



קרן רוטשילד קיסריה



"תוכנית רוטשילד-ויצמן למצוינות בהוראת המדעים"  
במימונה של קרן קיסריה אדמונד בנימין דה רוטשילד

# פונקציות קעורות וקמורות במיקרו כלכלה

**מגישה: מנור היירט הדס**

**מנחה: פרופ' קנאי יקר**

**תאריך הגשה: 17.5.11**

## תוכן העניינים

2	מבוא
2	תאור נושא העבודה
2	מדוע נבחר הנושא
3	רציונל
4	מטרה
4	הצגת התחום המתמטי
4	רקע היסטורי
7	מושגים במיקרו כלכלה
12	קעירות פונקצית התועלת וקמירות קווי האדישות
26	תכנון פעילות בנושא
31	רשימת מקורות

---

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

## מבוא

### תאור נושא העבודה

העבודה עוסקת בהבהרת תכונת הקעירות של פונקציה, תוך שימוש במופע שלה בתחום הכלכלה. העבודה מציגה חלק קטן מעבודתו המקיפה של פרופ' יקר קנאי בנושא, בהתבסס על המאמר שפרסם ב-1981. הבעיה הנדונה נוגעת לתנאי הקיום של פונקצית תועלת קעורה עבור יחסי העדפה קמורים.

בפתח העבודה, סקירה היסטורית של התפתחות תחום "תורת הצרכן" בכלל, ומושג ה"תועלת" בפרט, פרי עבודתם של מתמטיקאים וכלכלנים החל מהמחצית השנייה של המאה ה-19. לאחר מכן, מוצגים ומוסברים מושגים ממדע הכלכלה, כמו יחסי ההעדפה של הצרכן, עקומות אדישות ומגבלת התקציב, המהווים תשתית להבנת פונקצית התועלת של הצרכן.

פונקציה זו מהווה בעבודה את הבסיס להתעמקות המתמטית בנושא הקעירות.

במחקרו של פרופ' קנאי אודות תכונת "ההקערה" (Concavifiability) של יחסי העדפה קמורים וקיומה של פונקצית התועלת, מוצגים ומוכחים התנאים להיותם של יחסי ההעדפה הקמורים "ניתנים להקערה" במגוון דרכים, ביניהן:

1. דרך המבוססת על התנאי הקשור בערכי הפונקציה בשלוש נקודות.
  2. דרך המבוססת על התנאי הקשור לערכי הנגזרת הראשונה בשתי נקודות, או לנגזרות החלקיות, עבור פונקציות במספר משתנים.
  3. דרך המבוססת על התנאי הקשור לנגזרת השנייה בנקודה אחת, ועל מטריצת הנגזרות השניות עבור פונקציה במספר משתנים.
- בעבודה הנוכחית נעשה ניסיון להבין ולהבהיר את דרך ההוכחה המבוססת על שלוש נקודות. כפעילות נלווית לנושא זה, פותחה משימת היכרות המציגה את השילוב של עקומות האדישות עם מגבלת התקציב, ומלמדת על משמעות השיפוע.

### מדוע נבחר הנושא

ההיכרות האישית שלי עם מתמטיקה שימושית החלה בלימודי הפיסיקה בתיכון. מאחר שהמורה לפיסיקה היתה גם המורה למתמטיקה שלי, קרה לא פעם, שלמדנו את הנושאים המתמטיים הרלוונטיים בשיעורי הפיסיקה עצמם, והמושגים המתמטיים נקשרו קשר הדוק למושגים הפיסיקאליים. הדבר הוביל להקדשת מחשבה לפיתוחים המתמטיים ולהוכחות של הנוסחאות השונות בפיסיקה ולזיהוי הקשר הפיסיקאלי הטמון במשוואה. גם בלימודי התואר הראשון במתמטיקה ובפיסיקה, ההבנה של התחום המתמטי (בעיקר אנליזה) תרמה להבנת

---

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

המושגים והתהליכים הפיסיקאליים, ואלו האירו והעמיקו את ההבנה של המתמטיקה, והגבירו את החשיבות שניתנה לתחום בעיניי, בשל השימושיות שלו. כמה שנים מאוחר יותר, נחשפתי ללימודי כלכלה ונגלה לי תחום מרתק במדעי החברה שיש לו בסיס מתמטי עמוק ונרחב. גיליתי משמעויות נוספות לפונקציות קמורות וקעורות, לנקודות חיתוך בגרף, שיפוע ונגזרות. מעיון בתוכנית הלימודים של לימודי כלכלה לבגרות, התחוויר לי כי אמנם יחידות הלימוד מציגות נושאים נבחרים במיקרו-כלכלה ובמקרו-כלכלה ביניהם בעיית המחסור, הבחירה והיתור ועקומת גבול הייצור, אולם מושג התועלת לא מקבל התייחסות עמוקה בהיבט המתמטי. התלמידים שאינם לומדים כלכלה, לא שומעים על מושג התועלת כלל. מלבד הרלוונטיות שלו לחייהם, לנושא יש היבט ויזואלי חשוב. אפשר לקשר אותו לדין בפונקציות קמורות וקעורות ולמשוואת הקו הישר ולהיפרבולות בפרקי גיאומטריה אנליטית, ובעזרת תוכנות, ניתן להמחיש משטחים תלת מימדיים ועקומות במישור, לחשב ולהשוות שיפועים ולהשיג הבנה עמוקה יותר של מושגים מתמטיים בהקשר הכלכלי, ובכלל.

