פיתוח אינטואיציה מתמטית בעזרת פיתרונות ויזואליים

מגישה: איריס מקיאס 022292791

מנחה: דר מריטה ברבש

תאריך הגשה: 1.05.2012

תוכן עניינים:

פרק א: מבוא

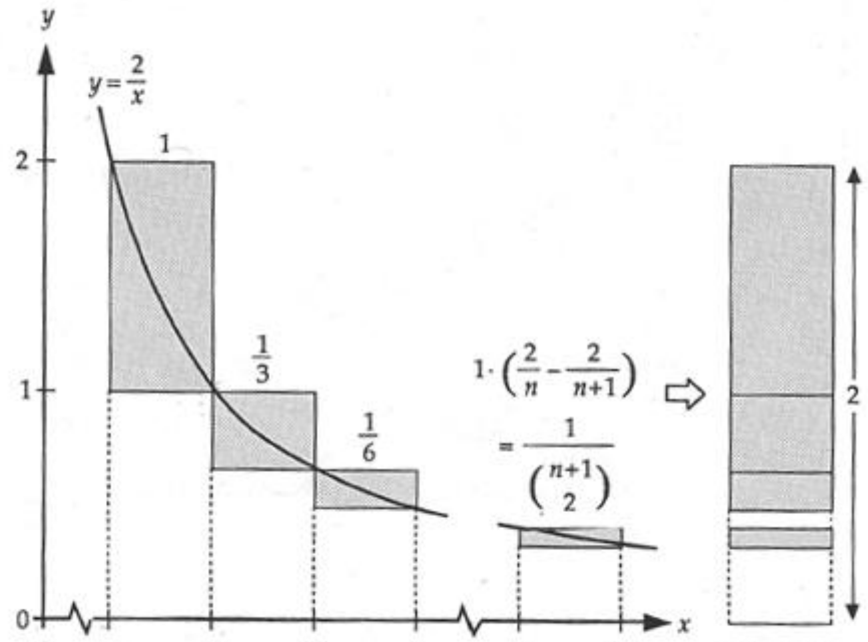
בהיותי מורה למתמטיקה פעמים רבות חיפשתי דרכים לחשוף תלמידים להתלהבות והנאה מלימוד המקצוע. כאשר התוודעתי לספר Proofs without Words (הוכחות ללא מילים), היה נראה לי שהוא יכול לשמש להבניית תובנות כאלה בעבודתי. בעיון בספר גיליתי כמה דוגמאות מעניינות של פתרונות ויזואליים לבעיות מתמטיות מוכרות. להלן יידונו כמה דוגמאות שעוררו אצלי עניין ולדעתי יכולות לשמש בהוראה ולתרום לגיוונה, להבנה טובה יותר מצד התלמידים ולהנאתם מהלימודים:

1. חישוב סכום סופי של טור הנדסי אינסופי תוך כדי שימוש בגרף ובשטח המחושב סביב העקומה.

נציג הוכחה ויזואלית לחישוב סכום הטור האינסופי הזה:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{\binom{n+1}{2}}+\cdots=2$$

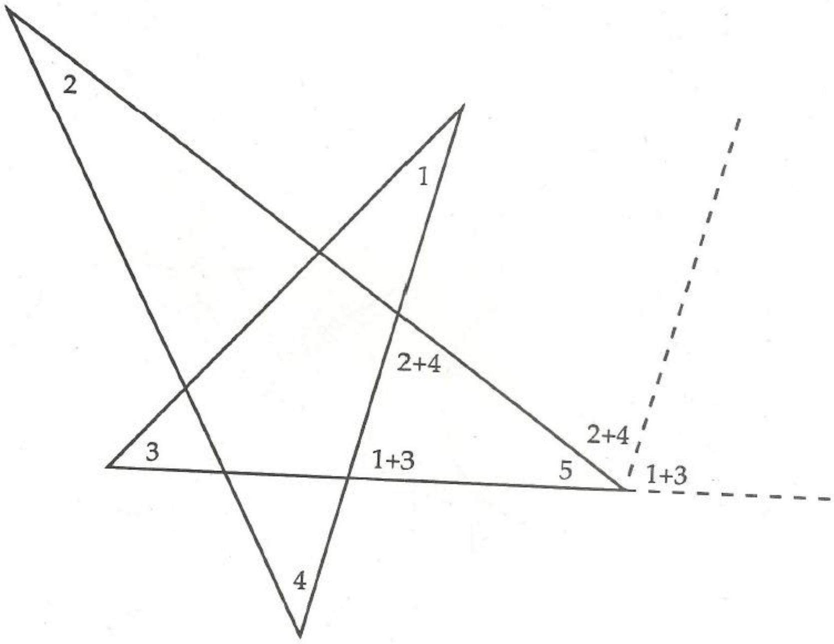
$$1\cdot\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right)=\frac{1}{\binom{n+1}{2}}$$



איור 1 (Roger, 1993, p. 127)

לפנינו דוגמה למעבר מחישוב סכום טור אינסופי לייצוג גרפי וחיבור שטחים שנוצרים סביב לעקומה הנתונה. לא די בהתבוננות אחת בגרף, אלא יש להסביר את ההקבלה לייצוג החדש. לדעתי, במקרה זה יש תרומה ניכרת להבנה של תהליך החשיבה.

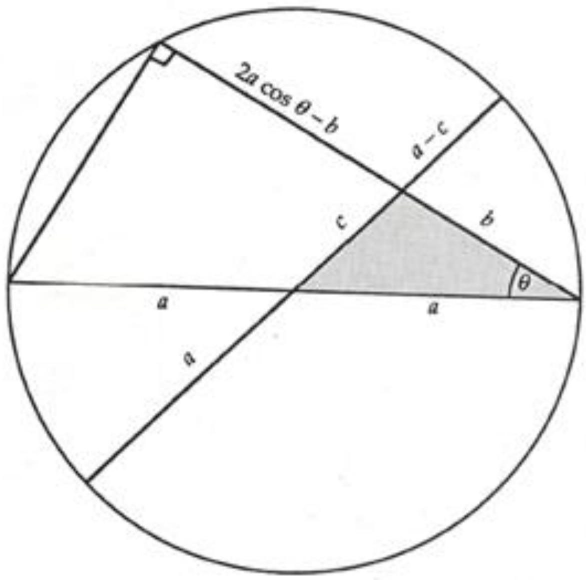
2. חישוב סכום זוויות פנימיות בכוכב בדרך ויזואלית פשוטה



איור 2 (Roger, 1993, p. 14)

דוגמה זו קליטה מאוד, ודי במבט מהיר בשרטוט כדי להבין את ההוכחה.

3. משפט הקוסינוסים בעזרת היחס בין מיתרים נחתכים במעגל



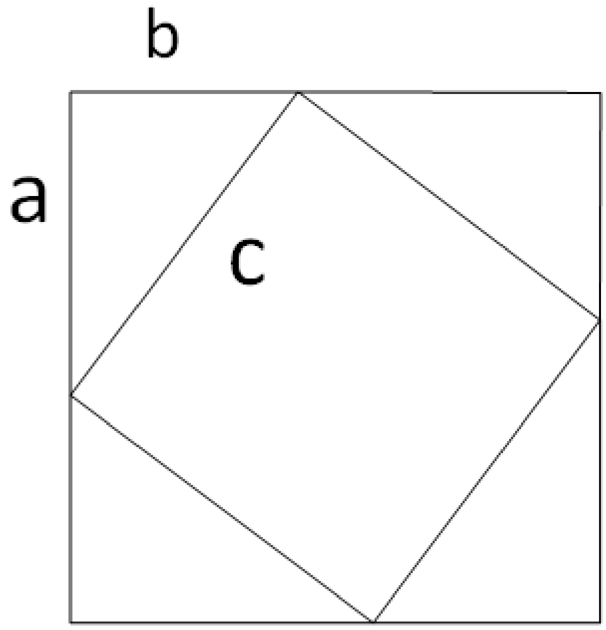
$$(2a\cos\theta - b)b = (a - c)(a + c)$$

קובץ זה נועד אך ורק לשימושם האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

איור 3 (Roger. 1993, p. 32)

4. הוכחה ויזואלית למשפט פיתגורס



איור 4 **(Roger, 1993, p. 3)**

עבורי מדובר בהוכחה חדשה של משפט הקוסינוסים מתוך הכרת משפט שני מיתרים נחתכים. ללא ספק הוויזואליות עוזרת בהבנת הוכחת המשפט מתוך שאיפה לפתרון שאלות המשלבות גיאומטריה וטריגונומטריה. לדעתי, הוכחה זו ראויה לשימוש בהוראה.

התבוננות בפתרונות ויזואליים אלה ואחרים לימדה שהפתרונות פונים לאינטואיציה של המתבונן יותר מלהבנה של תהליכים פורמליים בהוכחה. מכאן ההשראה לחשיבה על אינטואיציה מתמטית ומימושה בפתרונות ויזואליים.

בהוראת מתמטיקה נקרים לפנינו כמה סוגי הוכחה. הנה כמה מהם :

א. **הוכחה פורמלית** – הוכחה פרוצדורלית המשתמשת בסמלים מתמטיים, באקסיומות ובמשפטים ידועים, למשל הוכחה באינדוקציה מתמטית והוכחה שיש לה מבנה קבוע ומבוססת על כללי היסק וגרירה.

ב. **הוכחה כהסבר** – הסבר של רעיון מתמטי המתאפיין בהסבר של תהליך החשיבה המוביל להבנת הרעיון המתמטי : "בואו נראה למה זה נכון". לדוגמה, ניתן להסביר מדוע מכפלה של שלושה מספרים עוקבים תתחלק תמיד ב-6 (ניתן להוכיח טענה זו גם באינדוקציה, אך לדעתי, הבנת הרעיון המתמטי במקרה זה פשוטה משימוש באינדוקציה מתמטית).

ג. **הוכחה ויזואלית** – מבוססת על מעבר לייצוגים ויזואליים (גרף, שרטוט, תמונה וכיו"ב).

מניסיוני בהוראה נראה לי שהשיטה המקובלת להצגת הוכחות היא ההצגה הפורמלית או הוכחה כהסבר, ובמקרים מעטים משמשות דרכי הצגה אחרות, לרבות הדרך הוויזואלית. ידוע שאין תלמיד אחד כתלמיד אחר, וכל אחד מגיב תגובה אחרת לכל סוג הוכחה. על מנת שנוכל להגיע להבנה מצד תלמידים רבים ככל האפשר רצוי שנשתמש בהוראה בדרכים שונות. הדרך הוויזואלית היא בוודאי אחת הדרכים להציג הוכחה של טיעון מתמטי בעיקר לתלמידים שמתקשים לעקוב אחר ההליך המחשבתי שבכתיבה פורמלית (בלי לפסול את החשיבות והדיוק שבהוכחה פורמלית).

הוכחות ויזואליות ותקפותן

הוכחות ויזואליות המבוססות על ייצוגים ויזואליים, ובהם כלול רוב המידע הנחוץ להוכחה. ייצוגים אלו כוללים צורות גיאומטריות, גרפים, דיאגרמות, צבעים, קיפולי נייר, ייצוגים דינמיים במחשב או כל דבר חזותי אחר.

אחד הקשיים המביאים למניעת שימוש בהוכחות ויזואליות הוא היעדר יכולת לעבור מייצוג ויזואלי לאנליטי כמו בדוגמה הראשונה הנזכרת לעיל, שבה לא קל לעבור מהגרף הנתון לסכום סדרה אינסופית מתכנסת (איור 1). קושי אחר הוא תרגום שגוי של מידע גרפי.

לעתים הוכחות פורמליות הן מורכבות וקשות להבנה, וכתיבתן הפורמלית היא סופו של תהליך חשיבה מדורג, ארוך ומורכב שאינו נחשף לעיני הלומד כאשר לפניו רק ההוכחה המוגמרת. אבל ייצוג ויזואלי אם משתמשים בו נכונה עשוי לתרום להתפתחות האינטואיציה של הלומד ולהביא ללמידה יעילה. שילוב הוכחות ויזואליות לצד הוכחות פורמליות יכול לתרום עוד להבנה מצד כלל התלמידים בשל החשיפה למגוון סגנונות של הוכחות. הוכחות ויזואליות מקובלות גם בקרב מתמטיקאים, ובהמשך דבריי יוצגו כמה דוגמאות.

