



**"תוכנית רוטשילד-ויצמן למצוינות בהוראת המדעים"
במימונה של קרן קיסריה אדמונד בנימין דה רוטשילד**

ציקלואידה – היפה בעקומות

מגישה: אביטל אלבוים – כהן

מנחים: ד"ר דימיטרי נוביקוב פרופ. סרגי יעקובנקו

תאריך הגשה: 17.5.2011

תוכן העניינים

2מבוא
3פרק ראשון - התכונות היסודיות של ציקלואידה
6פרק שני - חישוב השטח הכלוא מתחת לציקלואידה
9פרק שלישי – לופף של ציקלואידה
11פרק רביעי – שעונים ואיך זה קשור לציקלואידה?
15פרק חמישי – מציאת הברכיסטוכרון
20סיכום
21נספח א' - הציקלואידה בראי המתמטיקה המודרנית
26נספח ב' – הפתרון של ברנולי לבעיית הברכיסטוכרון
28רשימה ביבליוגרפית

”לא פחות מן הרם בשירים

שגבו המספר והקו

בהגות בם מוחות אדירים

שעמלו הומיים כעוגב.” נתן אלתרמן

מבוא

הכורח לחפש נושא לעבודת גמר גרם לי לזקק את העדפותי בלימוד והוראת מתמטיקה. עוד בטרם בחרתי את הנושא, ידעתי שיהיה לו פן ויזואלי, הוא יחקר מתוך הקשר היסטורי ואני איעזר בכלי ממוחשב כדי להציג את עבודתי. הבחירה בציקלואידה עונה באופן מושלם על שלושת הקריטריונים.

הציקלואידה היא עקומה במישור שיצאה לאוויר העולם המתמטי עם פרוץ המהפכה המדעית של ראשית העת החדשה. שמה של הציקלואידה ניתן לה בשל היות מקורה מן הסיבוב (בצרפתית roulette). הראשונים שחקרו את הציקלואידה היו גלילאו באיטליה (Galileo Galilei 1564-1642) ומרסן (Marin Mersenne 1588-1648) בצרפת. בהמשך היא נחקרה על ידי טובי המדענים מראשית המאה השבע עשרה ואילך. הציקלואידה זכתה לכינוי "הלנה של הגיאומטריה", להזכירנו כי הלנה מטרויה הייתה היפה בנשות יוון וחקר הציקלואידה מציג בפנינו את מיטב היופי הגיאומטרי. אני סבורה כי הכינוי "הלנה של הגיאומטריה" חוטא למהותה של הציקלואידה ולא בגלל שהציקלואידה נעדרת יופי. אלא משום שהגיאומטריה האויקלידית אין בה די כדי לחשוף את כל צפונותיה של הציקלואידה ולא בכדי לא היו אלה היוונים שחקרו את הציקלואידה. ראשית הבנת תכונותיה של הציקלואידה כמו ראשיתו של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי כרוכים בחקר תנועתם של גופים. חשוב להזכיר כי באותה תקופה לא הייתה קיימת הפרדה בין המתמטיקה והפיזיקה ולמעשה רוב התובנות המתמטיות המוצגות בעבודה זו הן תשובות לשאלות מתחום הפיזיקה.

בעבודה זו אני מבקשת להביא בפני הקורא פרק שהיה בחזית המדע לפני כשלוש מאות שנה. בתקופה זו החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי היה עדיין בחיתוליו והשפה הרווחת בקרב המדענים הייתה שפת הגיאומטריה. מצב זה דומה למצבם של תלמידים בבית הספר התיכון כאשר בערך בסוף כיתה יוד אלף (על פי תכנית הלימודים הנוכחית) הם סיימו ללמוד גיאומטריה אויקלידית והם בראשית לימודי האנליזה. לכן הם יכולים להבין היטב את הקשיים שעמדו בפני המדענים שחקרו את הציקלואידה לראשונה. עבודה זו מציגה בפני קוראיה את תכונותיה של הציקלואידה בכלים שהם בעיקרם גיאומטריים אך עם נגיעות של חשיבה מתחום האנליזה. אין בה יומרה לדיוק היסטורי והיא שמה את הדגש על הקוהרנטיות והבהירות המתמטית. יחד עם זאת העבודה מציגה בעיות שכן היו בעיות אמיתיות בהן עסקו מדענים. הכלים ההכרחיים לפתרון עדיין לא היו מבוססים כפרדיגמה בקהילה המדעית ולכן פתרון דרש חשיבה יצירתית ומהפכנית. אני מאמינה שחשוב להציג בפני תלמידים פרקים שלא רק מציגים ידע מתמטי אלא גם את השאלות והבעיות שגורמות לו להתפתח.

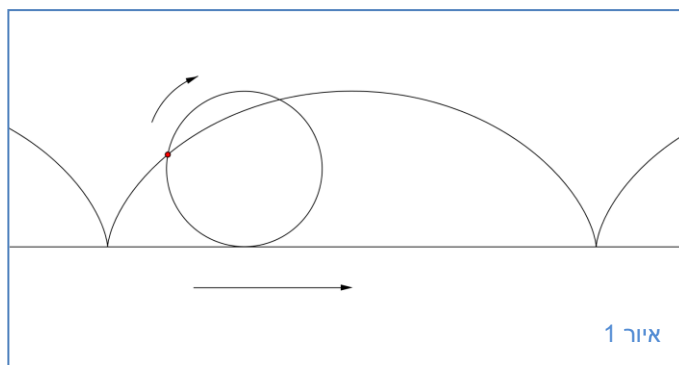
העבודה מכילה חמישה פרקים ושני נספחים. בכל אחד מחמשת הפרקים מוצגת תכונה של הציקלואידה או בעיה שפתרונה קשור בציקלואידה תוך הקפדה על הגבלת השימוש בכלים מתמטיים מתחום האנליזה. בנספח הראשון מופיעות הוכחות המשפטים ופתרון הבעיות כפי שמתמטיקאי הבקיא ברזי החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי היה פותר אותם. ברור כי המתמטיקה המופיעה בנספח היא מתמטיקה שגרתית שלא דורשת את היצירתיות שמופגנת בפרקי העבודה. העבודה מיועדת למורים שמעוניינים בהרחבת אופקים ובעיקר לתלמידי מתמטיקה מתקדמים הבקיאים במכאניקה בסיסית, אוהבים מתמטיקה ורוצים להכיר גם פרקים במתמטיקה שמחוץ לתכנית הלימודים.

פרק ראשון - התכונות היסודיות של ציקלואידה

נתחיל את המסע בהתבוננות בציקלואידה מנקודת מבט פיזיקאלית. (חשוב לציין כי במאה ה-17 בה החלה ההתעניינות בציקלואידה, לא הייתה קיימת הפרדה בין נקודת המבט המתמטית לנקודת המבט הפיזיקאלית.) בעיניו של הפיזיקאי:

ציקלואידה היא עקומה שמתארת את מקומו של אלמנט מסה על מעגל שמתגלגל לאורך קו ישר ללא החלקה.

תנועתו של אלמנט המסה שעל המעגל שיקרא מעתה המעגל היוצר, מורכבת משתי תנועות, תנועת מרכז המסה ותנועה ביחס למרכז המסה. מרכז המסה של חישוק נמצא במרכז החישוק. נקודת מרכז המסה נעה במהירות אופקית קבועה. נקודה על החישוק נעה ביחס למרכז המסה בתנועה מעגלית קצובה. וקטור המהירות של חלקיק הנע



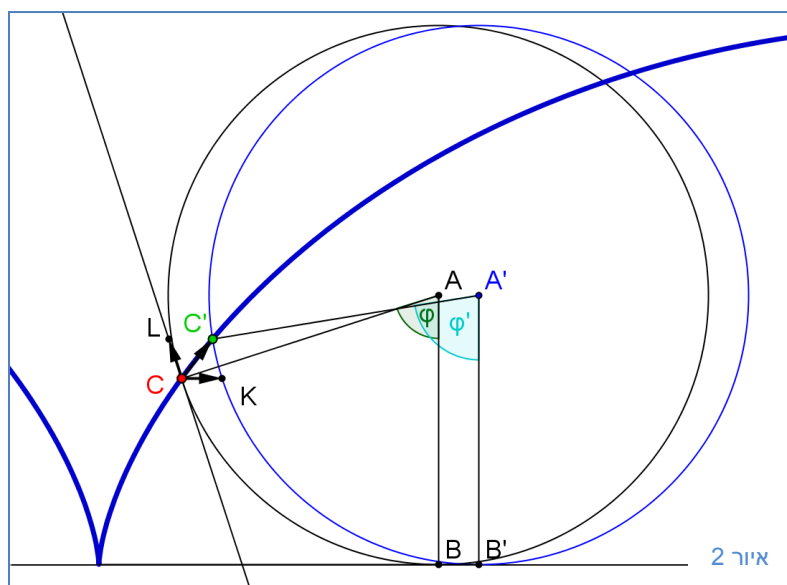
בתנועה מעגלית קצובה משיק למעגל. מכיוון שהמהירות היא הנגזרת של פונקצית המקום לפי הזמן ופעולת הגזירה היא פעולה אדיטיבית, ניתן להסיק את מסקנת הביניים הראשונה: **מהירותו של חלקיק הנע במסלול ציקלואידי, היא סכום מהירות מרכז המעגל היוצר ומהירות נקודה על המעגל היוצר ביחס למרכזו.** מכיוון שהמעגל מסתובב ללא החלקה, המהירות האופקית (מהירות מרכז המסה) והמהירות ביחס למרכז המסה (מהירות בכיוון משיק למעגל) שוות בגודלן.

כעת מטרתנו היא לתרגם את ההגדרה הפיזיקאלית לאפיונים מתמטיים של הציקלואידה.

משפט 1

בכל נקודה על ציקלואידה, המשיק לציקלואידה בנקודה, חוצה את הזווית שבין ישר אופקי ומשיק למעגל היוצר שעוברים דרך אותה הנקודה.

באיור 2 מופיע המעגל היוצר בשתי נקודות קרובות מאוד בזמן. הנקודה C (באדום) היא הנקודה הנעה במסלול ציקלואידי במצב הראשון, הנקודה C' (בירוק) היא הנקודה הנעה במצב השני. ההנחה היא כי הנקודות C ו-C' קרובות מספיק כדי שהווקטור $\vec{CC'}$ יחשב כווקטור בכיוון משיק לציקלואידה. הווקטור \vec{CK} מלמד על קצב השינוי של מקום מרכז המעגל היוצר.

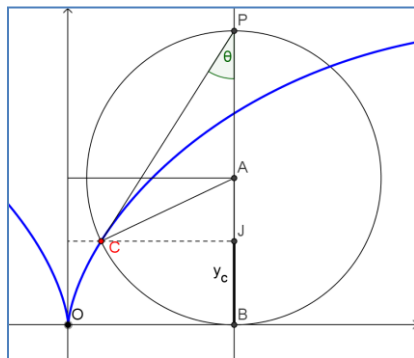


הווקטור \vec{CL} מלמד על קצב השינוי של מקומה של נקודה על היקף המעגל. לפי האמור לעיל, אפשר להסיק כי המרובע CKC'L הוא מעוין. לכן CC' חוצה את $\angle LCK$. ■

מסקנות:

1. הנורמל CB לציקלואידה בנקודה מסוימת עובר דרך נקודת ההשקה של המעגל היוצר עם הישר האופקי עליו הוא מתגלגל.

