

תכנית רוטשילד ויצמן למצוינות בהוראת המדעים

פרויקט גמר

קביעת פרמטרים של מסלול אסטרואיד

מאת

מיכאל איינריס

אוקטובר, 2013

העבודה נעשתה בהדרכת

ד"ר דניאל ללוש

ד"ר דיאנה לאופר

תומך מחקר

מר אילן מנוליס

תודות

ברצוני להודות לדוקטור אמנון חזן על הזיווי הצמוד של הפרויקט.

ברצוני להודות לדוקטור דניאל לזוס על הרציונות הבניית הכלים הממוחשבים המהווים בסיס הפרויקט.

ברצוני להודות לדוקטור דיאנה לאופר על ההדרכה הצמודה וההוראות המתודולוגיות שצרכו מאד בכתיבת העבודה הסופית.

ברצוני להודות למר איילן מנוליס על הדרכה, זיכרונות ונתונים הקשורים לתנועת אסטראיד.

תודות מיוחדות לצוות המחלקה להוראת המדעים.

תוכן העניינים

5	תקציר
6	1. מבוא
6	1.1 אסטרואיד, מהו?
7	1.2 השפעת צדק. מסלולים יציבים ולא יציבים
8	1.3 סכנת אסטרואידים
10	2. מערכות קואורדינאטות שמימיות ותיאור תנועת אסטרואיד
11	2.1 מערכת הקואורדינאטות המשוונות
12	2.2 מערכת הקואורדינאטות האקליפטיות
12	2.3 הקשר בין מערכת קואורדינאטות קרטזיות לבין מערכת קואורדינאטות שמימיות
13	2.4 המרת קואורדינאטות משוונות לקואורדינאטות אקליפטיות
14	2.5 מערכת הקואורדינאטות ההליוצנטרית
15	2.6 אלמנטים של מסלול סביב השמש
18	2.7 המרת קואורדינאטות אקליפטיות להליוצנטריות
20	2.8 התלות של קואורדינאטות הליוצנטריות של פלנטה בזמן
20	2.9 התלות של קואורדינאטות אקליפטיות של פלנטה בזמן
21	3. חישוב התנועה הנראית של כוכב לכת חיצוני באמצעות Excel
24	3.1 השוואת הגרפים
26	4. התאמת פרמטרים מסלול אסטרואיד לקבוצת נתונים
27	4.1 חישוב קו אורך של אסטרואיד, λ , כפונקציה של שתי משתנים, r ו- λ_0
29	4.2 חישוב $\lambda(\lambda_0, r)$ עבור נקודות זמן אחרות
30	4.3 הצגת קו אורך λ של אסטרואיד כפונקציה של שלושה משתנים: r, λ_0, t
33	5. תצפית תנועת האסטרואיד וקביעת פרמטרים של מסלולו
36	5.1 קביעת פרמטרים של מסלול האסטרואיד לפי עשרה תצפיות נבחרות
41	6. היבטים הפדגוגיים של העבודה
45	סיכום
47	ביבליוגרפיה
48	נספחים

תקציר

אסטרואידיים הם גופים קטנים במערכת השמש שהתגלו בתחילת המאה ה-19. מחקרם חשוב להבנת היווצרות מערכת השמש ותנועת הגופים במערכת השמש. רוב האסטרואידיים מצוי בתחום שבין $2.1 < a < 3.2$ יחידות אסטרונומיות מן השמש בין המסלולים של מאדים וצדק. אסטרואידיים מושפעים מאוד מכוח המשיכה של צדק, הנמצא לא רחוק מהם. השפעה זו מוגברת במידה ניכרת, כאשר זמני המחזור שלהם ושל הצדק מתייחסים זה לזה כמספרים שלמים. יש אסטרואידיים המקיפים את השמש במסלולים מוארכים ולא יציבים. ישנם אסטרואידיים קרובי ארץ (NEO) המתקרבים למסלולו של כדור הארץ ואף חוצים אותו. לפי כך נוצרת סכנת התנגשות אסטרואיד בכדור הארץ. לכן יש חשיבות עצומה לסיווג אסטרואידיים לקבוצות משנה לפי הפרמטרים המסלוליים שלהם. בזמן המודרני הדבר נעשה בעזרת כלים ממוחשבים.

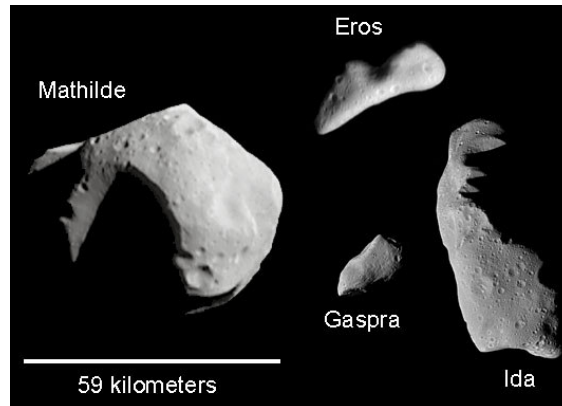
מטרת העבודה הזו לבנות כלי ממוחשב, על בסיס תוכנת Excel, לקביעת פרמטרים מסלוליים של אסטרואיד הנע סביב השמש במסלול כמעט מעגלי, קרוב מאוד למישור המילקה.

הדבר מצייד את מורה, המלמד פיזיקה בתיכון, בכלים מוחשיים, הנחוצים להוראת הנושא של "כבידה, רקע היסטורי וחוקי קפלר" בצורה מיטבית.

1. מבוא

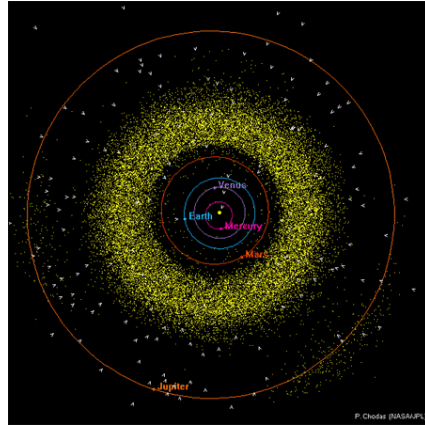
1.1 אסטרואיד, מהו?

לפי המיון המודרני, מערכת השמש מכילה את השמש במרכזה, 8 כוכבי לכת, 5 כוכבי לכת ננסיים, ירחים, אסטרואידים, שביטים ועוד גופים קטנים. האסטרואידים הם גופים שמימיים מוצקים בצורות וגדלים שונים (מכמה עשרות מטרים לכמה מאות קילומטרים), המקיפים את השמש. מרבית האסטרואידים נמצאים בין מאדים לצדק בחגורת האסטרואידים. אין להם צורה גיאומטרית סדירה, אין להם אטמוספירה, אבל, אל אף כוח משיכה חלש מאוד, שהם מפעילים, לחלק מהם יש לוויינים. "אסטרואיד" (Asteroid) ביוונית משמעו "דמוי כוכב" (Star-Like). שם זה הוצע על ידי האסטרונום הנודע ויליאם הרשל בתחילת המאה ה-19, משום שבתצפיות הראשונות באסטרואידים, הם נראו כמקור אור נקודתי כמו כוכבים ולא כבעלי דיסקה ככוכבי לכת או הילה כשביטים (תמונה 1).



תמונה 1 – צילום של אסטרואידים שצולמו במשימות חלל שונות (NASA)

עד עכשיו אין הגדרה מדויקת לאסטרואיד. בדרך כלל שם "אסטרואיד" מקבל גוף, שקוטרו גדול מ-30 מטר. האסטרואיד הגדול ביותר, קוטרו 1000 ק"מ – צ'רס Ceres, היום מוגדר כפלנטה ננסית. מצילומים ישירים מלוויינים, פני שטחם של האסטרואידים מכוסים במכתשים, המעידים על תהליכי התנגשות היכולים לשנות את מסלולם. הכבידה החזקה של כוכב הלכת צדק מנעה מהגופים האלה להתלכד ליצירת כוכב לכת והם נותרו כ"חגורה" ("חגורת האסטרואידים") בין מאדים לצדק (איור 1). המסה הכוללת של כל האסטרואידים היא כמסת הירח. הרכבם העיקרי: מינרלים ומתכות, - ובנוסף הם מכילים כ-2% חומרים נדיפים ומים. בחלקם יש תרכובות פחמן המכונים קונדריטים. את הרכבם ניתן לזהות לפי ניתוח החזרת האור מפני השטח, האלבדו (albedo). ככל שהשטח כהה יותר, כך הם מכילים יותר מתכות בדומה למטאוריטים. משינויים בעוצמת האור המוחזרת (עקומת האור) מאסטרואידים ניתן לחשב את קצב הסיבוב שלהם שהוא בין ימים למספר שעות.

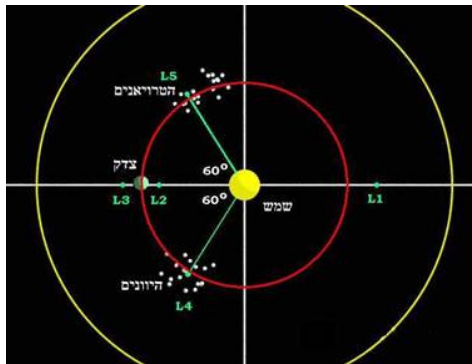


איור 1- מיקום חגורת האסטרואידים במערכת השמש

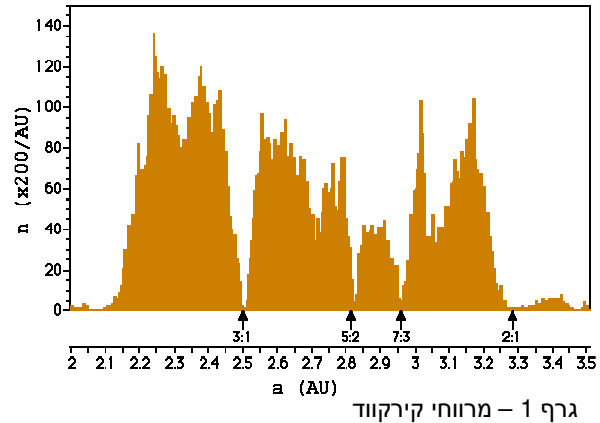
1.2 השפעת צדק. מסלולים יציבים ולא יציבים

השפעת כוח הכבידה העצום של צדק על חגורת האסטרואידים הובילה לכך שיש בה מספר מסלולים בעלי מרחקים ממוצעים מן השמש, a , "אסורים". במסלולים כאלה אסטרואיד לא יכול לנוע במשך זמן רב. הערכים האסורים של a נקראים מרווחי קירקווד (Kirkwood gaps) על שם דניאל קירקווד, מדען שהצליח בפעם הראשונה לזהות אותם. אסטרואידים במסלולי קירקווד נכנסים למצב תהודה עם תנועת צדק, הגורם, עם הזמן, לסילוקו של האסטרואיד מהמסלול. זמני המחזור המתאימים למסלולי קירקווד שווים 3.95, 4.74, 5.08, 5.93 שנים. זמנים אלה מהווים יחסים פשוטים של 1:2, 1:3, 2:5, 3:7, 1:3, בהתאמה, עם זמן המחזור של צדק ששווה 11.86 שנים. (Sawyer Hogg, H., 1950).

ברור כי אסטרואידים בעלי זמן המחזור הנמצא ביחס 1:1 עם זה של צדק נמצאים ממש על המסלול שלו. קבוצה זו של אסטרואידים נמצאת במצב היציב ביותר, שבו השקול של כוח הכובד שמופעל עליהם על-ידי צדק והשמש מכוון בדיוק למרכז ההקפה המשותף שלהן. קבוצה זו מחולקת לשתי קבוצות משנה – המכונות יוונים וטרויאנים (Trojans and Greeks) – האחת מקדימה את צדק ואילו השנייה נעה בעקבותיו, ושתיהן יוצרות משולשים שווה צלעות עם השמש וצדק (איור 2).



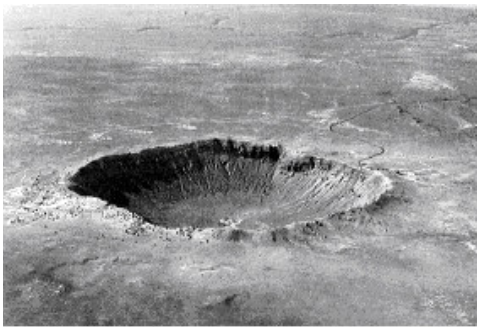
איור 2- מיקום של קבוצת יוונים וטרויאנים



גרף 1 – מרווחי קירקווד

1.3 סכנת אסטרואידים

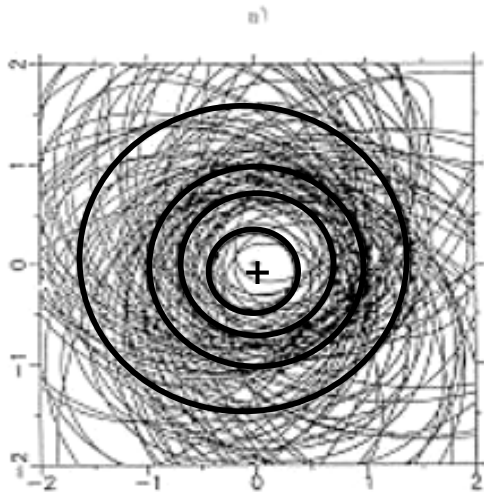
פרט לחגורת האסטרואידים, הנמצאת בין מאדים לצדק, יש אסטרואידים המקיפים את השמש במסלולים מוארכים ולא יציבים, המתקרבים למסלולו של כדור הארץ, ואף חוצים אותו. אסטרואידים אלו הם המקור העיקרי של מטאוריטים ומהווים סכנת התנגשות בכדור הארץ. כיום חושבים רוב האסטרונומים שהסיכוי לפגיעה בידי גורם שמימי שגודלו ק"מ אחד הוא בשיעור של 1 ל-5,000 למאה השנים הבאות. פגיעתו עלולה להחריב מדינה שלמה, בגודל בינוני. החוקרים סבורים גם כי יתכן שבפגיעת אסטרואיד גדול, עצם קיומה של התרבות האנושית כולה יועמד בסכנה – אם כתוצאה מפגיעה כנ"ל, יתרחש "חורף גרעיני". באירוע הזה עלולים להיכחד רוב מיני חיות, חקלאות תיהרס ויהיו השפעות קטלניות אחרות. אירועים פחות אלימים, הנגרמים מנפילת אסטרואידים שקוטרם מאה מטר, מתרחשים לעתים קרובות יותר – אולי אחת למאה שנה. גודלו של הגוף שנפל בתחילת המאה ה-20 בשנת 1908 בטונגוסקה שבסיביר היה כנראה רק 50 מטר – אבל הוא חיסל שם יער שלם. בבוקר של 15 בפברואר 2013 מטאור בקוטר כ-17 מטר נכנס לאטמוספירה של כדור הארץ במהירות של 15 km/s, לפחות, והתפוצץ בסמוך לעיר צ'ליאבינסק. כ-3,000 מבנים בשם ערים ברחבי האזור נפגעו בשל הפיצוץ. דווח על כ-1,500 פצועים, בהם שניים קשה. החיפוש לגילוי גופים שעלולים לפגוע בנו, מתבצעים בעיקר בארה"ב. הקונגרס קבע שזה יעדה של סוכנות החלל, נאס"א. פעילות מחקרית באותו נושא מתרחשת גם ביפן, רוסיה ובאירופה.