ההוכחות הוויזואליות רבות ומגוונות. הן נבדלות זו מזו בין השאר במידת השקיפות והכלליות שלהן. בהמשך דבריי יודגמו הוכחות ויזואליות התקפות לחלוטין והוכחות ויזואליות שבהן הייצוג קובע מעצם טבעו הגבלות מסוימות על הנתונים ובזה פוגע בכלליות ההוכחה (למשל, הוכחה הנוגעת לערכים חיוביים בלבד). יש הוכחות שלעתים קשה לקבלן כהוכחות תקפות אך ניתן להיעזר בהן להדגמה או להמחשה של טענות שידוע שיש להן הוכחות מדויקות יותר, אך הידע הנדרש להבנתן הוא רב ומעל ליכולת הלומד בנקודת זמן מסוימת. אם כן, בעבודתי בהוראה הגעתי למסקנה שיש להתאים את סוג ההוכחה לקהל המקשיב להוכחה. יש שהוכחה "טובה" חשובה מהוכחה "מדויקת" אם מטרתנו היא הבנה טובה יותר.

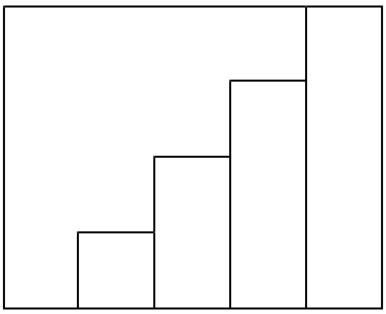
ואולם יש לציין שלא תמיד הוכחה ויזואלית קלה להבנה מהוכחה אחרת. יש הוכחות ויזואליות שדורשות הסבר רב להבנת המידע הכלול בהן. אני רואה בהוכחות ויזואליות בעיקר כלי לפיתוח אינטואיציה מתמטית.

ומהי אינטואיציה מתמטית? האם ניתן לפתח אינטואיציה מתמטית, וכיצד ניתן להשתמש בפתרונות ויזואליים לשם כך? האם היא מתאימה לכולם? וכיצד האינטואיציה המתמטית משפיעה על דרך הפתרון שלנו? האם אנו מלמדים תלמידים להשתמש באינטואיציות שלהם, ואם כן – באיזו מידה ובאלו דרכים?

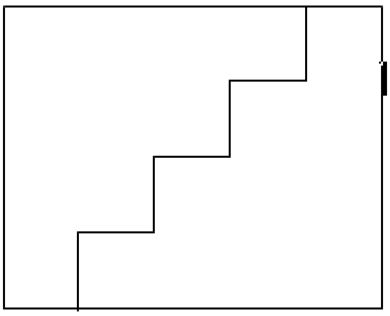
כדי לענות על שאלות אלה פניתי למחקרים הדנים באינטואיציה מתמטית וניסיתי למצוא בהם מהי האינטואיציה המתמטית וכיצד היא משפיעה על פתרון בעיות, ומה בינה לבין פתרונות והוכחות ויזואליים.

כך מגדיר מילון ספיר מהי '**אינטואיציה**': "בינת הלב, השראה, חדירה לנשמת הדברים מתוך הרגשה פנימית בלתי אמצעית".

המתמטיקאי **ג'ורג' פויה (פוליה)** האמין שהגילוי הוא אמנות שאפשר לפתח על ידי הוראה נכונה ומתן אפשרות לתלמידים להתנסות בתהליך היצירתי וההֵיריסטי. את עיקרי השקפתו הציג בספריו, בהם ספרו המפורסם כיצד פותרין? (How to solve it), שבו טען ששינוי פני הבעיה חיוני לפתרונה, וכי "קיימים אמצעים שונים להשיג מטרה זו, כגון: הכללה, הפרטה, הקבלה או אנאלוגיה, ואמצעים אחרים, שהם דרכים שונות של פרוק והרכבה מחדש" (פויה, 1961). הוא הביא שם דוגמה להוכחת הנוסחה של סכום הסדרה החשבונית $1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ באמצעות מעבר להצגה ויזואלית של מלבן שצלעותיו n ו- $n+1$ יחידות והוא מחולק לשני חלקים על ידי קו שבור כמו באיור 4 שלהלן המדגים מקרה שבו $n=4$. כל אחד מן החצאים הוא: "מדורג", ושטחו יהיה $1+2+3+\cdots n$. אם $n=4$, הרי השטח הוא $1+2+3+4$. ומכיוון שכלל שטחו של המלבן הוא $n(n+1)$, והשטח המדורג הוא חציו, הרי הנוסחה מוכחת.



ב



א

איור 5 (פויה, 1961, עמ' 39)

בדוגמה זו עובר פויה מחישוב אלגברי של סדרה חשבונית להצגה גיאומטרית של הבעיה, ובידע בסיסי במתמטיקה ניתן להוכיח את הטענה ללא קושי. גם כאן יוצגו דוגמאות של מעבר ממתמטיקה מורכבת להצגה גיאומטרית המפשטת את הבעיה. לדבריו, ההנמקה ההֵיריסטית הארעית שרק מתקבלת על הדעת היא חשובה לגילוי, אך אין לראות בה הוכחה, כלומר טוב להעלות השערות אך לאחר מכן יש לבחון אותן ולהגיע להוכחות מדויקות יותר.

בספר אחר – Mathematics and Plausible Reasoning, טען פוליה שהניסיון משפיע על השיפוט בבואנו לפתור בעיות והציע לבחון את עבודת המתמטיקאי בפתרון בעיות בהסתכלות בתהליכים שעובר הפותר בדרך לגילוי הפתרון. לדוגמה, הוא מציע לראות ששרטוט שבמקור היה ריק למדיי מקווים מתמלא בקווי עזר תוך כדי התקדמות בפתרון הבעיה, ומסתבר שהוספתם עוזרת בפתרון. לדעתו, יש שפרט מסוים נשלף מיֶדע קודם ועוזר לקדם את התהליך, ויש שלב בפתרון שבו הפותר משוכנע שהוא בדרך הנכונה ועליו להשלים עוד פרטים מעטים כדי להשלים את ההוכחה.

מכאן שאינטואיציה מתמטית מתבססת על ידע קודם וניסיון שרוכשים תוך כדי עבודה מתמטית, והרעיונות שכביכול מתגלים אינם מגיעים באקראי אלא מתבססים על ידע וניסיון קודמים. כאמור,

בחיבור זה יוצגו דוגמאות ויזואליות להוכחות המבוססות על ידע קודם במושגים מתמטיים, והאינטואיציה המתמטית "תתגלה" אם נכון לידע הקודם שבידי התלמידים אך לא בהכרח נקשר מיד לבעיה.

אימרה לקטוש[1] דן בספרו Proofs and Refutations The Logic of Mathematical Discovery בנוסחת אוילר-דקארט עבור פאונים (2=F+V- E), ובמקום להציג סמלים, חוקים ושיטות מאורגנות הוא בוחר להעביר את המסר בדרך של שיחה דמיונית בין מורה לתלמידיו. כך הוא מציג סיעור מוחין והתנגשות חזיתית של דעות, נימוקים ונימוקי נגד. התיאוריה נבנית בהדרגה תוך כדי התקדמות בשיח המתמטי. על פי התיאוריה שלו הידע מובנה על ידי שגיאות ותיקונן – מתן דוגמאות נגדיות שמוסיפות תנאים מגבילים ולבסוף עדכון המשפט. שלא כתפיסה הקלאסית בפילוסופיה של המדע, ולפיה דוגמה נגדית מפריכה את כל התיאוריה ומכריחה את המדען להתחיל מהתחלה, אצל לקטוש השגיאה, הטעות, היא מקור לצמיחה.

בדיון בנוסחת אוילר דה-קארט אני משערת שדעותיו של לקטוש מיוצגות על ידי המורה בדו-שיח המתמטי שלו עם תלמידיו. המורה מציע לכנות את המונח "הוכחה" "ניסוי מחשבתי", שבו מפרקים את ההשערה המקורית לתַת-השערות, וכך ניתן לשבץ את ההוכחה בתחום מתמטי אחר, שייתכן שהוא רחוק מעט מהתחום שבו אנו דנים. לדוגמה, ההוכחה המוצגת אימצה את ההשערה המקורית שדנה בפאונים והשתמשה בתורה של יריעות גומי כמו פתרונות ויזואליים שמציגים בעיה מתמטית מסוימת בדרך אחרת (גיאומטרית, גרפית וכדומה), וכך מצליחים להביא הוכחה שונה מהוכחה פורמלית, שלעתים קלה יותר להבנה ולעתים מפתחת אינטואיציות מתמטיות חדשות שלא היו מוכרות ללומד, אף כי יכולה להיות פחות מדוקדקת מבחינה פורמלית.

אמנם לקטוש עסק בפילוסופיה מתמטית, אולם הוא משתמש בכלים ויזואליים ומסביר לתלמידיו בנימוקים אינטואיטיביים המבוססים על ייצוג ויזואלי.

ז'אק אדמאר[2] דן בספרו The Mathematician's Mind (1996) בהנמקה מההיגיון הפשוט וטוען שרוב ההנמקות מגיעות מהתת-מודע, ומיעוטן מתוך ההכרה. לדוגמה, בשאלות גיאומטריות או מכאניות הרעיונות מגיעים לדבריו לאו דווקא מההיגיון אלא לעתים מניסיון החושים שהצטבר עוד מגיל הילדות. לאחר שאדם פועל מההיגיון הפשוט מגיעה ההבנה המדעית של סטודנט הלומד מתמטיקה שמאופיינת בהתערבות של שלושה אופרטורים: הגדרה, תמצית ותועלתיות. לדעתי, כוונת אדמאר בדבריו שבלימודים גבוהים במתמטיקה יש הקפדה על מבנה פורמלי להוכחות, אך אין בה כדי למנוע שימוש באינטואיציה המתמטית הראשונית להעלאת השערות אינטואיטיביות ולאחר מכן לדאוג לבסס אותן בדרכים פורמליות ולדייק לפי הכללים המקובלים.

אדמאר מציין בספרו שפואנקרה הגדיר הבנה מתמטית כך: "כדי להבין הדגמה של משפט יש לבחון בהצלחה את כל המסקנות הנובעות ממשפט זה ולאמת את נכונותן בכללי המשחק הידועים בתחום הרלוונטי" (אדמאר, 1996, עמ' 104). לדעתי, הוא התכוון שהאינטואיציה היא מקור ראשון להבנת הרעיון המתמטי, אך יש לתמוך אותה בהוכחה פורמלית מדויקת יותר.

---

[1] Imre Lakatos (1922-1973) היה בנם הרוחני של המתמטיקאי ג'ורג' פויה ושל הפילוסוף של המדע קארל פופר, שקבע שתיאוריה ראויה להיקרא "מדעית" אך ורק אם מצד העיקרון היא יכולה לעמוד בפני ניסויים שעלולים להפריכה.

[2] Jacques Hadamard (1865-1963), מתמטיקאי יהודי-צרפתי, שתחום עבודתו הקיף את מגוון ענפי המתמטיקה. מחקרו המדעי כלל בין השאר את תחילתו של המחקר המודרני בטורי חזקות, הוכחת משפט המספרים הראשוניים, חקר הגיאומטריה ההידרודינמיקה והאנליזה המתמטית.