2. הזווית שבין המשיק לציקלואידה בנקודה ורדיוס המעגל היוצר באותה נקודה שווה למחצית הזווית המרכזית שנשענת על המיתר שמחבר את הנקודה התחתונה במעגל עם הנקודה



איור 4

שעל ציקלואידה, או במילים אחרות:
 $\angle PCA = \frac{1}{2} \angle CAB$

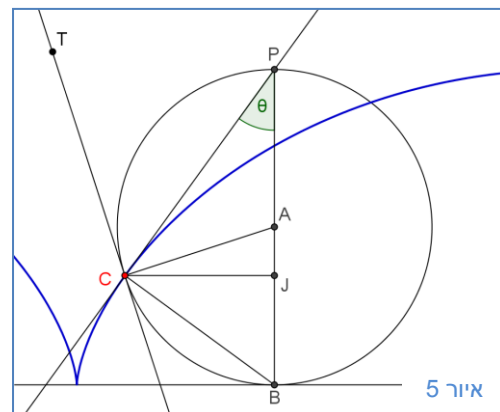
שלא משתנה עם סיבוב המעגל, השווה לפעמיים רדיוס המעגל היוצר $2r$. לכן אפשר לומר כי BJ פרופורציוני לריבוע הקטע CB. במונחים טריגונומטריים היסקנו כי שיעור ה- γ של נקודה על ציקלואידה פרופורציוני לריבוע של סינוס מחצית הזווית המרכזית שנשענת על הקשת CB. או במילים אחרות:

$$BJ = y_c = 2r (\sin(\theta))^2$$

משפט 3- משפט הפוך למשפט 2

הקטע שמחבר את הנקודה הגבוהה ביותר במעגל יוצר עם נקודה על ציקלואידה שנמצאת על אותו מעגל, משיק לציקלואידה.

אם נסתמך על המשפט ההפוך למשפט 1 עלינו להראות שהקטע שמחבר את הנקודה הגבוהה ביותר במעגל יוצר עם נקודה על ציקלואידה שנמצאת על אותו מעגל, חוצה את הזווית שבין המשיק למעגל היוצר לקו האופקי שעובר דרך הנקודה על ציקלואידה. על פי האיור: עלינו להראות כי אם PB קוטר, אז $\angle TCP = \angle PCJ$. אם $\angle APC = \theta$ קוטר $\Leftarrow \angle PAB = 180^\circ$. אם $\angle APC = \theta$ אז $\angle PAC = 180^\circ - 2\theta$, $\angle PCA = \theta$, $\angle ACJ = 90^\circ - 2\theta$, $\angle PCJ = 90^\circ - \theta$. מצד שני $\angle TCP$ היא זווית בין משיק למיתר במעגל לכן היא שווה למחצית הזווית



איור 5

המרכזית שנשענת על אותו מיתר. ז"א $\angle TCP = \frac{1}{2} \angle CAP = 90^\circ - \theta$

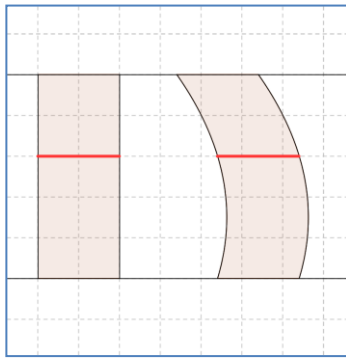
מסקנה: מתוך כל המשפטים לעיל ניתן להסיק שעקומה שמקיימת בכל נקודה עליה, כי שיעור ה- γ של הנקודה פרופורציוני לריבוע של סינוס θ , היא בהכרח ציקלואידה.

הערה - חשיבותם של המשפטים שצוינו והוכחו לעיל היא בעובדה שהם מאפשרים זיהוי של עקומה כציקלואידה גם אם העקומה לא נבנתה כנדרש אלא על פי התכונות שהעקומה מקיימת (ושהוכחנו לעיל). למשל, כאשר ברנולי (Johann Bernoulli 1667-1748) מצא את הפתרון לבעיית הברכיסטוכרון, הוא יכול היה לזהות את העקומה שמהווה פתרון לבעיה כציקלואידה על פי המסקנה אותה היסקנו לעיל. תמונה של יוהן ברנולי נמצאת בקישור הבא:

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Johann_Bernoulli.jpg

שימו לב למה שמצויר בדף שברנולי מחזיק בידו.

פרק שני - חישוב השטח הכלוא מתחת לציקלואידה



איור 1

כיום, חישוב שטח הכלוא מתחת לעקומה הוא פרוצדורה של שורה אחת כאשר האינטגרציה אפשרית. השאלה המתבקשת היא איך אפשר לחשב שטחים בלי חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי? או איך חישוב שטחים טרם היות החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי?

אפשר למנות שלושה עקרונות:

1. היחס בין השטחים של צורות דומות שווה לריבוע יחס הדמיון.
2. לשתי צורות יש שטחים שווים אם אפשר לפרק אותן לאותם מרכיבים חופפים.
3. עקרון קבליירי (Bonaventura Cavalieri 1598-1647) – אם נתונות שתי צורות במישור שמוגבלות בין שני ישרים מקבילים כך שכל ישר מקביל לישרים הללו נחתך ע"י שתי הצורות בנקודות המגדירות קטעים שאורכיהם שווים, אז שטחיהן של שתי הצורות שווים. עקרון זה נחשב להיות אחד מניצני החשבון האינטגרלי.

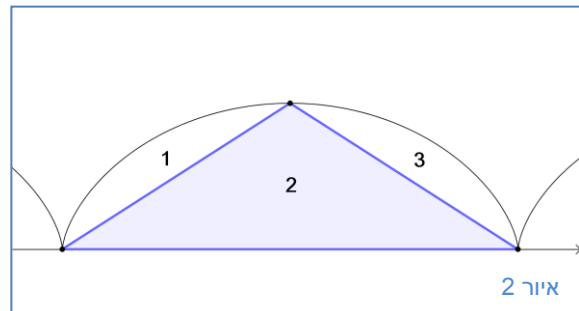
חשוב לציין שנקיטה בדרך גיאומטרית לחישוב שטחים פוטרת אותנו מהתלות בקיומו של אינטגרל. נברר כיצד לחשב את השטח הכלוא מתחת לציקלואידה באמצעות עקרונות אלה.

דרך 1

על פי (Reed 1986)

ראשית נחלק את השטח הכלוא מתחת למחזור אחד של ציקלואידה לשלושה חלקים על פי איור 2:

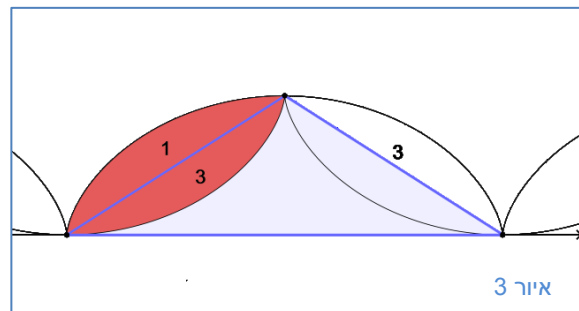
שטח המשולש "2" שבסיסו היקף המעגל היוצר וגובהו הוא קוטר המעגל היוצר, הוא: $2\pi r^2$.



איור 2

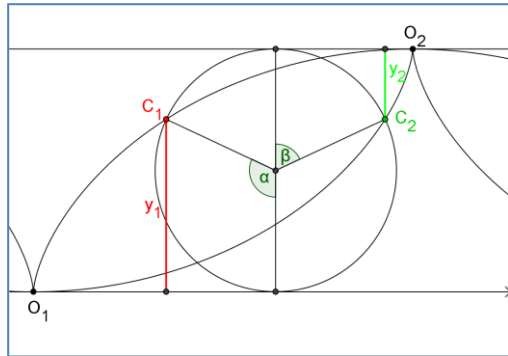
כדי לחשב את שטחי הקצוות "1" ו-"3" נאחד אותם על ידי היפוך ציקלואידה והזזתה. אפשר להסתכל על הציקלואידה המוזזת כציקלואידה שנוצרה על ידי מעגל זהה למעגל היוצר של ציקלואידה המקורית, אלא שהפעם המעגל מתגלגל ללא החלקה על הישר $y=2r$ ימינה.

אם כך השטח שעלינו לחשב כדי להשלים את חישוב שטח ציקלואידה הוא השטח המסומן באדום באיור 3.



איור 3

נשים לב כי בכל רגע ורגע נקודות החיתוך של המעגל היוצר עם שתי הציקלואידות יוצרות קטע אופקי. כדי להגיע למסקנה כי הקטע אכן אופקי, נתבונן באיור 4:

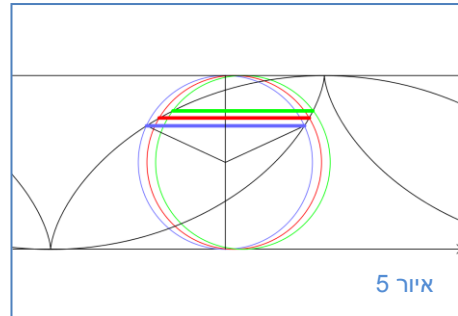


איור 4

- y_1 הוא שיעור ה- γ של הנקודה C_1 שנוצרה על ידי גלגול המעגל מ- O_1 ימינה בזווית α . במערכת צירים שראשיתה ב- O_1
- y_2 הוא שיעור ה- γ של הנקודה C_2 שנוצרה על ידי גלגול המעגל מ- O_2 שמאלה בזווית β . במערכת צירים שראשיתה ב- O_2 .
- $\alpha + \beta = \pi$ - כי מ- O_1 ל- O_2 יסתובב המעגל היוצר סיבוב של חצי מחזור או π רדיאנים.
- לפי המסקנות מהתכונה היסודית הסקנו כי $y_1 = 2r \cdot \sin^2(\alpha/2)$ ו**באותו אופן** $y_2 = 2r \cdot \sin^2(\beta/2)$.

- מכאן נוכל להסיק כי $y_1 + y_2 = 2r \cdot \sin^2(\alpha/2) + 2r \cdot \sin^2(\beta/2) = 2r \cdot \sin^2(\alpha/2) + 2r \cdot \cos^2(\alpha/2) = 2r$ ולכן הקטע המבוקש אופקי.

הקטע האופקי הוא מצד אחד מיתר במעגל ומצד שני מיתר בצורה שאת שטחה אנחנו רוצים לחשב. לפי עקרון קבליירי שצוטט לעיל נוכל להסיק כי השטח המבוקש הכלוא בין שתי הציקלואידות שווה לשטח המעגל היוצר πr^2 . לסיכום השטח הכלוא מתחת



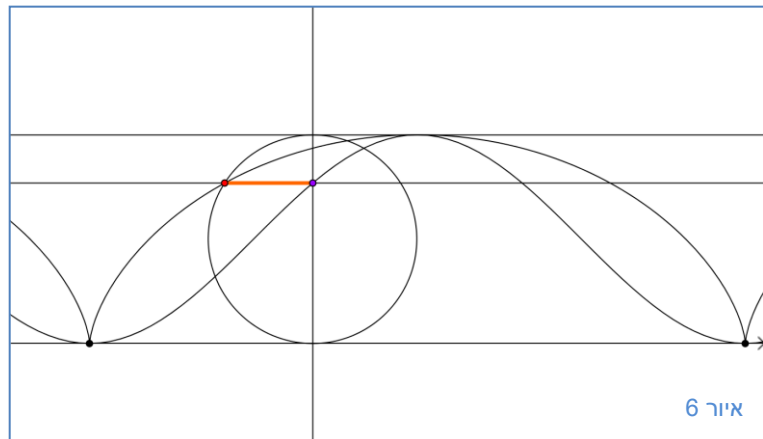
איור 5

למחזור אחד של ציקלואידה הוא $3\pi r^2$.

