

מכון ויצמן למדע
תוכנית ויצמן רוטשילד

קירוב פונקציות רציפות על ידי פולינומים

צבי אלגביש
ת.ז. 53313599

מנחה : פרופסור אדריס ס. תיתי

רחובות חשוון תשע"ג
אוקטובר 2012

תוכן העניינים

מבוא	3
פרק I : קירוב פונקציות על ידי פולינומי טיילור מסדר n	4
פרק II : פולינום האינטרפולציה של לגרנז' (<i>Lagrange Interpolation</i>)	8
פרק III: הפולינומים של ברנשטיין (<i>Bernstein Polynoms</i>)	18
פרק IV : טור פורייה (<i>Fourier</i>)	25
פרק V : הוכחת המשפט של ויירשטראס בעזרת אנליזת פורייה	28
סיכום	33
ביבליוגרפיה	34

מבוא

פעולות החיבור והכפל הן פעולות פשוטות הניתנות לחישוב ולכן פונקציות הפולינום הן הפונקציות הפשוטות ביותר שניתן לחשב כל ערך עבורן. בהקשר זה ראוי לציין כי העבודה עם פונקציות הפולינום הרבה יותר טבעית למחשב שכן פעולות החיבור החיסור והכפל הן פעולות טבעיות למחשב.

בעבודה זו אנסה לענות על שתי השאלות הבאות:

א. האם קיימת אפשרות לקרב פונקציה רציפה כלשהי במידה שווה על קטע סגור וחסום על ידי פולינום? ואם כן, תחת איזה תנאים?

ב. האם קיימת שיטה מעשית לקירוב הפונקציה במידה שווה על ידי פולינום?

הפרק הראשון עוסק בקירוב פונקציה על ידי פולינומי טיילור שלה (*Brook Taylor 1685-1731*).

לפונקציה קיימים פולינומי טיילור מדרגה n בנקודה מסוימת אם ורק אם היא גזירה n פעמים בנקודה. מסתבר שהיות הפונקציה גזירה אין סוף פעמים עדין לא מבטיח שפולינומי טיילור שלה יקרבו אותה במידה שווה על קטע סביב הנקודה למרות שהסביבה קטנה ביותר.

הפרק השני עוסק בקירוב פונקציה בקטע מסוים על ידי פולינומי האינטרפולציה של לגרנז' (*Joseph Louis Lagrange 1736-1813*), שהוא פולינום מדרגה n אשר זהה לערכי

הפונקציה ב- n נקודות על הגרף שלה. מסתבר שגם פולינומי האינטרפולציה של לגרנז' אינם מהווים משפחה שבעזרתה ניתן לקרב את הפונקציה במידה שווה בקטע סגור וחסום, למרות שפולינומי האינטרפולציה של לגרנז' נראים הכי טובים למטרה זו.

למרות זאת קובע קארל ויירשטראס-מתמטיקאי גרמני (*Karl Weierstrass 1815-1897*) – כי כל פונקציה רציפה בקטע סגור וחסום ב- P ניתנת לקירוב במידה שווה על ידי פולינום.

משפט ויירשטראס

אם: $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה אז: לכל $0 < \varepsilon$ נתון, קיים פולינום $p_\varepsilon(x)$ כך ש

$$|f(x) - p_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon \quad \text{לכל } x \text{ ב-} [a,b].$$

המשפט של ויירשטראס אינו אומר מהי השיטה הקונסטרוקטיבית שבה ניתן לקרב במידה שווה כל פונקציה רציפה על ידי פולינום, הוא רק קובע שקיים פולינום כזה. בחיבור זה אציג שתי גישות להוכחת משפט הקירוב של ויירשטראס, שאף אחת מהן אינה ההוכחה המקורית של ויירשטראס. גישה אחת מבוססת על הפולינומים של ברנשטיין (*S.N. Bernstein 1880-1968*) וגישה אחרת על ידי טורי פוריה.

הפרק השלישי עוסק בפולינומים של ברנשטיין שפורסמו ב-1912 והוכחת משפט ויירשטראס בעזרת פולינומי ברנשטיין.

הפרק הרביעי עוסק באנליזת פורייה ובטורי פוריה (*Jean Baptiste Joseph Fourier 1768-1820*)

וברעיון של פייר (*Lipot Fejer 1880-1959*).

בפרק החמישי – ניתן שתי הוכחות למשפט של ויירשטראס המסתמכות על טורי פורייה.

פרק I : קירוב פונקציות על ידי פולינומי טיילור

מסדר n

פולינומי טיילור הם פולינומים שפיתח המתמטיקאי האנגלי (Brook Taylor 1685-1731). תנאי הכרחי ומספיק לקיום פולינומי טיילור מכל סדר עבור פונקציה בנקודת פיתוח מסוימת הוא שהפונקציה תהיה גזירה אין סוף פעמים באותה הנקודה. בפרק זה ניתן דוגמא של פונקציה שאי אפשר לקרב אותה במידה שווה סביב נקודה מסוימת ע"י טור טיילור.

הגדרה: נתונה סדרת פונקציות $(f_k(x))_{k=1}^{\infty}$ המוגדרות על קטע $[a,b]$. נאמר שהסדרה

$(f_k(x))_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת לפונקציה f במידה שווה בקטע $[a,b]$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$

התלוי ב- ε כך שלכל $x \in [a,b]$ ולכל $k > N$ מתקיים $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$.

הגדרה¹: טור טיילור של פונקציה ממשית f במשתנה יחיד, הגזירה אינסוף פעמים בנקודה $x=x_0$, הוא טור החזקות:

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

$$f^{(0)}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^0}{0!} = f(x_0) \quad \rightarrow \quad n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(x_0) = \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_0} \quad \text{כאשר:}$$

שאלת השאלה: האם פולינומי טיילור מהווים משפחה שבעזרתה ניתן לקרב פונקציה במידה שווה בקטע נתון מראש סביב נקודת הפיתוח? בדוגמא הבאה נראה שזה לא תמיד אפשרי.

טענה 1.1: תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

אזי f גזירה אין סוף פעמים ב- $x = 0$ (בעצם על כל הישר) וסדרת פולינומי טיילור שלה מכל סדר לא מהווה משפחה שבעזרתה אפשר לקרב את f במידה שווה באף קטע סביב 0.

הוכחה:

שלב א. נוכיח באינדוקציה על $r \in \mathbb{N}$ ש- f גזירה r פעמים בתחום $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ומתקיים:

$$f^{(r)}(x) = Q_r\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{כאשר } Q_r(t) \text{ הוא פולינום במשתנה } t.$$

1. Rudin, Walter (1980) : Real and Complex Analiss , New Dehli , Mc Graw Hill

יהי $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ כלשהו .

בסיס האינדוקציה :

עבור $r=0$ מתקיים: $Q_0(t) \equiv 1$ כאשר $f^{(0)}(x) = f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} = 1 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = Q_0\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$

הנחת האינדוקציה :

יהי $0 \leq k$ שלם ונניח f גזירה k פעמים וקיים פולינום $Q_k(t)$ כך שלכל $x \neq 0$ מתקיים

$$f^{(k)}(x) = Q_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

צעד האינדוקציה :

נוכיח ש- f גזירה $k+1$ פעמים ב- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ולכל $x \neq 0$ מתקיים

$$f^{(k+1)}(x) = Q_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

הוכחה :

הפונקציות f ו- $Q_k\left(\frac{1}{x}\right)$ גזירות ב- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ כהרכבה של פונקציות גזירות ולכן $Q_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f(x)$

גזירה ב- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ כמכפלה של פונקציות גזירות, ולכן מתקיים :

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(Q_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = \left(Q_k\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + Q_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' \\ &= -\frac{1}{x^2} \cdot Q_k'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3} \cdot Q_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

נוציא גורם משותף ונקבל :

$$f^{(k+1)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2} \cdot Q_k'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} \cdot Q_k\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

נסמן : $-t^2 \cdot Q_k'(t) + 2t^3 \cdot Q_k(t) = Q_{k+1}(t)$. הוא פולינום כי הוא סכום של

מכפלות של פולינומים . בסיכום $Q_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) = \left(-\frac{1}{x^2} \cdot Q_k'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} \cdot Q_k\left(\frac{1}{x}\right) \right)$ ולכן

$$f^{(k+1)}(x) = Q_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

שלב ב'. נוכיח באינדוקציה ש- f גזירה אין סוף פעמים בנקודה $x=0$ ולכל r שלם ו- $0 \leq r$

$$f^{(r)}(0) = 0 \quad \text{מתקיים} :$$

בסיס האינדוקציה:

$$f^{(0)}(0) = f(0) = 0 \quad \text{מתקיים} \quad r = 0 \quad \text{כאשר}$$

הנחת האינדוקציה:

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \text{יהי } 0 \leq k \text{ שלם ונניח ש-}$$

צעד האינדוקציה:

$$f^{(k+1)}(0) = 0 \quad \text{נוכיח ש-}$$

הוכחה:

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} \quad \text{לפי הנחת האינדוקציה} \quad f^{(k)}(0) = 0$$

$$\text{משלב א' } f^{(k)}(x) = Q_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{כאשר } x \neq 0$$

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Q_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot Q_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{נציב ונקבל} :$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^m}{e^{t^2}} = 0 \quad \text{בהינתן } m \text{ טבעי הפעלה חוזרת של כלל לופיטל } 1 + \left[\frac{m}{2} \right] \text{ פעמים מראה ש-}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^m}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0 \quad \text{ולכן} \quad \text{מכאן גם נובע שלכל פולינום } p \text{ מתקיים} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(t)}{e^{t^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0 \quad \text{ולכן} \quad \text{ועל כן} \quad f^{(k+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot Q_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$$

שלב ג'. מ- $f^{(r)}(0) = 0$ לכל $0 \leq r$ שלם נובע ש-טור טיילור של $f(x)$ סביב 0 הוא אפס

זהותית, בפרט כל פולינומי טיילור של f סביב 0 הם אפס. בהינתן קטע $[-h, h]$ סביב אפס

($0 < h$ כלשהו) ופולינום טיילור p של f סביב 0 מתקיים:

$$\max_{x \in [-h, h]} |f(x) - p(x)| = \max_{x \in [-h, h]} |f(x) - 0| = \max_{x \in [-h, h]} f(x) = f(h) = e^{-\frac{1}{h^2}}$$

ולכן אם נבחר ε מספיק קטן כך ש- $0 < \varepsilon < e^{-\frac{1}{h^2}}$ לא קיים אף פולינום טיילור p של f סביב 0 עבורו $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ לכל x ב- $[-h, h]$.