בהזכירו מתמטיקאים הוא מבחין בין מתמטיקאי "לוגי" למתמטיקאי "אינטואיטיבי" ומציג את דעתם של פואנקרה, המייצג עבורו מתמטיקאי "לוגי", ושל פליקס קליין, המייצג עבורו מתמטיקאי "אינטואיטיבי". לדברי אדמאר, קליין טוען להבדלים במוצא המשפיעים על יכולת לוגית או אינטואיטיבית. לדעתו, אינטואיציה היא תכונה שמאפיינת את המוצא הטווטוני (כינוי קדום לגרמנים), ואילו התכונה הלוגית המובהקת מאפיינת את השפה העברית והלטינית. קליין רומז בדבריו שאינטואיציה ותכונותיה המסתוריות נעלה מהמוח הלוגי ומכאן מאדירה את עליונותם של הגרמנים בני עמו.[3]

כמו קליין גם לודוויק גאורג ביברבך, מתמטיקאי גרמני שהושפע מעליית הנאצים לשלטון, דגל בהבדלי מוצא המשפיעים על יכולת אינטואיטיבית או לוגית. ביולי 1933 הוא נשא הרצאה על אינטואיציה מתמטית וטען לקשר בין גזע ובין אינטואיציה מתמטית בהישענו על ציטוטים של קליין.[4]

עוד מסכם אדמאר ואומר כי כל עבודה מנטאלית, בייחוד עבודת הגילוי, דורשת שיתוף פעולה עם התת-מודע במידת-מה, היות שבתוכו חבוי אותו ניצוץ של הרעיונות המובילים לגילוי חדש.

מכל האמור לעיל כולה שכמעט שאין תגליות לוגיות. יש צורך באינטואיציה מהתת-מודע וממנה להתחיל את העבודה הלוגית. מכאן שבכל מוח יהיה תהליך אחר. משנתו של הדמאר מעניינת ומציגה הבדל פיזיולוגי במוח האדם ומשפיעה על היותו של מתמטיקאי מסוים "לוגי" או "אינטואיטיבי". לדעתו, כל גילוי מתמטי קשור במידת-מה לתת-מודע במוחו ויש הממשיכים ומקדמים רעיון זה בדרכים לוגיות, שהן המאפיינות את מוחם, ויש המקדמים את עבודתם בעוד רעיונות אינטואיטיביים המאפיינים את מוחם.

פרופ' אפרים פישביין, ממייסדי האגודה הבין-לאומית לפסיכולוגיה של הוראת המתמטיקה (PME) וממייסדי החוג להוראת המדעים בבית ספר לחינוך באוניברסיטת תל אביב,[5] התעניין בעיקר בקשרים בין חשיבה אינטואיטיבית ובין חשיבה לוגית, ואת רעיונותיו הסביר עוזי מלמד במאמרו "אינטואיציה בעולמות משתנים" שנכתב לאחר מותו של אפרים פישביין:

> הוא עשה הבחנה ברורה בין ידיעה פורמאלית לידיעה אינטואיטיבית. הידיעה הפורמלית, מנוסחת בהיגדים וסמלים פורמליים, נעזרת באופרציות לוגיות כדי להסבירה ולהוכיחה. הידיעה הפורמאלית נקנית מתוך התכוונות, מתוך קשב שיטתי לסביבה החיצונית.כל היקש ומסקנה הנובעים ממנה מחייבים צידוק, אימות והוכחה פורמלית. הידיעה האינטואיטיבית אינה זקוקה למילים ולמושגים. זוהי ידיעה מובלעת, המסתתרת 'מאחורי הקלעים'. אנו קונים אותה במהלך החיים ללא כוונה. היא מצויה עמנו מבלי שניתן עליה דעתנו,אנו לא בודקים כיצד אנו יודעים אותה ואנו בטוחים באמיתותה עד כדי כך שלא צריך להצדיקה היא בבחינת 'מובן מאליו' שאינו צריך הוכחה (מלמד, 2000).

מכאן שהידיעה האינטואיטיבית היא לא אינסטינקט. אמנם היא סמויה, נקנית שלא ביודעין אולם בתהליך קוגניטיבי ברור (כמו לתפיסתם של לקטוש ואדמאר). ידיעות אינטואיטיביות מטות את

---

3 נראה שדעות אלו רווחו כבר ב-1893, עשרות שנים לפני הופעת הנאציזם. אין ספק שיש כאן הטיה מגמתית של העובדות, ואכן, הדמאר אינו מקבל הבחנה זו.

4 באפריל 1934 נשא ביברבך הרצאה אנטישמית ואנטי-צרפתית תחת הכותרת "מבנה אישיותי ויצירתיות מתמטית". דבריו קיבלו תהודה בין-לאומית, ורבים מהמתמטיקאים גינו אותם. לאחר המלחמה הוחרם ביברבך כמעט על ידי כל העולם המתמטי, ובשנת 1960, כאשר נשא הרצאה באוניברסיטת וינה, הגיעו אליה חמישה אנשים בלבד, וככל הנראה אלה לא ידעו את עברו.

5 פרופ' פישביין נודע בישראל ובעולם כאחד מגדולי החוקרים בתחום הפסיכולוגיה של החינוך המתמטי והוראת המתמטיקה.

התשובות של תלמידים ומביאות אותם למה שאנו מכנים 'טעויות אינטואיטיביות', שהן תשובות שגויות, שסיבתן איננה דווקא חוסר ידיעה. קשה לדעת בוודאות מתי תשובות שגויות הן טעויות אינטואיטיביות. רוב המחקרים הניחו ששאלה בלתי כמותית המבקשת תשובה ספונטנית שאינה זקוקה לניסוחים פורמליים ולצעדי היקש לוגיים תפיק תגובה אינטואיטיבית. תשובה שגויה לשאלה כזאת היא 'טעות אינטואיטיבית' אם אפשר להראות שלתלמיד יש די ידע פורמלי כדי לענות עליה נכון. לדעתי, מורה שמלמד בכיתתו יודע מהו הידע הקודם של תלמידיו ויכול לזהות מתי תשובה שגויה היא טעות אינטואיטיבית ומתי היא טעות הנובעת מחוסר ידע. ידיעה זו יכולה לקדם את המורה בהמשך תהליך ההוראה בכיתה.

העובדה שאינטואיציות יכולות להיות שגויות עלולה לגרום דילמה. מצד אחד אנחנו מבקשים להימנע משגיאות, אך מצד אחר הכנסת שיקולים אנליטיים בכל שלב של חשיבה יכול לשתק לגמרי את התהליך, ועל זה אומר פישביין:

> מומחים וכן מבוגרים שקיבלו חינוך אינטלקטואלי בדרך כלל למדו לשחק משחק כפול. עקרונית הם יודעים שתתכן טעות בתהליך החשיבה שלהם אבל הם ממשיכים בו מתוך הנחה שהם צודקים בכל שלב ושלב של התהליך. שלב הבדיקה והבחינה יתחיל רק לאחר שתהליך החשיבה הסתיים (מצוטט אצל מלמד, 2000).

החוקר יודע שתהליך החשיבה אינו נקי משגיאות אך מאפשר לרעיון החשיבה שלו להתגלגל לצד הפעלת תהליך רפלקטיבי ביקורתי על רעיון החשיבה הראשוני. לדעתי, כך יש לחנך את תלמידינו ולא לחשוש להעלות השערות גם אם יש סיכוי לטעויות בהליך החשיבה, על המורה והתלמידים יחד לבקר את הרעיון, לאשרו או לתקנו ולשכלל את הרעיון המקורי. תלמידים שלא ילמדו שכדאי להעז ולנסות יהיו מקובעים הרבה מחבריהם ויתקשו להתקדם.

אורי לירון ואורית חזן מביאים במאמרם Intuitive vs. analytical Thinking: four Perspectives ארבעה היבטים של חשיבה מתמטית, בייחוד של המקור לשגיאות מתמטיות ועל הדרך להתמודד אִתן בכיתה: מתמטי, חינוך מתמטי, פסיכולוגי קוגניטיבי ופסיכולוגי-התפתחותי (אבולוציוני).

ארבעת ההיבטים מייצגים ארבע רמות של הסבר, ולירון וחזן לא רואים בהם מתחרים זה בזה אלא משלימים זה את זה. ההיבטים יכולים להשתנות מסטודנט אחד לאחר בקבלת משימה זהה או אצל סטודנט אחד שרמתו המקצועית השתנתה מתקופה לתקופה בעבודה על משימה מורכבת. לירון וחזן מציגים תוצאות של ביצוע שתי משימות מתמטיות: האחת בסטטיסטיקה ואחת באלגברה.

הבעיה שנלקחה מהעולם הסטטיסטי נועדה לבחון אם האינטואיציה הסטטיסטית של האדם נכונה: "בבדיקה לזיהוי מחלה שהשכיחות שלה היא 1/1000 ושיעור הטעות החיובית הוא 5% בודקים מהו הסיכוי שאדם שנמצא חיובי בבדיקה אכן חולה במחלה בהנחה שלא ידוע דבר על סימפטומים או סימנים אחרים" (תרגום שלי. א"א). בעיה זו ניתנה לסטודנטים בשנה רביעית ללימודיהם בפקולטה לרפואה. כמובן, התשובה הנכונה היא 2%, אך רק כ-18% מהנבדקים ענו תשובה הקרובה ל-2%, ואילו כ-45% התעלמו מהמידע הנתון וקבעו שהתשובה היא 95%.

מסתבר שטעויות אינטואיטיביות מתרחשות גם בקרב אוכלוסיות שמנת המשכל שלהן גבוהה ורמת המתמטיקה שלהן אמורה להיות טובה למדיי (סטודנטים לרפואה). על מנת להתגבר על טעויות אינטואיטיביות אלו יש לסגל את הסטודנטים לפשט הבעיה וליצור את הדרך הנוחה שתוביל לפתרון, ולפעמים קל יותר לעשות כן על ידי לקיחת דוגמה פרטית (למשל לדמות בדיקה בקבוצה של 1000 איש שבה על פי הסטטיסטיקה רק אחד חולה במחלה, ואז 50 אנשים מתוכם מקבלים תשובה

חיובית שגויה וסה״כ 51 אנשים מקבלים תשובה חיובית, ובקלות ניתן לראות שהסיכוי שאדם שקיבל תשובה חיובית אכן חולה במחלה הוא 1/51).

ארבעת ההיבטים של לירון וחזן מוסיפים משקל לחשיבות ההוראה בדרך אינטואיטיבית במידת האפשר, והאתגר הוא חיפוש דרכים לגשר על הפער בין מתמטיקה פורמלית לאינטואיציה. ידוע שניתן להטעות ציבור רחב בעזרת דיאגרמות וגרפים המכוונים לאינטואיציות שגויות שבקריאת גרפים המציגים נתונים באופן שהאינטואיציה של הקורא הלא מיומן תוביל אותו למסקנות שגויות.

בחיבור זה תוצג דוגמה שבה האינטואיציה הראשונית לפתרון שגויה, ותוך כדי חיפוש הוכחה מגיעים למסקנה הנכונה השונה מהאינטואיציה הראשונה.[6] עוד אנסה למצוא תפקידים שונים לאינטואיציות שונות בפתרון בעיות מתמטיות, ואתמקד בפתרון בעיות בדרך ויזואלית בכמה מצבים:

- מצבים שבהם הדרך הוויזואלית והאינטואיציה המתמטית מקַלות בהבנת הבעיה, ואנו מחליטים לסמוך על דרך זו וקובעים שאין צורך בכל דרך אחרת (טענות כמו ״לכל קטע יש נקודת אמצע יחידה״, שימוש בעקרון קוואלירי לחישוב נפחים וכד׳).
- מצבים שבהם האינטואיציה המתמטית מובילה למסקנות שגויות כמו בסטטיסטיקה (הדוגמה שהוצגה ממאמרם של לירון וחזן, מקריאת גרפים המוצגים באופן מטעה ומהוכחה 3 המוצגת להלן).
- מצבים שבהם אין כל אינטואיציה מתמטית, ויש לכוון ולהדריך על מנת להגיע להוכחה ויזואלית או אחרת בפתרון בעיה (דוגמאות 4 ו-5 להלן).