דרך II - בעקבות רברואל (Roberval 1602-1675)

נסרטט יחד עם הציקלואידה עקומה אשר אוספת את כל הנקודות שהן היטל של נקודות הציקלואידה

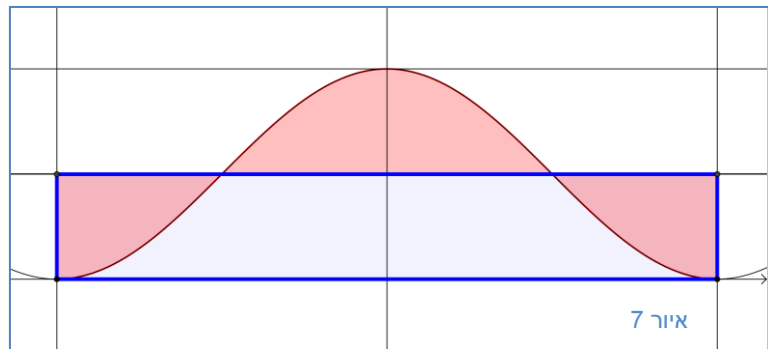
על הקוטר האנכי של המעגל היוצר. אפשר לראות עם קצת מאמץ כי עקומה זו היא בעצם סינוסואידה מוזזת. כדי לחשב את השטח שכלוא מתחת לציקלואידה צריך לחשב את השטח שמתחת לעקומה ולהוסיף את שני ה"עלים" שבצדדים. כדי לחשב את שטחי ה"עלים" נשתמש שוב בעיקרון קבליירי. בכל נקודה על



איור 6

הציקלואידה, הקו (הכתום) שמחבר את אותה עם הנקודה המתאימה שעל הסינוסואידה אורכו מחצית המיתר שחותך את המעגל היוצר באותו גובה. מכאן אפשר להסיק כי שטח כל "עלה" הוא מחצית שטח מעגל, ושטח שני העלים הוא כשטח מעגל שלם πr^2 . לא נותר לנו אלא לחשב את השטח מתחת לסינוסואידה המוזזת.

מטעמי סימטריה אפשר להגיד שארבעת החלקים שצבועים באדום בציר, שווים בשטחם. מכאן אפשר להסיק כי שטח ה"פעמון" אותו אנחנו חוצים לחשב שווה לשטח המלבן המסומן בכחול. אורך המלבן הוא היקף המעגל היצר - $2\pi r$, וגובהו שווה לרדיוס המעגל r , לכן שטחו



הוא $2\pi r^2$.

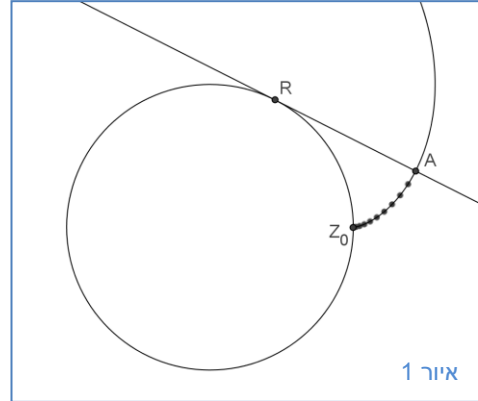
לסיכום השטח הכלוא מתחת ציקלואידה שווה לסכום השטחים של המלבן וה"עלים" והוא $3\pi r^2$.

פרק שלישי - לופף של ציקלואידה

הגדרת לופף (Involute/Evolvent) של עקומה נתונה

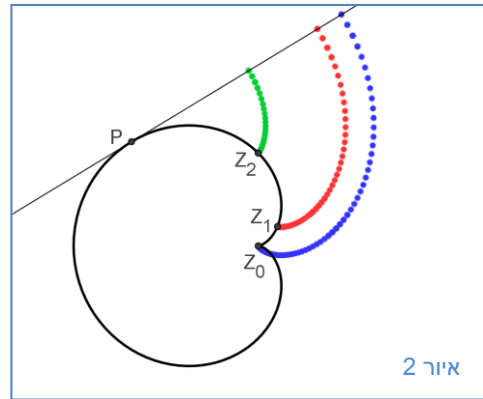
אוסף כל הנקודות במישור שנמצאות על ישר משיק לעקומה הנתונה ומרחקן מנקודת ההשקה שווה לאורך העקומה בין נקודה נתונה על העקומה Z_0 ובין נקודת ההשקה.

כדי להמחיש את ההגדרה המופשטת נתבונן (איור 1) על מעגל ונסרטט עליו משיק כך שנקודת ההשקה R והמשיק עמה, Z_0 נגד כוון השעון. על המשיק נסמן נקודה A שמרחקה מנקודת ההשקה שווה לאורך הקשת מ Z_0 עד לנקודת ההשקה $RA = \overline{RZ_0}$. נשים לב כי כאשר נקודת ההשקה Z_0 אוסף הנקודות שמתקבל יוצרות עקומה. העקומה המסורטטת באיור 1 שמימין היא הלופף של מעגל כאשר נקודת ההתחלה היא Z_0 . אפשר לדמיין חוט שעוטף את המעגל כאשר אנחנו מתחילים לפרום אותו החל בנקודה Z_0 כך שהחוט נשאר כל הזמן מתוח וקצהו מצייר את העקומה (הלופף) המתקבלת. הדימוי הפיזיקלי של יצירת הלופף מסביר כי המשיק לעקומה המקורית מאונך ללופף שלה.



איור 1

נשים לב כי במעגל יש סימטריה סיבובית, לכן בכל נקודת התחלה (Z_0) נקבל את אותו לופף עד כדי סיבוב. כאשר לעקומה אין סימטריה כזו יכול להיווצר בכל נקודת התחלה לופף אחר. לדוגמא, נתבונן על הלופף של הקרדיואיד בשלוש נקודות התחלה שונות. הנקודה P נעה נגד כוון השעון. העקומה הכחולה היא הלופף של הקרדיואיד החל מ Z_0 , העקומה האדומה היא הלופף של הקרדיואיד החל מנקודה Z_1 ובאותו אופן העקומה הירוקה היא הלופף של הקרדיואיד החל מנקודה Z_2 . נציין כי אם עקום a הוא הלופף של עקום b

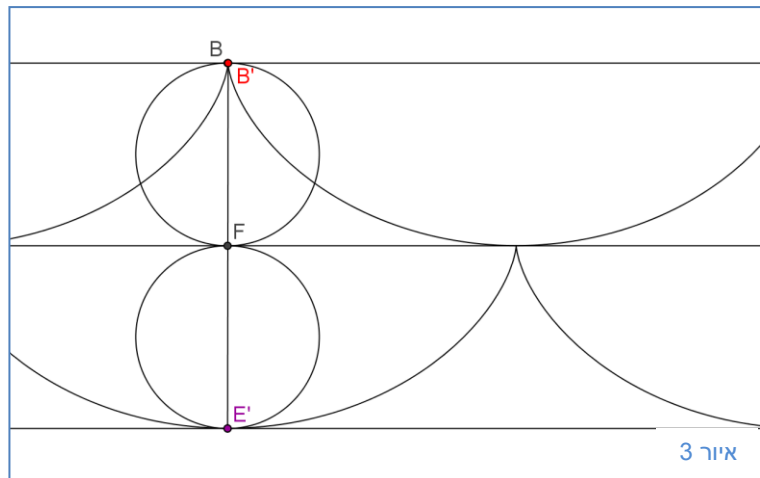


איור 2

אזי נאמר שעקום b הוא הלופף (evolute) של עקום a .

לופף של ציקלואידה

כדי לברר איזו עקומה מהווה לופף של ציקלואידה, נתבונן על הבנייה הבאה של שתי ציקלואידות. שני מעגלים יוצרים זהים מתגלגלים ימינה על ישר אופקי מצידו התחתון. נסמן ב- r את רדיוס המעגלים. נציין כי המעגלים יוצרים ציקלואידות שמוזזות אחת ביחס לשנייה בחצי מחזור. באיור 3 נמצאים שני המעגלים במצב התחלתי כך ש B' היא הנקודה "הנצרת"



איור 3

על הציקלואידה העליונה ו- E' הנקודה "הנוצרת" על הציקלואידה התחתונה. על פי הבנייה אפשר להסיק כי במצב ההתחלתי שני הקטרים $B'F$ ו- $E'F$ נמצאים על אותו ישר.

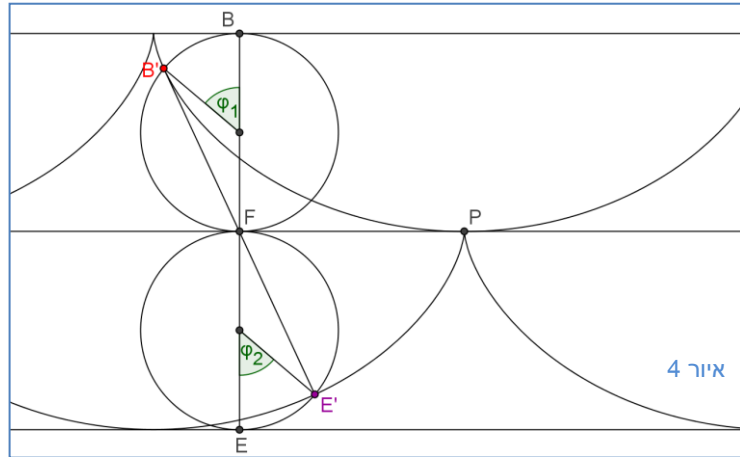
תרגיל

במצב בו שני המעגלים היוצרים הסתובבו ימינה נגד כוון השעון בסיבוב $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. (ראה איור 4) הוכח כי שלוש הנקודות B' , E' ו- F נמצאות על אותו ישר.

משפט 4

ישר המשיק לציקלואידה העליונה הוא אנך למשיק של הציקלואידה התחתונה.

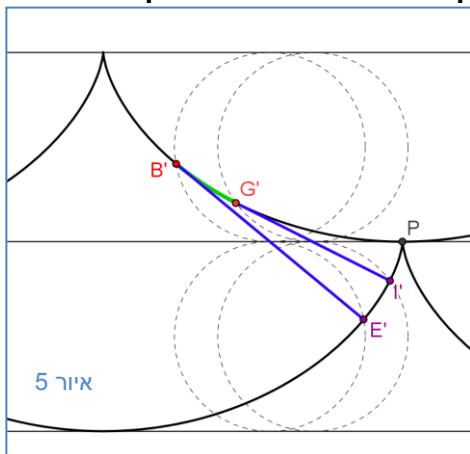
נתבונן שוב על הציקלואידות והמעגלים היוצרים שלהן כעבור סיבוב בזווית φ . מכיוון ששתי הציקלואידות נוצרות על ידי מעגלים יוצרים זהים שמתגלגלים יחד, נסיק כי $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. הקטע $B'F$ מחבר נקודה על הציקלואידה עם הנקודה התחתונה במעגל היוצר (באותה נקודה) לכן על פי משפט 3 אפשר להסיק כי $B'F$ משיק לציקלואידה בנקודה



B' . באותו אופן אפשר להסיק כי $E'F$ אנך למשיק (נורמל) בנקודה E' . מכיוון שבתרגיל הראינו כי שלוש הנקודות B' , E' ו- F נמצאות על אותו ישר סיימנו את הוכחת המשפט. ■

משפט 5

הציקלואידה התחתונה היא הלופף (involute) של הציקלואידה העליונה כאשר נקודת המוצא



היא נקודת הקמר (P) של הציקלואידה. (אפשר לומר גם כי ציקלואידה העליונה היא הלופף (evolute) של הציקלואידה התחתונה).

כדי להוכיח את המשפט עלינו להראות כי בכל שלב של הבנייה המתוארת באיור לעיל, האורך $B'E'$ שווה לאורך קשת הציקלואידה בין הנקודות B' ו- P .