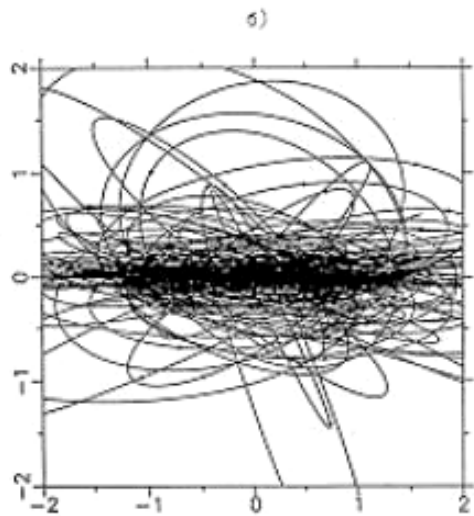
תמונה 2- מכתש אריזונה

באריזונה (ארה"ב) מכתש שקוטרו 1200 m ועומקו 175 m שנוצר כתוצאה של פגיעת אסטרואיד בקוטר כ-60 m לפני כ-49 אלף שנים (תמונה 2).

עד היום התגלו למעלה מ-2,000 אסטרואידים בעלי קוטר שעולה על 1 ק"מ, שחוצים את מסלולו של כדור הארץ, ועל 300,000 כאלה שקוטרם גדול מ-100 מ' (Morrison D., 1992). אסטרואידים כאלה מכונים NEO, גופים קרובי ארץ (Near Earth Objects). באיור 3 (א), (ב), בעמוד הבא, ניתן לראות מסלולים של 150 אסטרואידים שמסלוליהם חוצים את מסלול כדור הארץ.



א. המבט מקוטב המילקה. אסטרואידיים החוצים את מסלוליהם של כוכבי הלכת מקבוצת כדור הארץ: כוכב חמה, נוגה, כדור ארץ ומאדים. הסימן + מסמן מיקומה של השמש.

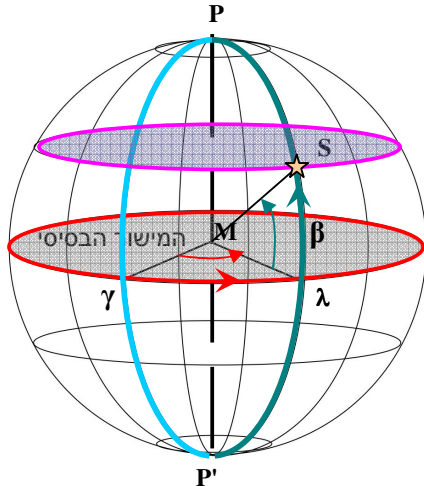


ב. המבט ממישור המילקה. המרחקים על הצירים נתונים ב- יחידות של AU (יחידה אסטרונומית – המרחק בין כדור הארץ לשמש, 150 מיליון ק"מ)

איור 3 – מסלולים של 150 אסטרואידיים שמסלולים חוצים את המסלול של כדור הארץ.

2. מערכות קואורדינאטות שמימיות ותיאור תנועת אסטרואיד

על מנת להבין כיצד מגדירים מיקום של עצם שמימי צריך להגדיר מספר מושגים הקשורים למערכת קואורדינאטות שמימיות.



איור 4- מערכת הקואורדינאטות השמימית

מערכת קואורדינאטות שמימית זה השם הכולל של מספר מערכות קואורדינאטות כדוריות לתיאור מיקום גורמי שמיים על המעטפת של כדור דמיוני, בעל רדיוס גדול מאוד, שבמרכזו נמצאת העין של הצופה (איור 4).

נתבונן במישור, העובר במרכז, M , של הכדור. מישור זה נקרא "המישור הבסיסי". החתך של המישור הבסיסי עם מעטפת הכדור מהווה מעגל גדול. מעגל זה נקרא "קו המשווה" של המערכת.

במרכז הכדור, M , נעלה אנך למישור הבסיסי. אנך זה נקרא "ציר המערכת". הציר חותך את מעטפת הכדור בשתי נקודות הנקראות "קטבים". אחת מהן נקראת הקוטב ה"צפוני" והאחרת - הקוטב ה"דרומי". באיור 4 הציר והקטבים מסומים באותיות P , P' .

כל מישור, העובר דרך ציר המערכת, מאונך למישור הבסיסי וחותך את מעטפת הכדור במעגל גדול. חצי המעגל בין הקטבים P , P' נקרא "קו אורך".

בוחרים על קו המשווה נקודה γ . קו האורך העובר בנקודה γ מוגדר כקו אורך 0.

כל גורמי השמיים מתוארים על מעטפת הכדור על ידי נקודות (למשל, הנקודה S). נתבונן בקו האורך העובר בנקודה S . קו אורך זה חותך את קו המשווה בנקודה λ . לכל קו האורך ניתן להתאים בצורה חד-חד-ערכית נקודה λ ואת גודל הזווית $\gamma M \lambda$ הנמדד נגד כיוון השעון, אם מסתכלים מהקוטב הצפוני. לפי כך קווי האורך, λ , נמצאים בתחום $0 \leq \lambda < 2\pi$.

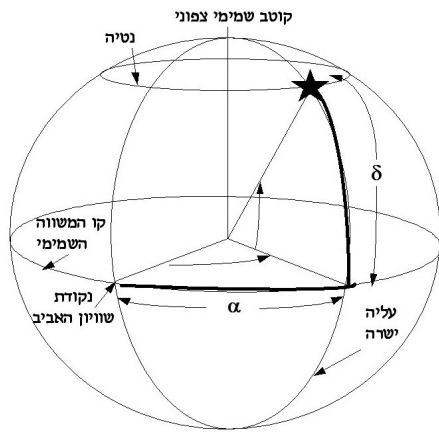
נתבונן במישור, העובר בנקודה S , במקביל למישור הבסיסי. מישור זה חותך את מעטפת הכדור במעגל קטן הנקרא "קו רוחב". לכל קו רוחב ניתן להתאים בצורה חד-חד-ערכית זווית $\angle S M \lambda = \beta$, אשר נלקחת עם סימן הפלוס, כאשר S נמצאת בחצי הכדור הצפוני, ועם סימן המינוס, כאשר S נמצאת בחצי הכדור הדרומי. לפי כך קווי הרוחב, β , נמצאים בתחום

$$-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

קיימות מערכות שמימיות שונות: הקואורדינאטות האלט-אזימוטליות, הקואורדינאטות המשווניות, הקואורדינאטות האקליפטיות, הקואורדינאטות ההליוצנטריות וכו'.

בעבודה זו אין שימוש בקואורדינטות האלט-אזימוטליות ולכן נתמקד בשלושת הסוגים האחרים.

2.1 מערכת הקואורדינטות המשוונות



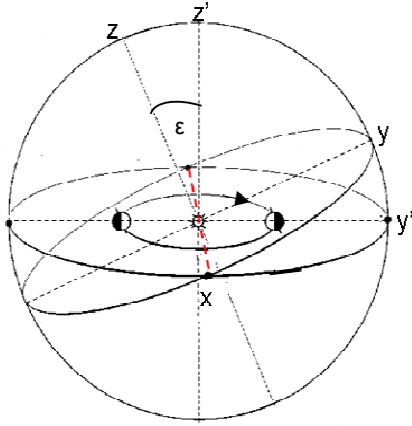
בתרשים שלפניכם (איור 5) (פת-אל, 2011) מתוארת מערכת שהמרכז שלה נמצא במרכז כדור הארץ, המישור הבסיסי מתלכד עם המישור העובר בקו המשווה של כדור הארץ וצירה מתלכד עם ציר הסיבוב של כדור הארץ סביב עצמו. קווי אורך ורוחב במערכת זו מקבילים לקווי האורך והרוחב הגיאוגרפיים של כדור הארץ. קו האורך 0 עובר בנקודת שוויון האביב, γ , ומזרחית לו ערכי קווי האורך מקבלים ערכים חיוביים. נקודת שוויון האביב היא נקודה בה השמש פוגשת את קו המשווה השמימי. קו אורך נקרא גם עלייה ישרה (Right Ascension) וקו

איור 5 – מערכת הקואורדינטות המשוונות

רוחב נקרא גם נטייה (Declination). לפעמים עבור העלייה הישרה משתמשים במידה שעונית של הזווית. המעבר בין המידה השעונית למידה הזוויתית נעשה על ידי השיקול כי $24h = 360^\circ$. מכך $1h = 15^\circ$, (דקות של זווית) $1min = 15'$, (שניות של זווית) $1sec = 15''$.

- Ra: קו אורך (מזרח-מערב).
- Dec: קו רוחב (צפון-דרום).

2.4 המרת קואורדינאטות משווניות לקואורדינאטות אקליפטיות



איור 8 – הקשר בין הקואורדינאטות

הצורך לכך נובע מהעובדה כי תצפיות אסטרונומיות בטלסקופ מבצעים בקואורדינאטות משווניות ואילו תיאור תנועת גורמי השמיים במערכת השמש נוח לבצע בעזרת הקואורדינאטות האקליפטיות. נסמן את הקואורדינאטות המשווניות (α, δ) , את הקואורדינאטות הקרטזיות המתאימות (x, y, z) , את הקואורדינאטות האקליפטיות (λ, β) , את הקואורדינאטות הקרטזיות המתאימות אליפטיות (x', y', z') (ראה איור 8).

כפי שכבר ציינתי, המערכת (x', y', z') מתקבלת מהמערכת (x, y, z) על ידי סיבוב בזווית ε סביב ציר ה- x .

מטריצת המעבר במקרה זה נראית כך:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon) & \sin(\varepsilon) \\ 0 & -\sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

נבטא קואורדינאטות קרטזיות באמצעות קואורדינאטות שמימיות מתאימות, נשתמש במטריצת המעבר ונצמצם במרחק r . לפי כך נקבל:

$$\begin{pmatrix} \cos(\lambda)\cos(\beta) \\ \sin(\lambda)\cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon) & \sin(\varepsilon) \\ 0 & -\sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\delta) \\ \sin(\alpha)\cos(\delta) \\ \sin(\delta) \end{pmatrix}$$

לפי כלל המכפלה של מטריצות מקבילים:

$$\begin{aligned} \cos(\lambda)\cos(\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\delta) \\ \sin(\lambda)\cos(\beta) &= \cos(\varepsilon)\sin(\alpha)\cos(\delta) + \sin(\varepsilon)\sin(\delta) \\ \sin(\beta) &= -\sin(\varepsilon)\sin(\alpha)\cos(\delta) + \cos(\varepsilon)\sin(\delta) \end{aligned}$$

נחלק את המשוואה השנייה במשוואה הראשונה ונעתיק את המשוואה השלישית:

$$\tan(\lambda) = \frac{\cos(\varepsilon)\sin(\alpha) + \sin(\varepsilon)\tan(\delta)}{\cos(\alpha)}$$

$$\sin(\beta) = \cos(\varepsilon)\sin(\delta) - \sin(\varepsilon)\sin(\alpha)\cos(\delta)$$

כאשר:

$$\text{Dec} - \delta . \text{RA} - \alpha$$

אקליפטי: λ - קו אורך. β - קו רוחב.

$$\varepsilon - \text{נטיית הציר של הארץ} = 23.5 \text{ מעלות.}$$

כדי לבטא את קו אורך, λ , יש לקחת בחשבון כי טווח הפונקציה $\arctan(x)$ הוא קטע

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \text{ ואילו קו אורך, } \lambda, \text{ מקבל את כל הערכים בין } 0 \text{ ל-} 2\pi. \text{ ההבחנה בין } \lambda$$

הנמצאת ברביע הראשון או ברביע הרביעי לבין זה הנמצאת ברביע השני או השלישי היא לפי הסימן של x' : אם $x' = \cos(\lambda)\cos(\beta) = \cos(\alpha)\cos(\delta) < 0$, אז λ נמצא ברביע השני

או השלישי. במקרה זה $\lambda = \pi + \arctan[\tan(\lambda)]$. אם $x' = \cos(\alpha)\cos(\delta) > 0$ ונוסף

$$\tan(\lambda) > 0 \text{ אז } \lambda \text{ נמצאת ברביע הראשון ולכן } \lambda = \arctan[\tan(\lambda)]. \text{ אם}$$

$$x' = \cos(\alpha)\cos(\delta) > 0 \text{ ו-} \tan(\lambda) < 0, \text{ אז } \lambda \text{ נמצאת ברביע הרביעי ולכן.}$$

$$\lambda = 2\pi + \arctan[\tan(\lambda)]$$

עבודה זו מתמקדת באסטרואידי הנע במסלול כמעט מעגלי בדומה פלנטה במישור המילכה,

$$\text{לפי כך } \beta \approx 0 \text{ ולכן גם } \cos(\varepsilon)\sin(\delta) - \sin(\varepsilon)\sin(\alpha)\cos(\delta) \approx 0.$$

2.5 מערכת הקואורדינאטות ההליוצנטרית

לרוב, במרכז המערכת ממוקם כדור הארץ, כך המערכת אמנם יותר נוחה לתיאור תנועת גרמי השמים ביחס לצופה האנושי, אולם אין היא משקפת את נתוני המסלול האמתיים. לכן לעתים ממוקמת השמש במרכז המערכת, ואז נתוני מיקום הגופים מתוארים יחסית לצופה היפותטי הנמצא במרכז השמש. כדי לדעת את מיקומו הממשי של גוף בחלל, ולא רק את מיקומו הנראה על כפת השמיים, יש לנקוב בפרמטר נוסף, הוא מרחק הגוף מהגוף המרכזי, השמש. בשאר הפרמטרים מערכת הקואורדינאטות ההליוצנטרית זהה למערכת הקואורדינאטות האקליפטיות. מערכת קואורדינאטות שבמרכזה שמש משמשת לחישוב מסלולים כוכבי הלכת וגופים אחרים במערכת השמש.

2.6 אלמנטים של מסלול סביב השמש

כדי לתאר מסלול של גוף סביב שמש יש לדעת שישה פרמטרים התחלתיים: (x_0, y_0, z_0) ,

(v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}) . להלן דוגמה לאופן חישוב מסלול גוף סביב "שמש" במישור xy

(Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M. 1963), עבור התנאים ההתחלתיים

הבאים: $x_0 = 0.5, y_0 = 0, v_{x0} = 0, v_{y0} = 1.63$. מניחים כי מסת ה"שמש" היא כזו

ש- $GM = 1$. מחוק המשיכה העולמית נובע כי $a_x = -\frac{x}{r^3}, a_y = -\frac{y}{r^3}$, כאשר

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$. לוקחים מרווחי זמן, Δt , קצרים מאוד, למשל $\Delta t = 0.1$ ומחשבים את

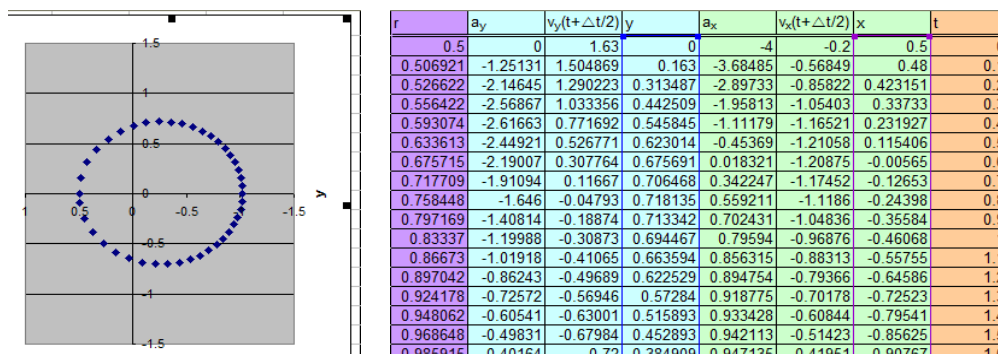
המסלול באמצעות נוסחאות הבאות: $x_{t+\Delta t} = x_t + v_{t+0.5\Delta t} \cdot \Delta t, v_{t+0.5\Delta t} = v_{t-0.5\Delta t} + a_t \cdot \Delta t$

ובנוסף מגדירים, כי $v_{0.5\Delta t} = v_0 + a_0 \cdot \frac{\Delta t}{2}$. בטבלה שלהלן (טבלה 1) מתואר חלק מהגיליון

לחישוב המסלול הפלנטה. אפשר לראות (גרף 2) כי לפיזור (x, y) , המתאר את המסלול

סביב ה"שמש", יש צורה של אליפסה שמוקד שלה נמצא בראשית הצירים בה נמצאת

ה"שמש".



