bookI.html
.2	ישראל קליינר, אוניברסיטת יורק, קנדה; תרגום מאנגלית: מאיר קשי ונצה מובשוביץ-הדר. התפתחות מושג הפונקציה: סקר קצר, חלק א'. על"ה 12, אדר תשנ"ג, 1993, עמודים 28-34.
.3	Descartes, *R.* The Geometry, *Open Court*, LaSalle. IL,(1952).
.4	Kleiner,I. (1989). 'Evolution of the Function concept: A Brief Survey'. *College Mathematics Journal*,20(4)
.5	Kronfellner, M. (1996) 'The History of the Concept of Function and Some Implications for Classroom Teaching', in R.Calinger (ed.) *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching.* Washington: MAA 317-320
.6	O'Connor, J. J. and Robertson, E. F. 'History topic: The function concept'. *MacTutor History of Mathematics*. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PrintHT/Functions.html
.7	Safuanov, Ildar S., 'The history of the teaching of the concept of a function in Russia'. Moscow Technical University of Automobile and Road Industry (MADI). http://tsg.icme11.org/document/get/780
.8	Verbitsky, M. "Topology for first-year students", 370 pp, to appear in *Independent University of Moscow Press*, (in Russian), http://verbit.ru/MATH/UCHEBNIK/top-book.pdf
.9	Yushkevich, A.P., ed. (1970). *History of Mathematics from ancient times to the beginning of 20- century in 3 volumes*, v. 2. M.: Nauka (in Russian)
.10	Виленкин Н. Я. *Рассказы о множествах*. М.: Наука, (1969). 3-е издание, МЦМНО, (2005)