כדי להסיק זאת עלינו להתבונן על שתי נקודות B' ו- G' על ציקלואידה העליונה. אם בוחרים את הנקודות כך שתהיינה קרובות מספיק זו לזו, נוכל להגיד כי הפרשי האורכים של המשיקים $B'E'$ ו- $G'E'$ שווים לאורך

ציקלואידה בין הנקודות B' ו- G' . אם נדמיין את בניית הלופף החל מהנקודה P נראה כי בכל צעד אנו מוסיפים לאורכו של המשיק קטע שאורכו שווה לאורך צעד שעשינו על ציקלואידה. מכאן אפשר להסיק כי הציקלואידה התחתונה מקיימת את הגדרת הלופף כנדרש. ■

תרגיל – הוכיחו כי אורך מחזור אחד של ציקלואידה שווה ל- $8r$ כאשר r הוא רדיוס המעגל היוצר. (שימו לב כי בדרך זו ניתן לחשב את אורכה של כל קשת על הציקלואידה)

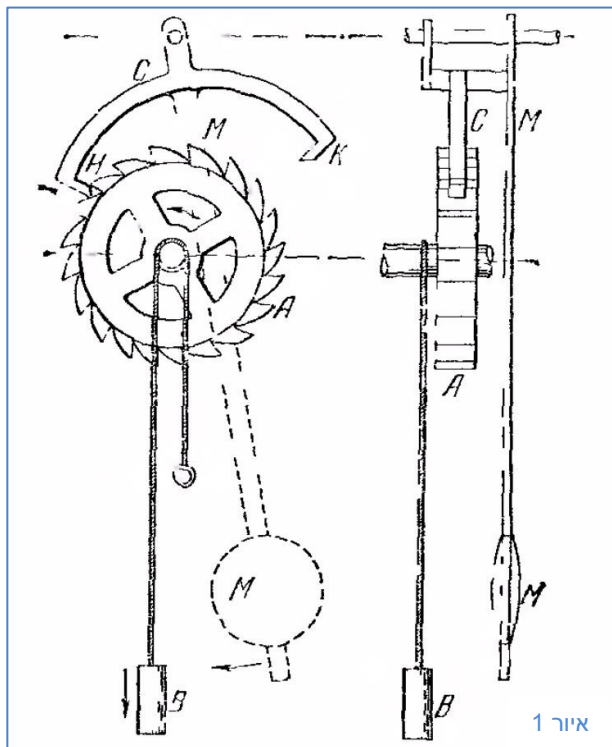
פרק רביעי - שעונים, ואיך זה קשור לציקלואידה?

החל בשעוני שמש וכלה בשעונים אטומיים, מדידה מדויקת של זמן הייתה שאיפתם של מדענים רבים לאורך ההיסטוריה. אנו נתעכב בפרק זה על שעון המטוטלת שחולל מהפיכה באופן שבו נהוג היה למדוד זמן במחצית המאה השבע עשרה. הצורך למדוד זמן באופן מדויק במאה השבע עשרה נבע בעיקר מהצורך לנווט ספינות בנתיבי הים. (המדידות השולטות בימים, היו המדידות שלהן גישה כמעט ישירה לאוצרות החדשים שהתגלו זה מכבר בעולם החדש). בניווט ימי אפשר לקבוע את קו הרוחב על ידי התבוננות בכוכבים. את קו האורך אי אפשר לקבוע בדרך זו. אילו יכלו המנווטים בים לדעת את הזמן במקום ממנו יצאו, הם יכלו להשוותו עם הזמן במקום בו הם נמצאים (שנקבע על ידי השמש) וכך יוכלו לחשב את קו האורך במקום בו הם נמצאים. לכן הייתה חשיבות גדולה למדידת זמן רציפה באמצעות מכשיר נייד שיורה את הזמן בלונדון (למשל) כאשר הספינה נודדת בימים. ממשלות ומלכים הציעו פרסים לתפארת כדי לפתור את מיטב המדענים לפתור את הבעיה.

כמו חלקים נכבדים במדע החדש, גם שעון המטוטלת נהגה לראשונה על ידי גלילאו גליליי. גלילאו היה סבור כי התנועה המחזורית של משקולת התלויה על חוט היא בעלת זמן מחזור שתלוי רק באורך החוט ולא במשרעת התנודות (טענה נכונה אם מגבילים את המשרעת לזוויות קטנות). במילים אחרות גלילאו קבע כי תנועת המטוטלת היא איזו כרונית (בעלת זמן מחזור קבוע). כאשר גלילאו ניגש לבניית שעון המטוטלת (1641) הוא כבר היה עיוור ובא בימים. הוא ייעד את בנו להמשיך בבניית השעון, אבל זה לא השכיל להשלים את הבנייה ומת זמן קצר אחר כך.

כריסטיאן הויגנס, מתמטיקאי ומדען הולנדי (Christiaan Huygens 1629-1695) היה הראשון שבשנת 1656 בנה שעון מטוטלת. כמו גלילאו לפניו גם הויגנס נשען על ההנחה כי זמן המחזור של מסה התלויה על חוט הוא גודל קבוע שאינו תלוי בנקודת ההתחלה.

באופן כללי, המטוטלת מסובבת לגלגל שיניים עם שיני מסור. מחגר (בציור HCK) גורם למטוטלת לסובב את גלגל השיניים בשן אחת בכל מחזור. כדי שמשרעת התנודה של המטוטלת לא תקטן, תלויה משקולת על הציר של גלגל השיניים. המשקולת יורדת מעט בכל תנודה, ההפרש באנרגיה הפוטנציאלית של המשקולת הוא זה שמפצה על אובדן אנרגיה קינטית של המטוטלת בשל חיכוך. כדי שהשעון יפעל באופן רציף עם אי דיוק מזערי, יש להרים את המשקולת פעם אחת לכל פרק זמן (בד"כ פעם ביום). למרות הצלחה היחסית של שעון המטוטלת, הויגנס המשיך וחקר את הבסיס התיאורטי לפעולת המטוטלת וגילה כי זמן המחזור תלוי במשרעת ולכן המטוטלת אינה איזו כרונית. מתוך שאיפה לשפר את שעון המטוטלת שבנה, חיפש הויגנס את המסלול שתנועה מחזורית



לאורכו תהיה בעלת זמן מחזור שאינו תלוי במשרעת.

התחתון (כאשר הציקלואידה הפוכה) של המעגל היוצר. לכן המשיק לציקלואידה בנקודה M הוא הקטע ML. נסמן את וקטור המהירות בנקודה M ב-MJ. הרכיב האנכי של וקטור המהירות הוא $MP = MJ \cdot \cos(\alpha)$.

נתבונן על המעגל היוצר של הציקלואידה הממוקם במרכז (המעגל שקוטרו AD ומרכזו O). הקטע MK מקביל לישר אופקי וחותר את המעגל היוצר המרכזי בנקודה T. על פי בנייה זו $ML \perp TA$. לכן מתקיים $\cos(\alpha) = \frac{KA}{TA}$. מכאן נוכל להסיק כי הרכיב האנכי של מהירות הגוף בנקודה M הוא:

$$MP = \sqrt{2g \cdot BK} \cdot \frac{KA}{TA}$$

מכיוון ש TA הוא מיתר במעגל, α היא הזווית בינו ובין קוטר המעגל ב-A ורדיוס המעגל היוצר הוא a, אפשר להסיק כי: $TA = 2a \cdot \cos(\alpha)$. מצד שני $KA = TA \cdot \cos(\alpha) = 2a \cdot \cos^2(\alpha)$ ולכן $\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{KA}{2a}}$. נשפץ שוב את גודלו של הרכיב האנכי של המהירות ב-M ונקבל:

$$MP = \sqrt{2g \cdot BK} \cdot \sqrt{\frac{KA}{2a}} = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \sqrt{BK \cdot KA}$$

כדי להמשיך עלינו לבנות מעגל שקוטרו BA. מעגל זה נחתך על ידי MK בנקודה C. מתוך תכונות משולשים דומים במעגל אפשר להסיק כי $CK = \sqrt{BK \cdot KA}$. (מומלץ להוכיח טענה זו כתרגיל). לכן:

$$MP = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot CK$$

בחלקה השני של ההוכחה נמקד את הדיון בתנועה אחרת. נתבונן בגוף זהה לגוף שנע על ציקלואידה שנע בתנועה מעגלית קצובה לאורך המעגל שקוטרו AB. נקבע את המהירות הזוויתית להיות $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$ רדיאנים לשנייה. נשים לב כי למרות שהבחירה שלנו במהירות הזוויתית המסוימת הזו עלולה להראות שרירותית, היחידות הפיזיקאליות של הגודל הנבחר מתאימות ליחידות של מהירות זוויתית. תאוצת הנפילה החופשית נמדדת ביחידות של מטר לשנייה בריבוע, רדיוס המעגל היוצר a נמדד ביחידות של מטרים לכן הגודל שבחרנו עבור המהירות הזוויתית הוא ביחידות של אחד חלקי שנייה כנדרש. בתנועה מעגלית קצובה המהירות המשיקית שווה למכפלת המהירות הזוויתית ברדיוס המעגל, לכן גודל המהירות המשיקית בתנועה המעגלית הקצובה שבחרנו תהיה:

$$CQ = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \frac{AB}{2}$$

הרכיב האנכי של המהירות המשיקית יהיה:

$$CE = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \frac{AB}{2} \cdot \cos(\beta) = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \frac{AB}{2} \cdot \frac{CK}{O_1C} = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \frac{AB}{2} \cdot \frac{CK \cdot 2}{AB} = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot CK = MP$$

המעבר העיקרי בשורה לעיל נובע מהשוויון בין הזוויות במעגל שקוטרו AB $\angle KCO_1 = \angle ECQ$ (הוכיחו את השוויון כתרגיל). המסקנה החשובה משורה זו היא כי הרכיב האנכי של מהירותו של גוף הנע על ציקלואידה בהשפעת כוח הכובד ללא חיכוך שווה לרכיב האנכי של גוף הנע בתנועה מעגלית קצובה במעגל שקוטרו שווה לגובהה של נקודת המוצא M_1 מעל בסיס הציקלואידה.

השלב הבא בהוכחה נשען על טענה שעל פניה נראית אינטואיטיבית. אם יש שני גופים אשר בכל רגע ורגע הרכיב האנכי של מהירותם שווה והם עוברים אותו מרחק אנכי, אזי בהכרח זמני תנועתם שווים. למעשה, טענה זו נשענת על יסודות שהם בבסיס החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי. אם נחלק את

שני המסלולים לאינספור חלקים קטנים אזי בכל חלק נוכל לומר שהרכיב האנכי של המהירות הוא גודל קבוע (אותו גודל קבוע בשתי התנועות) ההעתק האנכי גם הוא זהה בשתי התנועות ולכן גם זמן התנועה בכל קטע קטן, זהה בשתי התנועות. כעת, אם נסכם את כל הזמנים של כל הקטעים בשתי התנועות, נסיק כי הזמן מראשית התנועה ועד סופה שווה עבור שני המסלולים. לסיכום, הראינו כי הזמן שלוקח לגוף לנוע במורד ציקלואידה מנקודה M_1 ועד לנקודה A שווה לזמן שלוקח לגוף לנוע

$$\text{בתנועה מעגלית קצובה לאורך חצי מעגל שקוטרו } AB \text{ במהירות } \frac{AB}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

כדי לסיים את ההוכחה עלינו לשים לב כי בחרנו מראש את התנועה המעגלית להיות בעלת מהירות זוויתית שאינה תלויה ברדיוס המעגל $\frac{AB}{2}$ או בנקודה M אלא רק בתאוצת הנפילה החופשית וברדיוס

המעגל היוצר את ציקלואידה. המהירות הזוויתית היא $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$ רדיאנים לשנייה לכן זמן התנועה

במורד ציקלואידה יהיה $\pi \cdot \sqrt{\frac{g}{a}}$ שניות. מכיוון שבהעדר חיכוך זמן הירידה שווה לזמן העלייה נסיק כי

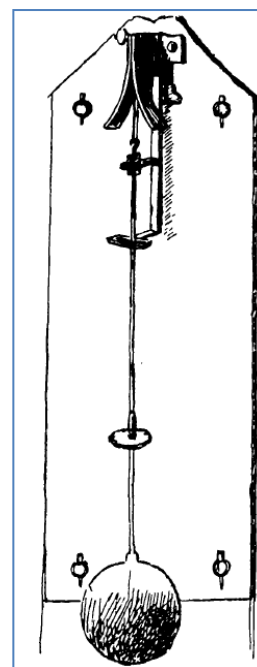
גוף המשוחרר מכל נקודה על ציקלואידה יבצע תנועה מחזורית עם זמן מחזור של $4\pi \sqrt{\frac{g}{a}}$ שניות.