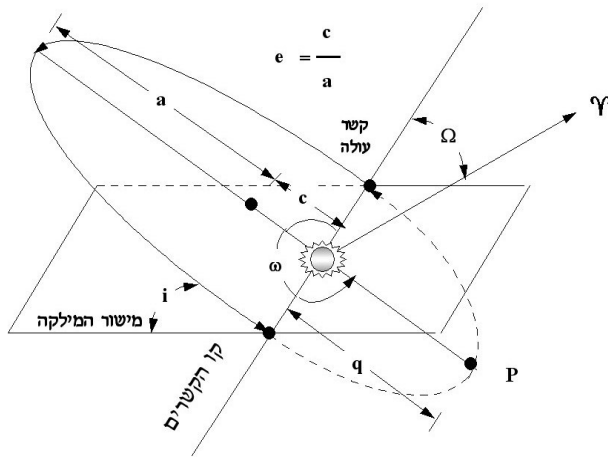
גרף 2 – תנועה סביב "השמש"

טבלה 1 - חישוב מסלול סביב "השמש"

ברור כי באותה הדרך ניתן לתאר מסלול ההקפה במרחב תלת ממדי על ידי הוספת שתי פרמטרים נוספים: z_0, v_{z0} . בדרך כזו ניתן גם לקחת בחשבון את השפעה של גופים אחרים (למשל, צדק).

קיימת גם שיטה אחרת לתיאור המסלול סביב השמש באמצעות חוקי קפלר המתוארת בתרשים שלהלן (איור 9) (פת-אל, 2011). לפי שיטה זו המסלול סביב השמש מתואר על ידי

שישה פרמטרים אחרים. כדי להסביר את השיטה יש להגדיר תחילה מספר של מושגים.



איור 9 – תיאור מסלול סביב השמש

פריאפסיס (periapsis), P - נקודה במסלול ההקפה של גוף מסוים סביב גוף שני, שבה המרחק בין שני הגופים הוא הקטן ביותר. (גוף מקיף את השמש, נקודה זו מכונה פריהליון).
אפאפסיס (apapsis) - נקודה במסלול ההקפה של גוף מסוים סביב גוף שני, שבה המרחק בין שני הגופים הוא הגדול ביותר. (במקרה בו גוף מקיף את השמש, נקודת האפאפסיס מכונה אפהליון).
קו האפסידים (line of apsides) - הקו המחבר את נקודות הפריאפסיס והאפאפסיס.

קשר, קשר עולה, קו הקשרים – נקודה בה מסלול ההקפה חותך את המישור הבסיסי (מישור המילקה) במקרו בו הגוף המרכזי הוא השמש), נקראות קשרים. הקשר שבמעברו הגוף עובר מחצי המרחב $z < 0$ לחצי המרחב $z > 0$ נקרא הקשר העולה. ישר שבו מישור המסלול חותך את המישור הבסיסי נקרא קו הקשרים.

ששת הקבועים המשמשים לתיאור מסלול ההקפה לפי חקי קפלר הם:

- **המרחק הממוצע, a**. (חצי אורך הציר הראשי)
- **האקסצנטריות, e**. (היחס בין המרחק בין המוקדים לאורך הציר הראשי).
- **נטיית מישור הסיבוב ביחס למישור המילכה (inclination), i**. $0 \leq i \leq \pi$. (ראה ציור).
- **קו האורך של הקשר העולה (longitude of the ascending node), Ω**. $0 \leq \Omega < 2\pi$. (ראה ציור).
- **הנתון של הפריהליון (argument of perihelion), ω** – הזווית בין הקשר העולה לנקודת הפריהליון במישור המסלול. $0 \leq \omega < 2\pi$
- **פרמטר דינאמי, τ**, נקודת הזמן שבו מגיע גורם השמים לנקודת הפריהליון במסלול ההקפה (המבוטאת בתאריך אזרחי).

לו היה אפשר לקבל את $x(t)$ ו- $y(t)$ במישור ההקפה בצורה מפורשת, אז היה אפשר לקבל את השיעורים האלה במערכת הצירים הקשורים במישור המילקה. לשם כך יש לסובב קודם את מערכת הצירים הקשורה למישור ההקפה בזווית ω סביב ציר z , בכך נקבל מערכת

צירים חדשה שבה ציר ה- x מתלכד עם קו הקשרים. כעת נסובב את מערכת הצירים בזווית i סביב ציר הקשרים (ציר ה- x), כדי לקבל מערכת קואורדינאטות שהמישור oxy שלה מתלכד עם מישור המילקה. סיבוב נוסף של מערכת הקואורדינאטות הוא סיבוב בזווית סביב ציר z שבו ציר ה- x מתלכד עם הכיוון לנקודת שוויון האביב. מטריצת המעבר של כל אחת משלושת הסיבובים הנ"ל דומה למטריצה שבה השתמשנו להמרת קואורדינאטות משוונות לקואורדינאטות אקליפטיות. ניתן לקבל מטריצה אחד כמכפלה של שלושת המטריצות.

הבעיה שלא ניתן לקבל את מיקום האסטרואיד, בתנועתו סביב השמש במסלול אליפטי, בצורה מפורשת, זאת אומרת לא ניתן לקבל נוסחה שבה מציבים זמן ומקבלים מיקום הגוף. נציג את הדבר בצורה מפורטת. קודם כל נבטא את המרחק בין מוקד האליפסה למרכז, c :
 $c = e \cdot a$

לפי כך $r_{\min} = a - c = a(1 - e)$, $r_{\max} = a + c = a(1 + e)$. במצבים האלה (פריהליון ואפהליון) מהירות הגוף מאונכת לרדיוס-ווקטור המועבר מהשמש לגוף ולכן, כפי שנובע מהחוק השני של קפלר ($\frac{dS}{dt} = const$) מתקיים:

$$v_{\min} = v_{\max} \cdot \frac{1 - e}{1 + e} \Leftrightarrow \frac{1}{2} v_{\max} a(1 - e) = \frac{1}{2} v_{\min} a(1 + e)$$

כעת נשתמש בחוק שימור האנרגיה המכאנית עבור המצבים האלה:

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} - \frac{GMm}{r_{\min}} = \frac{mv_{\min}^2}{2} - \frac{GMm}{r_{\max}}$$

בהצבת הביטויים המתאימים, הרשמים למעלה עבור v_{\min} , r_{\min} ו- r_{\max} אנו מקבלים משוואה המאפשרת למצוא את ה- v_{\max}^2 ולכן גם את האנרגיה המכאנית E .

כידוע, בפתרון של בעיה קפלר מגיעים למשוואת האנרגיה המכאנית הבאה:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = const$$

הפרטי שלה, (כאשר $\dot{r} = 0$). האות L מסמנת את התנע הזוויתי, אשר גם נשמרת בתנועת

פלנטה סביב השמש. בעצם $L = 2m\dot{S}$, כאשר S הוא שטח שמתווה רדיוס ווקטור של

פלנטה בזמן מסוים. כפי שכבר ציינתי, $\dot{S} = const = \frac{1}{2} r_{\min} \cdot v_{\max}$, לכן $L = mr_{\min} \cdot v_{\max}$. לפי

כך מקבלים

$$U_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \text{ כאשר } \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff}(r))}$$

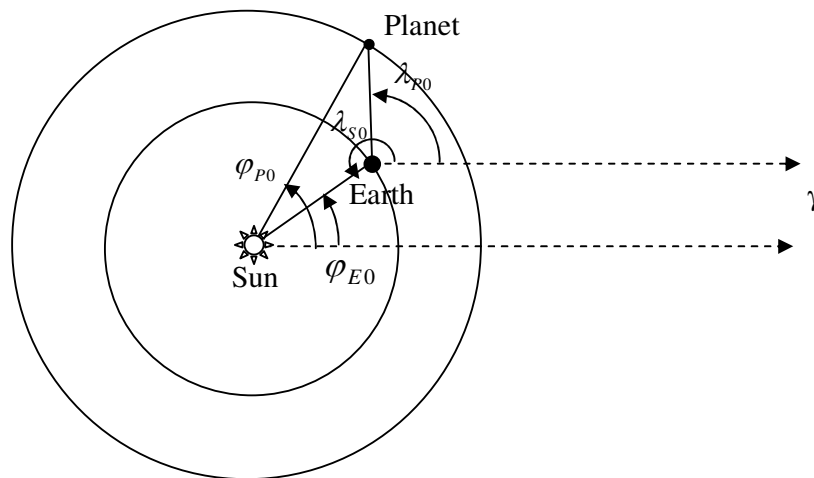
(כאן השתמשתי בפרמטר הדינאמי).

$$t - \tau = \int_{r_{\min}}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r'))}}$$

האינטגרל האחרון ניתן לחישוב, אבל הבעיה שמקבלים $t(r)$ ולא $r(t)$. הדבר לא מתאים כי יש לבטא את r בזמן המסוים של תצפית. גם השיטה של Feynman לא עוזרת במקרה זה, כי היא מאפשרת למצוא את $x(t)$ ו- $y(t)$ רק על סמך המצבים הקודמים, ברקורסיה. המקרה היחיד שבו ניתן לבטא את $r(t)$ בצורה מפורשת זה המקרה בו מתמקד הפרויקט הזה: המקרה בו אסטרואידי נע במסלול כמעט מעגלי. לשם הפשטות העבודה מציבה גם מגבלה נוספת: נדון רק באסטרואידי שנמצא במישור המילכה. במקרה זה אקסצנטריות ונטיית מישור הסיבוב שווים 0, אין משמעות למושגים פריהליון, קשרים, קו אורך של הקשר העולה, הנתון של הפריהליון. לפי כך אין גם משמעות לפרמטר דינמי. במקרה זה מספיקים רק שני פרמטרים לתיאור תנועת גורם שמימי, למשל מרחקו מהשמש ומיקומו על המסלול ברגע מסוים (למשל ברגע $t = 0$).

2.7 המרת קואורדינאטות אקליפטיות להליוצנטריות

לצורך המרת קואורדינאטות אקליפטיות התחלתיות של פלנטה חיצונית, הנעה במסלול מעגלי במישור המילכה, לקואורדינאטות שלה במערכת הייחוס ההליוצנטרית יש לציין שבשתי המערכות קו הרוחב של הפלנטה שווה 0, כי היא נמצאת במישור המילכה.



איור 10 - ההבדל בין מערכות הקואורדינטות

נסמן (איור 10):

- λ_{p0} - קו הארוך ההתחלתי של פלנטה במערכת האקליפטית
- λ_{s0} - קו האורך של השמש בהתחלת התצפית במערכת האקליפטית
- φ_{p0} - קו הארוך ההתחלתי של פלנטה במערכת ההליוצנטרית
- φ_{E0} - קו האורך של כדור הארץ בהתחלת התצפית במערכת ההליוצנטרית
- γ - נקודת שוויון האביב
- r_E - המרחק בין השמש לכדור הארץ ($r_E = SE$)
- r_p - המרחק בין השמש לפלנטה ($r_p = SP$)

סכום זוויות חד צדדיות בין ישרים מקבילים שווה π , לכן, כפי שנובע מהצירור שלעיל,

$$\varphi_{E0} = \pi - \angle SE\gamma = \pi - (2\pi - \lambda_{s0}) = \lambda_{s0} - \pi$$

$$\angle PES = 2\pi - \lambda_{p0} - \angle SE\gamma = 2\pi - \lambda_{p0} - (2\pi - \lambda_{s0}) = \lambda_{s0} - \lambda_{p0}$$

נתבונן במשולש SEP. מהמשפט הסינוסים נובע, כי

$$\frac{r_p}{\sin(\lambda_{s0} - \lambda_{p0})} = \frac{r_E}{\sin \angle SPE}$$

מדובר על פלנטה חיצונית, לכן $r_p > r_E$. לפי כך זווית SPE, הנמצאת מול הצלע הקטנה,

היא זווית חדה. הטווח של פונקצית ארק-סינוס הוא $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, לכן

$$\angle SPE = \arcsin\left(\frac{r_E}{r_p} \sin(\lambda_{s0} - \lambda_{p0})\right)$$

מסכום זוויות במשולש מקבלים

$$\angle PSE = \pi - \angle SEP - \angle SPE = \pi - (\lambda_{s0} - \lambda_{p0}) - \arcsin\left(\frac{r_E}{r_p} \sin(\lambda_{s0} - \lambda_{p0})\right)$$

$$\varphi_{p0} = \angle PSE + \varphi_{E0} = \pi - \lambda_{s0} + \lambda_{p0} - \arcsin\left(\frac{r_E}{r_p} \sin(\lambda_{s0} - \lambda_{p0})\right) + \lambda_{s0} - \pi$$

פונקצית ארק-סינוס היא פונקציה אי זוגית. גם פונקצית סינוס היא פונקציה אי זוגית. לכן

$$\boxed{\varphi_{p0} = \lambda_{p0} + \arcsin\left(\frac{r_E}{r_p} \sin(\lambda_{p0} - \lambda_{s0})\right)}$$

2.8 התלות של קואורדינאטות הליוצנטריות של פלנטה בזמן

בעבודה זו מניחים שכדור הארץ נע סביב שמש במסלול מעגלי ולכן יש לו מהירות זוויתית קבועה. המהירות הזוויתית של התנועה המעגלית של כדור הארץ היא

$$\omega_E = \frac{2\pi}{365.25} d^{-1} = \frac{2\pi}{365.25 \cdot 24 \cdot 60} \text{min}^{-1}$$

מהחוק השלישי של קפלר נובע כי

$$\omega_P = \omega_E \cdot \left(\frac{r_E}{r_P}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{\omega_P^2}{\omega_E^2} = \frac{r_E^3}{r_P^3}$$

לפי כך מקבלים

$$\varphi_P = \lambda_{P0} + \arcsin\left(\frac{r_E}{r_P} \sin(\lambda_{P0} - \lambda_{S0})\right) + \omega_E \cdot \left(\frac{r_E}{r_P}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot t$$

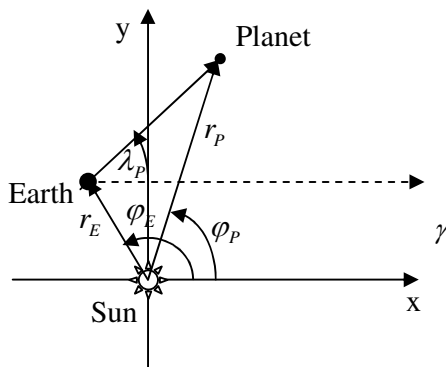
בנוסחה זה נוח לבטא את המרחקים ביחידות אסטרונומיות, הזוויות – ברדיאן, זמן ביממות או בשניות (בהתאם לכך בוחרים נוסחה מתאימה למהירות זוויתית של כדור הארץ סביב שמש).