■

פרק II : פולינום האינטרפולציה של לגרנזי

(Lagrange Interpolation polynomial)

אינטרפולציה (*interpolation*) היא שם כולל לשיטת קירוב בתחום האנליזה הנומרית. הרעיון המרכזי העומד מאחורי גישה זו היא האפשרות לייצר מידע חדש מאוסף נתונים סופי. נדמה לעצמנו מקרה של פונקציה רציפה שנעלמה מעולמנו אך נותרו מספר נקודות שהיו על גרף הפונקציה וכעת אנחנו מנסים לשחזר את הפונקציה או ליצור קירוב של פונקציה זו, או במקרה שידועים לנו מספר סופי של תוצאות בניסוי כל שהוא. מטרת האינטרפולציה היא להתאים פונקציה שתקרב בצורה הטובה ביותר את התנהגותו האמיתית של אובייקט הניסוי בתחום העניין.

גיוזף לואיס לגרנזי - מתמטיקאי ואסטרונום איטלקי שמאוחר יותר חי בצרפת ובפרוסיה (1736-1813) - פיתח שיטה למצוא פולינום אחד ויחיד העובר דרך מספר סופי של נקודות על גרף הפונקציה הידועות לנו. לכאורה ניתן להשתמש בשיטה זו ולומר שקיימת סדרה של פולינומים המתכנסת לפונקציה במידה שווה בקטע $[a,b]$ כאשר מוסיפים יותר ויותר נקודות. אולם מסתבר שלמרות שניתן לבנות סדרת פולינומים שיש להן נקודות משותפות עם מספר נקודות סופי של הפונקציה, סדרה זו של פולינומים אינה בהכרח קירוב במידה שווה של הפונקציה.

בתחילה נסביר איך בונים את סדרת פולינומי האינטרפולציה של לגרנזי ולאחר מכן נביא שתי דוגמאות שבהן סדרת פולינומי לגרנזי שנבנה לא מקרבת במידה שווה את הפונקציה המקורית. בהינתן $n+1$ מספרים ממשיים שונים x_0, x_1, \dots, x_n נסמן:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \quad (2.1)$$

נניח שנתונה פונקציה $f(x)$ כך ש- $y_0=f(x_0), y_1=f(x_1), \dots, y_n=f(x_n)$ הם ערכי הפונקציה הידועים בנקודות שונות x_0, x_1, \dots, x_n .

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{נשים לב כי } \delta_{ij} \cdot l_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \text{נקרא הסמל של קרונקר ופירושו:}$$

נגדיר את סדרת פולינומי לגרנזי:

$$L_n(f, t) = L_n(t) = y_0 \cdot l_0(t) + y_1 \cdot l_1(t) + y_2 \cdot l_2(t) + \dots + y_n \cdot l_n(t) \quad (2.2)$$

לדוגמא: ידועות הנקודות $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ הנמצאות על גרף של פונקציה כל שהיא, נציב ב-(2.1) ונקבל:

$$l_0(t) = \frac{t-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{t-x_2}{x_0-x_2}, \quad l_1(t) = \frac{t-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{t-x_2}{x_1-x_2}, \quad l_2(t) = \frac{t-x_0}{x_2-x_0} \cdot \frac{t-x_1}{x_2-x_1}$$

$$l_0(x_0) = 1, \quad l_1(x_0) = 0, \quad l_2(x_0) = 0$$

$$l_0(x_1) = 0, \quad l_1(x_1) = 1, \quad l_2(x_1) = 0$$

$$l_0(x_2) = 0, \quad l_1(x_2) = 0, \quad l_2(x_2) = 1$$

מהצבה בפולינום (2.2) מתקבל :

$$L_2(t) = y_0 \cdot \frac{t-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{t-x_2}{x_0-x_2} + y_1 \cdot \frac{t-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{t-x_2}{x_1-x_2} + y_2 \cdot \frac{t-x_0}{x_2-x_0} \cdot \frac{t-x_1}{x_2-x_1}$$

ואכן ניתן לראות כי בהצבת x_0 בפולינום מתקבל $L_2(x_0) = y_0$, בהצבת x_1 מתקבל $L_2(x_1) = y_1$ ובהצבת x_2 מתקבל $L_2(x_2) = y_2$. כלומר קיבלנו פולינום (למעשה פרבולה) העובר דרך שלוש הנקודות הידועות של הפונקציה.

כעת נרחיב למקרה שידועות לנו $n+1$ נקודות שונות $y_0=f(x_0), y_1=f(x_1), \dots, y_n=f(x_n)$ ונקבל לפי אותו עיקרון את הפולינום :

$$L_n(t) = y_0 \cdot \frac{t-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{t-x_2}{x_0-x_2} \cdot \dots \cdot \frac{t-x_n}{x_0-x_n} + y_1 \cdot \frac{t-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{t-x_2}{x_1-x_2} \cdot \dots \cdot \frac{t-x_n}{x_1-x_n} + \dots$$

$$\dots + y_n \cdot \frac{t-x_0}{x_n-x_0} \cdot \frac{t-x_1}{x_n-x_1} \cdot \dots \cdot \frac{t-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$$

$$L_n(t) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t-x_j}{x_i-x_j} = \sum_{i=0}^n y_i \cdot l_i(t) \quad \text{וברישום מקוצר} :$$

$$l_i(x_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x_k-x_j}{x_i-x_j} = 0 \quad \text{לכל } k \neq i \text{ מתקיים (כי הגורם עם } k=j \text{ מתאפס).}$$

$$l_i(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x_i-x_j}{x_i-x_j} = 1 \quad \text{ועבור } x=x_i \text{ מתקיים } l_i(x_i) = y_i \text{ לכל } i.$$

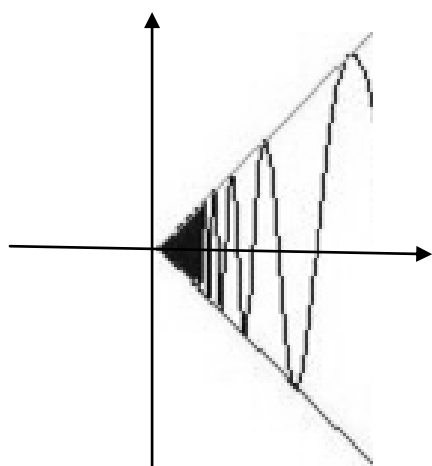
נגדיר : בהינתן קטע $[a,b]$, חלוקה E של הקטע $[a,b]$ היא תת-קבוצה סופית של נקודות שונות מהקטע $[a,b]$.

נשים לב שבחירת נקודות על גרף הפונקציה שקולה לביצוע חלוקה של תחום הגדרתה למספר הולך וגדל של תת קטעים .

בדוגמא הבאה נראה פונקציה, שניתן לבחור על הגרף שלה מספר הולך וגדל של נקודות אך סדרת הפולינומים שתתקבל מתהליך האינטרפולציה של לגרנז' תהיה תמיד אפס זהותית .

דוגמה 1.

נתבונן בגרף הפונקציה :



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right) & t \neq 0 \end{cases} \quad f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}$$

הפונקציה f רציפה בקטע $[0, 1]$.

נאתר את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

$$f(t) = t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0$$

הפתרונות הם : $\sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0$ או $t = 0$

או $\frac{1}{t} = k \cdot \pi$ $\&\mathbb{Z}$

או $t = \frac{1}{k \cdot \pi}$ $\&\mathbb{Z}$

נסמן ב- $x_0 = 0$ ולכל $k \in \mathbb{Z}$ נסמן ב- $x_k = \frac{1}{k \cdot \pi}$ מתקיים $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$.

נבנה את פולינום לגרנז' (2.2), בעזרת הנקודות על גרף הפונקציה הידועות לנו $(x_k, 0)$ $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ונקבל :

$$L_n(f, t) = 0 \cdot l_0(t) + 0 \cdot l_1(t) + 0 \cdot l_2(t) + \dots + 0 \cdot l_n(t) \equiv 0$$

אנו רואים שבחרנו על גרף הפונקציה מספר הולך וגדל של נקודות אך סדרת הפולינומים שהתקבלה מתהליך האינטרפולציה של לגרנז' בנקודות אלו היתה הסדרה הקבועה המכילה רק את פולינום האפס ואינה מתכנסת לפונקציה במידה שווה בקטע $[0, 1]$.