לסיכום הראינו שהציקלואידה היא עקומה איזוכרונית. ■

כריסטיאן הויגנס היה הראשון שהוכיח כי ציקלואידה היא עקומה איזוכרונית או טאוטוכרון. הוא פרסם את ההוכחה בספרו Horologium Oscillatorium בשנת 1673. למען הדיוק הידיעה כי ציקלואידה היא עקומה איזוכרונית קדמה אצל הויגנס להוכחת הטענה. הספר פורסם רק אחרי שהויגנס סיים למעשה את המחקר בתחום. הויגנס קיווה לבנות שעון מטוטלת שהגוף המתנדנד בו ינוע במסלול ציקלואידי. הרעיון ההנדסי המבריק שאפשר בנייה של שעון מטוטלת שכזה נשען על הידיעה כי ציקלואידה היא הלופף של עצמה.

לפיכך בנה הויגנס סביב הציר של המטוטלת שני פסי מתכת צמודים בצורה של ציקלואידה כדי שתנועת המטוטלת תהיה במסלול ציקלואידה וזמן המחזור שלה לא יהיה תלוי במשרעת התנועה.

למרבה הצער עבודתו החדשנית והמבריקה של הויגנס לא היה בה די כדי לפתור את בעיית קו האורך. שעון המטוטלת של הויגנס שרת את האנושות נאמנה לאורך מאות שנים גם בלי התיקון למסלול ציקלואידי, ושעון המטוטלת הציקלואידי לא היה יציב דיו כדי לשמש את יורדי הים במציאת קו האורך. בסופו של דבר היה זה שעון הקפיץ שהצליח בדיוק סביר להורות את השעה בלב ים ובכך לפתור את בעיית קו האורך, אבל זה כבר סיפור אחר.



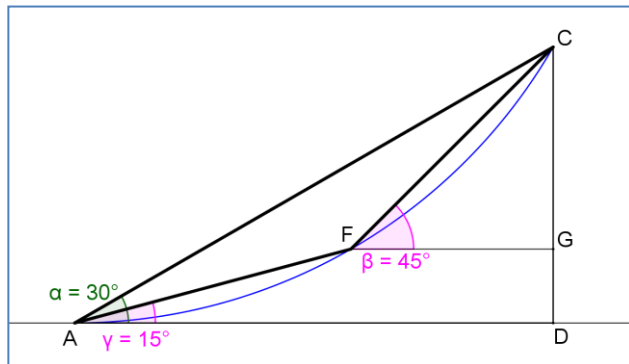
איור 3

חשוב לציין כי המתמטיקאי הנורווגי אבל (Niels Henrik Abel 1802-1829) היה זה שהוכיח את המשפט ההפוך למשפט 6 שאומר כי כל טאוטוכרון הוא בהכרח ציקלואידה.

פרק חמישי - מציאת הברכיסטוכרון

המושג ברכיסטוכרון מקורו ביוונית. "ברכיסטוס", פירושו "קצר ביותר" ו"כרונוס" פירושו "זמן". לכן, ברכיסטוכרון פירושו הזמן הקצר ביותר. יחד עם זאת פתרון בעיית הברכיסטוכרון הוא **מציאת העקומה שלאורכה ינוע חלקיק בהשפעת כוח הכובד במשך הזמן הקצר ביותר**. מחשבה שטחית טוביל להשתאות "למה עקומה? הרי ברור שזמן התנועה יהיה קצר ביותר לאורך הקו הישר שמחבר את שתי הנקודות." זו טענה שקל להפריך. נתבונן על מדרון משופע בזווית של 30° . גוף שישוחרר ממנוחה בקצה המדרון ינוע בהשפעת כוח הכובד בתאוצה קבועה שגודלה $a = g \cdot \sin(30^\circ) = \frac{5m}{s^2}$ (בהנחה ש $g = \frac{10m}{s^2}$ והתנועה ללא חיכוך) נניח כי קצה המדרון נמצא בגובה 5 מטרים מעל הקרקע.

את זמן התנועה מראש המדרון לתחתיתו אפשר לחשב על פי פונקצית מקום זמן של גוף הנע בתנועה שוות תאוצה $x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$. לכן $10 = \frac{1}{2}g\sin(30^\circ)t^2$ ו- $t = 2_{sec}$. כעת



נתבונן במסלול אחר המחבר את ראש המדרון עם תחתיתו. נניח כי המדרון המקורי AC אורכו 10 מטרים והוא נטוי בזווית 30° לקרקע. נעביר קשת AFC כשהקטע AD משיק לקשת בנקודה A. נסמן ב-F את אמצע הקשת ונסמן את הקטעים AF ו-FC. $AD \parallel GF$.

תרגילים

איור 1

1. הוכיחו כי $\angle DAF = 15^\circ$ וגם $\angle GFC = 45^\circ$.
2. הסיקו כי $AF = FC = 5.18_{meter}$.

נחשב כמה זמן לוקח לגוף המשוחרר מנקודה C במהירות אפס, הנע לאורך הקטעים CF ו-FA בהשפעת כוח הכובד בלבד להגיע לקרקעית המדרון (A).

$$t_{CF} = 1.21_{sec} \text{ כי } 5.18 = \frac{1}{2}7.07t^2 \text{ לכן } g \sin(45^\circ) = 7.07 \frac{m}{s^2}$$

נניח כי האנרגיה נשמרת במעבר ממדרון CF למדרון FA. מכאן נסיק כי המהירות בסוף המדרון CF שווה למהירות בראשית המדרון FA. לכן המהירות בנקודה F היא: $v = 7.07 \cdot 1.21 = 8.55 \frac{m}{s}$. לפי

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \text{ זמן התנועה מ-F ל-A מקיים: } 5.18 = 8.15t + \frac{7.07}{2}t^2 \text{ נותר על הפתרון}$$

השלילי ונסיק כי $t_{FA} = 0.52_{sec}$. נשים לב כי $t_{CF} + t_{FA} = 1.73_{sec} < 2_{sec}$. הפרכנו את הסברה כי המסלול המהיר ביותר בין C ל-A בהשפעת כוח הכובד, הינו הקו הישר המחבר את שתי הנקודות.

החישוב הקטן שהדגמנו לעיל מזמין טענה חזקה יותר. הגיוני לחשוב שאם נמשיך ונחלק כל פיסת מדרון לשני קטעים באמצעות קשת, כפי שהודגם לעיל נמשיך ונקטין את זמן התנועה. המיציץ של החלוקה האין סופית המוצעת מובילה בסופו של דבר למסלול מעגלי. מכאן לא מפתיע לגלות כי גלילאו במחצית הראשונה של המאה השבע עשרה, בעקבות מחקר ניסיוני אודות תנועת גופים במדרון בהשפעת כוח הכובד, היה סבור כי בהינתן שתי נקודות במרחב שאינן על קו אנכי, המסלול בעל הזמן המינימאלי בשדה כבידה הוא לאורך קשת מעגלית. גלילאו לא הוכיח את טענתו. הבעיה של מציאת הברכיסטוכרון שבה ועלתה בשנת 1696 כאשר יוהאן ברנולי הבעיה. (Johann Bernoulli 1667-1748) פרסם אותה בעיתון המדעי Acta Eruditorum, והיציע פרס לפותר הבעיה.

חמישה מדענים פתרו את הבעיה שהציג יוהאן ברנולי: ל'הופיטל, לייבניץ, ניוטון, יעקב ברנולי (אחיו הבוגר של יוהאן) ויוהאן ברנולי בעצמו. החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי שהיה בהתהוות בתקופה בה הציג יוהאן ברנולי את הבעיה, לא היציע כלי מוגדר היטב לפתרון בעיות ערך קיצון מהסוג של בעיית הברכיסטוכרון. מקובל לחשוב כי הפתרון שהציג אחיו של יוהאן, יעקב ברנולי הוא שהציב את היסודות לתחום מתמטי חדש שנועד לפתור בעיות ערך קיצון מסוג זה ונקרא "חשבון ווריאציות" (calculus of variations). בפרק זה נלמד את פתרונו של יוהאן ברנולי.

הפתרון של יוהאן ברנולי לבעיית הברכיסטוכרון מדגיש לנו, לומדי המתמטיקה, כי בעבר ההבחנה בין המתמטיקה ומדעי הטבע לא הייתה קשיחה כפי שהיא בימינו. היום בעיית הברכיסטוכרון נלמדת כדוגמה לשימוש בחשבון וריאציות (תחום דעת מתמטי) לפתרון בעיה פיזיקאלית (מכאניקה אנליטית). עבור ברנולי, אבחנה זו לא קיימת. הבעיה והפיתרון, אליבא דברנולי, הם בתחום מדעי הטבע ולכן הוא משתמש ללא היסוס בחוקים שאמיתותם נובעת מתוך הניסיון.

ראשית נקדים ונבהיר מהם העקרונות הפיזיקאליים עליהם נשענת ההוכחה של יוהאן ברנולי.

חוק שימור האנרגיה המכאנית

כפי שצוין בפרק הקודם, מתוך חוקי ניוטון אפשר להסיק כי בהעדר חיכוך כאשר גוף נע בהשפעת כוח הכובד בלבד סכום האנרגיה הקינטית והאנרגיה הפוטנציאלית של הגוף הוא גודל קבוע. הגודל הקבוע תלוי רק במקום שבו נקבעת האנרגיה הפוטנציאלית להיות אפס (מישור ייחוס).

לכל נקודה בזמן מתקיים: $mgh + \frac{1}{2}mv^2 = const$ (m מסת הגוף, h גובהו מעל מישור הייחוס ו-v מהירותו)

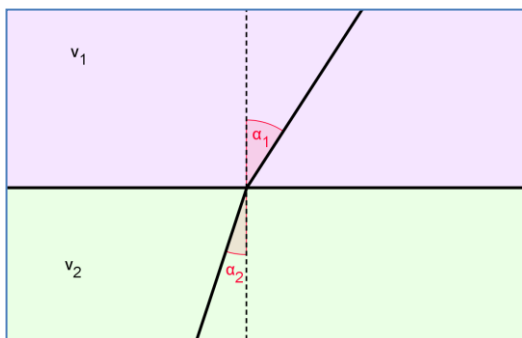
נניח כי גוף משוחרר ממנוחה מנקודה C בסרטוט הנ"ל. בנוסף נניח כי $CD=H$ וכי מישור הייחוס שלנו A (המישור בו שיעורו של h הוא 0) יהיה AD. אפשר להראות כי מהירותו של הגוף כאשר יגיע לנקודה A היא: $v = \sqrt{2gH}$.

נשים לב, כי המהירות לא תלויה במסלול בו עובר הגוף.

עקרון פרמה (Pierre de Fermat 1601-1665)

עקרון פרמה קובע כי האור נע במסלול שבו זמן תנועתו הוא מינימאלי.