קו האורך של כדור הארץ φ_E במערכת הייחוס ההליוצנטרית מתבטא בביטוי:

$$\varphi_E = \lambda_{S0} - \pi + \omega_E \cdot t$$

2.9 התלות של קואורדינאטות אקליפטיות של פלנטה בזמן

נתאר את מיקום של פלנטה וכדור הארץ בקואורדינאטות



קרטזיות שראשיתם נמצאת במרכז השמש, ציר ה-x מתלכד עם כיוון הנקודת שוויון האביב והמישור x-y מתלכד עם מישור המילקה (איור 11).

$$y_P = r_P \sin(\varphi_P) \quad , \quad x_P = r_P \cos(\varphi_P)$$

$$y_E = r_E \sin(\varphi_E) \quad , \quad x_E = r_E \cos(\varphi_E)$$

כעת ניתן לבטא את המרחק בין כדור הארץ לפלנטה.

$$EP = \sqrt{(x_P - x_E)^2 + (y_P - y_E)^2}$$

איור 11 - מיקום של פלנטה וכדור הארץ בקואורדינאטות קרטזיות שראשיתם נמצאת במרכז השמש

ההתחלתי בו נמצא כדור הארץ במערכת הייחוס ההליוצנטרית φ_{E0} , חלק מהביטוי המורכב לחישוב הזווית שבמשבצת הבאה, קו האורך ההתחלתי של הפלנטה במערכת ההליוצנטרית, φ_{p0} . שתי המשבצות נוספות מכילות, בהתאמה, את הערך של 2π , לשימוש בהמשך, ופרק זמן, Δt , בין שני רגעים עוקבים.

בחלק השני מופעים ערכים שמתארים את תנועת הפלנטה. המשבצות בטור A, תחת הכותרת t, מכילות רגעי זמן בהפרש קבוע של Δt . כדי למלא ביעילות מספר רב של תאים כאלה, מאזינים במשבצת A6 מספר 0 ובמשבצת A7 – את הנוסחה $A6 + M\$2$. לפי נוסחה זו הערך ב-A7 הוא הסכום של הערך הנמצא בתא שמעליה והערך הנמצא תחת Δt

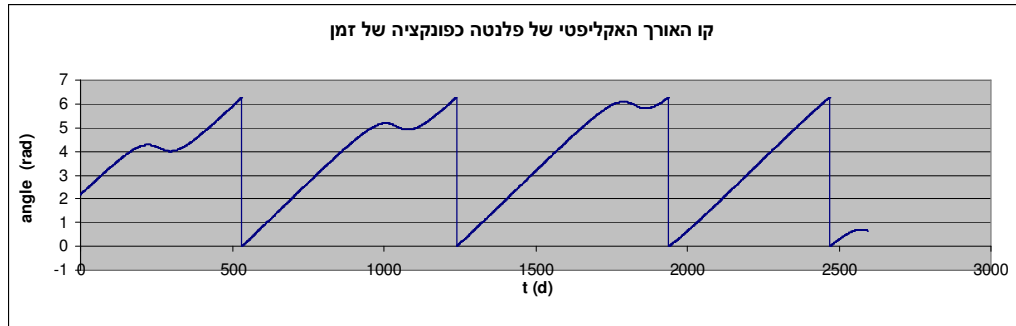
בתא M2. הנוסחה מכילה סימן ה- \$ שפירושו הפנייה מוחלטת לשורה 2, שלא משתנה בהתאם לשינוי השורה בה נמצאת הנוסחה, בשונה מהפניה יחסית שמשתנה בהתאם לשינוי התא בו נמצאת הנוסחה. כעת חוסמים מספר רצוי של תאים מתחת ל-A6 ובחרים ב- עריכה – מלא – למטה.

התאים בעמודות B, C, D, E תחת הכותרות x_E, y_E, x_P, y_P מכילות קואורדינטות קרטזיות של כדור הארץ והפלנטה במערכת ההליוצנטרית בהתאם לנוסחאות הרשומות בסעיף הקודם. לדוגמא, התא D6 מכילה את הנוסחה $\cos(\varphi_p) = \frac{x_p}{r_p}$. ההפניה לתא A6 לא מכילה סימן ה- \$, לכן A6 הופך ל- A7, כאשר מעתיקים את הנוסחה מ-D6 ל-D7.

התאים בעמודה F תחת לכותרת EM מכילים מרחק בין כדור הארץ לפלנטה שמשתנה עם הזמן. הנוסחה בתא F6, $F6 = \sqrt{(D6-B6)^2 + (E6-C6)^2}$, המתאימה לנוסחה $EP = \sqrt{(x_p - x_E)^2 + (y_p - y_E)^2}$, הרשומה בסעיף הקודם. ההפניות לא מכילות סימן של הפניה מוחלטת ולכן משתנים בהתאם למקום תא, כאשר מעתיקים את הנוסחה למטה מתחת ל-F6.

התאים בעמודות G, H ו-H תחת הכותרות $\cos(\lambda_p), \sin(\lambda_p), \arccos(\cos(\lambda_p))$ מכילים נוסחאות שלפיהם גיליון מחשב ערכים המשמשים לקביעת קו האורך של הפלנטה כפונקציה של הזמן. התאים בעמודה J תחת הכותרת λ_p מכילים פונקציה לוגית IF, שבודקת האם מתקיים תנאי מסוים ומחזירה ערך אחד, אם התנאי מתקיים וערך אחר, אם התנאי לא מתקיים. למשל התא J6 מכיל את הנוסחה $J6 = IF(H6 > 0, I6, L6 - I6)$, שפירושה "אם $\sin(\lambda_p)$, שמתקבל בתא H6, חיובי, אז קו האורך λ_p שווה ל- $\arccos(\cos(\lambda_p))$ כפי שהוא מופיע בתא I6. ואם התנאי לא מתקיים, זאת אומרת, אם $\sin(\lambda_p)$ קטן או שווה 0, אז λ_p שווה לערך הרשום ב-L2 פחות הערך הרשום I6, זאת אומרת $2\pi - \arccos(\cos(\lambda_p))$."

כעת אפשר לקבל גרף של קו האורך האקליפטי כפונקציה של זמן. גרף 3 נותן תיאור של התנועה הנראית של הפלנטה ביחס לכוכבים.



גרף 3 - תנועת הנראית הפלנטה כתלות בזמן

בגרף 3 רואים את תנועת הנסיגה של כוכב הלכת (בין שתי נקודות קיצון סמוכות). יש לשים לב על כך שלקווים האנכיים אין שום משמעות פיזיקאלית. הם נוצרו משום שזווית בגודל 2π נרשמת כ-0 ובמעברה הופך λ_p , שקרוב ביותר ל- 2π , משמאל, ל- λ_p שקרוב ביותר ל-0, מימין.

אם רוצים לקבל גרף לגבי תקופה ממושכת יותר, אפשר לשנות בתא M2 את ההפרש בין שתי נקודות זמן סמוכות. כמו כן אם רוצים לקבל גרף לגבי פלנטה אחרת, אפשר לשנות בתא F2 את המרחק בין פלנטה והשמש.

אנו רואים כי הגרף שקיבלנו לא מחזורי. נבדוק גם את המהירות הנראית של כוכב הלכת.

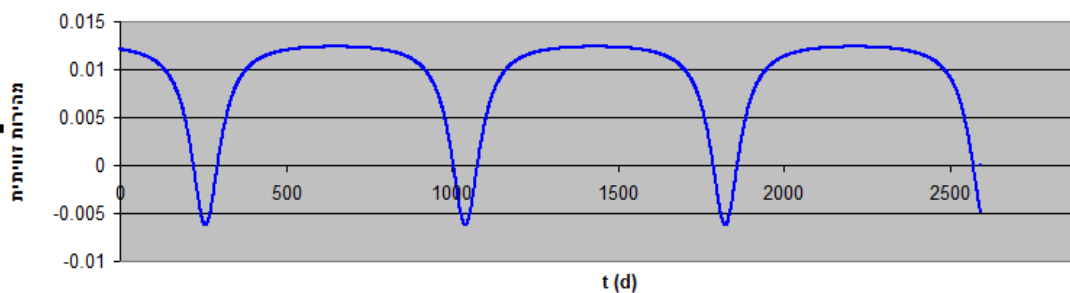
לשם כך מוסיפים טור תחת הכותרת $\frac{d\lambda_p}{dt}$ בהתאם לנוסחת של מהירות זוויתית $\omega_p = \frac{d\lambda_p}{dt}$,

$$\text{מחשבים את המהירות ברגע } t_i \text{ באמצעות הנוסחה } \omega_{pi} = \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{t_{i+1} - t_i} \text{ . כאן שוב נתקלים}$$

בבעיית המעבר בין הערך של λ_p הקרוב ביותר ל- 2π משמאל לזה הקרוב ביותר ל-0 מימין. במקרה זה מתקבלת מהירות כמעט אין סופית ביחס למהירויות שמתקבלות עבור ערכים אחרים. ברור שתוצאה זו אין שום משמעות פיזיקאלית. אני מתגבר על המכשול הזה בעזרת הפונקציה הלוגית IF.

בתא K6 אני מאזין נוסחה: $IF((J7-J6)>-1,(J7-J6)/(A7-A6),(J7-J6+\$L\$2)/(A7-A6))$. פירוש הנוסחה: "אם להפרש J7-J6 יש משמעות פיזיקאלית, אז מהירות הפלנטה מחשבים בצורה רגילה. ואם ההפרש J7-J6 קטן מדי, אז מוסיפים מספר 2π לערך הנמצא ב-J7, כדי להחזיר להפרש את המשמעות הפיזיקאלית. כאשר מעתיקים את הנוסחה למטה, מספרי השורות שאין לידם הסימן של התייחסות מוחלטת, משתנים בהתאם למיקום התא. כתוצאה מקבלים את הגרף 4:

מהירות זוויתית של גורם שמימי על פני כיפת השמיים כפונקציה של זמן

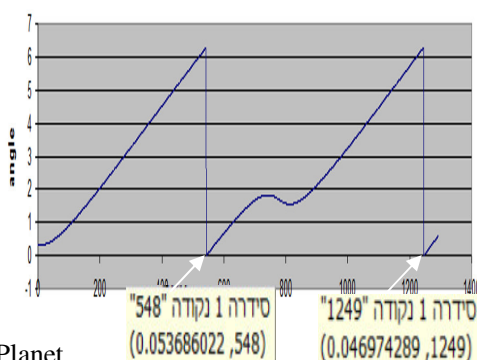


גרף 4 - המהירות הנראית (זוויתית) של פלנטה כתלות בזמן

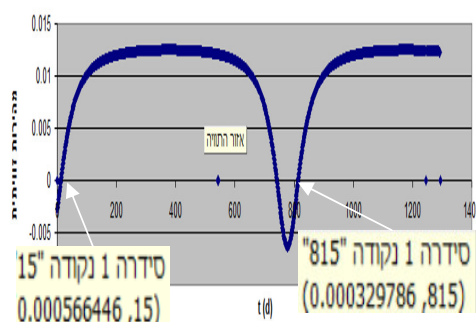
3.1 השוואת הגרפים

נעשה השוואת שני הגרפים עבור "מאדים" (גרף 5). כפי שנובע מהגרף הראשון, "מאדים" חוזר לאותו מקום על כיפת השמים, ביחס לכוכבי שבת, כעבור כ-700 יממות. האם תוצאה זו מתקבלת על הדעת, הרי זמן המחזור של גרף המהירות הזוויתית בתנועה הנראית של "המאדים" הוא כ-800 יממות? אנו מכירים תופעה דומה הקשורה לתנועת הירח: משך החודש העברי (פרק הזמן בין שני מופעי הירח זהים), הוא כ-29.5. יחד עם זאת זמן ההקפה של הירח סביב כדור הארץ (פרק הזמן בו הוא חוזר לאותם הכוכבים), הוא כ-27.3 יממות.

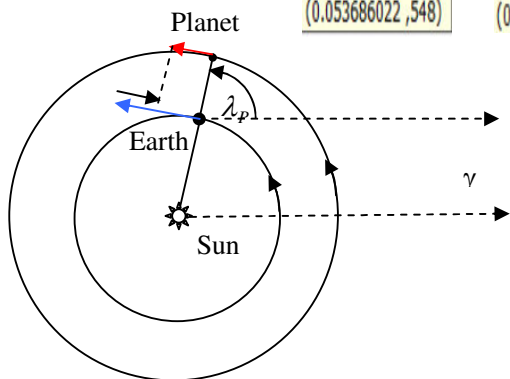
מרחק זוויתי של מאדים מוכב שבת כפונקציה של זמן



מהירות זוויתית של גורם שמימי על פני כיפת השמיים כפונקציה של זמן



גרף 5 - השוואת זמני מחזור של λ_p ו- $d(\lambda_p)/dt$



ננסה להבין את הסיבה להבדל בין זמני המחזור של שני הגרפים בעזרת התרשים המתאר את המצב בו מהירות התנועה האחורית של הפלנטה היא הגדולה ביותר (איור 12). במצב זה רכיב המשיקים של מהירות הפלנטה ביחס

איור 12 - התנועה האחורית של פלנטה

לכדור הארץ, $v_{EP\alpha}$ נתונה על ידי הביטוי

$$v_{EP\alpha} = v_E - v_P$$

, $v_{EP\alpha}$ והמהירות הרדיאלית, האחראית על שינוי המרחק בין שתי הפלנטות, $v_{EP\alpha}$

שווה לאפס.

כפי שניתן לראות מאיור 12, מצב כזה חוזר כל פעם כאשר כדור הארץ נמצא בדיוק בין השמש והפלנטה. זמן המחזור של המאדים סביב השמש מהווה כ- 1.9 שנים. זאת אומר שבפעם הבאה כאשר המאדים יחזור למקום המתואר בסרטוט, כדור הארץ יהיה מעט מאחוריו ויגיע למצב בין השמש ומאדים מעט מאוחר יותר. לכן λ_p בפעם הבאה יהיה גדול מאשר זה שמתואר בתרשים.

4. התאמת פרמטרים מסלול אסטרואיד לקבוצת נתונים

המטרה העיקרית של עבודה זו היא קביעת פרמטרים של מסלול אסטרואיד לפי קבוצת הערכים של λ_p המתקבלת בתצפית. לשם כך ניתן להשתמש בשיטת הריבועים המינימאליים. שיטת הריבועים המינימאליים הינה שיטה סטטיסטית הדורשת שהמרחק בין הקו המתאר חוקיות מסוימת לנקודות שהתקבלו בניסוי יהיה קטן ככל האפשר. במקרה שלנו יש למצוא (λ_0, r) כאלה שהגרף $\lambda_p(t)$ יעבור קרוב ככל האפשר לכל אחד מהערכים של λ_p שהתקבלו בתצפית. נניח בצענו N תצפיות וקיבלנו N ערכים של λ_p ב- N נקודות הזמן. לכל אחת מ- N נקודות הזמן בונים ב- EXCEL חוברת עבודה המחשבת את λ_p של האסטרואיד כפונקציה של שלושה משתנים: זמן בו בוצעה התצפית, קו אורך ההתחלתי ומרחקו של האסטרואיד מן שמש, $\lambda_p(t, \lambda_0, r)$. הקבוצה של קווי אורך התחלתיים אפשריים היא קטע סביב קו אורך התחלתי משוער: $\lambda_{p0} \pm \Delta\lambda$ בדילוגים שנקבעו מראש (שנייה של זווית למשל). האסטרואיד שאת פרמטרים מסלולו רוצים למדוד נמצא בחגורת האסטרואידים אי שם בין מאדים לצדק בגבולות של $2.2 < r < 3.6$ AU. ניקח את הגבולות האלה כערכים האפשריים של r_p (בהפרש של 0.1 יחידות אסטרונומיות, למשל). בנוסף יש לנו N נקודות זמן. לכל נקודת זמן בונים חוברת עבודה ב- Excel, כאשר כל חוברת היא בעלת שני המשתנים הנוספים. כל N חוברות עבודה בנויות בצורה כמעט זהה ולכן מספיק לבנות חוברת אחת לנקודת הזמן הראשונה ולאחר מכן להעתיק אותו עוד N-1 פעמים, עם שינוי זמן התצפית ושינויים קלים נוספים.