6 בקורס ״תורת המשחקים״ (שנה ראשונה בתכנית רוטשילד) שהשתתפתי בו העברנו בזוגות הרצאות בנושאים שונים. נושא ההרצאה שבה הייתי שותפה היה ׳כיצד ניתן לשקר בעזרת סטטיסטיקה׳, ושם הובאו כמה דוגמאות שפונות לאינטואיציה של הצופה ומביאות אותו לטעות גם במכוון. מכאן שטעויות סטטיסטיות נובעות גם מאינטואיציה שגויה.

פרק ב: סוגים של הוכחות ויזואליות

1. הוכחת נוסחת הסכום של סדרה הנדסית מתכנסת

כאן יוצגו שתי דוגמאות ויזואליות (Proofs without Words, pp. 120-121). שתי מטרות לדוגמאות אלה:

א. להמחיש המחשה ויזואלית סכום סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת לסכום סופי.

ב. להראות דוגמאות כלליות סכום של טור אינסופי המתכנס למספר סופי.

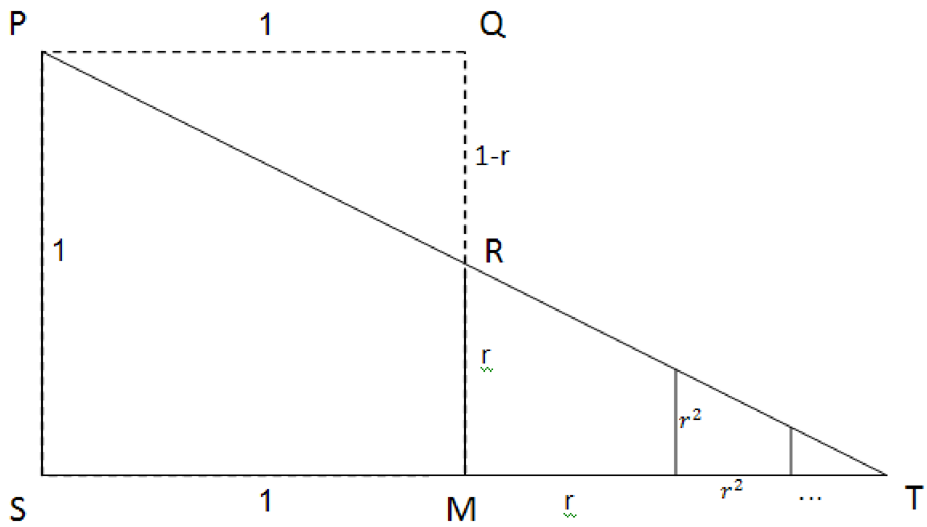
מושג הגבול קשה לתיאור ולהבנה, אך באמצעות הוכחה זו נראה כיצד ניתן להמחישו בהתבסס על ייצוג ויזואלי של גבול של סדרה הנדסית מתכנסת.

1. בדוגמה זו תוצג הוכחה לחישוב סכום סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = ?$ כשנתון: $|r| < 1$.

ניעזר בשרטוט הנתון באיור 1:

על צלע ריבוע היחידה PQMS מקצים קטע RM השווה ל-r. הישר PR חותך את הישר SM בנקודה T, וברור כי $RQ = 1 - r$. בבנייה זו נקבל שני משולשים דומים: $\Delta SPT \sim \Delta \square RT$, ועל פי יחס הפרופורציה נקבל: $\frac{MT}{MT+1} = \frac{r}{1}$. נחלץ את MT: $MT = \frac{r}{1-r}$ ומכאן ש- $MT > r$. לכן ניתן להקצות עליו קטע באורך r. באופן זה ניתן להמשיך ולהקצות קטעים באורך r^n שהולכים וקטֵנים ככל ש- n גדל.



איור 6: סכום סדרה הנדסית (**Roger, 1993**, p.120)

כך נוצרים משולשים דומים שמקדם הדמיון שלהם הוא r:

$\Delta PQR \approx \Delta TSP$

↓

$$\frac{ST}{PQ}=\frac{PS}{RQ}$$

$$\downarrow$$

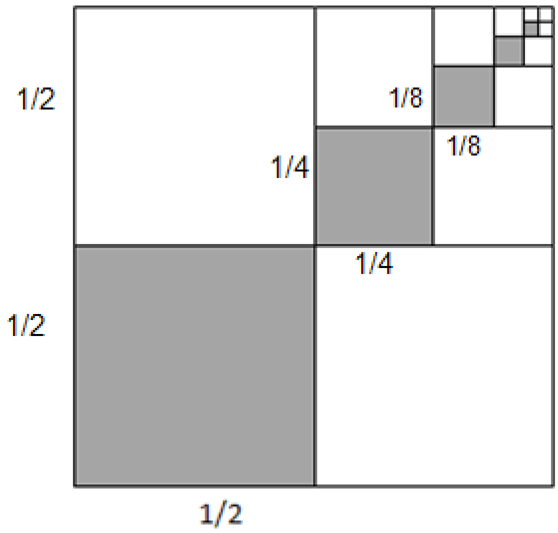
$$1+r+r^2+\cdots=\frac{1}{1-r}$$

בדוגמה זו ניתן לראות איך סכום סדרת מספרים אינסופית המתכנסת לאפס יכול להתכנס למספר סופי. הדרך הוויזואלית מקלה את המחשת האינסופיות לעומת הסופיות.

2. סכום טור הנדסי אינסופי בעזרת חלוקה אינסופית של ריבוע נתון.

בדוגמה זו תוצג הוכחה לסכום הסדרה האינסופית הזאת:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots=\frac{1}{3}$$



איור 7: סכום טור הנדסי אינסופי בעזרת שטחי ריבועים (**Roger, 1993**, p. 121)

דוגמה זו מתארת מקרה ספציפי של טור הנדסי אינסופי המתכנס למספר סופי (בהחלט לא מקרה כללי). הוכחה זו מתבססת על התבוננות בשרטוט שבו הריבוע מחולק לשלושה חלקים חופפים, שכל אחד מהם מייצג את הסכום המבוקש.

בשתי ההוכחות הוצגו שרטוטים שבעזרתם ניתן להוכיח כי סכום סדרה הנדסית אינסופית מתכנס למספר סופי, אך יש ביניהם הבדל ניכר. ואף ששתיהן ויזואליות, הרי ההוכחה השנייה נראית לי אינטואיטיבית מן הראשונה. לדעתי, די במבט מהיר כדי להבין את רעיון האינסופיות, ובעזרת צביעה נכונה של השרטוט ניתן לראות שהסכום מוביל לשליש משטח הריבוע.

בהוכחה הראשונה יש צורך בהסבר ובחישוב מלווה לשרטוט על מנת להבין את רעיון ההוכחה, וגם אם ההצגה הוויזואלית מקלה, הרי היא מיידית פחות מההוכחה השנייה.

ההוכחה השנייה אף מוסבת לסכום של מספרים חיוביים ומתבססת על השרטוט ולכן ממצה את הבעיה, ואילו בהוכחה הראשונה השרטוט עונה על מקרה שבו המנה היא חיובית: ($0<r<1$) בלבד, ויש צורך בהוכחה נפרדת עבור $-1<r<0$.

אם כן, ההוכחה הוויזואלית הראשונה ממחישה באופן חלקי את נכונות הנוסחה, ולא ממחישה התכנסות סכום סדרה הנדסית במקרה שהמנה שלה r מקיימת $-1 < r < 0$.

2. שימוש בעקרון קאווליירי לחישוב נפח כדור

שימוש בעקרון Cavlieri לחישובי נפח כדור הוא דוגמה לשימוש באינטואיציה מתמטית להבנת הוכחה ויזואלית מספקת ברמת הוכחה טרום-פורמלית ולא מחייב לגשת להוכחה פורמלית כאשר מדובר בתלמידי בית ספר. ברור שהוכחה מדויקת מבוססת על החשבון הדיפרנציאלי. אפתח ברקע המתאים:

עובדות בסיסיות מהנדסת המישור:

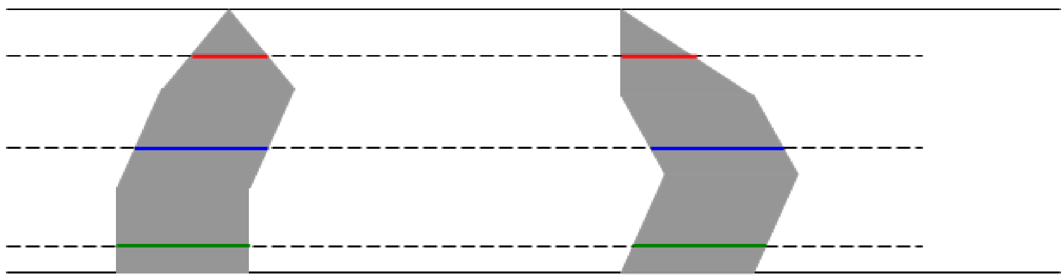
א. שני משולשים בעלי צלעות שוות וגבהים שווים בשטחם.

ב. טרפזים בעלי בסיסים שווים בזוגות והשווים בגובהם שווים גם בשטחם. ובאופן כללי:

ג. טרפזים השווים בקטעי אמצעים שווים בגובהם ובשטחם.

הכללת העיקרון הראשון של $Cavalieri$ (הנדסת המישור):

אם שתי צורות במישור מוגבלות בין זוג אחד של ישרים מקבילים, ועל כל ישר המקביל להם נוצרים בתוך כל אחת מהצורות קטעים שווים, הרי שתי הצורות שוות בשטחן:



איור 8: עקרון קווליארי בהנדסת מישור (מתוך מצגת בקורס גיאומטריה, סמסטר ב׳, תשע״א, פרופ׳ קנאי וד״ר מריטה ברבש)

עקרון $Cavalieri$ בהנדסת המרחב:

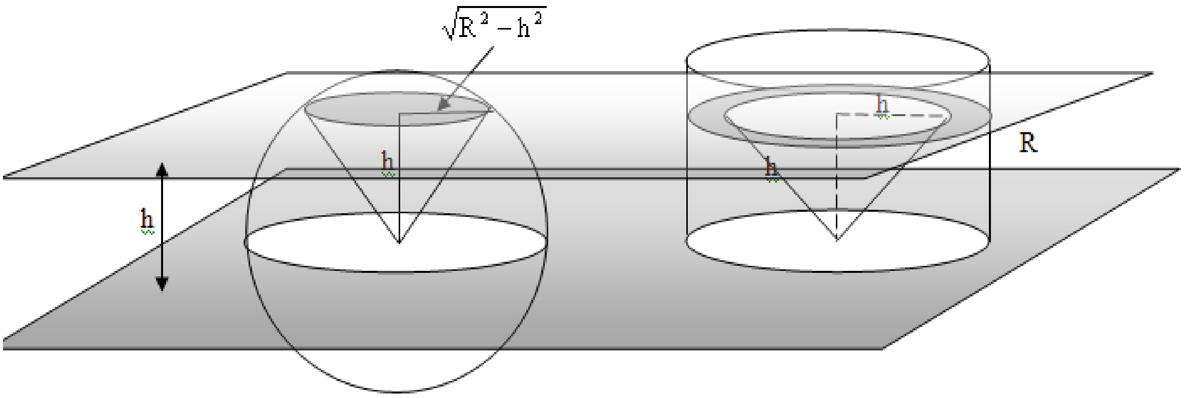
אם שני גופים מוגבלים בין שני מישורים מקבילים, וכל חתך על ידי מישור המקביל להם יוצר בתוך שני הגופים חתכים שווי שטח, הרי שני הגופים שווים בנפחם.

אם נרצה לתת הוכחה מדויקת לעובדות אלה, יהיה עלינו להשתמש בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי לחישוב שטחים, אולם היות שעובדות אלה ברורות אינטואיטיבית נסתפק באמור כאן.

עתה תוצג דרך ויזואלית לחישוב נפח כדור בעל רדיוס ⎕ על ידי שימוש בעקרון קווליארי בהנדסת המרחב, ולשם כך ישמש נוסחאות לחישוב נפח חרוט ונפח גליל.