חוק סנל (Willebrord Snellius 1580 – 1626)



איור 2

חוק סנל הוא חוק באופטיקה גיאומטרית שמאפיין את מעבר קרן אור בין שני חומרים שונים. נניח כי נתונים שני חומרים. חומר 1 שמהירות האור בו היא v_1 וחומר 2 שמהירות האור בו היא v_2 . נניח כי המשטח המפריד בין שני החומרים הוא מישורי. אם אור מגיע מחומר 1 לחומר 2 בזווית פגיעה α_1 , זווית השבירה תהייה α_2 כך שמתקיים: $v_1 \cdot \sin \alpha_2 = v_2 \cdot \sin \alpha_1$ או באופן שקול:

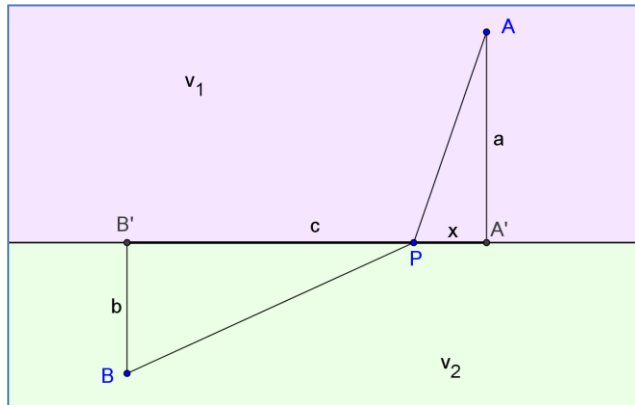
$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = const$$

ברנולי הניח שאם עקרון פרמה נכון וחוק סנל נכון הרי שחוק סנל מלמד על מהלך קרני אור שלוקח זמן מינימאלי. היום אנחנו יודעים כי אם נניח את עקרון פרמה נוכל להסיק בעזרת חשבון דיפרנציאלי את חוק סנל.

תרגיל

נתונים שני תווכים. האחד, מהירות האור בו היא v_1 בשני מהירות האור היא v_2 . נתונה נקודה A בתווך הראשון ונקודה B בתווך השני. הראו כי מכל המסלולים האפשריים שמחברים את הנקודות A ו-B באמצעות קווים ישרים המסלול שלוקח זמן מינימאלי מקיים את חוק סנל.

איור 3

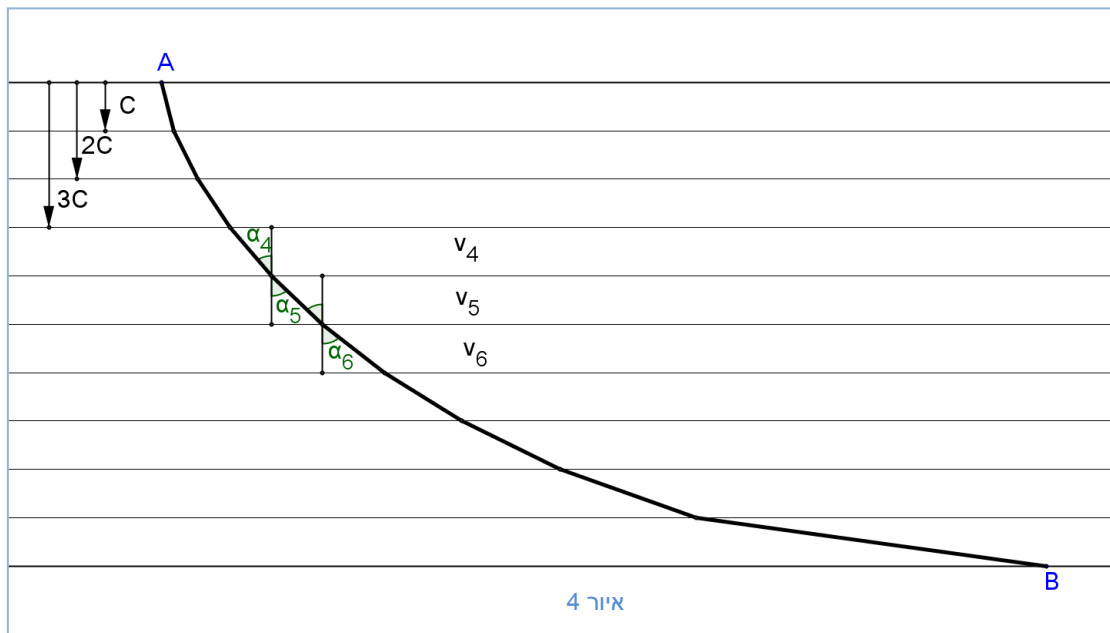


הנחיות לפתרון: מכיוון שמהירות האור בכל אחד מהתווכים קבועה, אפשר להסיק שבכל תווך ינוע האור בקו ישר. לכן המסלול שמחבר את A ו-B ולוקח זמן מינימאלי מורכב משני קטעים שנפגשים בנקודה P על המישור שמפריד בין שני התווכים. כעת השאלה שלנו מצטמצמת למציאת המיקום של הנקודה P כך שזמן התנועה הוא מינימאלי. נסמן ב- A' את ההיטל של A על המישור המפריד, וב- B' את ההיטל של B על המישור המפריד.

נסמן ב- a את אורך הקטע AA' וב- b את אורך הקטע BB' . נסמן ב- x את אורך הקטע PA' . כעת כל שעלינו למצוא הוא: מהו x כך שהזמן שלוקח לאור לעבור את המסלול APB הוא מינימאלי. כאשר נמצא את x המבוקש נראה שעבור x זה מתקיים חוק סנל.

הפתרון של יוהאן ברנולי לבעיית הברכיסטוכרון

חשוב לשים לב כי בשונה מהסקת חוק סנל מתוך הנחת עקרון פרמה, מציאת הברכיסטוכרון אינה בעיית ערך קיצון רגילה. האובייקט אותו אנחנו מחפשים אינו מספר שעבורו פונקציה מסוימת מקבלת ערך קיצון, אלא עקומה במישור שתנועה לאורכה מניבה זמן מינימאלי. נקודת המוצא של ברנולי היא כי מהירותו של גוף בכל נקודה פרופורציונית לשורש המרחק האנכי שעבר הגוף מהנקודה ממנה שוחרר ממנוחה (על פי חוק שימור אנרגיה). בנוסף הוא מניח כי המסלול המבוקש הוא המסלול שבו תעבור קרן אור כאשר התווך משתנה באופן כזה שמהירות האור בו תהיה פרופורציונית לשורש המרחק האנכי מנקודת המוצא. למרות שברנולי לא משתמש בכלים אנליטיים כדי לפתור בעיית ערך קיצון, החדשנות שלו באה לידי ביטוי ביכולתו לעבור מניתוח בדיד של הבעיה לפתרון רציף.



הפתרון המוצג להלן הוא פשוט של הפיתרון של ברנולי. המהלך המקורי מופיע בנספח ב' של העבודה.

נחלק את התווך שבין הנקודות A ו-B ל"פרוסות" אופקיות שוות של תווכים, ונניח כי בכל "פרוסה" שכזו המהירות קבועה. בכל מעבר מתווך לתווך מתקיים חוק סנל. לדוגמא במעבר מתווך 4 לתווך 5 מתקיים:

$$\frac{\sin \alpha_4}{v_4} = \frac{\sin \alpha_5}{v_5}$$

מכיוון שבחרנו "פרוסות" מקבילות אנחנו יודעים שזווית השבירה בתווך n שווה לזווית הפגיעה בתווך n+1. לכן לכל n מתקיים:

$$\frac{\sin \alpha_n}{v_n} = \text{const}$$

כעת נקבע את המהירויות להשתנות בהשפעת הכוח הגרביטציוני. על פי הנתונים באיור 4 מתקיים $v_n = \sqrt{2g \cdot n \cdot c}$. אם נכפיל ב $\sqrt{2g}$ את הקבוע במשוואה הקודמת נקבל כי:

$$\frac{\sin \alpha_n}{\sqrt{c \cdot n}} = \text{const}$$

כעת נתבונן בתוצאות כאשר ה"פרוסות" שלנו נעשות דקות יותר ויותר עד שהמסלול שלנו יהפוך מאוסף של קטעים לקו עקום רציף וחלק. המהירות תהפוך מפונקציה של n לפונקציה של y (שיעור ה-y של נקודה על העקום כאשר ראשית הצירים ב-A והכוון החיובי של ציר y הוא מטה). הזווית α תהיה הזווית בין המשיק לעקום בנקודה ששיעורה y ובין קו אנכי שעובר דרך נקודה זו.

לפי בנייה זו, אנו מחפשים עקום שבכל נקודה עליו היחס $\frac{\sin \alpha}{\sqrt{y}}$ (כאשר α הזווית בין המשיק לאורך בנקודה ששיעורה y) הוא גודל קבוע. כעת עלינו להיזכר במה שלמדנו בפרק הראשון. הציקלואידה היא העקומה היחידה שמקיימת את התנאי הנ"ל לכן הציקלואידה היא הברכיסטוכרון.

תרגיל

הראו כי אם הנקודות A ו-B נתונות במקום בו כוח הכובד משנה את המהירות כך שהמהירות פרופורציונית ל- γ (ולא ל- γ שורש γ כמו בבעיית הברכיסטוכרון המקורית) אז העקום שתנועה לאורכו תהייה בזמן מינימאלי, יהיה קשת מעגלית.

סיכום

תלמידים ומורים למתמטיקה, מן הראוי שייראו יופי בנושא אותו הם לומדים ומלמדים. התבוננות במתמטיקה מחוץ להקשר המיידי של תכנית הלימודים ובחינות הבגרות תורמת לחשיפת אותו יופי חמקמק. בעבודה זו ביקשתי לחשוף נקודה אחת ולהאיר אותה מכמה זוויות, כך שנוכל לעצור, להתפעל ולנצור את כל היופי הזה.

שלוש נקודות למחשבה עלו בי בעקבות כתיבת העבודה:

- בעבודה זו ניסיתי לספר סיפור שמתחקה באופן חלקי אחר פרקים בהיסטוריה של המתמטיקה. אני מאמינה כמו רבים לפני כי חשיפת הקשיים איתם התמודדו מדעני העבר יש בה כדי להאיר את עינינו המורים בדבר הקשיים איתם מתמודדים תלמידינו היום. גם תלמידים יכולים לצאת נשכרים מהבנת הבעיות שהעסיקו מדענים שהיו בחזית המדע בתקופתם ומהפתרונות שהובילו שינוי בחשיבה המדעית. בנוסף, חשיפה לחומרים היסטוריים מדגישה את העובדה שגם המתמטיקה היא יצירה אנושית שנוולדת מתוך הצורך לענות על קשיים ולפתור בעיות.
- קריאת מקורות היסטוריים והתחקות אחר הוכחות של טענות מתמטיות מהמאה השבע עשרה האירה את היות הפיזיקה והמתמטיקה כרוכות זו בזו באופן שאינו ניתן להפרדה. כאשר ברנולי פותר את בעיית הברכיסטוכרון הוא משתמש בחוק סנל ובעקרון פרמה כפי שאנחנו משתמשים היום באקסיומות מתמטיות. הן בעיית הטאוטוכרון והן בעיית הברכיסטוכרון הן בעיות פיזיקאליות שהתשובות להן היו פריצות דרך מתמטיות. אפשר לומר כי החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי כולו נולד מתוך הצורך להמציא שפה שתוכל לבאר את מהות תנועתם של גופים. לעומת זאת במציאות של מערכת החינוך הישראלית רוב התלמידים שלומדים מתמטיקה ברמה של חמש יחידות לא יודעים תאוצה מהי ולימודי הפיזיקה הם נחלתם של מעטים. אני מאמינה שההפרדה הדיסציפלינארית הנהוגה היום בתוכניות הלימודים בין המתמטיקה והפיזיקה היא מלאכותית ומזיקה במיוחד לתלמידים שהמתמטיקה תהייה חלק מחייהם הבוגרים.
- במהלך עבודתי נעזרתי רבות בתוכנת עזר מתמטית שנקראת גיאוגברה (GeoGebra) הן כדי להבין טוב יותר את המתמטיקה שלמדתי והן כדי להמחיש את טיעוני בעבודה. אני חושבת שבעתיד אני אשאף להציג את כל העבודה לתלמידים ולמורים דרך התנסות אינטראקטיבית בגיאוגברה. מכיוון שהציקלואידה מקורה בתנועה אני חושבת שהמחשה דינאמית יכולה לשפר את הבנת המהלכים המתמטיים של העבודה.