נשים לב כי בדוגמא לעיל, קוטר החלוקה אינו משתנה מכיוון שלכל k הקטע הימני ביותר שהוא

הקטע בעל האורך המקסימלי יישאר $\left[\frac{1}{\pi}, 1\right]$, אך הצפיפות של נקודות החיתוך הולכת וגדלה

ככל שמתקרבים ל- $x = 0$. בגלל זה ניתן דוגמא אחרת שבה נראה שסדרת פולינומי לגרנז' לא חייבת להיות קירוב שווה לפונקציה למרות שנקודות החלוקה מפוזרות בצורה אחידה.

פולינום ב- x מדרגה קטנה או שווה ל- $n \in \mathbb{Z}$ הוא ביטוי: $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ כאשר

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. אוסף כל הפולינומים מדרגה קטנה או שווה ל- n יסומן $\mathbb{P}_n[x]$ והוא

מרחב וקטורי מעל \mathbb{R} ממימד $n + 1$, וסימנו גם יהיה $\mathbb{R}_n[x]$. הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_n[x]$ הוא: $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.

טענה 2.1: תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[a, b]$ ויהיו x_j ($j = 0, 1, \dots, n$)

$n + 1$ נקודות שונות בקטע $[a, b]$, אזי קיים פולינום יחיד $P(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ עם

$$P(x_j) = f(x_j) \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

הוכחה:

יהיו $P(x)$ ו- $Q(x)$ שני פולינום המקיימים:

$P(x_j) = f(x_j)$ ו- $Q(x_j) = f(x_j)$ ($j = 0, 1, \dots, n$). נתבונן בפולינום ההפרש

$$R(x) = P(x) - Q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$$

$$R(x_j) = P(x_j) - Q(x_j) = f(x_j) - f(x_j) = 0$$

מתקיים כלומר $R(x)$ הוא פולינום מדרגה n לכל היותר המתאפס $n + 1$ פעמים ולכן $R(x)$ הוא פולינום

$$P(x) \equiv Q(x)$$

■

בסיכום וכמסקנה מהגדרת פולינומי לגרנז' ומטענה 2.1 נקבל:

מסקנה 2.2: הפולינום היחיד $P(x)$ שבטענה 2.1 לעיל הוא פולינום לגרנז'.

את הפולינום היחיד שבטענה 2.1 לעיל ניתן להציג לפי בסיסים שונים של $\mathbb{R}_n[x]$. בסיס נוח לצורך זה הינו בסיס לגרנז':

$$l_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \quad \text{כאשר } (l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x))$$

כי כפי שכבר ראינו, וקטור הקואורדינאטות של $P(x)$ לפי בסיס זה הוא פשוט

$(f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n))$ מאידך, בניית פולינום האינטרפולציה לפי בסיס לגרנז' היא

כזו, שאם רוצים להוסיף עוד נקודת אינטרפולציה x_{n+1} , צריך לחשב הכל מחדש ואי אפשר

להשתמש בחישובים הקודמים שעשינו עם $\{x_0, \dots, x_n\}$. ומבחינה זו שיטת החישוב אינה

יעילה. כדי לטפל בבעיה זו, נגדיר כעת בסיס נוסף ל- $\mathbb{R}_n[x]$. בסיס זה נקרא בסיס ניוטון

(Newton) ויסומן:

$$N_i(x) = \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) \quad \text{כאשר } \{N_0(x), N_1(x), \dots, N_n(x)\}$$

פולינום מתוקן (בעל מקדם מוביל 1) מדרגה k ולכן מטריצת המעבר מהבסיס הסטנדרטי לבסיס

ניוטון היא בבירור משולשת עם אלכסון ראשי המורכב כולו מ-1-ים.

אם נציג את הפולינום $P(x)$ מטענה 2.1 לפי בסיס ניוטון כ-

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k N_k(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0) \cdot \dots \cdot (x-x_{n-1})$$

אזי נהוג לסמן $a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k] = [y_0, y_1, \dots, y_k]$ כאשר $y_k = f(x_k)$.

חישוב של המקדמים של N_1, N_0 ו- N_2 נותן :

עבור נקודה נתונה אחת (x_0, y_0) :

$$P(x_0) = y_0 = a_0 \cdot N_0 = a_0 \cdot 1 \quad \text{ולכן} \quad a_0 = [y_0] = y_0$$

עבור שתי נקודות $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$:

$$P(x_1) = y_1 = a_0 + a_1 \cdot N_1(x_1) = a_0 + a_1 \cdot (x_1 - x_0)$$

נבודד את a_1 ונקבל :

$$a_1 = [y_0, y_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

עבור שלוש נקודות $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$:

$$P(x_2) = y_2 = a_0 + a_1 \cdot N_1(x_2) + a_2 \cdot N_2(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

נבודד את a_2 ונקבל :

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{y_2 - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{y_2 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x_2 - x_1 + x_1 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x_2 - x_1) - (y_1 - y_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{y_2 - y_1 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x_2 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \end{aligned}$$

$$a_2 = [y_0, y_1, y_2] = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{[y_1, y_2] - [y_0, y_1]}{x_2 - x_0}$$

$$a_3 = [y_0, y_1, y_2, y_3] = \frac{[y_1, y_2, y_3] - [y_0, y_1, y_2]}{x_3 - x_0} \quad \text{באותו אופן :}$$

$$[y_0, \dots, y_k] = \frac{[y_1, \dots, y_k] - [y_0, \dots, y_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad \text{באופן כללי מוכיחים ש-}$$

תוצאה זו, שהיא בעצם כלל נסיגה, מאפשרת לחשב את $[y_0, \dots, y_k]$ בצורה רקורסיבית ומסבירה מדוע קוראים ל- $[y_0, \dots, y_k]$ הפרש מחולק מסדר k .

$$[y_0, y_1, \dots, y_n] = \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \quad ; \quad [y_0, \dots, y_k]$$

אם הנקודות x_0, \dots, x_n הן במרווחים שווים, כלומר אם קיים h כך ש- $x_{k+1} - x_k = h$ אזי ניתן להוכיח באינדוקציה ש- $(k = 0, \dots, n-1)$

$$a_k = [y_0, \dots, y_k] = [f(x_0), \dots, f(x_k)] = \frac{\Delta_h^k[f](x_0)}{k!h^k} \quad (2.3)$$

$$\Delta_h[f](x) = \Delta_h^1[f](x) = f(x+h) - f(x) \quad \text{כאשר}$$

והחזקה מסמלת הרכבה חוזרת: $\Delta_h^k = \underbrace{\Delta_h \circ \Delta_h \circ \dots \circ \Delta_h}_k$ פעמים k . מתקיים:

$$\Delta_h^k[f](x_0) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} f(x_0 + (k-j)h) \quad (2.4)$$

בסיכום: מהנייל ומטענה 2.1 ומסקנה 2.2 מקבלים את:

משפט 2.3: פולינום האינטרפולציה של לגרנז' $P(x)$ שבטענה 2.1 מקיים את הנוסחה

$$\sum_{k=0}^m a_k N_k(x) \quad \text{כאשר המקדמים } a_k \text{ נתונים בנוסחאות (2.3) ו-(2.4).}$$

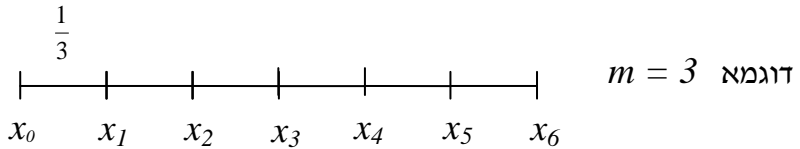
2.2. דוגמה¹

נתבונן בפונקציה $f(x) = |x|$. מטעמי סימטריה נבחר את קטעי החלוקה כך שאחת מנקודות החלוקה תהיה תמיד 0 וכך שמספר נקודות החלוקה יהיה אי זוגי ומספר קטעי החלוקה יהיה זוגי. כלומר בהינתן מספר טבעי m שרירותי נחלק את הקטע $[-1, 1]$ ל- $2m$ קטעי

$$E_m = \{x_0, x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{2m}\} \quad \text{חלוקה:}$$

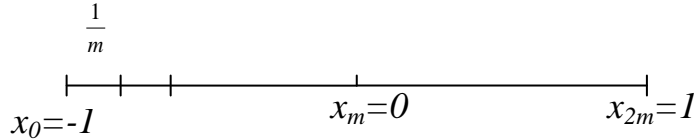
$$(k = 0, 1, \dots, m, m+1, \dots, 2m) \quad x_k = \frac{k-m}{m} = \frac{k}{m} - 1 \quad \text{כאשר}$$

1. Bernstein, S.: *Quelques Remarques sur l'Interpolation*. *Mathematische Annalen*, 79, pp. 1-12, 1919.



$$x_0 = \frac{0-3}{3} = -1, x_1 = \frac{1-3}{3} = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{2-3}{3} = -\frac{1}{3}, x_3 = 0, x_4 = \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3}, x_5 = \frac{5-3}{3} = \frac{2}{3}, x_6 = \frac{6-3}{3} = 1$$

ובאופן כללי: $x_0 = -1, x_1 = \frac{1-m}{m}, \dots, x_m = 0, \dots, x_{2m} = 1$



נסמן ב- $P_{2m}(f, E_m; x)$ את הפולינום במשתנה x מדרגה $2m$ שמתקבל מאינטרפולציה של

$$f(x) = |x| \text{ בנקודות } E_m.$$

טענה 2.4:

לכל $a, b \in \mathbb{R}$ כך $-1 \leq a < b \leq 1$ קיים $x \in (a, b)$ כך ש- $P_{2m}(f, E_m; x) \rightarrow \infty$

כאשר $m \rightarrow \infty$.