<u>נפח גליל</u>: $\pi R^2 h$. <u>נפח חרוט</u>: $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ כאשר R הוא רדיוס בסיס הגליל או החרוט,

h = גובה הגליל או החרוט.



איור 9 : עקרון קווליארי בהנדסת המרחב (מתוך מצגת בקורס גיאומטריה, סמסטר ב׳, תשע״א, פרופ׳ קנאי וד״ר מריטה ברבש)

נמקם זה לצד זה על מישור אחד חצי כדור בעל רדיוס R וגליל מעגלי ישר בעל רדיוס בסיס R וגם גובה R ונחתוך אותם במישור המקביל למישור הראשון ושעומד במרחק h ממנו ($h \le R$ כמו בשרטוט). שני המישורים חותכים מחצי הכדור ״שכבה״ כדורית שהבסיס התחתון שלה שווה בשטחו לבסיס הגליל, והבסיס העליון שלה הוא מעגל בעל רדיוס $\sqrt{R^2-h^2}$, על כן שטחו שווה $\pi(R^2-h^2)$.

בתוך הגליל נבנה חרוט שקדקודו על הבסיס התחתון של הגליל, ובסיסו הוא הבסיס העליון של הגליל. בחתך שקיבלנו נקבל מעגל ברדיוס h בתוך החתך במישור העליון, ונתמקד בנפח הגוף שבין הגליל ובין החרוט. שטחו של החתך התחתון של הגוף הזה שווה לשטח החתך של הכדור, ושטח החתך העליון שלו שווה $\pi R^2-\pi h^2 = \pi(R^2-h^2)$, כלומר שווה לשטחו של החתך העליון של ה״שכבה״ הכדורית. גובה h נבחר באקראי. לכן על פי עקרון $Cavalieri$ שני הגופים – חצי כדור וגליל ללא החרוט שבתוכו – שווים בנפחם.

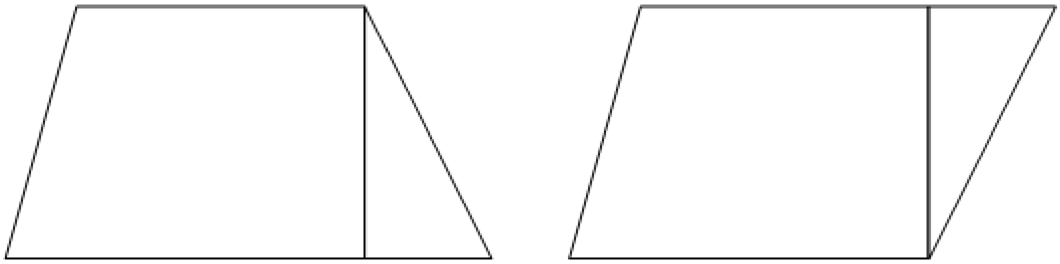
נפח הגוף בתוך הגליל שווה $\frac{2}{3}\pi R^2\cdot R$, לכן גם נפח של חצי כדור שווה $\frac{2}{3}\pi R^3$, ומכאן שנפח הכדור כולו שווה $\frac{4}{3}\pi R^3$.

לסיכום – אמנם הוכחה זו פחות מדוקדקת ופורמלית מבחינה מתמטית אבל בעיניי היא ברורה ומוחשית.

3. בעיית המשולש

הדוגמה שלהלן מבוססת על מאמרה של ברבש, *A Nonvisual Counterexample in Elementary Geometry*, ובאמצעות דוגמה זו אבקש להראות שכאשר האינטואיציה הראשונית לא מְסַפֶּקֶת, יש לפנות לכלים מתמטיים, וגם אם מסתבר שהאינטואיציה הראשונית הייתה שגויה, הרי היא הייתה טובה דייה כדי להבין שיש להמשיך ולחקור כדי לבחון השערה אינטואיטיבית בכלים מתמטיים.

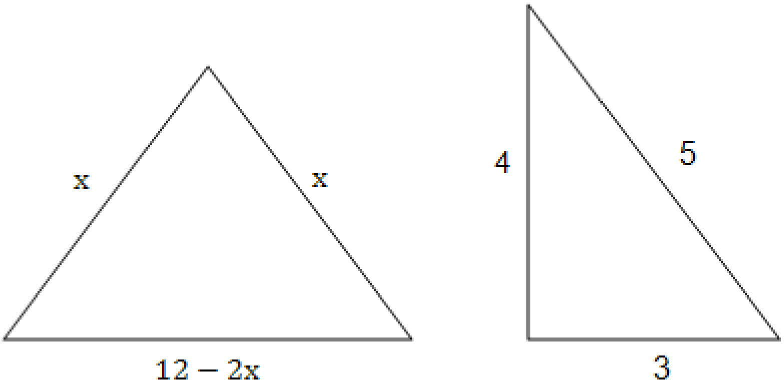
ברור ששני מצולעים חופפים שווים בהיקפם ובשטחם. וכאן נשאלת השאלה אם גם ההיפך הוא הנכון, דהיינו אם שני מצולעים השווים בהיקפם ובשטחם חופפים ביניהם. למתן מענה לשאלה זו די בדוגמה של שני מרובעים שונים השווים בהיקפם ובשטחם, כמו באיור 10.



איור 10

עתה מעניין לבדוק אם שני משולשים שווי שטח והיקף הם חופפים, היות שלמשולשים יש תכונות מיוחדות שאין בשאר המצולעים, למשל: לשני משולשים כלליים ניתן לקבוע חפיפה על ידי נתונים חלקיים, מה שאין כן בשני מצולעים כלליים אחרים. האינטואיציה האישית שלי הייתה שייתכן שהם חופפים. אלא שכאן לא די באינטואיציה הראשונית, והבנתי שיש לבדוק אותה בכלים מתמטיים. לשם כך ביקשתי לנסות להוכיח את הטענה בעזרת טריגונומטריה תחילה והגעתי למשוואות טריגונומטריות מסובכות ואחר כך למשוואות אלגבריות ממעלה שלישית, ומהן היה אפשר להגיע לפתרון. ואולם תוך כדי חיפוש אחר ההוכחה הבנתי שהאינטואיציה שלי הייתה מוטעית, וניתן להוכיח שיש שני משולשים שונים שווי היקף ושטח.

והנה הצעה לפתרון אלגברי: ניקח משולש ישר זווית שצלעותיו הן השלשה הפיתגורית הידועה 3-4-5, כלומר, שטחו 6 והיקפו 12, וננסה למצוא משולש שווה-שוקיים השווה לו בהיקפו ובשטחו. אם נצליח, הרי לנו דוגמה לשני משולשים שאינם חופפים אך שווים בהיקפם ובשטחם.



איור 11

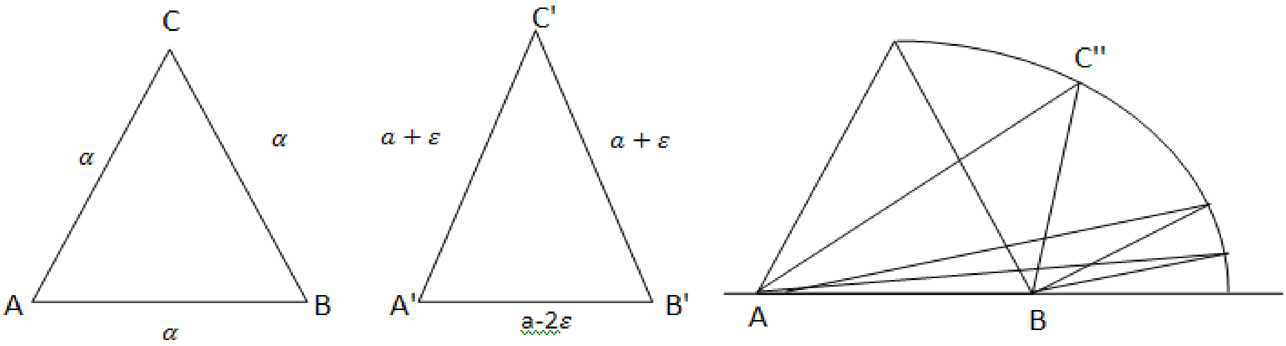
נסמן את אחד משוקי המשולש ב- x, ואת בסיס המשולש ב- $12-2x$. עתה ניתן לבנות משוואה המראה ששטח המשולש שווה 6 (גובה המשולש יהיה $\sqrt{x^2-(6-x)^2}$):

$\sqrt{x^2-(6-x)^2}\cdot(12-2x)=12$, ומשוואה זו לאחר פישוט מובילה למשוואה:

$x^3-15x^2+72x-111=0$, ולמשוואה זו יש פתרון : $x \cong 3.467$. כלומר קיבלנו משולש שווה-שוקיים, שאורך כל אחד משוקיו הוא 3.467 ס"מ.
כלומר בעזרת פתרון אלגברי זה הוכח שיש שני משולשים שונים השווים בהיקפם ובשטחם. הוכחה זו מאשרת את הטענה לקיום המשולש, אך פתרון זה אינו ויזואלי, ובמאמרה של ברבש הוצעה דרך ויזואלית להבנת קיומו של משולש כזה. גם אם לא רואים אותו מפורשות, מבינים הבנה אינטואיטיבית שהוא קיים. ועם ההוכחה הקודמת מתקבלת תמונה משכנעת במיוחד שניתן להבין ממנה שהמשולש קיים וגם לחשב את ערכי צלעותיו. ואם כן, השילוב בין שתי ההוכחות הוא השילוב היעיל.
ההוכחה השנייה היא מעניינת ולגמרי לא שגרתית ואף לימדה אותי רבות.

פתרון להיקף קבוע

נניח שמשולש ΔABC הוא משולש שווה צלעות שצלעו a, ונבנה משולש חדש $\Delta A'B'C'$– באותו היקף על ידי שנחסיר 2ε מהבסיס ונוסיף לכל שוק ε . ברור ששני משולשים אלה אינם חופפים כיוון שאחד מהם הוא שווה צלעות, והאחר רק שווה שוקיים. עתה נניח ששטחו של המשולש שוו-הצלעות הוא S, ושל שוו-השוקיים S' . אם $S = S'$, הרי מצאנו שני משולשים שונים השווים בהיקפם ובשטחם. ואם אין הן שווים בשטח, הרי מתקיימת אחת מהאפשרויות האלה : $S>S'$ או $S'>S$ (ידוע שבין שני משולשים שווי-היקף למשולש המשוכלל יש השטח הגדול ביותר, כלומר $S>S'$, אך



לצורך ההוכחה נתעלם מעובדה זו).
עתה נבחן את האפשרות $S > S'$, אך ניתן לבחון באותה מידה גם את האפשרות השנייה. נדמיין חוט

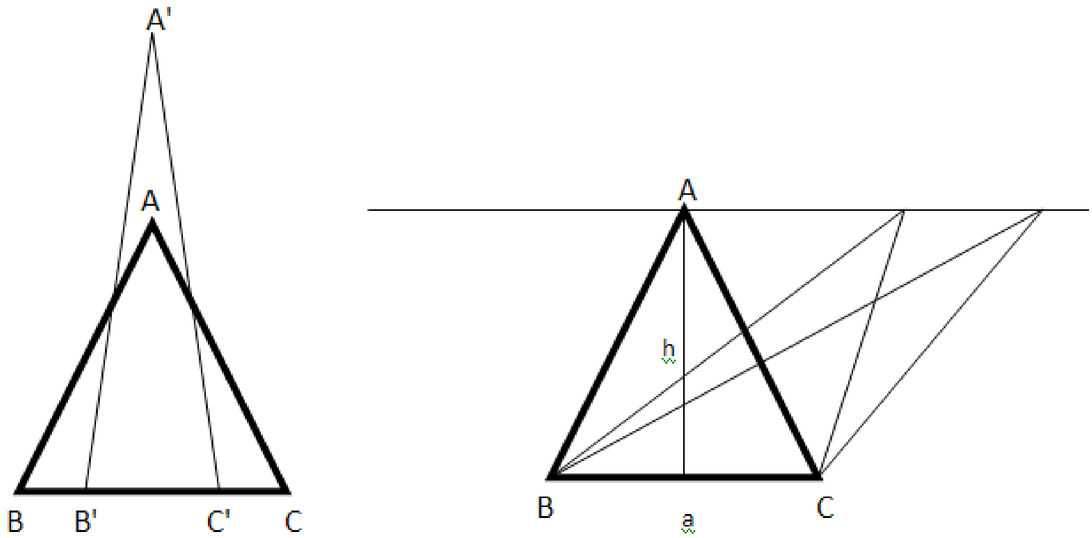
איור 12 : משולשים בעלי היקף קבוע

באורך $2a$, שקצותיו בקדקודים B ו-C, ועיפרון מזיז את נקודה C תוך כדי מתיחת החוט ושמירה על אורכו (כמובן, כך נוצרת אליפסה, אך תוצאה זו לא נחוצה להבנת ההוכחה). כל נקודה במסלול יוצרת משולש בהיקף של $3a$, והשטח יורד מ S ל-0 (עד שהנקודה מגיעה להמשך הצלע AB). השטח

של המשולשים החדשים שנוצרים הם ערכים המשתנים ברציפות בין S ל-0, ומכאן שבנקודה כלשהי במסלול נקבל משולש ששטחו שווה ל-S', והוא בהחלט לא משולש החופף ל-$\Delta A'B'C'$.