על ידי הנוסחה, $E4 + E\$2 =$. סידור כזה מאפשר לשלוט באופן אוטומטי בקבוצת המרחקים האפשריים של האסטרואיד מן השמש. בכלל אם דרוש לשנות פרמטר מסוים, אז אין צורך לעשות זאת בכל חוברת. מספיק לבצע את השינוי פעם אחת, בגיליון הראשון. השינויים בגיליונות האחרים ייעשו בהתאם לשינויים בגיליון הראשון.

כדי לקבל $\sin \angle SPE$ כפונקציה של שתי משתנים, נרשום בתא B5 בגיליון הראשון את הנוסחה $=(\$C\$2/B\$4)*SIN(\$A5*\$I\$2/180-\$B\$2)$, המקבילה לנוסחה $(R/r)\sin(\lambda_{p0} - \lambda_{s0})$. הביטוי $\$C\2 הוא הפנייה מוחלטת לתא המכיל מרחק כדור הארץ מהשמש, B\\$4 – הפנייה מוחלטת לשורה 4 בה רשומים מרחקים אפשריים של אסטרואיד מהשמש, A\\$5 – הפנייה מוחלטת לעמודה A בה נמצאים ערכים אפשריים של קו אורך התחלתי של האסטרואיד, $\$I\2 – הפנייה מוחלטת לתא בו נמצא π (הביטוי $\$A5*\$I\$2/180$ הופך זווית במעלות לזווית ברדיאן), B\\$2 – הפנייה מוחלטת לתא בו נמצא קו האורך של השמש, λ_{s0} . מספיק לרשום את הנוסחה רק פעם אחד ולמלא בה מספר נדרש של תאים אחרים למטה ושמאלה. הגיליון יעשה שינויים בהפניות בהתאם למיקום הנוסחה.

הגיליון השני נקרא $\varphi(t_1)$, לפי הגודל שהוא מחשב: קו אורך של אסטרואיד במערכת הליוצנטרית בזמן t_1 (כפונקציה של λ_{p0} ו- r_p). ננתח את הנוסחה הרשומה בתא B5:

$$=\$A5*\$I\$2/180+ASIN(''(R|r)\sin(\lambda_{p0}-\lambda_{s0})'!B5)+\$D\$2*(\$C\$2/B\$4)^{1.5}*\$G\$2$$

$$\text{המקבילה לנוסחה: } \varphi_p = \lambda_{p0} + \arcsin\left(\frac{r_E}{r_p} \sin(\lambda_{p0} - \lambda_{s0})\right) + \omega_E \cdot \left(\frac{r_E}{r_p}\right)^2 \cdot t$$

הביטוי $\$A5*\$I\$2/180$ מחשב זווית התחלתית, λ_{p0} ברדיאן. הביטוי

$$\omega_E \cdot \left(\frac{r_E}{r_p}\right)^2 \cdot t$$

$\$D\$2*(\$C\$2/B\$4)^{1.5}*\$G\$2$ מקביל לביטוי

בביטוי $ASIN(''(R|r)\sin(\lambda_{p0}-\lambda_{s0})'!B5)$ נעשה שימוש בפעולה נוספת, הנקראת "הפנייה תלת ממדית". משמעותה חישוב ארק סינוס של הערך הנמצא בגיליון הראשון, ששמו $(R/r)\sin(\lambda_{p0} - \lambda_{s0})$, בתא B5. הפניה תלת ממדית נעשית בצורה פשוטה מאוד: במצב של כתיבת נוסחה (אחרי הקלדת סימן =) עוברים לגיליון מתאים, לוחצים על תא מתאים ולאחר מכן על הסימן V. אם דרוש, מסיימים כתיבת הנוסחה ושוב לוחצים על V. הגיליון גם יעשה את השינויים המתאימים בהפניה התלת ממדית, כאשר נמלא בנוסחה את התחום הנדרש למטה ושמאלה. בצורה דומה בכל גיליון וחוברת עבודה נעשו קישורים למשתנים בלתי תלויים ופרמטרים הרשומים בגיליון הראשון.

משמעות של שני הגיליונות הבאות ברורה מהשם של כל אחד מהן: $x(t_1)$, $y(t_1)$ - קואורדינטות קרטזיות ברגע t_1 (גם של כדור הארץ וגם של אסטרואיד). התא B5 בשתי הגיליונות מכיל בהתאמה ביטויים $=B5 * \cos(\varphi(t_1))$, $=B5 * \sin(\varphi(t_1))$. כאן משתמשים בהפניה תלת ממדית לגיליון $\varphi(t_1)$. כמובן הפניות מתאימות את עצמן לשינוי המקום שכאשר ממלאים בנוסחאות האלה תחום מתחת לתא B5 ושמאלה ממנה. הגיליון $x(t_1)$ נראה כמו בציור הבא.

גם משמעות של הגיליון הבאה, $EP(t_1)$, ברורה מהשם שלו: המרחק בין כדור הארץ

לאסטרואיד ברגע t_1 כפונקציה של λ_{p0} ו- r_p . הנוסחה שאותה מכיל התא B5 היא

$$= \sqrt{(x(t_1) - x_E)^2 + (y(t_1) - y_E)^2} \cdot 0.5$$

בהתאם לנוסחה $EP = \sqrt{(x_p - x_E)^2 + (y_p - y_E)^2}$. גם כאן מעתיקים את הנוסחה לכל תאי הגיליון. השינויים נעשים, או לא נעשים בצורה אוטומטית.

הגיליון הבא, $\arccos(\cos \lambda(t_1))$, מחשב את הביטוי שמקבילה לביטוי $\arccos\left(\frac{x_p - x_E}{AP}\right)$.

התא B5 בגיליון זה מכילה את הנוסחה $=ACOS((x(t_1) - x_E)^2 + (y(t_1) - y_E)^2) / EP(t_1)$.

הנוסחה אומרת שבהתחלה פונים לתא B5 בגיליון $x(t_1)$, מחסרים מערך זה את הערך

הנמצא בגיליון $x(t_1)$ בתא H2, מחלקים את ההפרש בערך הנמצא בגיליון $EP(t_1)$ בתא B5,

ואז מחשבים את ארק קוסינוס של התוצאה. ברור שבהעתקת הנוסחה למטה ושמאלה כל ההפניות שאין לידם הסימן של \$ משתנות בהתאם להזזה וכל ההפניות שיש לידן סימן ה- \$ לא משתנות.

הגיליון המסכם של חוברת זה מחשב קו אורך של האסטרואיד ברגע t_1 כפונקציה של λ_{p0} ו-

r_p . הנוסחה הרשומה בתא B5 היא

$$=IF(y(t_1) - y_E > 0, \arccos(\cos \lambda(t_1)) \cdot B5, 2 * \arccos(\cos \lambda(t_1)) \cdot B5)$$

על שימוש בפונקציה IF למציאת קו אורך של אסטרואיד כבר בררנו בסעיף הקודם, כמו כן ביררנו גם את כל הפרטים האחרים של הנוסחה.

4.2 חישוב $\lambda(\lambda_0, r)$ עבור נקודות זמן אחרות

מעתיקים חוברת העבודה שנדונה בסעיף הקודם מספר נדרש של פעמים ומשנים בה נקודת

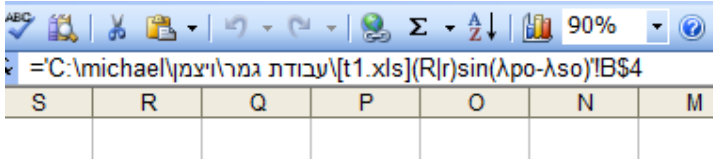
זמן בהתאם לזמן התצפית. חשוב גם ליצור כלי לעדכון משתנים בלתי תלויים ופרמטרים

אחרים: $\lambda_0, r_1, \Delta r, \lambda_{01}, \Delta \lambda$ - בכל חוברות העבודה המחשבות את $\lambda(\lambda_0, r)$ עבור נקודות זמן

שונות לפי חוברת העבודה שמחשבת את זה עבור t_1 . העדכון נעשה באמצעות הפניה

לחברת עבודה t_1 .

כדי לבצע הפניה זו פותחים את שתי החברות, t_1 ו- t_1 . בגיליון ובתא המתאימים של החברת t_1 עוברים למצב כתיבת נוסחאות (עם סימן = בהתחלת השורה), לאחר מכן עוברים לגיליון והתא המתאימים של החברת t_1 ולוחצים על סימן ה- V. הלחיצה מחזירה אותנו לגיליון t_1 , כאשר בשורת הנוסחאות כתובה נוסחה המבצעת את הפניה. בתמונה 4 אפשר לראות איך נראית הנוסחה לעדכון r בתא B4, בגיליון הראשון, בחוברת העבודה t_2 לפי חוברת העבודה t_1 .



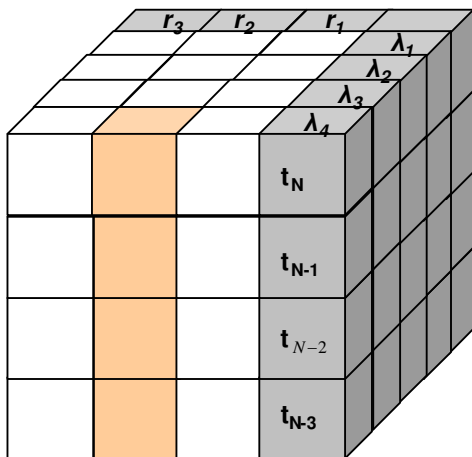
תמונה 4 - נוסחה שמופיעה בשורת נוסחאות לעדכון המרחק בתא B4.

יש לשים לב כי ברירת המחדל בהפניה לחוברת עבודה אחרת היא הפנייה מחולטת. לכן אם רוצים להעתיק את הנוסחה לתאים אחרים עם שינויים מתאימים, יש למחוק את סימני ה- \$ לפני קוד העמודה או השורה של התא.

4.3 הצגת קו אורך λ של אסטרואיד כפונקציה של שלושה משתנים: t, λ_0, r .

קביעת פרמטרים המסלול של אסטרואיד.

כעת ניתן ליצור חוברת עבודה מסכמת המציגה פונקציה $\lambda(\lambda_{0i}, r_j, t_k)$ בצורה דיסקרטית.



איור 13 - מבנה חוברת העבודה $\lambda(\lambda_{0i}, r_j, t_k)$

צורה זו היא מטריצה תלת ממדית שהשכבות שלה מציגים ערכי הפונקציה עבור זוגות שונות (λ_{0i}, r_j) ו- t_k מסוים. בתרשים שלפניכם (איור 13) מתואר באופן סכמטי את המבנה של החוברת המסכמת להצגת $\lambda(\lambda_{0i}, r_j, t_k)$. כל שיכבה t_k בציר מציגה את הגיליון $\lambda(t_k)$ בחוברת המסכמת שהוא העתק הגיליון האחרון בחוברת העבודה המתאימה, $t_k.xls$. כדי להעתיקו לחוברת העבודה $t_k.xls$ $\lambda(\lambda_{0i}, r_j, t_k)$ שוב משתמשים בהפניה לחוברת עבודה אחרת שנדונה קודם.

בתמונה למטה (תמונה 5) מתואר מבנה חוברת העבודה המסכמת, $\lambda(\lambda_{0i}, r_j, t_k)$ xls.

34108	0.196452	0.003342	0.190127	0.914905	2.432046	309.3351	277.407	228.934	99.4555	178	
77389	0.150598	0.003498	0.243573	1.032721	35.89442	306.8861	274.555	224.338	92.5721	179	
96634	0.110867	0.010067	0.303949	1.158388	68.81896	304.4163	271.648	219.512	86.432	180	
21878	0.077301	0.023112	0.371341	1.292043	101.1964	301.9246	268.684	214.437	80.9877	181	
53154	0.049947	0.042695	0.44584	1.433831	133.0291	299.4097	265.657	209.094	76.1714	182	
	אומדן	$\lambda(t10)$	$\lambda(t9)$	$\lambda(t8)$	$\lambda(t7)$	$\lambda(t6)$	$\lambda(t5)$	$\lambda(t4)$	$\lambda(t3)$	$\lambda(t2)$	$\lambda(t1)$

תמונה 5 - מבנה של חוברת העבודה המסכמת

כל לשונית, $\lambda(t_k)$, בתמונה 5 פותחת גיליון, המתאים לשכבה מתאימה במטריצה התלת ממדית שבאיור 13. העמודה באיור ה-13, המסומנת בצבע, בנויה ממשבצות בעלות אותו קוד בכל אחד מהגיליונות $\lambda(t_k)$. היא מתארת קו אורך אקליפטי כפונקציה של זמן עבור האסטרואיד שמסלולו נקבע על ידי זוג פרמטרים (λ_{0i}, r_j) מסוים. אנו מחפשים פונקציה $\lambda(t_k)$ שתעבור קרוב ככל האפשר לכל הנתונים של התצפית. לפי כך פותחים גיליון נוסף בשם "אומדן". גיליון זה מחשב בכל משבצת (λ_{0i}, r_j) את המרחק המשותף של כל נקודות התצפית מהפונקציה $\lambda(t_k)$. הנוסחה שמכילה משבצת B5 לחישוב זה:

$$= (\$A\$2 - \lambda(t1))!B5)^2 + (\$B\$2 - \lambda(t2))!B5)^2 + (\$C\$2 - \lambda(t3))!B5)^2 + (\$D\$2 - \lambda(t4))!B5)^2 + (\$E\$2 - \lambda(t5))!B5)^2 + (\$F\$2 - \lambda(t6))!B5)^2 + (\$G\$2 - \lambda(t7))!B5)^2 + (\$H\$2 - \lambda(t8))!B5)^2 + (\$I\$2 - \lambda(t9))!B5)^2 + (\$J\$2 - \lambda(t10))!B5)^2,$$

כאשר J2, I2, H2, G2, F2, E2, D2, C2, B2, A2, הם קודים של הנמשבצות המכילות את תוצאות התצפית, כפי שמתואר בטבלה 4 (נתונים אלו לא אמיתיים).

	J	I	H	G	F	E	D	C	B	A	
	t10	t9	t8	t7	t6	t5	t4	t3	t2	t1	1
	5.798	5.773	5.748	5.724	5.698	5.674	5.649	5.624	5.5994	5.575	2
											3
2.2	2.1	2	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3	λ	4
57	60.78207	47.83243	36.7605	27.40092	19.48848	12.81201	7.29578	3.05402	0.46405	0	5
46	60.20106	47.41152	36.46253	27.19195	19.34343	12.71416	7.23428	3.02138	0.45407	1	6
72	59.62789	46.99579	36.16772	26.98487	19.19953	12.61705	7.17326	2.98903	0.44422	2	7
06	59.06229	46.58505	35.87594	26.77959	19.05673	12.52062	7.11267	2.95695	0.43452	3	8
18	58.50402	46.17911	35.58708	26.57603	18.91497	12.42485	7.05251	2.92513	0.42495	4	9
82	57.95283	45.77781	35.30101	26.37414	18.77421	12.3297	6.99274	2.89356	0.41551	5	10

טבלה 4 - חישוב $\sum_k [\lambda_k - \lambda(t_k, \lambda_{0i}, r_j)]^2$ עבור כל זוג (λ_{0i}, r_j)

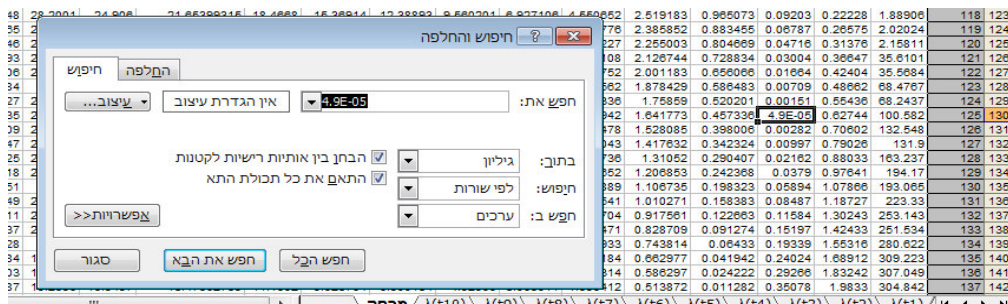
בחישוב זה משתמשים בהפניה תלת ממדית לכל המשבצות בעלי זוג פרמטרים (λ_{0i}, r_j) מסוים, המתוארים על ידי עמודה מסוימת באיור ה-13. בהעתקת הנוסחה לתאים אחרים של הגיליון מחשבים אותו ביטוי עבור כל זוג של הפרמטרים (λ_{0i}, r_j) .