הוכחה:

נחשב מספר מקדמים של פולינום ניוטון לפי משפט 2.3 והנוסחאות (2.3) ו-(2.4) כאשר:

$$f(x) = |x|, \quad x_0 = -1, \quad h = \frac{1}{m}$$

$$a_0 = f(x_0) = |x_0| = 1$$

$$a_1 = \frac{(-1)^0 \binom{1}{0} f\left(x_0 + (1-0)\frac{1}{m}\right) - (-1)^1 \binom{1}{1} f\left(x_0 + (1-1)\frac{1}{m}\right)}{1! \left(\frac{1}{m}\right)^1} = \frac{f\left(x_0 + \frac{1}{m}\right) - f(x_0)}{1! \left(\frac{1}{m}\right)^1}$$

$$= \frac{\left| -1 + \frac{1}{m} \right| - |-1|}{\frac{1}{m}} = \frac{1 - \frac{1}{m} - 1}{\frac{1}{m}} = -1$$

$$a_2 = \frac{(-1)^0 \binom{2}{0} f\left(x_0 + (2-0)\frac{1}{m}\right) - 2(-1)^1 \binom{2}{1} f\left(x_0 + (2-1)\frac{1}{m}\right) + (-1)^2 \binom{2}{2} f\left(x_0 + (2-2)\frac{1}{m}\right)}{2! \left(\frac{1}{m}\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-1)^2 \binom{2}{2} f\left(x_0 + (2-2)\frac{1}{m}\right) - f\left(x_0 + \frac{2}{m}\right) - 2f\left(x_0 + \frac{1}{m}\right) + f(x_0)}{2! \left(\frac{1}{m}\right)^2} = \frac{f\left(x_0 + \frac{2}{m}\right) - 2f\left(x_0 + \frac{1}{m}\right) + f(x_0)}{2! \left(\frac{1}{m}\right)^2} \\
& = \frac{\left|-1 + \frac{2}{m}\right| - 2\left|-1 + \frac{1}{m}\right| + |-1|}{2! \cdot \frac{1}{m^2}} = \frac{1 - \frac{2}{m} - 2\left(1 - \frac{1}{m}\right) + 1}{2! \cdot \frac{1}{m^2}} = 0
\end{aligned}$$

נשים לב שהמקדמים a_2, a_3, \dots, a_m בהצגה $P_{2m}(f, E_m; x)$ לפי בסיס ניוטון מתאפסים, כי ערכם מחושב באמצעות נוסחאות ההפרשים מסדר גדול או שווה 2 הנתונה בנוסחאות (2.3) ו-(2.4) על סמך הנקודות $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ בלבד והנקודות הללו נמצאות כולן על הקו הישר $y = -x$ שהפרשים על קו ישר מסדר גדול מאחד הם אפס ועל כן :

(2.5)

$$P_{2m}(f, E_m; x) = 1 + \frac{-\frac{1}{m}(x+1)}{\frac{1}{m}} + \sum_{i=1}^m \frac{\Delta^{m+i}(x+1) \cdot \left(x + \frac{m-1}{m}\right) \cdots \left(x + \frac{1}{m}\right) \cdot x \cdot \left(x - \frac{1}{m}\right) \cdots \left(x - \frac{i-1}{m}\right)}{(m+i)! \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^{m+i}}$$

כאשר המקדמים $\Delta_h^{m+i} = \Delta_h^{m+i}[f](x_0)$ עבור $h = \frac{1}{m}$ מהנוסחה (2.4) נובע ש-

$$\Delta^{m+i} = 2 \cdot \left[\frac{i}{m} - \frac{i-1}{m}(m+i) + \frac{i-2}{m} \cdot \frac{(m+i)(m+i-1)}{2} - \dots \right]$$

בעזרת קצת אלגברה מקבלים :

$$\Delta^{m+i} = (-1)^{i-1} \cdot \frac{2 \cdot (m+i-2)!}{(i-1)!m!} \tag{2.6}$$

הצבת (2.6) ב-(2.5) נותנת :

(2.7)

$$\begin{aligned}
& P_{2m}(f, E_m; x) + x = \\
& = 2 \sum_{i=1}^m \frac{(-1)^{i-1} m^{m+i}}{(m+i)(m+i-1) \cdot m!(i-1)!} \cdot (x+1) \cdot \left(x + \frac{m-1}{m}\right) \cdots \left(x + \frac{1}{m}\right) \cdot x \cdot \left(x - \frac{1}{m}\right) \cdots \left(x - \frac{i-1}{m}\right)
\end{aligned}$$

מכיוון ש f זוגית והחלוקה E_m סימטרית סביב 0, גם $P_{2m}(f, E_m; x)$ זוגי ולכן, נוכל

להסתפק בחקירת P_{2m} עבור x -ים שליליים בלבד. עבור x שלילי, המכפלה

$$(x+1) \cdot \left(x + \frac{m-1}{m}\right) \cdot \dots \cdot \left(x + \frac{1}{m}\right) \cdot x$$

תלוי ב- i . המכפלה

$$(-1)^{i-1} \cdot \left(x - \frac{1}{m}\right) \cdot \dots \cdot \left(x - \frac{i-1}{m}\right) = \left(\frac{1}{m} - x\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{i-1}{m} - x\right)$$

x שלילי ולכן כל המחברים בסכום (2.7) הם שווי-סימן. לכן על מנת להוכיח ש-

$$|P_{2m}(f, E_m; x) - |x|| = |P_{2m}(f, E_m; x) + x| \rightarrow \infty$$

כאשר $m \rightarrow \infty$ מספיק להראות שאחד המחברים בסכום (2.7) שואף לאינסוף יחד עם m . נסמן ב- $I_m(x)$ את המחבר

ב-(2.7) המתאים ל- $i = m$, משמע:

$$I_m(x) = \frac{(-1)^{m-1} 2m^{2m} (x+1) \cdot \left(x + \frac{m-1}{m}\right) \cdot \dots \cdot \left(x + \frac{1}{m}\right) \cdot x \cdot \left(x - \frac{1}{m}\right) \cdot \dots \cdot \left(x - \frac{m-1}{m}\right)}{2m(2m-1)m!(m-1)!}$$

נשים לב שבמונה של $2m I_m(x)$ גורמים התלויים ב- x . לכן נוכל לכתוב:

(2.8)

$$I_m(x) = \frac{(-1)^{m-1} (mx+m)(mx+m-1) \cdot \dots \cdot (mx+1)(mx)(mx-1) \cdot \dots \cdot (mx-m+1)}{(2m-1)(m!)^2}$$

נתבונן בנקודות האמצע של קטעי החלוקה השליליים, כלומר בנקודות:

$$1 \leq \lambda \leq m-1, \lambda \in \mathbb{Z} \quad x = -\frac{\lambda}{m} - \frac{1}{2m} \quad (2.9)$$

הצבת (2.9) ב-(2.8) נותנת:

$$I_m(x) = \frac{(-1)^{m-1} \left(m - \lambda - \frac{1}{2}\right) \left(m-1 - \lambda - \frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(-\lambda + \frac{1}{2}\right) \left(-\lambda - \frac{1}{2}\right) \left(-\lambda - \frac{1}{2} - 1\right) \cdot \dots \cdot \left(-\lambda - \frac{1}{2} - (m-1)\right)}{(2m-1)(m!)^2}$$

$$= - \frac{\left(m - \lambda - \frac{1}{2}\right) \left(m-1 - \lambda - \frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(-\lambda + \frac{1}{2}\right) \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \left(\lambda + \frac{1}{2} + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\lambda + \frac{1}{2} + (m-1)\right)}{(2m-1)(m!)^2}$$

$$\begin{aligned}
|I_m(x)| &= \frac{\left(m - \lambda - \frac{1}{2}\right)\left(m - 1 - \lambda - \frac{1}{2}\right) \cdots \left(-\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2} + 1\right) \cdots \left(\lambda + \frac{1}{2} + (m-1)\right)}{(2m-1)(m!)^2} \\
&> \frac{\left[(m - \lambda - 1)(m - \lambda - 2) \cdots 1 \cdot \frac{1}{2}\right] \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdots (\lambda + (m-1))\right]}{(2m-1)(m!)^2} \\
&> \frac{(m - \lambda - 1)!(m + \lambda - 1)!}{8m(m!)^2} = \frac{(m + \lambda - 1)!(m - \lambda - 1)!}{8m \cdot m \cdot m((m-1)!)^2} \\
&= \frac{(m + \lambda - 1)!}{\overbrace{(m - 1 + \lambda)(m - 2 + \lambda) \cdots (m - \lambda + \lambda)(m - 1)!}^{(m + \lambda - 1)!} (m - \lambda - 1)!} \\
&= \frac{1}{8m^3} \left(1 + \frac{\lambda}{m-1}\right) \left(1 + \frac{\lambda}{m-2}\right) \cdots \left(1 + \frac{\lambda}{m-\lambda}\right) \\
&> \frac{1}{8m^3} \left(1 + \frac{\lambda}{m-1}\right) \left(1 + \frac{\lambda}{m-1}\right) \cdots \left(1 + \frac{\lambda}{m-1}\right) \\
&= \frac{1}{8m^3} \left(1 + \frac{\lambda}{m-1}\right)^\lambda \tag{2.10}
\end{aligned}$$

היות ועבור $0 < \lambda$ נתון, הסדרה $b_m = \left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^{m+1}$ יורדת מונוטונית ל- e^λ , נקבל ש-

$$\left(1 + \frac{\lambda}{m-1}\right)^\lambda > e^{\frac{\lambda^2}{m}} \quad \text{ומכאן נקבל} \quad 1 + \frac{\lambda}{m-1} > e^{\frac{\lambda}{m}} \quad \text{וזה שקול ל-} \quad \left(1 + \frac{\lambda}{m-1}\right)^m > e^\lambda$$

נציב ב- (2.10) ונקבל :

$$|I_m(x)| > \frac{e^{mx^2}}{8m^3} \quad \text{כלומר} \quad |I_m(x)| > \frac{1}{8m^3} \left(1 + \frac{\lambda}{m-1}\right)^\lambda > \frac{e^{\frac{\lambda^2}{m}}}{8m^3}$$

היות ו- $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{e^{mx^2}}{8m^3} = \infty$, הוכחנו את הנדרש.