פתרון לשטח קבוע

נפתח שוב במשולש שווה-צלעות ABC ששטחו S והיקפו $3a$. במקרה זה נפתח במצב שבו שטח המשולש קבוע, ומצב זה ניצור על ידי הכפלה של בסיס המשולש בקבוע k ושל גובה המשולש ב-$\frac{1}{k}$. עתה נניח שהמשולש החדש שנוצר הוא $\Delta A'B'C'$, והיקפו p'. וכמו שנמצא לעיל, אחת מהאפשרויות תתקיים: ההיקפים שווים או לא שווים. אם הם שווים, הרי קיבלנו שני משולשים שונים השווים בשטחם ובהיקפם. ואם ההיקפים שונים זה מזה, הרי $p' > p$ או $p > p'$. ונניח ש-$p' > p$ (מבין כל המשולשים שווי השטח למשוכלל יש ההיקף הקטן ביותר) ונבחן את התוצאה:



איור 13: משולשים בעלי שטח קבוע *(A Nonvisual Counterexample in Elementary Geometry,Marita Barabash)*

ניקח את המשולש המקורי (שווה הצלעות שצלעו a) ונשנה אותו הפעם על ידי גרירה של קודקוד A לאורך ישר העובר דרך A ומקביל לבסיס BC. כל נקודה על ישר זה יוצרת עם הבסיס BC שצלעו a משולש ששטחו S. ההיקף של משולש זה הולך וגדל ברציפות מההיקף p ומקבל כל ערך בין p ל- ∞, ועל פי עקרון הרציפות הוא יגיע גם לערך p', כלומר קיבלנו משולש השונה ממשולש $A'B'C'$ אך שווה לו בשטחו ובהיקפו.

<u>הערה</u>: בהיבט אינטואיטיבי מכנים את עקרון הרציפות מה שבהיבט מתמטי הוא משפט ערך הביניים עבור פונקציות רציפות. היות שכאן מדובר בהוכחה אינטואיטיבית לא התייחסנו לכך שהיקף או שטח הם פונקציה רציפה אלא העדפנו מושגים אינטואיטיביים על פני מושגים פורמליים.

לסיכום, מצאתי לנכון להביא דוגמה זו שבה האינטואיציה הראשונית שלי לא הובילה לפתרון הבעיה ואף הייתה מוטעית אך הביאה מוטיבציה לפנות לדרכים לפתרון הבעיה, ובעוד אני מנסה

להביא פתרונות ויזואליים הנשענים על אינטואיציה מתמטית מצאתי שפתרון זה אינו שגרתי, וגם אם לא ניתן לשרטט במדויק את המשולש הרצוי, הרי הבנייה הגיאומטרית מוכיחה שהמשולש הרצוי קיים.

דוגמה זו העשירה את האינטואיציה שלי באפשרות לחיפוש מצבים קיימים בוודאות גם אם לא ניתן להצביע עליהם מפורשות. מדובר בהסתכלות חדשה שיש לבדוק אם היא מתאימה גם לפתרון בעיות מתמטיות אחרות.

4. הוכחת אי-שוויון

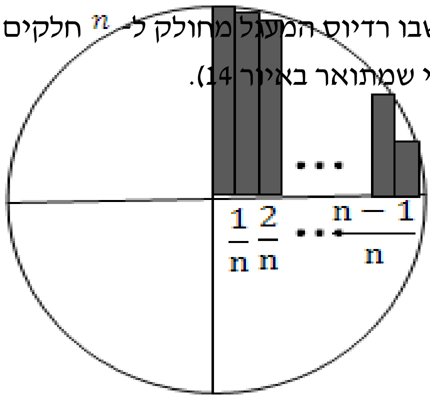
$\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2^2}{n^2}}+\cdots\sqrt{1-\frac{(n-1)^2}{n^2}}<\frac{\pi n}{4}$ (חוסיד, 1994).

לפנינו דוגמה להיעדר אינטואיציה ראשונית המובילה לקשר עם π של הביטוי הכתוב באגף השמאלי של האי-שוויון, בעוד הסתכלות דרך מעגל היחידה על פי הנחיה מתאימה (שרטוט מלווה) יכולה להוביל להוכחת אי-שוויון בדרך ויזואלית לא שגרתית במעט חישובים נלווים, מה שאין כן בשיטה המקובלת, שבה ניגשים בדרך אלגברית להוכחה כזאת, למשל באמצעות אינדוקציה מתמטית.

על מנת להוביל לפתרון על ידי שימוש בדרך ויזואלית יש להנחות את הפותרים ולכוונם לדרך הנכונה. הנה דוגמאות לשאלות מנחות :

א. לאיזו צורה יש קשר ל- □ ? אפשר ששאלה זו תוביל את הפותרים למעגל.

אם כן, נתבונן במעגל היחידה, שבו רדיוס המעגל מחולק ל- n חלקים שווים. מעל כל חלק בנוי מלבן שקדקודו הרביעי על המעגל (כפי שמתואר באיור 14).

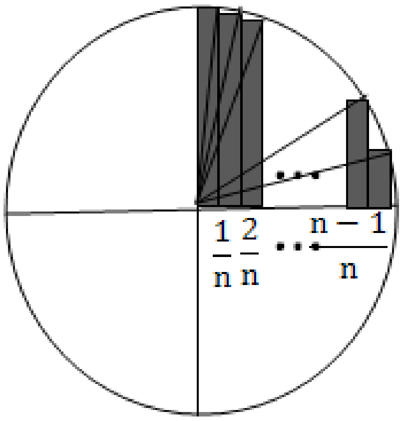


איור 14

ב. מה יהיה אורך הצלע השנייה, השלישית... האחרונה?

ג. מה יהיה שטח המלבן הראשון... השני... האחרון?

ד. האם נמצא קשר לאי-שוויון הנתון?



איור 15

עתה נחשב את שטחי המלבנים שנוצרו (הצבועים בשרטוט) ונסכם את השטחים. אם נתבונן בבניית העזר שבאיור 15, ניתן לחשב את הצלע השנייה של כל אחד מהמלבנים (הלוא מדובר במעגל היחידה) וכך לחשב את שטח כל הצורה הצבעונית.

ובהיבט ויזואלי ניתן לראות שסכום שטחים אלו קטן משטח רבע המעגל כולו השווה ל- $\frac{\pi}{4}$,

כלומר מתקבל האי-שוויון $\frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{2^2}{n^2}}+\dots\frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{(n-1)^2}{n^2}}<\frac{\pi}{4}$.

ולאחר שנכפול את האי-שוויון ב- n נקבל את האי-שוויון המבוקש:

$$\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2^2}{n^2}}+\dots\sqrt{1-\frac{(n-1)^2}{n^2}}<\frac{\pi n}{4}$$

זאת דוגמה שבה ההוכחה הוויזואלית תקֵפה כיוון שמדובר בהוכחה לכל n טבעי. סכום שטחי המלבנים המתקבלים מבנייה פנימית זו מותיר בהכרח חלקים לא מכוסים מרבע המעגל, ומכאן ברור חד-משמעית שסכום שטחי המלבנים קטן משטח רבע המעגל.
דוגמה זו היא ללא ספק פחות מורכבת בטכניקה האלגברית וקלה יותר להבנה ומשתמשת בידע מתמטי בשטחים ובהכרת מעגל היחידה ומהווה דוגמה לפתרון בדרך אחרת לא צפויה – הדרך הוויזואלית.

5. אי-שוויון הולדר כמשפט עזר להוכחת אי-שוויון מינקובסקי באמצעים גיאומטריים

אי שוויון מינקובסקי :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

המבוסס על אי שוויון הולדר (נספח א') המבוסס על הלמה הבאה :

יהיו p ו- q המקיימים : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $\quad q>1, p>1$ אז לכל $a,b\ge 0$ מתקיים :

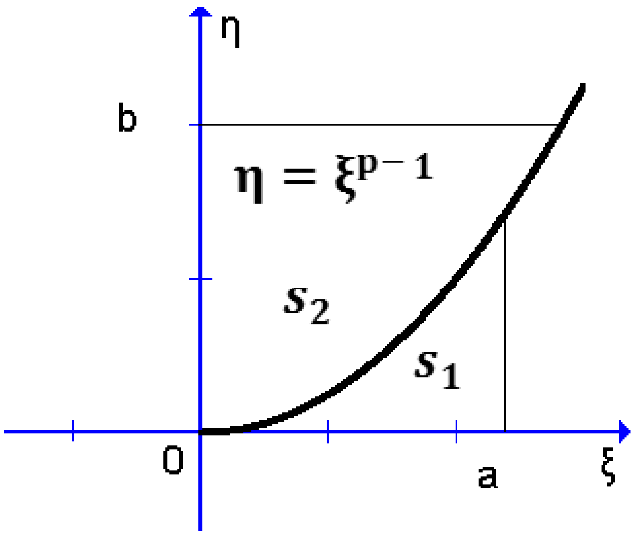
$$ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

את ההוכחה ללמה זו אבקש להציג בדרך ויזואלית ולהראות שניתן להשתמש באינטואיציה מתמטית ובדרך ויזואלית גם להוכחה של רעיונות מתמטיים מתקדמים. להלן ההוכחה (קולמוגורב, פומין, 1972) :

נתבונן בשתי פונקציות η ו- ξ $\xi>0$, $\eta>0$, $\xi=\eta^{q-1}$, $\eta=\xi^{p-1}$ (ניתן לראות שהקשר ביניהם הוא כזה שמוביל ל- $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ כי $\eta=\xi^{p-1}=\eta^{{q-1}^{p-1}}=\eta^{(q-1)(p-1)}$

$1=(q-1)(p-1)$ ומכאן מתקיים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

עתה נבנה פונקציות אלה במערכת צירים אחת :



איור 16 (יסודות של תורת הפונקציות ואנליזה פונקציונאלית : קולמוגורוב ופומין, 1972)

נסמן ב- S_1 השטח שמתחת לעקומה $\eta = \xi^{p-1}$ ונחשב את השטח הכלוא בינה לבין ציר ξ

והישר $\xi = a$, נקבל: $S_1 = \int_0^a \xi^{p-1} d\xi = \frac{a^p}{p}$.

באופן דומה נחשב את S_2 כשטח הכלוא בין הגרף $\xi = \eta^{q-1}$ לבין ציר η והישר $\eta = b$ ונקבל:

$$S_2 = \int_0^b \eta^{q-1} d\eta = \frac{b^q}{q}$$

מהשרטוט ברור כי סכום השטחים S_1 ו S_2 בהכרח גדול או שווה לשטח המלבן הנוצר ע״י הישרים

$\xi = a$ ו $\eta = b$ ועל ידי מערכת צירים זו, כלומר, $S_1 + S_2 \geq ab$ ומכאן ש- $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$

(כאשר $p = q = 2$ אי השוויון הופך לאי שוויון קושי), וקיבלנו את ההוכחה המבוקשת.