נספח א' - הציקלואידה בראי המתמטיקה המודרנית

הגדרה

על פי ההגדרה הפיזיקאלית שניתנה בפרק הראשון:

ציקלואידה היא עקומה שמתארת את מקומו של אלמנט מסה על מעגל שמתגלגל לאורך קו ישר ללא החלקה.

בפרק זה נשתמש בהגדרה לעיל כדי להציג את הציקלואידה כעקומה במישור באמצעות פונקציה

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. באופן טבעי נבחר בזמן t

להיות הפרמטר שבאמצעותו נגדיר את המקום בו נמצא אלמנט המסה בכל רגע ורגע. מכיוון שהמעגל היוצר את הציקלואידה מתגלגל ללא החלקה, ההעתק האופקי של המעגל חייב להיות שווה ל- $a \cdot t$ כאשר a הוא רדיוס המעגל היוצר ו- t הוא פרמטר הזמן. מכאן אפשר להסיק כי t הוא הסיבוב ברדיאנים של הרדיוס וקטור שמחבר את מרכז המעגל עם נקודה על הציקלואידה ביחס למצב ההתחלתי. בכל נקודה מתקיים

$$\vec{OA} = (a \cdot t, a) \quad \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$$

לכן $\vec{AC} = (-a \cdot \sin(t), -a \cdot \cos(t))$ מכאן נסיק כי ההצגה הפרמטרית של ציקלואידה היא:

$$C(t) = (a \cdot t - a \cdot \sin(t), a - a \cdot \cos(t))$$

משפט 1

בכל נקודה על הציקלואידה המשיק לציקלואידה בנקודה חוצה את הזווית שבין ישר אופקי ומשיק למעגל היוצר שעוברים דרך אותה הנקודה.

וקטור משיק לציקלואידה הוא $C'(t) = (a - a \cdot \cos(t), a \cdot \sin(t))$.

מרכז המעגל היוצר הוא בנקודה $(a \cdot t, a)$ לכן וקטור בכיוון רדיוס המעגל היוצר הוא $(-a \cdot \cos(t), a \cdot \sin(t))$ ווקטור המשיק למעגל היוצר הוא $(-a \cdot \sin(t), -a \cdot \cos(t))$.

כדי להראות שהמשיק לציקלואידה חוצה את הזווית בין המשיק למעגל היוצר וישר אופקי אחשב באמצעות מכפלה סקלארית את קוסינוס הזווית בין המשיק לציקלואידה והמשיק למעגל היוצר (α) וכן את קוסינוס הזווית בין המשיק לציקלואידה ווקטור יחידה אופקי (β) , ואראה כי $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$. מכיוון α ו- β מוגבלות להיות בתחום $[0^\circ, 180^\circ]$. אוכל להסיק כי $\alpha = \beta$.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{(a - a \cdot \cos(t)) \cdot (-a \cdot \cos(t)) + (a \cdot \sin(t)) \cdot (a \cdot \sin(t))}{\sqrt{(a - a \cdot \cos(t))^2 + (a \cdot \sin(t))^2} \cdot \sqrt{(a \cdot \cos(t))^2 + (-a \cdot \sin(t))^2}} \\ &= \frac{a^2 \cdot (1 - \cos(t))}{\sqrt{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{(1 - \cos(t))}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos(t))}{2}} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \alpha = \beta \text{ :באותו אופן: } \cos(\beta) = \frac{a \cdot (1 - \cos(t))}{\sqrt{2} \cdot a^2 \cdot (1 - \cos(t))} = \sqrt{\frac{(1 - \cos(t))}{2}}$$

משפט 2

המשיק לציקלואידה בנקודה כלשהי עובר דרך הנקודה הגבוהה ביותר במעגל היוצר שחותך את הציקלואידה באותה נקודה.

ארשום את משוואת המשיק לציקלואידה עבור t מסוים ואראה כי הנקודה $(a \cdot t, 2a)$ נמצאת על המשיק.

ווקטור המשיק לציקלואידה הוא $C'(t) = (a - a \cdot \cos(t), a \cdot \sin(t))$. לכן שיפוע הישר המשיק לציקלואידה הוא $\frac{\sin(t)}{1 - \cos(t)}$. הישר המשיק עובר דרך הנקודה $(a \cdot t - a \cdot \sin(t), a - a \cdot \cos(t))$. לכן משוואתו היא: $y \cdot (1 - \cos(t)) = \sin(t) \cdot x + a \cdot (2 - 2 \cos(t) - t \cdot \sin(t))$. נציב $x = a \cdot t$ ו- $y = 2a$. $2a \cdot (1 - \cos(t)) = \sin(t) \cdot a \cdot t + a \cdot (2 - 2 \cos(t) - t \cdot \sin(t))$. נפשט ונקבל פסוק אמת ■

הערה: בנקודת קצה של הציקלואידה המשיק מאונך לציר x ושיפועו אינו מוגדר. במצב זה המשיק חוצה את המעגל היוצר ולכן מקיים את התכונה המבוקשת.

הערה על משפטים הפוכים

את הסיפא של כל אחד מהמשפטים לעיל אפשר לרשום כמשוואה דיפרנציאלית. בהינתן תנאי שפה הפתרון של המשוואה הדיפרנציאלית הוא יחיד. לכן אם הראינו שהציקלואידה מקיימת את התנאי, היא בהכרח הפיתרון היחיד. מכאן אוכל להסיק את משפט 3 וכן את המסקנה כי אם עקומה מקיימת: שבכל נקודה עליה שיעור ה- y של הנקודה פרופורציוני לריבוע של סינוס הזווית בין המשיק לקו אנכי, אזי העקומה היא בהכרח ציקלואידה.

חישוב השטח הכלוא מתחת לציקלואידה

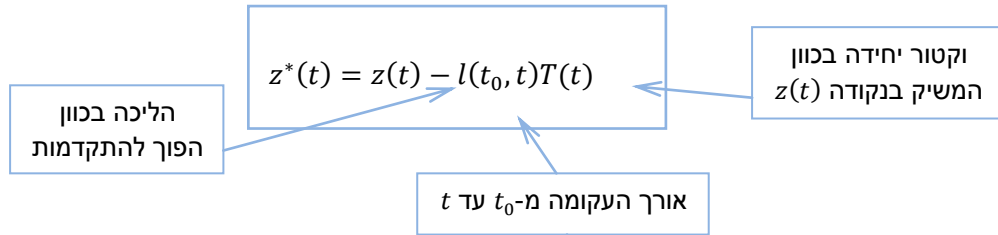
המחזוריות של הציקלואידה היא 2π כמחזוריות הפונקציות הטריגונומטריות לכן המרחק האופקי בין שני קצוות של הציקלואידה הוא $2\pi a$ כאורכו של היקף המעגל היוצר. כדי לחשב את השטח הכלוא מתחת לציקלואידה עלינו לחשב את $\int_0^{2\pi a} y(x) dx$. נחליף משתנה מ- x ל- t . $x(t) = a \cdot t - a \cdot \sin(t)$ לכן $dx = a(1 - \cos(t)) dt$. כמו כן $y(t) = a(1 - \cos(t))$ לכן עלינו לחשב את:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos(t))^2 dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos(t) + \cos^2(t)) dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos(t) + \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - 2 \cos(t) + \frac{1}{2} \cos(2t) \right) dt \\ &= a^2 \left[\frac{1}{2}t - 2 \sin(t) + \frac{1}{4} \sin(2t) \right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2 \end{aligned}$$

הראיתי כי השטח הכלוא מתחת לציקלואידה הוא $3\pi a^2$ כאשר a הוא רדיוס המעגל היוצר.

לופף של ציקלואידה

בפרק 3 הגדרנו לופף של עקומה כאוסף כל הנקודות במישור שנמצאות על ישר משיק לעקומה הנתונה ומרחקן מנקודת ההשקה שווה לאורך העקומה בין נקודה נתונה על העקומה $z(t_0) = z_0$ ובין נקודת ההשקה. כעת נוכל לרשום את אוסף הנקודות הללו בצורה מפורשת.



נסמן ב- $C^*(t)$ את הלופף של הציקלואידה החל מהנקודה $(\pi a, 2a) = C(\pi)$. נחשב:

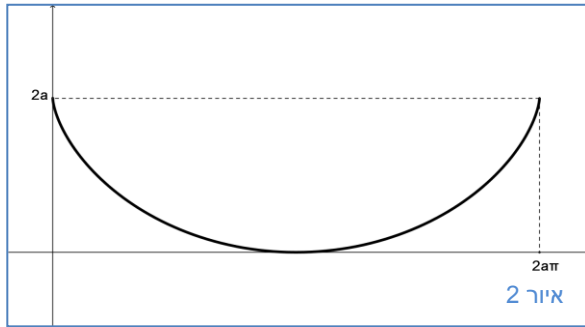
$$\begin{aligned}
 C^*(t) &= (x^*(t), y^*(t)) = \\
 &= (a \cdot t - a \cdot \sin(t), a - a \cdot \cos(t)) - \frac{(a - a \cdot \cos(t), a \cdot \sin(t))}{\sqrt{2a} \sqrt{1 - \cos(t)}} \int_{\pi}^t \sqrt{a^2((1 - \cos(t'))^2 + \sin^2(t'))} dt' = \\
 &= (a \cdot t - a \cdot \sin(t), a - a \cdot \cos(t)) - \frac{(a - a \cdot \cos(t), a \cdot \sin(t))}{\sqrt{2a} \sqrt{1 - \cos(t)}} \int_{\pi}^t (2a \cdot \sin(\frac{t'}{2})) dt' = \\
 &= (a \cdot t - a \cdot \sin(t), a - a \cdot \cos(t)) + \frac{(a - a \cdot \cos(t), a \cdot \sin(t))}{2a \cdot \sin(\frac{t}{2})} \cdot 4a \cdot \cos(\frac{t}{2}) = \\
 &= (a \cdot t - a \cdot \sin(t), a - a \cdot \cos(t)) + (a - a \cdot \cos(t), a \cdot \sin(t)) \cdot \frac{2(1 + \cos(t))}{\sin(t)} = \\
 &= (a \cdot t - a \cdot \sin(t), a - a \cdot \cos(t)) + (2a \sin(t), 2a \cdot (1 + \cos(t))) = \\
 &= (a \cdot t + a \cdot \sin(t), 3a + a \cdot \cos(t)) = C(t - \pi) + (-a\pi, 2a)
 \end{aligned}$$

הראיתי כי הלופף של הציקלואידה הוא ציקלואידה מוזזת.

תוך כדי חישוב הלופף נדרשנו לחישוב האינטגרל של אורך העקומה מכאן אפשר להסיק כי האורך של מחזור אחד של הציקלואידה הוא:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2((1 - \cos(t'))^2 + \sin^2(t'))} dt' = \left[-4a \cdot \cos\left(\frac{t'}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = 8a$$

טאוטוכרון



משפט 6 - החלקה נטולת חיכוך במורד ציקלואידה הפוכה בהשפעת כוח הכובד היא איזו כרונית. (במילים אחרות- הציקלואידה היא טאוטוכרון)

כדי להראות שהציקלואידה היא טאוטוכרון, עלי להראות כי חלקיק הנע על משטח ציקלואידי נטול חיכוך ישלים מחזור שלם של תנועתו בזמן שאינו תלוי בנקודת ההתחלה.

נתבונן בציקלואידה הפוכה שהצגתה הפרמטרית היא: $(a(1 + \cos(\theta)), a(t - \sin(\theta)))$. (החלפתי את הפרמטר ל- θ כי בבעיה זו נחשב את הזמן של התנועה t שלחלקיק שנע על גבי הציקלואידה, זמן זה לא מתלכד עם זמן התנועה של המעגל היוצר שסומן ב- t קודם לכן.)