פרק III: הפולינום של ברנשטיין

(Bernstein Polynomial)

בשני הפרקים הקודמים ראינו כי פולינום טיילור ופולינום האינטרפולציה של לגרנז' אינם מהווים שיטה לקירוב פונקציה רציפה על ידי פולינום בקטע. בפרק זה נכיר את הפולינום של ברנשטיין בעזרתו נוכיח את נכונות משפט הקירוב של ויירשטראס האומר :

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a < b$. אזי לכל פונקציה רציפה $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים

פולינום p (התלוי ב f וב- ε) כך שלכל x ב- $[a, b]$ מתקיים $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$.

ובעצם בהוכחה זו נראה שיטה מעשית לבניית פולינום המתאים לכל פונקציה רציפה ולכל מידת קירוב רצויה.

פולינומי הבסיס של ברנשטיין הם פולינומים מהצורה :

$$b_n(x; n) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad 0 \leq k \leq n \quad n, k \in \mathbb{N}$$

כאשר $0 \leq x \leq 1$

קומבינציות לינאריות של פולינומים כאלה נקראות פולינומי ברנשטיין.

הוכחה¹: תחילה נבנה את הפולינום הדרוש. נגדיר את פולינום ברנשטיין מדרגה m $B_m(h; t)$ $m=1, 2, 3, \dots$ המתאים ל- h :

$$B_m(h; t) = \sum_{k=0}^m h \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k} \quad (3.1)$$

כאשר $h \binom{k}{m}$ הוא ערך הפונקציה בנקודה $t = \frac{k}{m}$ ו- $m-1$ הוא מספר החלקים שנחלק את הקטע $[0, 1]$.

טענה 3.1: אם $h_1 \geq h_2$ אז $B_m(h_1; t) \geq B_m(h_2; t)$.
הוכחה :

$$h \binom{k}{m} \geq 0 \quad \text{ולכן} \quad h = h_1 - h_2 \geq 0 \quad \text{יהי} \quad (3.2)$$

$t \in [0, 1]$ ולכן בגלל שכל איבר בסכום (3.1) הוא לא שלילי אז כל הסכום אינו שלילי.

$$B_m(h; t) \geq 0 \quad \text{כלומר} \quad (3.3)$$

נסמן ב $\mathcal{B}_m[x]$ את המרחב של פולינומים מדרגה m לכל היותר.

ברור ש- $B_m(h; t) \in \mathcal{B}_m[x]$. נתבונן שפולינומי ברנשטיין מקימים את התכונות הבאות :

$$B_m(\alpha h; t) = \alpha B_m(h; t) \quad (3.4)$$

¹ Rivlin, T.J. (1969) An Introduction To The Approximation Of Functions chapter 1.

$$B_m(h_1 + h_2; t) = B_m(h_1; t) + B_m(h_2; t) \quad (3.5)$$

מהצבת (3.2) ב-(3.3) נקבל : $B_m(h_1 - h_2; t) \geq 0$ ובגלל תכונה (3.5) נקבל

$$B_m(h_1 - h_2; t) = B_m(h_1; t) - B_m(h_2; t) \geq 0$$

$$B_m(h_1; t) \geq B_m(h_2; t) \quad (3.6)$$

עכשיו נותר להראות שבהינתן פונקציה רציפה h בקטע $[0,1]$ ו- $\varepsilon > 0$, קיים מספר טבעי m_0

$$\text{אשר תלוי ב- } \varepsilon \text{ כך שלכל } t \in [0,1] \text{ מתקיים: } |h(t) - B_{m_0}(h; t)| < \varepsilon .$$

תחילה נבדוק מספר מקרים פרטיים ולבסוף ניעזר בהם כדי להוכיח את המקרה הכללי.

מקרה ראשון : נבדוק עבור הפונקציה הקבועה : $h(t) = 1$.

$$B_m(1; t) = 1 \quad \text{טענה 3.2}$$

$$\text{הוכחה : } B_m(1; t) = \sum_{k=0}^m 1 \cdot \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k} = (t + (1-t))^m = 1^m = 1$$

מקרה שני : נבדוק עבור הפונקציה הקווית : $h(t) = t$.

$$B_m(t; t) = t \quad \text{טענה 3.3}$$

$$\text{הוכחה : לכל } t \in [0,1], \text{ ולכן } h(t) = t, \quad h\left(\frac{k}{m}\right) = \frac{k}{m}$$

מפיתוח ברנשטיין עבור הפונקציה הקווית $h(t) = t$ נקבל :

$$B_m(t; t) = \sum_{k=0}^m \frac{k}{m} \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k}$$

נשתמש בעובדה שעבור כל $k = 1, 2, \dots, m$ מתקיים :

$$\frac{k}{m} \cdot \binom{m}{k} = \frac{k}{m} \cdot \frac{m!}{(m-k)!k!} = \frac{(m-1)!}{(m-k)!(k-1)!} = \frac{(m-1)!}{((m-1)-(k-1))!(k-1)!} = \binom{m-1}{k-1}$$

מזה מקבלים ש-

$$\begin{aligned} B_m(t; t) &= \sum_{k=0}^m \frac{k}{m} \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k} \\ &= \frac{0}{m} \binom{m}{0} t^0 (1-t)^{m-0} + \sum_{k=1}^m \frac{k}{m} \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k} \\ &= 0 + \sum_{k=1}^m \binom{m-1}{k-1} t^k (1-t)^{m-k} . \end{aligned}$$

נסמן $k-1 = j$ נציב ונקבל :

$$\begin{aligned}
B_m(t; t) &= \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} t^{j+1} (1-t)^{((m-1)-((j+1)-1))} \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} t \cdot t^j (1-t)^{(m-1)-j} \\
&= t \cdot \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} t^j (1-t)^{(m-1)-j} \\
&= t \cdot (t + (1-t))^{m-1} = t \cdot 1^{m-1} = t.
\end{aligned}$$

■

מקרה שלישי: נבדוק עבור הפונקציה הריבועית $h(t) = t^2$.

טענה 3.4: עבור $m \geq 2$ $B_m(t^2; t) = t^2 + \frac{1}{m}t(1-t)$

הוכחה: $t^2 = \left(t^2 - \frac{1}{m}t\right) + \frac{1}{m}t$ ולכן פיתוח ברנשטיין של $h(t)$ הוא:

$$B_m(t^2; t) = B_m\left(\left(t^2 - \frac{1}{m}t\right) + \frac{1}{m}t; t\right)$$

על סמך תכונה (3.5) נקבל:

$$B_m(t^2; t) = B_m\left(\left(t^2 - \frac{1}{m}t\right) + \frac{1}{m}t; t\right) = B_m\left(t^2 - \frac{1}{m}t; t\right) + B_m\left(\frac{1}{m}t; t\right) \quad (3.7)$$

נשים לב כי $m \geq 2$

$$\begin{aligned}
B_m\left(t^2 - \frac{1}{m}t; t\right) &= B_m\left(t\left(t - \frac{1}{m}\right); t\right) = \sum_{k=0}^m \frac{k}{m} \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k} \\
&= \sum_{k=0}^m \frac{k}{m} \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^m \frac{k}{m} \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k} \\
&= \frac{0}{m} \binom{m}{0} t^0 (1-t)^m + \frac{1}{m} \binom{m}{1} t^1 (1-t)^{m-1} + \sum_{k=2}^m \frac{k}{m} \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k} \\
&= \sum_{k=2}^m \frac{k}{m} \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k}
\end{aligned}$$

$$\frac{k}{m} \binom{m}{k} = \frac{k}{m} \cdot \frac{k-1}{m} \cdot \frac{m!}{(m-k)!k!} = \frac{1}{m} \cdot \frac{(m-1)!}{(m-k)!(k-2)!}$$

נעיר ש-

$$\begin{aligned}
&= \frac{m-1}{m} \cdot \frac{(m-2)!}{((m-2)-(k-2))!(k-2)!} = \frac{m-1}{m} \binom{m-2}{k-2} \\
B_m\left(t^2 - \frac{1}{m}t\right) &= \sum_{k=2}^m \frac{m-1}{m} \binom{m-2}{k-2} t^k (1-t)^{m-k} && \text{נציב ונקבל:} \\
&= \sum_{k=2}^m \frac{m-1}{m} \binom{m-2}{k-2} t^2 \cdot t^{k-2} (1-t)^{(m-2)-(k-2)} \\
&= \frac{m-1}{m} \cdot t^2 \sum_{k=2}^m \binom{m-2}{k-2} t^{k-2} (1-t)^{(m-2)-(k-2)} \\
&\quad \text{נסמן } k-2 = j \text{ נציב ונקבל:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_m\left(t^2 - \frac{1}{m}t; t\right) &= \frac{m-1}{m} \cdot t^2 \sum_{j=0}^{m-2} \binom{m-2}{j} \cdot t^j (1-t)^{(m-2)-j} \\
&= \frac{m-1}{m} \cdot t^2 (t + (1-t))^{m-2} = \frac{m-1}{m} \cdot t^2 \\
&= \left(1 - \frac{1}{m}\right) t^2 && (3.8)
\end{aligned}$$

על סמך תכונה (3.4) מתקבל $B_m\left(\frac{1}{m}t; t\right) = \frac{1}{m} B_m(t; t)$ ומהצבת טענה 3.3 מתקבל:

$$B_m\left(\frac{1}{m}t; t\right) = \frac{1}{m} B_m(t; t) = \frac{1}{m} t \quad (3.9)$$

נציב את (3.8) ואת (3.9) ב-(3.7) ונקבל:

$$\begin{aligned}
B_m\left(t^2; t\right) &= \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdot t^2 + \frac{1}{m} t = t^2 - \frac{t^2}{m} + \frac{t}{m} \\
&= t^2 + \frac{1}{m} t(1-t)
\end{aligned}$$

■
אנו רואים שאם נבחר $m \geq 2$ הפולינום של ברנשטיין המתאים לפונקציה $h(t) = t^2$ הוא:

$$\left| t^2 - B_m(t^2; t) \right| = \frac{1}{m} |t(t-1)| \leq \frac{1}{m} \quad \text{ולכן } B_m(t^2; t) = t^2 + \frac{1}{m} t(1-t)$$

זאת אומרת שעבור m מספיק גדול הפולינום של ברנשטיין המתאים לפונקציה $h(t) = t^2$ מקרב אותה במידה שווה.