בחיפוש אחר דוגמאות ויזואליות המשתמשות, לדעתי, באינטואיציה מתמטית לפתרון בעיות הגעתי לדוגמה זו, לכאורה מנושא מתמטי מתקדם יותר, ובכל זאת קולמוגורב מצא דרך מיוחדת ואינטואיטיבית עבורו להביע את הפתרון בדרך גיאומטרית.

לדעתי, יש כאן שילוב של יצירתיות, הכרה מעמיקה של פונקציות מתמטיות ויכולת להתבונן בנושא במבט על בידע מתמטי רחב. זאת בהחלט לא אינטואיציה מתמטית המצויה בכל אדם, אך ניתן להבינה ולהתפעל ממנה.

היופי שבהוכחה זו או בהוכחה קודמת (האי-שוויון בדוגמה 4) הוא היכולת של הדרך הגיאומטרית-ויזואלית לפשט את הבעיה וליצור הבנה מהירה או אינטואיטיבית יותר מדרכים אלגבריות.

פרק ג: הממצאים מבדיקת השאלון למורים[7]

מטרת הצגת השאלון הייתה לבדוק מה מידת היכרותם של מורים עם הוכחות ויזואליות ואם הם משלבים הוכחות ויזואליות בהוראה ומה דעתם בדבר השפעת הוכחות כאלה על למידת מתמטיקה.

השאלון הועבר לארבע עמיתות הוראה שלי. לשלוש מהן ניסיון של יותר מ-20 שנים בהוראת מתמטיקה, וכולן מגישות לבגרות במתמטיקה ברמות השונות (שלוש עד חמש יחידות לימוד), ולכולן ניסיון בריכוז מקצוע, לשתיים מתוכן ניסיון גם בהדרכת מורים.

כל המורות ענו שהדרך שבה הן מוכיחות בכיתה את נוסחת הסכום של סדרה הנדסית היא הוכחה 1 מיותר לציין שהוכחה 3 היא לא הוכחת הנוסחה אלא הוכחה של סכום סדרה הנדסית מסוימת, ומובן שאין היא תחליף לשתי ההוכחות הראשונות).

שתי מורות ענו שההוכחה 2 היא העדיפה בעיניהן, מורה אחת המשיכה לדבוק בהוכחה 1, ומורה אחת העדיפה את הוכחה 3 כהוכחה ויזואלית. ממצא זה מלמד על הבדל בין הוכחה מועדפת אישית למה שבוחרים המורים להעביר בכיתה. לדעתי, ההבדל יכול לנבוע מאי-הכרת ההוכחות האחרות או ממורכבותן והתאמתן לרמת הלומדים, ואולי מורים אף לא מרבים להשתמש בהוכחות ויזואליות.

לאחר החשיפה לשלוש ההוכחות הוויזואליות המוצגות חשבו שתי מורות שכדאי להציג לכיתה עוד הוכחה מלבד הראשונה, והאחרות דבקו באופציה הראשונה. מעניין שהמורות לא יכלו לוותר על ההוכחה הראשונה, ומכאן שהן לא רואות בהוכחה אחרת תחליף אלא הוכחה נוספת, אולי חיזוק להוכחה קודמת (או שמא קשה לשנות את כוחו של ההרגל).

כל המורות הודו שרצוי להציג בכיתה יותר מהוכחה אחת וטענו שרק לעתים רחוקות הן מציגות הוכחות ויזואליות בכיתה.

על אפיון התלמידים בעדיפות להוכחה מסוימת היו דעות מגוונות. היו שחשבו שתלמידים חזקים שאוהבים גיאומטריה ומעדיפים קשרים רב-תחומיים יעדיפו את הוכחה 2, ותלמידים שמעדיפים הוכחות בכתיבה מובנת יעדיפו את הוכחה 1, וכולן הודו שהוכחה 3 מעניינת ומתאימה גם לתלמידים מתקשים, וכדאי להציגה בכיתה, אך כמובן אין היא תחליף להוכחת הנוסחה הכללית.

אשר לשימוש בהוכחות ויזואליות בהוראה ציינו שלוש מורות שרק לעתים רחוקות הן מביאות הוכחות ויזואליות לכיתה מפאת לחץ בזמן והיעדר משאבים טכנולוגיים זמינים.

על אפיון תלמידים שלהם ראוי להציג הוכחות ויזואליות הודו כולן שאין הדבר תלוי בגיל התלמידים אלא בנושא ההוכחה, ושניתן להביא הוכחות ויזואליות לרמות שונות של תלמידים, ובלבד שתיבחר ההוכחה המתאימה, ורצוי לנסות להביא עוד הוכחות ויזואליות לתלמידים שלהם קשיי כתיבה ומעקב אחר הוכחות מורכבות. המורות הוסיפו שחשוב לשלב הוכחות ויזואליות בהוראה אולי דווקא לתלמידים המתקשים בהבנת הוכחות פורמליות.

לבסוף שאלתי מה לאינטואיציה ולהוכחות ויזואליות, ובין התשובות נאמר שהוכחות ויזואליות עוזרות בפיתוח חשיבה מתמטית ומחזקות את האינטואיציה המתמטית.

[7] השאלון המלא להלן, בנספח 2.

פרק ד: סיכום ורפלקציה

בעבודתי זו ביקשתי לבחון אינטואיציה מתמטית ומימושה בפתרונות ויזואליים. למדתי שאינטואיציה מתמטית נובעת מניסיון אישי שהצטבר עם השנים בחשיפה לסביבה שבה האדם חי ומניסיון שהצטבר תוך כדי לימודים ועבודה בנושאים מתמטיים שונים.

אני מאמינה שכשם שיש הבדלים בין מתמטיקאים גדולים בדרך חשיבתם (על פי הדמאר), כך יש הבדלים גם בין מורה למתמטיקה למורה אחר ובין תלמיד לתלמיד, ודווקא בשל כך על המורה לנסות לחשוף תלמידים לסוגי פתרונות שונים ולעודד חשיבה אינטואיטיבית, בכלל זה הפרחת רעיונות לא לגמרי מבוססים ואחר כך ניסיון להסבירם ושימוש במעבר לייצוגים אחרים כדי לפשט את הבעיה ולנסות להבינה ממקום אחר.

לדעתי,להוכחות ויזואליות יש תפקיד חשוב בפיתוח אינטואיציה מתמטית. לעתים די בהתבוננות מהירה בהצגה ויזואלית כדי להסיק שהאינטואיציה המתמטית מובילה מיד להבנת הרעיון המתמטי (סכום זוויות במשולש, סכום סדרה הנדסית אינסופית דרך סכום שטחי ריבועים ועוד), ולעתים ההצגה הויזואלית דורשת הבנה של תהליך החשיבה של יוצר הפתרון על מנת להבין את הרעיון המתמטי (כגון סכום טור אינסופי בעזרת מעגל טריגונומטרי, שימוש בגרף להבנת למה באי-שוויון הולדר).

חשוב לציין שלדעתי, יש שהוכחה ויזואלית יכולה לשמש תחליף מספק להוכחה פורמלית, בעיקר כאשר אין הגבלות תוך כדי השימוש בעזרים ויזואליים או כאשר רמת הידע של הלומדים אינה גבוהה דייה להוכחה פורמלית מדויקת (עקרון קווליארי לחישוב נפח כדור), ויש שהוכחה ויזואלית היא רק תחילתה של הבנת רעיון מתמטי שיש לתמוך בהוכחה פורמלית על מנת להכליל, לדייק ולבסוף לשכנע באופן מוחלט (בעיית המשולש שהוצגה לעיל).

ההוכחות הויזואליות אף מאפשרות לחשוב שלא כבשגרה ולנסות ולאסוף ידע רב מתחומים שונים ולהציגם בדרך אחרת. לעתים כך מתאפשר לפותר הבעיה לצאת מתוך הבעיה ולבדוק אלו כלים מתמטיים ידועים נוספים יכולים לשרת אותו בפתרון הבעיה.

פתרון ויזואלי הוא לאו דווקא הפתרון הפשוט של הבעיה. לעתים הוא מסובך להבנה יותר מפתרון פורמלי, אך כיוון שיש מתמטיקאים שהאינטואיציה המתמטית שלהם שונה ומביאה אותם להוכחות ויזואליות לא שגרתיות, מתעצם הצורך ללמוד את תהליך החשיבה שלהם לפיתוח הרעיון, וככל שניחשף לעוד הוכחות כאלה ייתכן שרעיונות חדשים יעלו גם מצד התלמידים.

אישית אני חשה שנתרמתי רבות מתהליך העבודה – מחיפוש החומרים, ממפגש עם מגוון הוכחות ויזואליות וגם מהשיח על אינטואיציה מתמטית וכמובן מההדרכה הצמודה של המנחה, ד״ר מריטה ברבש, שהדריכה,ייעצה ומיקדה אותי בהכנת העבודה. תודתי שלוחה לה מעומק לבי.

מן השאלון שניתן לעמיתות ההוראה שלי עלה שגם אני כמו עמיתותיי שהשתתפו בשאלון לא משלבת די הוכחות ויזואליות בהוראה. לדעתי, המורים אינם רואים בהוכחה ויזואלית הוכחה תקֵפה לחלוטין וחושבים שהיא צריכה להיות מוצגת כהוכחה מחזקת ותומכת אך לא להחליף את ההוכחות המובנות הסטנדרטיות – הפורמליות.

יש מקום לתת משקל רב יותר להשפעת הוכחות ויזואליות על הלמידה של תהליכי החשיבה המתמטית של התלמיד, ולכן יש לשלב אותן בהוראה שוטפת בכיתה.לעתים יש לציין שהוכחה זו תקֵפה דייה, ואין צורך בהוכחה חלופית, ולעתים יש לציין שזאת הוכחה טובה, מסבירה ומספקת.

באופן כללי התרשמתי שיש התעניינות של המורות בחשיפה לעוד הוכחות ויזואליות וברצון לשלבן בהוראה בכיתות.

נושא העבודה התפתח בהתעניינותי בהוכחות אינטואיטיביות, והתמקדתי בהוכחות ויזואליות. בטוחני שאוכל להשתמש בידע שצברתי בתהליך העבודה בהוראה, ואנסה לעניין את צוות המורים שעובד אתי בשילוב עוד הוכחות ויזואליות לצד הוכחות אנליטיות. אפשר שכך אביא את התלמידים לגלות עניין והנאה ולפתח להם במידת מה את האינטואיציה המתמטית שלהם.

רשימת מקורות

גבע, י' ודז'ילדטי, א' (2011). *מתמטיקה שאלון 806, 5 יח', כרך ג'*. תל-אביב: הוצאת יואל גבע.

חוסיד, ס, (1994). *איך להמציא בעיות מתמטיות, סדרה "העשרה מתמטית בנושאים שונים", 29*. רחובות: מכון ויצמן למדע, היחידה לפעולות נוער.

לוין, א' וגרינשטיין, ו' (2009). *מבוא לאנליזה פונקציונלית, כרך ראשון, 50*. תל-אביב: האוניברסיטה הפתוחה.

מלמד, ע' (2000). אינטואיציה בעולמות משתנים. *עלה ,26*, 13-16.

פויה, ג' (1961). *כיצד פותרין* (עורך: ש"פ קלעי; מתרגם: א' בן נחום). ירושלים, ישראל: אוצר המורה.

קולמוגורוב, א"נ ופומין, ס"ו (1972). *יסודות של תורת הפונקציות ואנליזה פונקציונלית*. מוסקבה: הוצאת "נאוקה" (ברוסית).

Barabash, M. (2005) A Non-visual Counterexample in Elementary Geometry. *College Mathematical Journal, 36 (5)*, 397-400.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics An Educational Approach*. Dordrecht, the Netherland: D. Reidel Publishing Company.