אלמנט אורך של הציקלואידה כפי שהוצג בחישוב הלופף יהיה:

$$dl = \sqrt{a^2((1 - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta))} = a\sqrt{2(1 - \cos(\theta))}.$$

על פי חוק שימור אנרגיה, אנחנו יודעים שבכל נקודה המהירות נקבעת על ידי גובהו של הגוף הנע ביחס לנקודת ההתחלה. אם מישור הייחוס שלנו יקבע להיות תחתית הציקלואידה (הישר $y = 0$), אזי האנרגיה הפוטנציאלית בראשית התנועה תהיה: mgy_0 . ובכל נקודה של התנועה יתקיים:

$$\frac{mv^2}{2} + mgy = mgy_0 \quad \text{ולכן:} \quad v = \sqrt{2g(y_0 - y)} = \sqrt{2ga(\cos(\theta_0) - \cos(\theta))}$$

אלמנט זמן של תנועת החלקיק יהיה: $dt = \frac{dl}{v}$. החלקה נטולת חיכוך של חלקיק במורד ציקלואידה הפוכה בהשפעת כוח הכובד בלבד, היא תנועה מחזורית. מטעמי סימטריה של התנועה נסתפק בחישוב רבע מחזור שלה, ונראה כי הזמן של רבע מחזור אינו תלוי בנקודת ההתחלה.

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sqrt{1 - \cos(\theta)}}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}} d\theta$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = 2 \left(\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \right)$$

עבור המונה ועבור המכנה ונקבל:

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} d\theta$$

נחלק מונה ומכנה בתוך האינטגרל ב- $\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$. נחליף את המשתנה להיות $u = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}$, וכן

$$u(\pi) = 0 \quad u(\theta_0) = 1 \quad du = \frac{-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} d\theta$$

$$\frac{T}{4} = -2 \sqrt{\frac{a}{g}} [\arcsin(u)]_1^0 = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

מכאן אפשר להסיק כי זמן המחזור של התנועה לא תלוי בנקודת ההתחלה.

ברכיסטוכרון

פתרון בעיית הברכיסטוכרון הוא מציאת העקומה שלאורכה ינוע חלקיק בהשפעת כוח הכובד במשך הזמן הקצר ביותר. מכיוון שפתרון בעיית הברכיסטוכרון הוא עקומה נדרשת כאן מתמטיקה אחרת מזו שנדרשנו לה עד עתה. המתמטיקה שנדרשת לפתרון בעיות כגון אלה נקראת חשבון וריאציות. אנחנו מחפשים עקומה שעבורה $\int dt = \int \frac{dl}{v}$ בין שתי נקודות נתונות הוא מינימאלי. נבחר עקומה כלשהיא, אותה נביע כפונקציה $y(x)$. האינטגרל שאת המינימום שלו צריך לחשב יהיה $I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx$ כאשר נקודות הקצה הנתונות הן $(x_1, y(x_1))$ ו- $(x_2, y(x_2))$. כדי ש- I יהיה

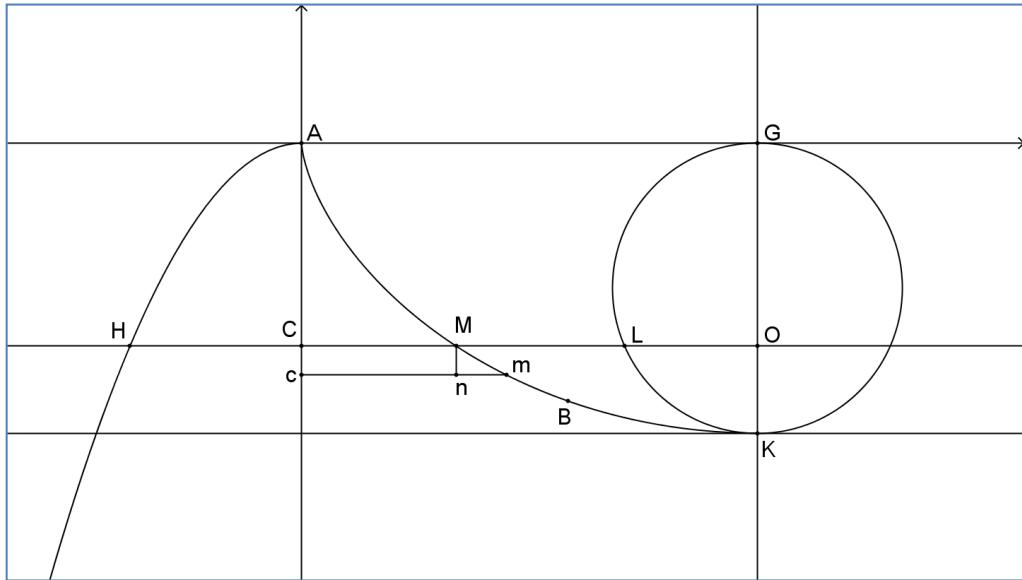
מינימאלי, הפונקציה $f(y, y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$ צריכה לקיים את משוואת אוילר-לאגרנז' לאגרנז' (Euler-Lagrange) $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. מכיוון שהפונקציה המסוימת שלנו f אינה תלויה באופן ישיר ב- x משוואת אוילר-לאגרנז' ניתנת לפישוט לזהות בלטרמי (Beltrami): $\frac{\partial f}{\partial y'} y' - f = const$.

עבור $f(y, y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$ מתקבלת המשוואה: $\frac{(y')^2}{\sqrt{2gy} \cdot \sqrt{1+(y')^2}} - \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} = const$ ששקולה למשוואה: $y \cdot (1 + (y')^2) = const$.

אפשר לראות כי ציקלואידה מהצורה $x = a(\theta - \sin(\theta))$ $y = a(1 - \cos(\theta))$ מקיימת את המשוואה. נשים לב כי בראשית המהלך קבענו כי $v = \sqrt{2gy}$ ומכך נובע שבחרנו ציר y שכיוונו החיובי מטה ולכן הציקלואידה שלנו היא בעצם ציקלואידה הפוכה. כדי לדעת איך בדיוק צריך להעביר את הציקלואידה בין שתי הנקודות הנתונות עלינו לקבוע את הנקודה העליונה להיות בראשית הצירים, את הנקודה התחתונה להזיז בהתאם ואז לפתור שתי משוואות בשני נעלמים כדי למצוא את θ ואת a שמתאימים לנקודה.

נספח ב' – הפתרון של ברנולי לבעיית הברכיסטוכרון

להלן אציג את הפתרון של ברנולי לבעיית הברכיסטוכרון על פי מה שפורסם ב-
Acta Eruditorum, Leipzig, May 1697 על פי (Struik 1969) בסימונים עכשוויים.



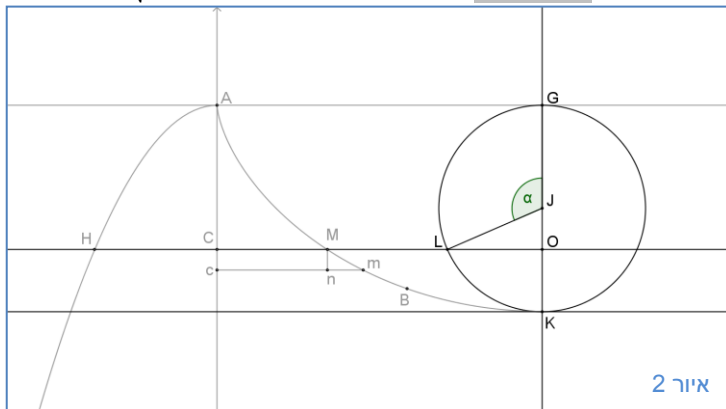
איור 1

בסרטוט לעיל מופיעות הנקודות A ו-B וכן העקומה שתנועה לאורכה בהשפעת כוח הכובד לוקחת זמן מינימאלי (AMB). כמו כן הציר האנכי הוא ציר x שכיוונו החיובי כלפי מטה ככיוון כוח הכובד. העקום HA נבנה כך שאם נקודה C על הציר ה x אז על פי הסרטוט HC מייצג את המהירות ב-M. בנוסף מסורטט מעגל שקוטרו a והוא משיק לקו האופקי שעובר דרך A כך ש $AG = \frac{1}{2}\pi a$.

נסמן: $a = \text{constant}$; $Mm = dz$; $mn = dy$; $Cc = dx$; $CM = y$; $HC = t$; $AC = x$. הסימונים dx , dy , dz מייצגים אלמנט אורך קטן מספיק לאורך ציר x, ציר y, והעקומה בהתאמה.

$dy:t=dz:a$ (בלשונו אפשר לומר כי היחס בין סינוס הזווית nMm לבין המהירות ב-M הוא גודל קבוע) זה שקול לשיוויון $ady=tdz$. נעלה בריבוע את שני האגפים ונקבל $a^2dy^2=t^2dz^2=t^2(dx^2+dy^2)$. מכאן נסיק כי: $dy^2(a^2-t^2)=dx^2t^2$. t מייצג את המהירות בנקודה M שהיא מהירות של גוף שנע בהשפעת כוח הכובד לכן: $t^2=ax$. נחליף את הגודל המתאים במשוואה, נוציא שורש משני האגפים ונקבל: $dy = dx \cdot \sqrt{\frac{x}{a-x}}$. כעת מבקש ברנולי להראות כי המשוואה הדיפרנציאלית שהוא קיבל מתוך הנחת עקרון פרמה, חוק סנל והתנהגות מהירותו של גוף בהשפעת כוח הכובד, מייצגת ציקלואידה.

נתבונן שוב על המשוואה הדיפרנציאלית: $dy = dx \cdot \sqrt{\frac{x}{a-x}} = \frac{x \cdot dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{a \cdot dx}{2\sqrt{ax-x^2}} - \frac{(a-2x)}{2\sqrt{ax-x^2}} \cdot dx$



נשים לב כי הביטוי המודגש הוא הנגזרת של $\sqrt{x \cdot (a-x)}$ לפי x. נזכור כי $x=AC=GO$ וכי a הוא קוטר המעגל. לכן על פי תכונות משולש ישר זווית שחסום במעגל אפשר להסיק בנוסף $LO = \sqrt{x \cdot (a-x)}$ ברנולי טוען כי $\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}$ היא

- Abel, H.N.(1826) *On Integral quations*. In: Struik, D.J.(editor) (1969). *A source Book in Mathematics 1200-1800*. (pp. 656-662) Cambridge. Harvard University Press.
- Berman, G.N.(1980) *The Cycloid* (in Russian)(3rd edition). Moscow.
- Bernoulli,J.(1696,1697). *New Problem which Mathematicians are invited to solve.and Proclamation*. in: Struik, D.J.(editor) (1969). *A source Book in Mathematics 1200-1800*. (pp. 644-655) Cambridge. Harvard University Press.
- Courant, R.(1937). *Differential and Integral Calculus*. Vol.I. p.301-304. New York. Interscience Publishers.
- Gibson, C.G.(2001). *Elementary Geometry of Differentiable Curves*. Cambridge. Cambridge University Press.
- Gindikin, S.(2007) *Tales of Mathematicians and Physicists*.(A. Shuchat trans) (2nd edition). New York. Springer.
- Huygens, C. *Horologium Oscillatorium*. Translated and annotated by Ian Bruce. Web Resource.
<http://www.17centurymaths.com/contents/huygenscontents.html>
- Martin, J. (2010) The Helen of Geometry. *The College Mathematics Journal* 41(1), 17-28
- Matthews, M. R. (2000). *Time for Science Education: How Teaching the History and Philosophy of Pendulum Motion Can Contribute to Science Literacy*. New York. Kluwer Academic/Plenum Publishers.
- Reed, N. (1986).Elementary proof of the area under a cycloid, *Mathematical Gazette*, 70(454), 290–291
- Simmons, G.F. (1991). *Differential Equations with Applications and Historical Notes*. (2nd edition). New York. McGraw-Hill.
- Struik, D.J.(editor) (1969). *A source Book in Mathematics 1200-1800*. Cambridge. Harvard University Press.
- Weisstein, Eric W. "Tautochrone Problem." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/TautochroneProblem.html>