ניעזר בשלושת המקרים שהבאנו לעיל על מנת להוכיח כי כל פונקציה רציפה בקטע סגור ב-P

ניתנת לקירוב במידה שווה על ידי פולינום. נזכר ב-

משפט הראשון של וירשטראס: תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$, אזי f חסומה.

כלומר קיים מספר ממשי $0 \leq M$ כך ש- $-M \leq f(x) \leq M$ לכל $x \in [a, b]$.
נסתמך על המשפט הראשון של וירשטראס ונסמן $M = \sup_{0 \leq t \leq 1} |h(t)|$. לכל $s, t \in [0, 1]$

מתקיים:

$$-2M \leq h(t) - h(s) \leq 2M \quad (3.10)$$

הגדרה: f המוגדרת בקטע היא רציפה במידה שווה, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ התלוי ב- ε

כך שלכל x_1 ולכל x_2 בקטע שעבורם $|x_1 - x_2| < \delta$ מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$
לפי

משפט קנטור: פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b]$ רציפה שם במידה שווה.

$h(t)$ רציפה ב- $[0, 1]$ ולפי משפט קנטור היא רציפה במידה שווה ב- $[0, 1]$ לכן בהינתן

$\varepsilon_1 > 0$ קיים $\delta(\varepsilon_1) > 0$ כך שאם $|t - s| < \delta$ אזי:

$$-\varepsilon_1 < h(t) - h(s) < \varepsilon_1 \quad (3.11)$$

עכשיו נבחין בין שני מקרים

נניח ש- $|t - s| < \delta$ ולכן מתוך (3.11) ניתן לקבל:

$$-\varepsilon_1 - \frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2 \leq h(t) - h(s) \leq \varepsilon_1 + \frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2$$

אם נניח ש- $|t - s| \geq \delta$ אזי מתקבל ש- $\frac{(t-s)^2}{\delta^2} > 1$ ולכן $2M < \varepsilon_1 + \frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2$

$$-\varepsilon_1 - \frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2 < -2M \quad \text{ו-}$$

ולכן מתוך (3.10) ניתן לקבל:

$$-\varepsilon_1 - \frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2 \leq -2M \leq h(t) - h(s) \leq 2M \leq \varepsilon_1 + \frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2$$

ובסיכום קיבלנו שלכל $s, t \in [0, 1]$ מתקיים:

$$-\varepsilon_1 - \frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2 \leq h(t) - h(s) \leq \varepsilon_1 + \frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2 \quad (3.12)$$

$$h_1(t) = -\varepsilon_1 - \frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2$$

נתבונן בפונקציות:

$$h_2(t) = h(t) - h(s)$$

כאשר s נקבע כפרמטר ו- t הוא המשתנה .

לפי טענה 3.1 בגלל ש- $h_1 \leq h_2$ או $B_m(h_1; t) \leq B_m(h_2; t)$ כלומר :

$$B_m\left(-\varepsilon_1 - \frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2; t\right) \leq B_m(h(t) + (-h(s)); t) \quad (3.13)$$

נפעיל את תכונה (3.5) ונקבל :

$$B_m\left(-\varepsilon_1 - \frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2; t\right) = B_m(-\varepsilon_1; t) + B_m\left(-\frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2; t\right)$$

נפעיל את תכונה (3.6) ונקבל :

$$\begin{aligned} B_m\left(-\varepsilon_1 - \frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2; t\right) &= -\varepsilon_1 B_m(1; t) - \frac{2M}{\delta^2} B_m\left((t-s)^2; t\right) \\ &= -\varepsilon_1 B_m(1; t) - \frac{2M}{\delta^2} B_m(t^2 - 2ts + s^2; t) \\ &= -\varepsilon_1 B_m(1; t) - \frac{2M}{\delta^2} \left(B_m(t^2; t) - 2sB_m(t; t) + s^2 B_m(1; t) \right) \end{aligned}$$

תוך שימוש בטענה 3.2, בטענה 3.3 ובטענה 3.4 נקבל כאשר $m \geq 2$:

$$\begin{aligned} B_m\left(-\varepsilon_1 - \frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2; t\right) &= -\varepsilon_1 - \frac{2M}{\delta^2} \left(t^2 + \frac{1}{m}t(1-t) - 2st + s^2 \right) \\ &= -\varepsilon_1 - \frac{2M}{\delta^2} \left((t-s)^2 + \frac{1}{m}t(1-t) \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$B_m(h(t) + (-h(s)); t) = B_m(h; t) - h(s)B_m(1; t) = B_m(h; t) - h(s) \quad (3.15)$$

מהצבת (3.14) ו-(3.15) ב-(3.13) נקבל :

$$-\varepsilon_1 - \frac{2M}{\delta^2} \left((t-s)^2 + \frac{1}{m}t(1-t) \right) \leq B_m(h; t) - h(s)$$

$$B_m(h; t) - h(s) \leq \varepsilon_1 + \frac{2M}{\delta^2} \left((t-s)^2 + \frac{1}{m}t(1-t) \right) :$$

ובסיכום :

$$-\varepsilon_1 - \frac{2M}{\delta^2} \left((t-s)^2 + \frac{1}{m}t(1-t) \right) \leq B_m(h; t) - h(s) \leq \varepsilon_1 + \frac{2M}{\delta^2} \left((t-s)^2 + \frac{1}{m}t(1-t) \right)$$

קבלנו לכל $t \in [0, 1]$ ולכל $s \in [0, 1]$:

$$-\varepsilon_1 - \frac{2M}{\delta^2} \left((t-s)^2 + \frac{1}{m}t(1-t) \right) \leq B_m(h; t) - h(s) \leq \varepsilon_1 + \frac{2M}{\delta^2} \left((t-s)^2 + \frac{1}{m}t(1-t) \right)$$

בפרט אם נציב $t = s$ נקבל :

$$-\varepsilon_1 - \frac{2M}{\delta^2} \left(\frac{1}{m} s(1-s) \right) \leq B_m(h; s) - h(s) \leq \varepsilon_1 + \frac{2M}{\delta^2} \left(\frac{1}{m} s(1-s) \right)$$

בנוסף לכל $s \in [0,1]$ מתקיים $0 \leq s(1-s) \leq \frac{1}{4}$ ואז

$$-\varepsilon_1 - \frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{4} \leq B_m(h; s) - h(s) \leq \varepsilon_1 + \frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{4}$$

$$-\varepsilon_1 - \frac{M}{2\delta^2} \cdot \frac{1}{m} \leq B_m(h; s) - h(s) \leq \varepsilon_1 + \frac{M}{2\delta^2} \cdot \frac{1}{m}$$

$$|B_m(h; s) - h(s)| \leq \varepsilon_1 + \frac{M}{2\delta^2} \cdot \frac{1}{m}$$

עכשיו יהי $0 < \varepsilon$ נתון ונבחר $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ ו- m מספיק גדול כך ש- $m \geq \frac{M}{\delta^2 \varepsilon}$

$$\varepsilon_1 + \frac{M}{2\delta^2} \cdot \frac{1}{m} \leq \varepsilon \quad \text{וגם} \quad \frac{M}{2\delta^2} \cdot \frac{1}{m} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

וכתוצאה מקבלים בתנאי ש- m מספיק גדול $|h(s) - B_m(h; s)| \leq \varepsilon$

הראנו שבהינתן פונקציה רציפה h בקטע $[0,1]$ ו- $\varepsilon > 0$, קיים מספר טבעי m_0 אשר תלוי ב-

ε כך שלכל $t \in [0,1]$ מתקיים: $|h(t) - B_{m_0}(h; t)| < \varepsilon$. תוצאה זו מוכיחה למעשה את משפט ויירשטראס לאור הטענה הבאה:

טענה 3.5: משפט הקירוב של ויירשטראס נכון אם ורק אם הוא נכון בקטע $[0,1]$.

הוכחה: בהינתן פונקציה רציפה $\star f: [a,b] \rightarrow \star$ ניתן לבצע שינוי משתנה $t = \frac{x-a}{b-a}$

(כלומר $x = (b-a)t + a$) וכך ליצור העתקה חד-חד ערכית ועל בין $[0,1]$ לבין $[a,b]$. נגדיר

פונקציה חדשה $\star h: [0,1] \rightarrow \star$ על ידי $h(t) = f((b-a)t + a)$. $h(t)$ היא כמובן פונקציה

רציפה בקטע $[0,1]$ כהרכבה של פונקציות רציפות.