Hadamard, J. (1945). *The Mathematician's Mind The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton, New jersey: Princeton University Press.

I. Lakatos (1976). *Proofs and Refutations, The logic of Mathematical Discovery*. New York, NY: Cambridge University Press.

Leron, U. & Hazzan, O. (2009). Intuitive vs. analytical thinking: four perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *71*, 263-278.

Polya, G. (1968). *Mathematics and Plausible Reasoning.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Roger, B. (1993). *Proof s Without Words Exercises in Visual Thinking*. Washington D.C.: The Mathematical Association of America.

נספח 1

אי שוויון הולדר כמשפט עזר לאי שוויון מינקובסקי

אציין כמה מושגים הנוגעים לאי-שוויון מינקובסקי, שהוכחתו מבוססת על אי-שוויון הולדר, אשר מבוסס על הלמה, שאת הוכחתה בחרתי להציג בעבודתי בדרך ויזואלית.

נורמה היא פונקציה ממשית המוגדרת על מרחב וקטורי ומתאימה לכל וקטור ערך ממשי על ידי מילוי כמה תנאים המבוססים על התכונות היסודיות של האורך המוכר מהמרחב האוקלידי:

- נורמה של כל איבר במרחב היא תמיד חיובית, פרט לנורמת ווקטור האפס:

  $\|f\|_p \geq 0$, $\|f\|_p = 0$ אם ורק אם $f = 0$.
- תכונת ההומוגניות:

  $\|\lambda \cdot f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$
- אי שוויון המשולש:

  $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

אי-שוויון מינקובסקי אינו אלא ביטוי לאי-שוויון המשולש עבור נורמה במרחב L_p (מוגדרת להלן).

אי-שוויון הולדר:

אם יהיו $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ *המקיימים* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, ותהיינה $f \in L_p(I)$, $g \in L_q(I)$

$fg \in L_1(I)$, **הרי מתקיים** $\|fg\| \leq \|f\|_p \|g\|_q$

יש לציין שעבור $p = q = 2$ מתקבל אי-שוויון המכונה "אי-שוויון קושי שוורץ".

בעבודתי הצגתי הוכחה ויזואלית של הלמה, ועליה מבוסס אי-שוויון הולדר, ולשם השוואה מצאתי להביא הוכחה נוספת מן הספר מבוא לאנליזה פונקציונלית (לוין וגרינשטיין, 2009).

נעבור להוכחת אי־שוויון הולדר. ראשית, נוכיח את הלמה הבאה:

למה

יהיו p, q המקיימים (1). אז לכל $a,b \ge 0$:

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (6)$$

הוכחה

נעיין בפונקציה

$$\varphi(x) = \frac{x}{p} + \frac{1}{q} - x^{\frac{1}{p}} \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

נניח קודם כי $b^q \ge a^p$.

נוכיח כי $\varphi\left(\frac{a^p}{b^q}\right) \ge 0$ ונראה שאי־שוויון זה שקול ל־(6).

מתקיים:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1} < 0 \quad , \quad 0 < x < 1.$$

(כי $\frac{1}{p} - 1 < 0$) ולכן φ יורדת בקטע $[0,1]$. מאחר ש־

$$\varphi(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = 0$$

נובע כי $\varphi \ge 0$ ב־$[0,1]$, כלומר

$$x^{\frac{1}{p}} \le \frac{x}{p} + \frac{1}{q} \qquad (7)$$

לפי ההנחה $a^p \le b^q$. נציב ב־(7) $x = \frac{a^p}{b^q}$ ונקבל:

$$\frac{a}{b^{q/p}} \le \frac{1}{p}\frac{a^p}{b^q} + \frac{1}{q} \qquad (8)$$

מ־(1) נובע (בדקו) כי:

$$q - 1 = \frac{q}{p}$$

ולכן נוכל לרשום את (8) בצורה:

$$\frac{a}{b^{q-1}} \le \frac{1}{p}\frac{a^p}{b^q} + \frac{1}{q}$$

נכפול ב־b^q ונגיע ל־(6).

המקרה $a^p \ge b^q$ סימטרי (החליפו את התפקידים בין a ו־b ובין p ו־q). ■

נספח 2- שאלון למורים – מי מעדיף פתרונות ויזואליים

אציג כאן 3 הוכחות שונות לנוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

<u>הוכחה 1</u> (מתמטיקה שאלון 806 , גבע, דז׳לטדי, 2011 עמ׳ 233)

נמצא נוסחא לסכום האיברים $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ של סדרה הנדסית המקיימת $-1 < q < 1 \quad (q \neq 0)$.

נוסחת הסכום של סדרה הנדסית היא: $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$. נפתח סוגריים ונקבל: $S_n = \frac{a_1q^n-a_1}{q-1}$.

נפריד לשני מחוברים ונקבל: $\boldsymbol{S_n = \frac{a_1q^n}{q-1} - \frac{a_1}{q-1}}$. מכיוון ש- $-1 < q < 1 \ (q \neq 0)$ ומספר האיברים n שואף לאינסוף , אזי הביטוי q^n שואף לאפס ולכן המחובר השמאלי $\frac{a_1q^n}{q-1}$ שואף גם הוא לאפס.

כתוצאה מכך נקבל שסכום אינסוף האיברים שואף למחובר הימני, שהוא $-\frac{a_1}{q-1}$ כלומר $\frac{a_1}{1-q}$.

נקבל שסדרה הנדסית אינסופית שבה $-1 < q < 1 \ (q \neq 0)$, סכום אינסוף האיברים נתון בנוסחא: $S = \frac{a_1}{1-q}$.

<u>הוכחה 2</u>

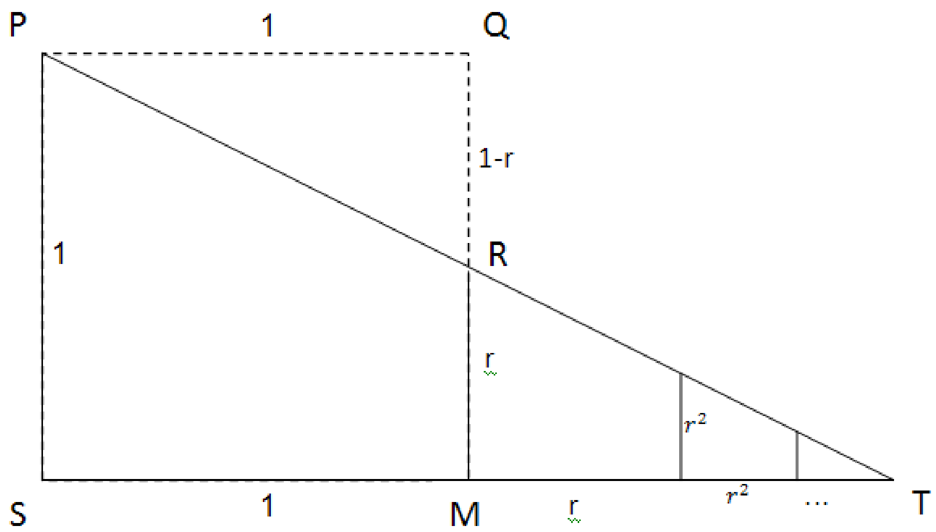
מושג הגבול קשה לתיאור ולהבנה אך באמצעות הוכחה זו נראה כיצד ניתן להמחישו בהתבסס על ייצוג ויזואלי של גבול ש סדרה הנדסית מתכנסת .

בדוגמא זו (Nelsen,1993), אציג הוכחה לנוסחת סכום סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת :

$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = ?$ כשנתון: $|r| < 1$.

ניעזר בשרטוט הנתון באיור 1 :

על צלע ריבוע היחידה PQMS מקצים קטע RM השווה ל-r. הישר PR חותך את הישר SM בנקודה T. וברור כי $RQ = 1 - r$. בבנייה זו נקבל שני משולשים דומים: $\Delta SPT \sim \Delta MRT$ וע״פ הפרופורציה נקבל: $\frac{r}{1} = \frac{MT}{MT+1}$, נחלץ את MT : $MT = \frac{r}{1-r}$ ומכאן ש- $MT > r$ ולכן ניתן להקצות עליו קטע באורך r. באופן דומה ניתן להמשיך ולהקצות קטעים באורך r^n שהולכים וקטנים ככל ש-n גדל.



איור 1

באופן זה, נוצרים משולשים דומים שמקדם הדמיון שלהם הוא r

$$\Delta PQR \approx \Delta TSP$$

$$\downarrow$$

$$\frac{ST}{PQ} = \frac{PS}{RQ}$$

$$\downarrow$$

$$1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r}$$

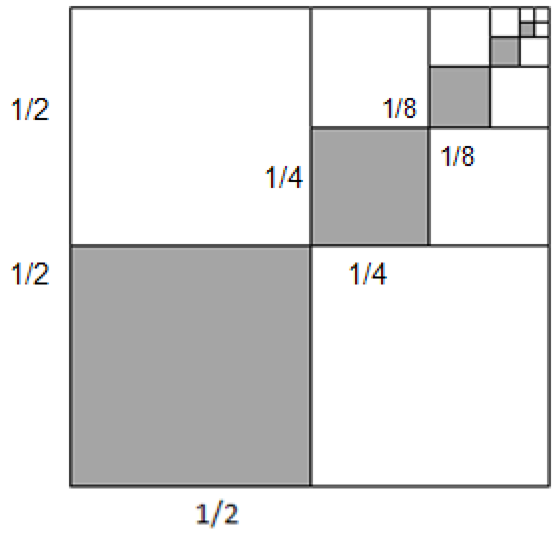
בדוגמא זו ניתן לראות איך סכום סדרת מספרים אינסופית יכול להתכנס למספר סופי .

<u>הוכחה 3</u>

סכום טור הנדסי אינסופי בעזרת חלוקה אינסופית של ריבוע נתון.

בדוגמא זו אציג דרך לחישוב סכום הסדרה האינסופית הבאה (*Nelsen*, 1993) :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots = \frac{1}{3}$$



איור 2

הוכחה זו מתבססת על התבוננות בשרטוט שבו הריבוע מחולק לשלושה חלקים חופפים, כל אחד מהם מייצג את הסכום המבוקש.

כעת ענה/עני על השאלות הבאות:

בית הספר בו אני מלמד_______________ מס׳ שנות הוראה_____________________

באלו כיתות את/אתה נוהג ללמד________________

האם את/ה מלמד ברמות 3/4/5 יח׳ ?____________________________

האם יש לך ניסיון בריכוז מקצוע?___________________________

האם יש לך ניסיון בהדרכת מורים?__________________________________

1. באיזו דרך נוהג אתה להוכיח בכיתה את נוסחת הסכום של סכום סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת? ____ ____

2. כמה מהתלמידים, לדעתך מפנימים הוכחה זו? רובם/ חלקם / אף אחד.

בהתייחס להוכחות המוצגות כאן:

3. מהי ההוכחה העדיפה עלייך באופן אישי?__________________________
4. מהי ההוכחה אותה היית בוחר להציג בכיתתך?_____________________
5. האם לדעתך רצוי להביא הוכחה אחת או יותר?_________________________
6. האם אתה נוהג להביא יותר מהוכחה אחת בכיתה?_______________________
7. לדעתך, אלו תלמידים יעדיפו הוכחה 1?_______________________________
8. לדעתך, אלו תלמידים יעדיפו הוכחה 2?_______________________________
9. לדעתך, אלו תלמידים יעדיפו הוכחה 3? _______________________________

10.האם את/ה נוהג להביא הוכחות ויזואליות לכיתה ? אם כן, באיזה מינון ביחס להוכחות אחרות?____

11.האם שימוש בהוכחות ויזואליות בכיתה קשור לרמת התלמידים בכיתה?____

12.האם שימוש בהוכחות ויזואליות בכיתה קשור לשכבת הגיל של הכיתה? (חטיבת ביניים/ חטיבה עליונה)____

13.מה לאינטואיציה מתמטית ולפתרונות ויזואליים?______________________

____

מודה על שיתוף הפעולה
איריס מקיאס.