עכשיו יש למצוא את הסכום המינימאלי. לשם כך משתמשים בפונקציה MIN הקובעת מהו הסכום המינימאלי בתווך הנתון (ראה תמונה 6):

	P	O	N	M	L	K	J
				min			t10
				4.85176E-05			5.798
8	2.7	2.6	2.5	2.4	2.3	2.2	
1	149.979	137.069	122.776	107.3264815	91.2718	75.45957	60.782

תמונה 6 – שימוש בפונקצית MIN

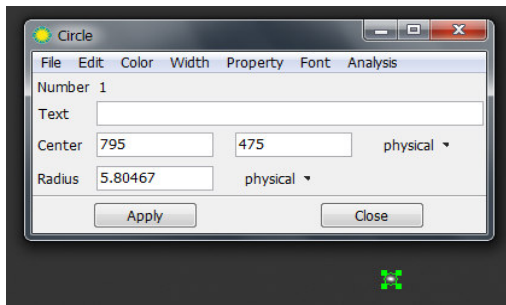
כעת, אחרי שמצאתי את הסכום המינימאלי, אפשר להשתמש בפקודה "חיפוש" מתפריט "עריכה", כדי למצוא אותו (תמונה 7). כתוצאה מכך מקבלים זוג הפרמטרים המבוקשים.



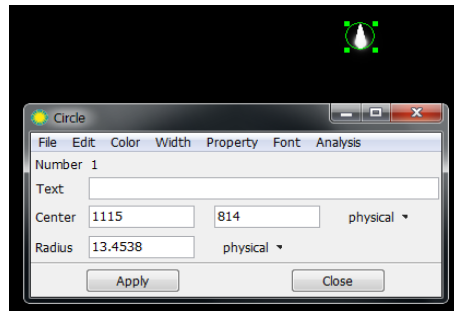
תמונה 7 – שימוש בפקודה "חיפוש" למציאת הסכום המינימאלי

5. תצפית תנועת האסטרואיד

התצפית אחרי אסטרואיד נעשה במצפה הכוכבים של מחלקה לפיזיקה של חלקיקים ואסטרופיזיקה שבפקולטה לפיזיקה במכון ויצמן למדע באמצעות טלסקופ מסוג שמידט-קסגרין במפתח של 16" (41 ס"מ), מצויד במצלמת CCD רגישה וכלים ממוחשבים המאפשרים שליטה בו מרחוק. עיבוד התמונות שהתקבלו נעשה באמצעות היישום SAOImage ds9. שדה הראיה של הטלסקופ הוא $15.3' \times 10.2'$, גודל התמונה בישום הוא



תמונה 9 – דמות האסטרואיד שהתקבלה בשמיים בהירים



תמונה 8 – דמות האסטרואיד שהתקבלה בעננות גדולה

$$1530 \times 1020 \text{ פיקסלים. לפי כך } 1' = 100\text{pix} = 60'' \text{ או } 1\text{pix} = \left(\frac{3}{5}\right)''.$$

אנו מקבלים את דמות האסטרואיד ככתם בהיר (תמונה 8).

כדי למצוא את מרכז הדמות חוסמים את הכתם במעגל (המעגל מופיע בלחיצה כפולה על הדמות). גודל הכתם תלוי בתנאי של מזג האוויר. למשל בתמונה 8, שהתקבלה באחת מהתצפיות באביב, קוטר המעגל החוסם את כתם האור שבא מאסטרואיד הוא $d \approx 27\text{pix} = 27 \times 0.6'' \approx 16''$. בתצפית אחרת שנעשתה קיץ כתם האור היה הרבה יותר קטן (תמונה 9).

בלחיצה על לשונית header מקבלים מידע נוסף: זמן הצילום (לפי הזמן של מרידיאן גריניץ'), גודל התמונה הכוללת בפיקסל, עליה ישרה (במידה שעונית) ונטייה (במידה זוויתית) של מרכז השדה הראיה. הדיוק בו ניתן לקבוע את העלייה הישרה של מרכז שדה הראייה גם

מגביל את כושר ההפרדה של התצפית. העלייה הישרה בטלסקופ זה נתונה ברזולוציה של

$$\frac{15''}{2} = 7.5'' \text{ זאת אומרת בדיוק של } 7.5''$$

לפי גרף של קו אורך כפונקציה של זמן אפשר לראות, כי עבור $\tilde{r} = 3a.u$ (המרחק הממוצע של חגורת אסטרואידים מן השמש) האסטרואיד חוזר לאותם הכוכבים כעבור כ- 1870 יממות. לפי כך המהירות הממוצעת של התנועה הנראית של האסטרואיד היא

$$\frac{360 \cdot 60 \cdot 60''}{1870d} \approx 693''d^{-1}$$

אם אנו רוצים לקבוע מיקום האסטרואיד בדיוק של אחוז אחד, אז יש לקיים את התנאי

$$\frac{\delta\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{7.5''}{\Delta\lambda} = 0.01 \text{ , כאשר } \Delta\lambda \text{ הוא המרחק בין מיקומו של אסטרואיד בשתי תצפיות עוקבות. לפי כך } \Delta\lambda = 750''$$

לפי כך הזמן בין שתי תצפיות עוקבות חייב לקיים את התנאי

$$\Delta t = \frac{750''}{693''d^{-1}} \approx 1d \text{ . לפי כך נוח להשתמש ביממות כיחידות הזמן.}$$

זוויות באסטרונומיה מקובל לבטא ביחידות שונות. כך את העלייה הישר מקובל לבטא במידה שעונית והנטייה – במידה זוויתית. בעבודה זו אני משתמש במידה מספרית עבור כל מיני זוויות, זאת אומרת ברדיאן. כדי לבטא קואורדינטות משוונות של מרכז שדה הראייה, $M(\alpha, \delta)$, אני בונה גיליון ששמו $M(\alpha, \delta)$ בחוברת העבודה **תצפית1.xls** (טבלה 5).

K	J	I	H	G	F	E	D	C	B	A	
year	month	day	$\delta_M(\text{rad})$	$\delta_M('')$	$\delta_M(^{\circ})$	$\delta_M(^{\circ})$	$\alpha_M(\text{rad})$	$\alpha_M(\text{sec})$	$\alpha_M(\text{min})$	$\alpha_M(\text{h})$	1
2013	5	22.86491	-0.06115	-13	-30	-3	3.37496	29	53	12	2
2013	5	22.88033	-0.06113	-9	-30	-3	3.37503	30	53	12	3

טבלה 5- קואורדינטות משוונות של מרכז שדה הראייה

כפי שניתן לראות בטור הראשון, השני והשלישי רשומים, בהתאמה, שעות, דקות ושניות של העלייה הישרה של מרכז שדה הראייה. בטור הרביעי מחשבים את העלייה הישרה ברדיאן. לשם כך בתא E2 רשומה נוסחה:

$$=(B2*15*60*60+C2*15*60+D2*15)*PI()/((180*60*60)) \text{ , שהופכת h, min, sec לשניות}$$

$$\text{של זווית ולאחר מכן, על ידי כפל ב- } \frac{\pi}{360 \cdot 60 \cdot 60} \text{ - לרדיאן. בטורים E, F, G רשומים,}$$

בהתאמה, מעלות, דקות של זווית, שניות של זווית של נטייה שדה הראייה. בטור H מחשבים את הנטייה ברדיאן. לשם כך נרשמה בתא H2 הנוסחה $=(F2*60*60+G2*60+H2)*PI()/((180*60*60))$ בנוסחאות האלה ממלאים מספר נדרש

של תאים מטה. הנוסחאות משתנות בהתאמה למקום התא. אין צורך ליותר מחמש ספרות

$$\frac{15 \cdot 3.14}{180 \cdot 60 \cdot 60} \approx 0.00007 \text{ ש-שום}$$

הגיליון הבא בחוברת העבודה, $A(\alpha, \delta)$, מחשב את העלייה הישרה והנטייה של האסטרויד ברדיאן. להלן את מבנה הגיליון (טבלה 6):

K	J	I	H	G	F	E	D	C	B	A	
days	$\delta(\text{rad})$	$\alpha(\text{rad})$	$\delta_M(\text{rad})$	$\alpha_M(\text{rad})$	$\delta_{AM}(\text{rad})$	$\alpha_{AM}(\text{rad})$	y(pix)	x(pix)	$y_M(\text{pix})$	$x_M(\text{pix})$	1
507.8649	-0.06029	3.37394	-0.06115	3.37496	0.00086	0.00102	807	1114	510	765	2
507.8803	-0.06027	3.37404	-0.06113	3.37503	0.00086	0.00099	807	1104			3
507.8922	-0.0597	3.37422	-0.060839	3.37547	0.00114	0.00124	901	1192			4
580.7471	-0.15633	3.56737	-0.156226	3.56745	-0.0001	8.5E-05	475.125	794.375			5
580.7596	-0.15622	3.56766	-0.156139	3.56767	-0.0001	1.3E-05	481.5	769.375			6

טבלה 6 – חישוב קואורדינטות משוונות של אסטרויד ברדיאן

בטור הראשון והשני רשומים שיעורים (x_M, y_M) של מרכז שדה הראייה הוא מרכז התמונה בפיקסלים. בטורים C ו-D רשומים השיעורים (x, y) של דמות האסטרויד בתמונה בפיקסלים. שיעורים אלו הם השיעורים של מרכז המעגל החוסם את כתם האור (תמונות 8,9). הטורים E ו-F מחשבים את המרחק בין מרכז שדה הראייה לאסטרויד ברדיאן. לשם כך בתא E2 רשומה הנוסחה: $=(C2-A2)*3/5*PI()/ (180*60*60)$, שבה הפרש בסוגריים מהווה מרחק, לפי ציר ה-x, בין מי קום האסטרויד למרכז שדה הראייה בפיקסלים, הגורם $\frac{3}{5}$ הופך פיקסלים לשניות של זווית, הגורם $\frac{\pi}{360 \cdot 60 \cdot 60}$ הופך את השניות לרדיאן. על ידי העתקת הנוסחה לתא F2 הופכים את הנוסחה הנ"ל לנוסחה $=(D2-B2)*3/5*PI()/ (180*60*60)$, המחשבת את המרחק AM לפי ציר ה-y. לאחר מכן ממלאים בנוסחאות האלה מספר נדרש של תאים מתחת ל-E2 ו-F2.

L	K	J	I	H	G	F	E	D	C	B	A	
days	$\lambda(\text{rad})$	π	$-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{3\pi}{2}$	$\arctan(\tan(\lambda))$	$\cos(\alpha) \cos(\delta)$	$\sin(\beta)$	$\tan(\lambda)$	$\epsilon(\text{rad})$	$\epsilon(^{\circ})$	$\delta(\text{rad})$	$\alpha(\text{rad})$	1
507.8649	3.37881	3.141593	3.378810638	0.237217984	-0.97136018	0.03615	0.24177	0.409093	23.43928	-0.06029	3.37394	2
507.8803	3.3789		3.378896876	0.237304222	-0.971337911	0.03621	0.24186			-0.06027	3.37404	3
507.8922	3.37884		3.378844236	0.237251582	-0.971329343	0.0368	0.24181			-0.0597	3.37422	4
580.7471	3.59312		3.59311597	0.451523317	-0.899613352	0.01944	0.48494			-0.15633	3.56737	5
580.7596	3.59335		3.593345499	0.451752845	-0.89950963	0.01965	0.48522			-0.15622	3.56766	6

טבלה 7 – חישוב קואורדינטות אליפטיות של אסטרויד ברדיאן

שני הטורים הבאים, G ו-H מכילים את הקואורדינטות המשוונות של מרכז שדה הראייה שחישבנו בגיליון הקודם. העברת הנתונים מהגיליון הראשון לשני נעשית על ידי הפנייה תלת ממדית. הטורים I ו-J מכילים קואורדינטות משוונות של האסטרויד. הנוסחאות לחישוב הם: $\delta_A - \alpha_A$, $=H_i + F_i$, $=E_i - G_i$, בהתאמה. הסימן מינוס בחישוב העלייה הישרה נובע מכך שתנועה ממערב מזרחה בצילום היא תנועה מצד ימין לצד שמאל, כי פני הכדור מצולמים מבפנים.

הגיליון השלישי, $A(\lambda, \beta)$, הופך את הקואורדינטות המשוונות של האסטרואיד

לקואורדינטות אליפטיות (טבלה 7)

הגיליון מכיל נתונים הבאים. העלייה הישרה, α , והנטייה, β , של האסטרואיד (הנתונים האלה

הועברו מהגיליון הקודם). הזווית בין ציר הסיבוב של כדור הארץ סביב עצמו ובין האנך

למישור המילקה (במעלות וברדיאן) (טורים C ו-D בהתאמה). חישוב של $\tan(\lambda)$ בהתאם

$$\text{לנוסחא } \tan(\lambda) = \frac{\cos(\varepsilon)\sin(\alpha) + \sin(\varepsilon)\tan(\delta)}{\cos(\alpha)} \text{ (טור E). הנתון שאותו מכיל טור F דרוש}$$

כדי להיות בטוח שהאסטרואיד אכן נמצא בערך במישור המילקה ($\sin(\beta) \approx 0$).

בטור G נעשה חישוב של קואורדינטה ה- x , בהתאם לנוסחא $x = \cos(\alpha)\cos(\delta)$.

נתון זה דרוש כדי לקבוע סופית את הזווית λ (הדבר הוסבר בסעיף 2.4). טור H, כפי

שרואים בכותרת שלו, מכיל ארבע טנגנס של הערכים הנמצאים בטור E. טור I מכיל זווית λ

בתחום $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. בתא I2 רשומה נוסחה $(IF(G2>0, H2, H2+\$J\$2))=$, המשאירה ארבע

טנגנס כפי שהוא אם $x > 0$, ומוסיפה עליו π , אם $x < 0$ (על כך הסברתי בסעיף 2.4). הטור

K קובע λ בתחום של $[0; 2\pi]$, כפי שמקובל לקו האורך. הנוסחה בטור זה שוב מכילה את

הפונקציה IF, המשירה את הערך הרשום בטור I כפי שהוא, אם הוא לא שלילי ומסיפה אליו

2π , אם הוא שלילי.

5.1 קביעת פרמטרים של מסלול האסטרואיד לפי עשרה תצפיות נבחרות

בטבלה 8, בטור צבוע, רשומים ערכים של קו אורך אקליפטי של האסטרואיד עבור 10

מצבים שמרווח הזמן ביניהם לא קטן מיממה. בגלל תנאי מזג האוויר לא היו ברשותי 10

צילומים כאלה ולכן לפי נתונים מוכנים שהתקבלו עבור האסטרואיד מצולם.