לסיכום הוכחנו את משפט הקירוב של ויירשטראס האומר:

יהיו $\star a, b \in \star$ כך ש- $a < b$. אזי לכל פונקציה רציפה $\star f: [a,b] \rightarrow \star$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים

פולינום p (התלוי ב- f וב- ε) כך שלכל x ב- $[a,b]$ מתקיים $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$.

■

פרק IV : טור פורייה (Fourier)

טור פורייה הוא צירוף ליניארי של הפונקציות הטריגונומטריות - סינוס וקוסינוס, הנקראות לעתים גם הרמוניות. מספר האיברים בסכום יכול להיות סופי או אינסופי. שיטה זו פותחה על ידי ז'אן-בטיסט ז'וזף פורייה (1768-1830 Jean Baptiste Joseph Fourier) שהיה מתמטיקאי, פיזיקאי, מהנדס ואיש ציבור צרפתי.

ניתן להוכיח שאפשר להציג כל פונקציה שמקיימת תנאים מסוימים כטור אינסופי של הרמוניות (ראה משפט דיריכלה בהמשך). המרה כזו נקראת פירוק פורייה, והסכום שנוצר נקרא טור פורייה. המרה זו היא שימושית ביותר בתחומים מסוימים של המתמטיקה, הפיזיקה וההנדסה. השימוש בפיזיקה ובהנדסה הוא בעיקר בתחומים הנוגעים לגלים, נוח להציג את המידע בצורת טור של הרמוניות. גם יישומי מחשב העוסקים בעיבוד תמונה וקול משתמשים רבות בטורי פורייה לצורך ניתוח ודחיסה של המידע.

הגדרה: F הוא מרחב הפונקציות המוגדרות על כל P , הרציפות למקוטעין ובעלות מחזור 2π .

בהינתן $f \in F$ נגדיר את המקדמים הבאים :

$$a_r = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(rx) dx \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_r = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(rx) dx \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

הטור : $\frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} a_r \cos rx + b_r \sin rx$ נקרא טור פורייה של f .

תוך שימוש בנוסחאות Euler : $\cos rx = \frac{e^{irx} + e^{-irx}}{2}$, $\sin rx = \frac{e^{irx} - e^{-irx}}{2i}$

אפשר להציג את טור פורייה של f גם באופן מרוכב¹ : $\sum_{r=-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) e^{irt}$

כאשר מקדמי פורייה $\hat{f}(r)$ הם : $\hat{f}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-irt) dt$

נשים לב כי הקשר בין מקדמים אלו למקדמים a_r ו- b_r הוא : $\hat{f}(r) = \frac{a_r - ib_r}{2}$

1. Körner, T.W. (1988) Fourier Analysis chapter 1

$$\hat{f}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-irt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(t)(\cos rt - i \sin rt) dt}{2} : \text{מכיוון ש-}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(t) \cos rt - i f(t) \sin rt}{2} dt = \frac{a_r - ib_r}{2}$$

יוהאן פטר גוסטב לז'ן דיריכלה (Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805-1859) הוכיח¹ שאם

$$S_n(f, t) = \sum_{r=-n}^n \hat{f}(r) e^{irt} \quad f \in F$$

מקיימים: $S_n(f, t) \rightarrow f(t)$ במידה שווה כאשר $n \rightarrow \infty$.

למרות שהמתמטיקאי פול דיבואה רמו (Paul Du Bois-Reymond 1889-1831) הציג²

דוגמא של פונקציה רציפה f במרחב F המקיימת: $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(f, 0) = \infty$, הוכיח

המתמטיקאי ההונגרי ליפוט פייר (Lipót Fejér 1880-1957), להפתעת המתמטיקאים, את המשפט הקרוי על שמו.

$$\text{משפט פייר}^3: \text{תהי } f \text{ פונקציה רציפה במרחב } F \text{ ותהי } S_n(f, t) = \sum_{r=-n}^n \hat{f}(r) e^{irt} \text{ סדרת}$$

הפולינומים הטריגונומטריים המוגדרים באמצעות מקדמי פורייה של f .

$$\text{נסמן ב- } \sigma_n(f, t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n S_j(f, t) \text{ את סדרת הממוצעים של הפולינומים}$$

הטריגונומטריים $S_n(f, t)$.

אזי $\sigma_n(f, t) \rightarrow f(t)$ במידה שווה על P כאשר $n \rightarrow \infty$.

מסקנה: אם f פונקציה רציפה במרחב F אז בהינתן קבוצת כל מקדמי פורייה

$\hat{f}(r) \quad [r \in \mathbb{C}^*]$ של f , ניתן לשחזר את $f(t)$ לכל t ממשי על ידי:

$$\text{כאשר } n \rightarrow \infty \quad \sigma_n(f, t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n S_j(f, t) = \sum_{r=-n}^n \frac{n+1-|r|}{n+1} \hat{f}(r) e^{irt} \rightarrow f(t)$$

נדגיש שהסדרה $S_n(f, t)$ עצמה לא חייבת להתכנס על פי הדוגמא של דיבואה רמו.

1. Körner, T.W. (1988) *Fourier Analysis* chapter 15,16

2. Körner, T.W. (1988) *Fourier Analysis* chapter 18

3. Körner, T.W. (1988) *Fourier Analysis* chapter 2

הכלי המרכזי בהוכחתו של פייר היה משפט ההתכנסות של סזארו (*Cezaro*) עבור סדרת מספרים S_n מתקיים :

$$(i) \text{ אם } S_n \rightarrow S \text{ אז גם סדרת הממוצעים תקיים : } \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n S_j \rightarrow S$$

(ii) קיימות סדרות אשר אינן מתכנסות (כגון $S_n = (-1)^n$, אך סדרת הממוצעים שלהן כן מתכנסת .

פרק V : הוכחת המשפט של וירשטראס בעזרת

אנליזת פורייה

בפרק זה שתי הוכחות למשפט הקירוב של וירשטראס .

לצורך ההוכחה הראשונה נזכיר כי טור טיילור של הפונקציה האקספוננציאלית e^z סביב האפס

$$e^z = e^0 + e^0(z-0) + \frac{e^0}{2!}(z-0)^2 + \dots + \frac{e^0}{k!}(z-0)^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{הוא :}$$

הטור מתכנס ל- e^z עבור כל $z \in \mathbb{C}$.

מכאן , בהינתן $r \in \mathbb{R}$, מקבלים שטור טיילור של הפונקציה $f(x) = e^{irx}$ ($x \in \mathbb{R}$) סביב

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(irx)^k}{k!} \quad \text{האפס הוא :}$$

(לחילופין אפשר להשתמש בפיתוחי טיילור של הפונקציות הממשיות סינוס וקוסינוס סביב אפס

$$f(x) = e^{irx} = \cos rx + i \sin rx \quad \text{על ידי השויון :}$$

הוכחה ראשונה¹ :

בהינתן פונקציה רציפה $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ נגדיר פונקציה $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ על ידי :

$$g(t) = f(|t|) \quad \text{כאשר } |t| \leq 1$$

$$g(t) = f(1) \quad \text{כאשר } 1 < |t| \leq \pi$$

$$g(t + 2\pi) = g(t) \quad \text{לכל } t \in \mathbb{R}$$

הפונקציה g שייכת בבירור למרחב F . לכן , בהינתן $\varepsilon > 0$, נובע ממשפט פייר שקיים N טבעי

$$\text{התלוי ב-} \varepsilon \text{ כך שלכל } N < n \text{ מתקיים : } \left| g(t) - \sum_{r=-n}^n \hat{f}(r) e^{irt} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{עבור כל } t \text{ ממשי .}$$

לכל מספר ממשי $R > 0$ טור טיילור של הפונקציה $f(x) = e^{irx}$ מתכנס במידה שווה ל- $f(x)$

בתחום $[-R, R]$ (מכיוון שכל טור חזקות מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור הכלול בתחום

התכנסותו) . נשתמש בתוצאה זו $2n+1$ פעמים ונמצא לכל r שלם המקיים $-n \leq r \leq n$

מספר טבעי $m(r)$ כך שלכל t השייך לקטע $[-1,1]$ יתקיים :

$$\left| \sum_{k=0}^{m(r)} \frac{(irt)^k}{k!} - e^{irt} \right| < \frac{\varepsilon}{(4n+2)|\hat{f}(r)|+1} \quad (5.1)$$

נסמן: $P(t) = \sum_{r=-n}^n \hat{f}(r) \sum_{k=0}^{m(r)} \frac{(irt)^k}{k!}$. נשים לב כי $P(t)$ הוא פולינום ב- t (עם מקדמים מרוכבים).

כעת, על ידי שימוש באי שוויון המשולש $|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$, נקבל כי לכל $0 \leq t \leq 1$,

$$|P(t) - f(t)| = |P(t) - g(t)| \leq \left| P(t) - \sum_{r=-n}^n \hat{f}(r) e^{irt} \right| + \left| \sum_{r=-n}^n \hat{f}(r) e^{irt} - g(t) \right|$$

המחובר השני קטן מ- $\frac{\varepsilon}{2}$. נציב את $P(t)$ במחובר הראשון ונקבל:

$$\begin{aligned} |P(t) - f(t)| &< \left| \sum_{r=-n}^n \hat{f}(r) \sum_{k=0}^{m(r)} \frac{(irt)^k}{k!} - \sum_{r=-n}^n \hat{f}(r) e^{irt} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \left| \sum_{r=-n}^n \hat{f}(r) \left(\sum_{k=0}^{m(r)} \frac{(irt)^k}{k!} - e^{irt} \right) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \sum_{r=-n}^n |\hat{f}(r)| \left| \sum_{k=0}^{m(r)} \frac{(irt)^k}{k!} - e^{irt} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

מהצבת (5.1) מתקבל:

$$\begin{aligned} |P(t) - f(t)| &< \sum_{r=-n}^n |\hat{f}(r)| \cdot \frac{\varepsilon}{(4n+2)|\hat{f}(r)|+1} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \sum_{r=-n}^n |\hat{f}(r)| \cdot \frac{\varepsilon}{(4n+2)|\hat{f}(r)|} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \sum_{r=-n}^n \frac{\varepsilon}{(4n+2)} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{(2n+1)\varepsilon}{(4n+2)} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

לסיכום קיבלנו: $|f(t) - P(t)| < \varepsilon$ לכל $t \in [0,1]$, כנדרש. ■

הוכחה שנייה¹:

תחילה נוכיח שתי טענות הדרושות לנו לצורך ההוכחה.

טענה 5.1: תהי $f \in F$. אם פונקציה זוגית, אז כל מקדמי פורייה b_r של f מתאפסים.

כלומר:

$$r = 1, 2, 3, \dots \quad b_r = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(rx) dx = 0$$

¹ Körner, T.W. (1988) Fourier Analysis chapter 5

הוכחה : הפונקציה $\sin(rx)$ היא אי זוגית ומהנתון f היא זוגית ולכן המכפלה

$$f(x) \cdot \sin(rx) \text{ היא אי-זוגית. מכאן } \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(rx) dx = 0, \text{ כפי שמראה ההצבה}$$

$$. x = -u$$

$$\left(\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(rx) dx &= \int_{\pi}^{-\pi} f(-u) \sin(-ur) d(-u) = \int_{-\pi}^{\pi} f(-u) \sin(-ur) du \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin(ur) du \end{aligned} \right)$$

טענה 5.2: לכל r שלם אי שלילי קיים פולינום מדרגה r שנסמנו T_r , עם מקדמים ממשיים, כך

$$\cos(r\theta) = T_r(\cos\theta) \quad \theta \in \mathbb{R}$$

המקדם המוביל של T_r הוא 1 עבור $r = 0$ ו- 2^{r-1} עבור $r \geq 1$.

הוכחה : נוכיח את הטענה באינדוקציה על r .

בסיס האינדוקציה:

$$\text{כאשר } r=0 \text{ מתקיים: } \cos(0 \cdot \theta) = 1 \text{ ונוכל להגדיר: } T_0(t) = 1$$

$$\text{כאשר } r=1 \text{ מתקיים: } \cos(1 \cdot \theta) = \cos(1 \cdot \theta) \text{ ונוכל להגדיר: } T_1(t) = t$$

הנחת האינדוקציה: יהי $m \geq 2$ מספר טבעי ונניח שהטענה נכונה עבור כל $r < m$.

צעד האינדוקציה: נוכיח נכונות הטענה עבור $r = m$.

$$\text{הוכחה: ניעזר בזהות } \cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ ונקבל:}$$

$$\begin{aligned} \cos(m\theta) &= \cos(m\theta) + \cos((m-2)\theta) - \cos((m-2)\theta) \\ &= \cos((m-1)\theta + \theta) + \cos((m-1)\theta - \theta) - \cos((m-2)\theta) \\ &= 2 \cos \left(\frac{(m-1)\theta + \theta + (m-1)\theta - \theta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{(m-1)\theta + \theta - (m-1)\theta + \theta}{2} \right) - \cos((m-2)\theta) \\ &= 2 \cos\theta \cos(m-1)\theta - \cos(m-2)\theta = 2 \cos\theta \cdot T_{m-1}(\cos\theta) - T_{m-2}(\cos\theta) \end{aligned}$$

לכן אם נגדיר: $T_m(t) = 2t \cdot T_{m-1}(t) - T_{m-2}(t)$ אז T_m הוא פולינום המקיים:

$$\cos(m\theta) = T_m(\cos\theta)$$

מהנחת האינדוקציה ידוע ש- T_{m-1} הוא פולינום מדרגה $m-1$ ו- T_{m-2} הוא פולינום מדרגה $m-2$. לכן, מההגדרה של $T_m(t)$ הדרגה של הפולינום T_m נקבעת על ידי המחבור : $2t \cdot T_{m-1}(t)$ והיא שווה ל- $1+(m-1)=m$. בנוסף המקדם המוביל של T_m הוא פעמיים המקדם המוביל של T_{m-1} ולכן מקבלים מהנחת האינדוקציה שהמקדם המוביל הוא : $2 \cdot 2^{(m-1)-1} = 2^{m-1}$ כנדרש .

הערה : הפולינומים T_m שהגדרנו לעיל נקראים פולינומי צ'יבישב (Chebyshev) .

כעת נסתמך על שתי הטענות ונוכיח את ההוכחה השנייה של משפט הקירוב של ויירשטראס .
הוכחה :

בהינתן פונקציה רציפה $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ נגדיר פונקציה $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ באופן הבא :

$$g(t) = f(|\cos(t)|) \quad \text{לכל } t \in \mathbb{T} .$$

(נשים לב שלכל $t \in \mathbb{T}$ מתקיים $|\cos(t)| \in [0,1]$ ולכן ההרכבה שמגדירה את g מוגדרת היטב) g בבירור מחזורית (עם מחזור 2π), זוגית ורציפה (כהרכבה של פונקציות רציפות) .

יהי $\varepsilon > 0$. ממשפט פייר נובע שקיים n טבעי כך ש- : $\left| g(t) - \sum_{r=-n}^n \hat{f}(r) e^{irt} \right| < \varepsilon$ עבור כל

t ממשי לפי משפט פייר וטענה 5.1 קיימים מספרים ממשיים a_0, a_1, \dots, a_n כך ש- :

$$\sup_{t \in \mathbb{T}} \left| g(t) - \sum_{r=0}^n a_r \cdot \cos(rt) \right| < \varepsilon$$

מתוך טענה 5.2 נקבל :

$$g(t) - \sum_{r=0}^n a_r \cdot \cos(rt) = f(|\cos t|) - \sum_{r=0}^n a_r \cdot T_r(\cos t)$$

על ידי ההצבה $\cos(t) = x$ (ובהתחשב ב- $|\cos t| = \cos t$ לכל $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$) נקבל :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,1]} \left| f(x) - \sum_{r=0}^n a_r \cdot T_r(x) \right| &= \sup_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} \left| f(|\cos t|) - \sum_{r=0}^n a_r \cdot T_r(\cos t) \right| \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{T}} \left| f(|\cos t|) - \sum_{r=0}^n a_r \cdot T_r(\cos t) \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

נסמן $p(x) = \sum_{r=0}^n a_r \cdot T_r(x)$ כמובן ש- p הוא פולינום וקיבלנו ש-

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

סיכום

בעבודה זו הצגנו את משפט הקירוב של ויירשטראס. הראנו בעזרת דוגמאות נגדיות שקיימים מקרים שבהם פולינומי טיילור ופולינומי האינטרפולציה של לגרנז' לא מקרבים את הפונקציה במידה שווה על קטע סגור וחסום. ולאחר מכן הצגנו שלוש הוכחות שונות (קיימות הוכחות נוספות) למשפט הקירוב של ויירשטראס.

בקרב תלמידי התיכון שאני מלמד רווחת גישה המתמטיחסת למשפטים רבים במתמטיקה כאל דברים הברורים מאליהם שאין כל צורך להוכיחם. שתי הדוגמאות הנגדיות שהצגנו בעבודה ממחישות את הטעות בגישה זו. ראוי להדגיש בעניין זה שלמרבה ההפתעה דווקא הגישה הטבעית יותר כמו פולינומי לגרנז' לא עובדת, זהו היופי של המתמטיקה שאף על פי שהגישה הטבעית יותר לא עובדת בכל זאת המשפט נכון ואפשר להוכיח אותו בשיטות פחות סטנדרטיות. הצגת שלוש הוכחות שונות מאפשרת הרחבת ההבנה של משפט הקירוב ושאלם משפט נכון אז יכולות להיות יותר מהוכחה אחת מתחומים שונים של המתמטיקה.

בהציגנו לפני תלמידים הוכחה של משפט במתמטיקה ניתן לבנות את השיעור בצורה של משפט הוכחה ואז עוד משפט והוכחה וכך להגיע לבסוף להוכחה הנדרשת, וניתן לבנות את השיעור כדיון מתפתח שבסופו יתקבל המשפט שאותו רוצים להוכיח כמסקנת הדיון. בפרק השלישי העוסק בהוכחת משפט ויירשטראס על ידי שימוש בפולינומים של ברנשטיין בחרנו להציג את ההוכחה בצורת דיון. אנחנו בוחנים תחילה מספר מקרים פרטיים דנים בהם ולאחר מכן ממשיכים ומפתחים את ההוכחה הנדרשת. בצורת לימוד כזו מתקבל המשפט כמסקנה של הדיון.

ולבסוף ברצוני להודות לפרופסור אדריס ס. תיתי על העזרה שהגיש לי בכתיבת עבודה זו.

ביבליוגרפיה

Körner, T.W: *Fourier Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge ,1988

Rivlin, T.J: *An Introduction to the Approximation of Functions*. Blaisdell Publishing Company, A, 1969

Bernstein, S.: *Quelques Remarques sur l'Interpolation*. *Mathematische Annalen*, 79, pp. 1-12, 1919

Rudin, Walter (1980): *Real and Complex Analysis*, New Dehli , Mc GrawHill