נקבע כמצב ההתחלתי של האסטרואיד מצבו בתאריך 01/01/2012 בשעה AM 12:00.

מקבלים את הזמנים הבאים של התצפיות הנ"ל (טבלה 9).

year	month	day	$\lambda(\text{rad})$	π	$-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{3\pi}{2}$	$\arctan(\tan(\lambda))$	$\cos(\alpha)\cos(\delta)$	$\sin(\beta)$	$\tan(\lambda)$	$\epsilon(\text{rad})$	$\epsilon(^{\circ})$	$\delta(\text{rad})$	$\alpha(\text{rad})$
2012	11	25.51918	3.22773	3.141593	3.227734993	0.086142339	-0.996051694	0.021964	0.086356	0.409093	23.43928	-0.01406	3.22937
2013	2	11.48069	3.63453		3.63453341	0.492940756	-0.880336443	0.037165	0.537172			-0.15462	3.61292
2013	3	8.86601	3.62765		3.627653674	0.48606102	-0.883365384	0.042911	0.528339			-0.14681	3.60849
2013	3	11.96021	3.62066		3.620664822	0.479072168	-0.886583712	0.043481	0.519432			-0.14379	3.6021
2013	3	15.42826	3.61133		3.611332456	0.469739802	-0.890820843	0.044043	0.507639			-0.13993	3.5935
2013	3	20.73072	3.59433		3.594334873	0.45274222	-0.898348625	0.044786	0.486442			-0.13313	3.57778
2013	4	8.3349	3.51666		3.516663138	0.375070485	-0.929519817	0.04546	0.393708			-0.10405	3.50533
2013	4	29.29937	3.42883		3.428832111	0.287239458	-0.958154717	0.042705	0.295409			-0.07347	3.42271
2013	4	30.62286	3.42446		3.424461775	0.282869121	-0.95940337	0.042195	0.290663			-0.07228	3.41847
2013	5	15.29996	3.38808		3.388078448	0.246485794	-0.969061051	0.038388	0.251602			-0.0618	3.38337

טבלה 8 – חישוב הו אורך אקליפטי של האסטרואיד עבור עשרה מצבים נבחרים

	D	C	B	A	
	days	year	month	day	1
	329.51918	2012	11	25.51918	2
	407.48069	2013	2	11.48069	3
	432.86601	2013	3	8.86601	4
	435.96021	2013	3	11.96021	5
	439.42826	2013	3	15.42826	6
	444.73072	2013	3	20.73072	7
	463.3349	2013	4	8.3349	8
	484.29937	2013	4	29.29937	9
	485.62286	2013	4	30.62286	10
	500.29996	2013	5	15.29996	11

טבלה 9 – זמני התצפיות החל מ- AM 12:00
01/01/2012

בעזרת מפת הכוכבים של מצפה הכוכבים "ברקת" מקבלים קו הארך של השמש ברגע התחלתי זה: $\lambda_{OS} = 279^{\circ}52'25''$. את זמני התצפיות מאזינים בכל אחד מעשר חוברות העבודה $t_i.xls$ ומיקומיו של האסטרואיד המתאימים - בחוברת העבודה $\lambda(t,r,\lambda_0)$ בגיליון "אומדן".

טבלאות המכילות נתוני התצפיות שנעשו בחו"ל נמצאות בחוברת העבודה **asteroid.xls** סכום ריבועי המרחקים המינימאלי מתקבל עבור $r = 2.4a.u.$ ו- $\lambda_0 = 62^{\circ}$. ברזולוציה מדויקת יותר קיבלתי: $r = 2.37a.u.$, $\lambda_0 = 58^{\circ}$.

נחזור לחוברת העבודה המציגה את התנועה הנראית של כוכב לכת (פרק 3).
זין לגיליון את הפרמטרים, r , λ_0 , λ_{S0} הנבועים מהתצפיות ונקבל גרף תיאורטי המתאר את

התנועה הנראית של האסטרואיד בהתאם לפרמטרים האלה. נפתח גיליון נוסף ונזין לו נקודות התצפיות שכוללות 10 תצפיות שנעשו בחו"ל ושני צילומים שקיבלנו בטלסקופ שלנו

B	A	
$\lambda(\text{rad})$	days	1
3.227735	329.5192	2
3.634533	407.4807	3
3.627654	432.866	4
3.620665	435.9602	5
3.611332	439.4283	6
3.594335	444.7307	7
3.516663	463.3349	8
3.428832	484.2994	9
3.424462	485.6229	10
3.388078	500.3	11
3.378811	507.8649	12
3.593116	580.7471	13

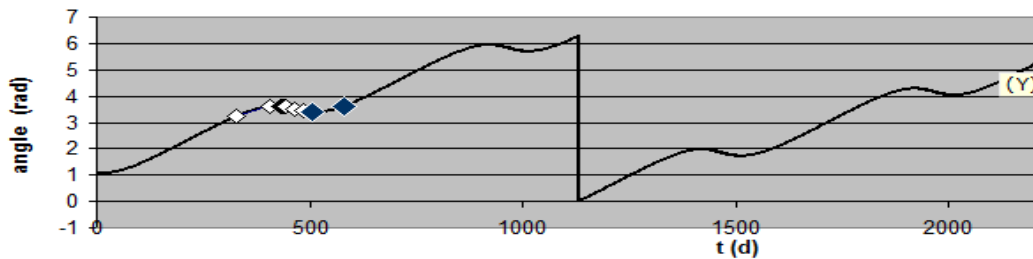
טבלה 10

(טבלה 10). נוסף את הנקודות האלה לגרף התיאורטי. רואים

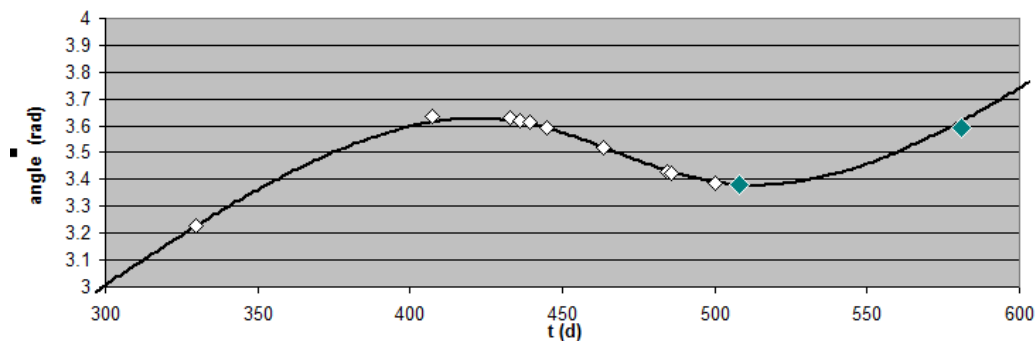
כי יש התאמה כמעט מלאה בין מיקום האסטרואיד בסדרת התצפית לבין הגרף (גרפים 6, 7). שתי הנקודות האחרונות הם הנקודות הנובעות מהצילומים שלנו.

אז הכול מסתדר. יש רק בעיה קטנה אחת: קיבלתי שקו האורך האקליפטי ההתחלתי של האסטרואיד היה כ- 58° , כאשר במציאות, כפי שנובע מהנתונים שהתקבלו בתצפיות חיצוניות, הוא צריך להיות בסביבה של 12° . מכך נובעת המסקנה: בתקופה שקדמה לתצפיות, שהיוו בסיס לחישובים שלי, האסטרואיד היה קרוב הרבה יותר לשמש מאשר 2.37 AU.

קו האורך האקליפטי של פלנטה כפונקציה של זמן



קו האורך האקליפטי של פלנטה כפונקציה של זמן



גרפים 6, 7 – קווי אורך של אסטרואיד בסדרת התצפיות וקו האורך התיאורטי (הגרף 7 מציג את אותם הנתונים ברזולוציה גבוהה יותר).

אחרי הקביעה של שני הפרמטרים המסלוליים והשוואה של הגרף התיאורטי עם נקודות התצפית קיימתי שיחה עם מר אילן מנוליס לגבי התוצאות. התברר כי מדובר על האסטרואיד בשם Euterpe 27 שהתגלה לראשונה בשנת 1853. הטבלה שלהלן מכילה את הנתונים המסלוליים של האסטרואיד. (Solar System Dynamics, <http://ssd.jpl.nasa.gov/>)

0.172	האקסצנטריות (e)
2.347 AU	המרחק הממוצע מן השמש (a)
1.942 a.u	פריהליון (q)
2.753 AU	אפהליון (Q)
1.58379°	הנטייה של המסלול ביחס למישור המילקה (i)
94.79876°	קו האורך של הקשר העולה (Ω)
356.38598°	הנתון של הפריהליון (ω)
2012-May-16.69449632 = 136.69449632d	הפרמטר הדינאמי (τ)
1313.39 d = 3.596 y	זמן המחזור

טבלה 11 – הנתונים המסלוליים של האסטרואיד Euterpe 27.

אפשר לראות כי למסלול האסטרואיד יש אקסצנטריות גדולה מאוד. להשוואה, אקסצנטריות המסלול של כדור הארץ היא 0.0167, פי 10 קטנה יותר מאשר זו של האסטרואיד. גם האקסצנטריות של מסלול המאדים, 0.0934, הנחשבת גדולה מאוד, כמעט פי 2 קטנה מזו של מסלול האסטרואיד. אפשר לראות גם שבאמצע התקופה שקדמה לתקופת התצפיות, שנמשכה כ- 12 חודשים, האסטרואיד היה בפריהליון, זאת אומרת במרחק הקרוב ביותר מן השמש, 1.94 AU ולא 2.37 AU. (Solar System Dynamics, <http://ssd.jpl.nasa.gov/>)

המרחק מן השמש u.a., (r)	נקודת זמן אופיינית d, (t)
2.058	הרגע ההתחלתי 0
1.942	הפרמטר הדינאמי 136.7
2.154	329.5
2.305	407.5
2.355	432.9
2.361	436.0
2.366	439.4
2.378	444.7
2.412	463.3
2.45	484.3
2.452	485.6
2.478	500.3
2.492	507.9
2.604	580.7

טבלה 12 – שינוי מרחק של האסטרואיד Euterpe 27 מן השמש החל מהרגע ההתחלתי ועד לתצפית האחרונה.

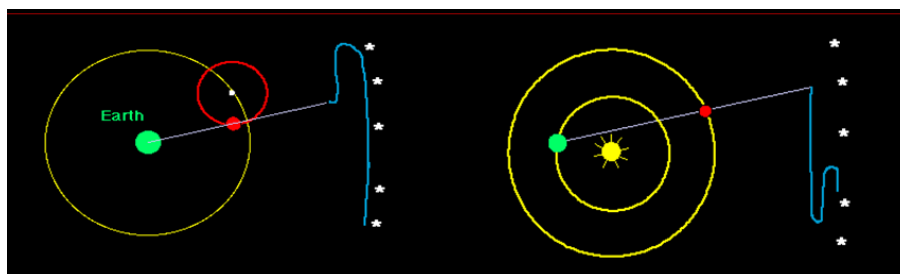
הטבלה הבאה מכילה את המרחקים של האסטרואיד מן השמש בנקודות הזמן האופייניות:
ברגע ההתחלתי, ברגע השווה לפרמטר הדינאמי, בנקודות תצפיות חיצוניות, בנקודות
התצפית בטלסקופ של מכון ויצמן.

כפי שנובע מהטבלה המרחק של 2.37 AU מן השמש היה לאסטרואיד, בערך, באמצע של
תקופת התצפיות. זאת אומרת: השיטה מצליחה לקבוע מרחק האסטרואיד מן השמש בדיוק
של כ- 0.01 AU. מהטבלה ומהגרף אפשר לראות גם עובדה נוספת: כל התקופה שקדמה
לתצפיות, שנמשכה כ- 12 חודשים, התנועה הנראית הייתה ישרה והאסטרואיד היה בכ-
0.35 AU קרוב לשמש מאשר $r = 2.37 \text{ a.u.}$ שנקבע כרדיוס המסלול. התיקון ב- 0.03 AU,
מ- 2.4 AU עד 2.37 AU, גרם לכך שעבור $r = 2.37 \text{ a.u.}$ קו האורך ההתחלתי, λ_0 , נקבע ב-
 4° קרוב יותר לנקודת שוויון האביב מאשר קו האורך ההתחלתי עבור $r = 2.4 \text{ AU}$,
 $\lambda_0 = 58^\circ$ במקום $\lambda_0 = 62^\circ$. לכן לא מפתיע, כי ההבדל ב- 0.35 AU גורם לכך שקו האורך
האמיתי ב- 46° קרוב יותר לנקודת שוויון האביב מאשר קו האורך ההתחלתי שנקבע
באמצעות השיטה באופן תיאורטי. פשוט כל התקופה ההיא האסטרואיד נע על פני כיפת
השמיים מהר הרבה יותר מאשר זה נקבע על ידי השיטה.

6. ההיבטים הפדגוגיים של העבודה

אוכלוסיית יעד: מורים לפיזיקה, תלמידי שכבת יא', עבודות גמר לבגרות.

במסגרת תכנית הלימודים, בנושא הכבידה, מורה לפיזיקה מארגן את הלמידה של חוקי קפלר סביב הרקע ההיסטורי. במוקד השיעור – תנועה אחורית של כוכבי לכת והמחלוקת שנמשכה כ- 2000 שנה סביב השאלה איזה משני המודלים הגדולים של מבנה מערכת השמש (איור 14) - המודל הגאוצנטרי או המודל ההליוצנטרי, הוא הנכון.

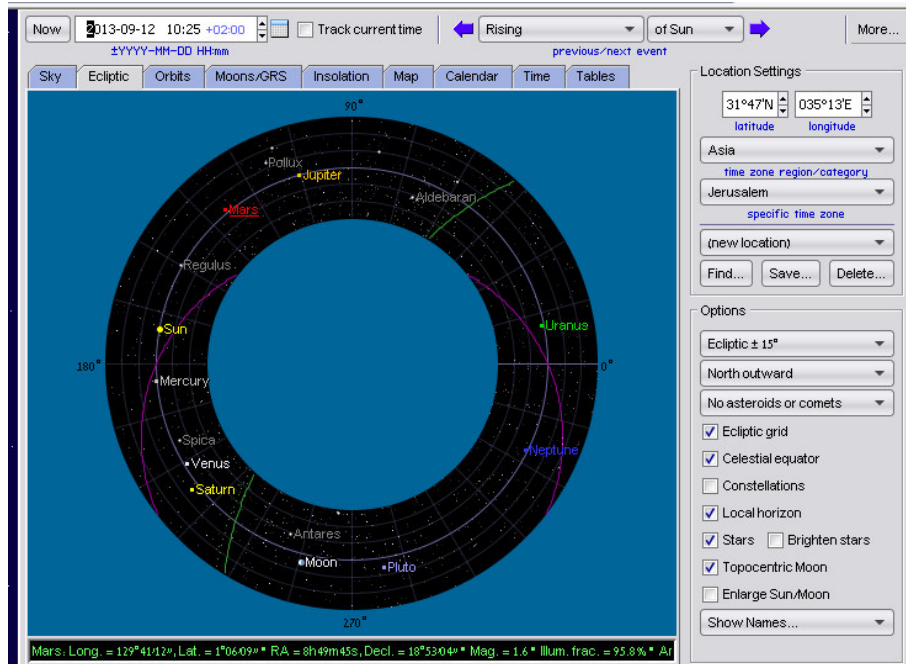


איור 14 השוואה בין המודל הגיאוצנטרי והליוצנטרי של מערכת השמש

התלמידים אמורים להכיר גם את הרקע ההיסטורי על טיכו ברהה ועוזרו הראשי יוהנס קפלר, שירש את תיעוד המדידות הרבות והמדויקות להפליא, שערך טיכו במהלך חייו, ועל סמך הנתונים האלה הצליח לנסח 3 חוקי תנועת כוכבי לכת. להלן חלק מתוכנית הלימודים המפורטת, הקשור לנושא העבודה.

שעות	פעילויות מומלצות	נוסחאות	פירוט	נושא
2	- ניתן לצפות בשני הסרטים: "שלושת חוקי קפלר" ו"בעיית קפלר" מסדרת סרטי הווידאו "היקום המכני".	$T^2 = kR^3$ $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3$	<ul style="list-style-type: none"> - פיתגורס: מודל גאוצנטרי. - אריסטו: עולם תת-ירחי ועולם על-ירחי. - תלמי: תיאור מסלול כוכב לכת ע"י מעגל משני ומעגל ראשי. - קופרניקוס: מודל הליוצנטרי, יתרונותיו וחסרונותיו. - טיכו ברהה: תצפיותיו האסטרונומיות. - גלילאו גליליי: תגליותיו באמצעות הטלסקופ (פני הירח, שביל החלב, ירחי צדק, מופעי נוגה). - יוהן קפלר: שלושת החוקים. 	7.1 רקע היסטורי וחוקי קפלר

גישה היסטורית זו אמורה ליצור אצל התלמידים הבנת האופן שבו נבנה ומתפתח ידע, להדגים את האבולוציה של רעיונות מדעיים. אבל במציאות שיעור כזה עלול לא להסיג את מטרתו. נשאלת השאלה: מה תפקיד המורה בשיעור המוקדש לסיפורי ההיסטוריה האלה? הוא יכול לספר את הסיפור בעצמו או לתת לתלמידיו משימה להכין תקצירים ומצגות בנושאים האלו. כך או אחרת התלמידים לא תמיד מרגישים חיוניות המורה במקרה זה. הם בעצם היו יכולים לקרוא את הסיפור לבד. הם גם לא רואים את המורה לפיזיקה בכובע של מורה להיסטוריה. מכן נובע היחס המזלזל לנושא כלדבר שאולי ולא חשוב. גם ההבטחה לשלב דברים אחדים מהנושא במבחן הקרוב לא עוזרת ממש. התוצר של הפרויקט יכול לסייע למורה בסוגיה זו. הוא עשוי להביא את ההמחשה הנדרשת ותחושת "ריאליטי" לסקירה ההיסטורית בתיכון. להלן דוגמה קונקרטית אחת לשימוש בתוצר העבודה הזו בשיעור המוקדש לרקע היסטורי הנושא הכבידה: הדגמה, באמצעות Excel, על סמך המודל ההליוצנטרי וחוקי קפלר, של התנועה הנראית של כוכבי לכת. ההדגמה נעשית בעזרת חוברת העבודה $\lambda(t).xls$ ומפת השמיים האינטראקטיבית של מצפה הכוכבים



תמונה 9 – מפת הכוכבים האינטראקטיבית של מצפה הכוכבים ברקת

- במפת השמים עוברים לתצוגה Ecliptic (תמונה 9).
- מציבים את הסמן על דמות השמש וקוראים בתחתית המסך את קו האורך נוכחי של השמש, λ_{s0} .
- לאחר מכן מציבים את הסמן על דמות של פלנטה חיצונית מסוימת וקוראים בתחתית המסך את קו האורך ההתחלתי שלה, λ_{p0} . מכניסים את הערכים האלה לתוך הגיליון.
- מכניסים לתוך הגיליון את המרחק הממוצע של הפלנטה (מתוך דף הנוסחאות).
- בוחרים זמן מסוים. לדוגמא שנתיים או שלוש שנים או יותר (אם ציר הזמן לא מאפשר זאת משנים את Δt).
- במפת השמים משנים את הזמן הנוכחי לזמן שעומד בניסוי ובודקים את מיקום הפלנטה.
- משווים את הנקודה שבגרף ומיקומה האמיתי. מסיקים מסקנות.

- עבור צדק מקבלים בדרך כל תוצאות די קרובות, אבל עבור מאדים במשך שנתיים אמורים לקבל פעם אחד תוצאות מאוד קרובות לאלו שבגרף ופעם אחת די רחוקים מאלו שבגרף. מבקשים מהתלמידים להסביר את הסיבה האפשרית לכך.
- שאלה נוספת שניתן לשאול את התלמידים: כאשר מהירות הפלנטה בגרף שווה 0 איך היא נע, אם בכלל, ביחס לכדור הארץ? ביחס לשמש? (התשובות לשאלות האלה צו יללות בתרשימים מתאימים).

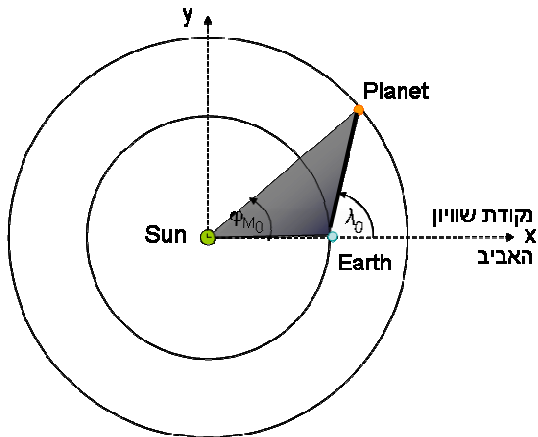
חברת הפרויקט יכולה לשמש גם כחומר רקע לעבודות חקר או מטלות ביצוע במסגרת חוג לאסטרונומיה או כעבודת גמר בבגרות בפיזיקה. במסגרת פרויקט כזה התלמידים יקבלו רקע קצר על אסטרואידיים כחלק ממערכת השמש, על התכונות הפיסיקליות שלהן, כגון גודל, בהירות וסיווג ספקטראלי, קצב סיבוב ויציבות המסלול, האם הם בודדים או בצמד. הם ידונו בשיטות החישוב לצורך ביצוע תצפיות אסטרואידיים וקביעת פרמטרים של מסלוליהם. הם יקבלו מיומנויות בשימוש בטבלאות Excel במצב של ריבוי גליונות, כמו כן בחישובים של זוויות, במעבר קואורדינאטות וחישובי שגיאה. בסופו של דבר הם יתרכזו בחישוב מסלול אסטרואיד לפי נתוני התצפיות.

סיכום

עבודה זו מראה כיצד ניתן באמצעות כלים פשוטים יחסית: חוקי קפלר, מתמטיקה בסיסית ושימוש בתוכנת-Excel, - ליצור כלי ממוחשב לקביעת הפרמטרים של תנועת אסטרואיד בעל מסלול כמעט מעגלי. הכלי מורכב מ-N חוברות עבודה שכל אחת מהן מחשבת את קו האורך האקליפטי של האסטרואיד עבור נקודת זמן מסוימת, זמן ביצוע תצפית, כפונקציה של שני פרמטרים, הקובעים את תנועתו במסלול מעגלי: המרחק מן השמש וקו האורך האקליפטי ההתחלתי. התאמה של N מצבי האסטרואיד ל-N המצבים התיאורטיים עבור זוג מסוים של פרמטרים נעשה באמצעות שיטת הריבועים המינימאליים המחפשת קו, העובר קרוב ככל האפשר לכל נקודות התצפית, זאת אומרת – את המינימום בין הסכומים:

$$\sum_k [\lambda_k - \lambda(t_k, \lambda_{0i}, r_j)]^2$$

לשם כך יוצרים חוברת עבודה נוספת ש-N הגליונות הראשונות שלה מכילות את ערכי הפונקציה $\lambda(t_k, \lambda_{0i}, r_j)$, $k = 1, 2, \dots, N$, והגליון האחרון - את הסכום הנ"ל עבור כל זוג (λ_{0i}, r_j) .

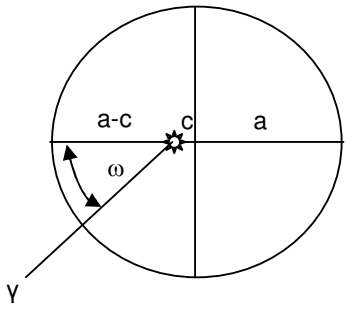


איור 15 – ניתוח המצב הדדי של פלנטה חיצונית וכדור הארץ, כאשר בוחרים בתאריך והזמן של נקודת שוויון האביב כפרמטר שני המתאר את תנועת כדור הארץ

כמה מילים על התפקיד של מיקום השמש בזמן ההתחלתי, λ_{S0} . נתון זה מהווה את הפרמטר השני המתאר את תנועת כדור הארץ סביב השמש. אם בוחרים כרגע התחלתי את התאריך והזמן של נקודת שוויון האביב, זאת אומרת הרגע שבה $\lambda_{S0}=0$, הניתוח והנוסחאות נעשים מעט פשוטים יותר (איור 15). בנוסף לכך נתון זה פחות ספציפי מאשר λ_{S0} . לא השתמשתי בגישה זו בעבודה.

לפי השיטה הצלחתי לקבוע, בדיוק

של 0.01AU, את מרחק האסטרואיד מן השמש באמצע תקופת התצפיות (חודש מרץ), ואילו לא הצלחתי לקבוע נכון את קו האורך האקליפטי של האסטרואיד ברגע התחלתי (קיבלתי כי $\lambda_0 \approx 58^\circ$, כאשר במציאות $\lambda_0 \approx 12^\circ$). ההבדל הזה נובע מכך שמסלול האסטרואיד היה שונה בצורה ניכרת ממסלול מעגלי ובין הרגע ההתחלתי לבין רגע התצפית הראשונה עברה תקופה ארוכה מדי (כמעט שנה). כדי לתאר את מסלול האסטרואיד במקרה זה דרושים פרמטרים נוספים שעליהם דובר בפרק 2, סעיף 2.6. לתיאור מסלול האסטרואיד הנוכחי, שנמצא במישור המילקה, דרושים 4 פרמטרים: המרחק הממוצע מן השמש, a, אקסצנטריות



איור 16 – פרמטרים של המסלול האליפטי הנמצא במישור המילקה

המסלול, $e = \frac{c}{a}$, הנתון של הפריהליון, ω , ופרמטר דינאמי,

τ (איור 16). גם הקשר בין t ל- r במקרה זה מסובך הרבה

יותר: $t - \tau = \int_{r_{\min}}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r'))}}$. לפי כך תגדל במידה

ניכרת את מורכבות המשימה. קשה מאוד לבצע אותה

באמצעות Excel.

חלקים מסוימים מן העבודה יכולים להיות מיושמים בחוגי

אסטרונומיה ובשיעורי הפיזיקה בתיכון. יש רק לשים לב על כך שהרצף האמיתי שונה מאוד מהרצף המופיע בטקסט. הדבר נובע מכך שדווקא הקשיים שיש להתגבר עליהם במהלך העבודה תורמים לגיבוש החומר הנלמד. בכך מהות של הגישה האוריסטית בהוראת הפיזיקה שהוכיחה את עצמה כי גישה מועילה מאוד שיש לשלב אותה בהוראה בהתאם לזמן שיש לרשות המורה. בהתחלה פתרתי את הבעיה ההפוכה: בהינתן הזווית בין קו הראיה לאסטרואיד לבין זה לכוכב שבת כלשהו במישור המלקה ברגע מסוים, מהי התלות של הזווית הזו בזמן? (סעיפים 2.7, 2.8, 2.9 בפרק 2 וכל פרק 3). לאחר מכן התחלתי לפתור את הבעיה המרכזית: מציאת שיטה לקביעת הפרמטרים של המסלול המעגלי של האסטרואיד (פרק 4). כאשר נגשתי לעבודה המעשית בעיבוד הנתונים המתקבלים מצילומי האסטרואיד, התברר כי יש צורך בהמרת קואורדינטות משווניות לקואורדינטות אקליפטיות (פרק 2, סעיפים 2.1 עד 2.5). כאשר התחלתי לקבל תוצאות ראשונות שהיו חסרות כל חוקיות, התבררה חשיבות של קביעת פרק זמן מינימאלי בין שתי תצפיות עוקבות שמהם ניתן לקבל תוצאות משמעותיות שונות (פרק 5). ההבדל הגדול בין קו האורך האקליפטי ההתחלתי הנקבע לפי השיטה לבין קו האורך ההתחלתי האמיתי הביא אותי לצורך לחשוב על ביצוע המטלה בתנאים כלליים יותר (סעיף 2.6) כאשר מסלול האסטרואיד מתואר על ידי מספר גדול יותר של פרמטרים ולבדוק מהם הפרמטרים האמיתיים האלה (סעיף 5.1).

בזמן ביצוע העבודה עסקתי גם בהוראת פיזיקה בתיכון ובשיעורים המוקדשים לרקע היסטורי וחוקי קפלר. פתאום תפסתי, כי כתיבת העבודה תורם מאוד לאיכות הוראת הנושא, משום שעסקתי בנושא זה באופן מעשי. השתמשתי גם בחלק מתוצאות העבודה בשיעור (פרק 6).

מקורות מידע

1. פת-אל י. (2011) אסטרונומיה – מדריך להכרת השמיים. רמת גן, קוסמוס, 2011.
2. Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M. (1963). The Feynman lectures on physics. Addison-Wesley publishing company, inc. Reading, Massachusetts. Palo Alto. London.
3. Lupishko D. F., Di Martino M. (1998) Physical properties of near-Earth asteroids // Planetary and Space Science. – 1998. – V. 46. – № 1. – P. 47-74.
4. Morrison D. (1992). The Spaceguard Survey: Report of the NASA International Near-Earth-Object Detection Workshop. – JPL. – Pasadena. – 1992. – 66 p.
5. Sawyer Hogg, H. (1950). Out of old books (Kirkwood's Gaps in Asteroid Orbits). Journal of the Royal Astronomical Society of Canada' Vol.44, p. 163
from <http://adsabs.harvard.edu/full/1950JRASC..44..1635>

נספחים

1. **חוברת העבודה: חישוב מסלול פלנטה סביב שמש לפי פיינמן.xls**
2. **חוברת העבודה: $\lambda(t).xls$** (חישוב קו אורך תיאורטי של פלנטה חיצונית, הנעה במסלול מעגלי כפונקציה של זמן, עבור קו אורך התחלתי, λ_0 , ומרחקה מן השמש, r , מסוימים. הגרף התיאורטי של הפונקציה $\lambda(t)$ בתוספת הפיזור (λ_i, t_i) שנובע מהתצפיות)
3. **חוברות העבודה: $t1.xls, t2.xls, t3.xls, t4.xls, t5.xls, t6.xls, t7.xls, t8.xls, t9.xls, t10.xls$** (חישוב קו אורך תיאורטי של אסטרואיד כפונקציה של קו האורך ההתחלתי, ומרחק מן השמש ב- 10 נקודות זמן מסוימים).
4. **חוברת העבודה: $\lambda(t, r, \lambda_0).xls$** (הצגת קו אורך תיאורטי של אסטרואיד כפונקציה של שלושה משתנים ומציאת זוג משתנים, (r, λ_0) , שעבורם סכום המרחקים של נקודות התצפית, $\lambda_i, i=1, 2, \dots, 10$, מגרף הפונקציה $\lambda(t)$, הוא הקטן ביותר).
5. **חוברת העבודה: $asteroid.xls$** (חישוב נקודות (λ_i, t_i) ברדיאן ויממות בהתאמה עבור 10 התצפיות שנעשו בחו"ל).
6. **חוברת העבודה: $1 תצפית.xls$** (חישוב נקודות (λ_i, t_i) ברדיאן ויממות, בהתאמה, עבור 10 צילומים שנעשו בטלסקופ של מכון ויצמן).
7. מצגת.