## רציונל

מראשית ימיה של המתמטיקה, במקביל להתפתחותה התיאורטית, שימשה המתמטיקה לפתרון בעיות בעולם הממשי כמדע העומד בפני עצמו. באופן היסטורי, למתמטיקה היתה חשיבות בעיקר במדעי הטבע וההנדסה, ולאורך השנים בלט השימוש בה לפתרון בעיות בפיזיקה. בעת החדשה, ובפרט במאה העשרים, חלה התפתחות במתמטיקה בתחומים שאינם קשורים למדעי הטבע, ונוצרו ענפי מתמטיקה המספקים ביסוס לפעילויות בעלות היבטים מעשיים במסגרת מדעי החברה (כלכלה, ניהול). אני בדעה שמורים למתמטיקה צריכים להכיר יישומים של מתמטיקה בכל התחומים העכשוויים, ולהסביר מושגים מתמטיים מתוך ההקשר היישומי שלהם. העבודה הנוכחית מאירה פן של האנליזה בעולם הכלכלה, ומאפשרת להביא דוגמאות והמחשות למושגים כמו פונקציה, יחס הפוך, שיפוע ונגזרות מתורת הצרכן ומחיי היום יום של הלומד. בנוסף, המתמטיקה היא כר להנחלת ערכים: הנושא הכלכלי מקנה הזדמנות לפתח שיח על תרבות הצריכה של בני הנוער, כשהדגש הוא על חומריות וקניית מוצרים שהם מעבר למוצרים ההכרחיים, חומריות המתבטאת ברדיפה אחר מותגים ודוחקת שיקולים כגון: היכולת הכלכלית של הרוכש, תהליך הייצור של המוצר, ומידת הנחיצות של המוצר. נושאים כמו יחס ההעדפה, תועלת ומגבלת התקציב מעודדים חשיבה רציונאלית שהיא בסיס לחשיבה ביקורתית המביאה בחשבון מגבלות וויתורים בדרך להשגת יעדים. מלבד הרחבת אופקים של הלומד, יש בעיסוק בנושאים אלו רלוונטיות רבה לחייו, הן ברמה האישית-משפחתית כצרכן, והן כנושאים העולים תדיר בשיח הציבורי.

---

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

## מטרה

המטרה הראשונה הינה לחשוף מורים ותלמידים לרעיונות מרכזיים בכלכלה החשובים לכל אדם, ולהיבט המתמטי שלהם. בנוסף ניתן לעניין גם תלמידים עם אוריינטציה של מדעי החברה, בתפקידה של המתמטיקה בתיאור הקשרים בין מושגי היסוד בתורת הצרכן. עבור תלמידים רבים, המושגים קמירות וקמירות מתקשרים רק לפרבולה "מחייכת" או "בוכה" ולתנאים עבור נגזרת ראשונה ושנייה. בזכות הדוגמאות מעולם הכלכלה וההמחשות היוזאליות הן בשני מימדים והן בשלושה מימדים, ניתן להעמיק את ההבנה המתמטית של הן של מושג השיפוע, והן של הפונקציות הקמורות והקעורות גם כשמדובר בפונקציות במספר משתנים.

## הצגת התחום המתמטי

### רקע היסטורי

מסוף המאה ה-19 הפכה הכלכלה לתחום מוגדר במדעי החברה, העוסק בהקצאת האמצעים החומריים והאנושיים בין מטרות מתחרות, לצורך קיומו ורווחתו של האדם. תחומי החקר שלה נוגעים להליכי ייצור, הפצה, מסחר וצריכה של מוצרים ושירותים. התיאוריה הכלכלית רואה בצרכן (consumer), יחידה בעלת מערכת טעמים והעדפות הפועלת במגבלות הכנסתה. בידי הצרכן מידע מלא על הכנסתו הכספית והמוצרים והשירותים שהוא מעוניין לצרוך, ויש לו יחס כלשהו אליהם. תפקידו להוציא את הכנסתו הכספית באופן שימקסם את רווחתו. הצרכן מפיק סיפוק או הנאה מכל מוצר או שירות שהוא צורך, וכדי להשיג הנאה מירבית מרמת הכנסה נתונה, עליו להיות מסוגל לדרג סלים שונים של מוצרים. נציין ב  $x_i$  את כמות המצרך ה  $i$  של הצרכן, כאשר  $x_i$  הוא מספר ממשי אי שלילי. הווקטור ה-  $x$  מימדי  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  מציין את סל המצרכים בו הרכיב  $x_i$  הוא כמות המצרך ה  $i$  בסל הנדון. אוסף הווקטורים מטיפוס זה נקרא **מרחב המצרכים**, שהוא אוסף כל תיאורי המצב של צרכן שניתן להעלות על הדעת, ובמרחב זה, ניתן להגדיר פעולות של חיבור סלי מצרכים וכפל במספר אי-שלילי, באופן זהה למרחב האוקלידי ה  $n$  מימדי. הרביע האי שלילי של המרחב האוקלידי מייצג את מרחב המצרכים. הגישה המקורית של הכלכלנים במחצית המאה ה-19 היתה, שהתנהגותו של הצרכן מבוססת על התפיסה של הנאה סובייקטיבית המופקת מכל מוצר שהוא צורך, וההנאה היא פונקציה של הכמות הנצרכת ממנו. מקובל לכנותה פונקצית תועלת (Utility) ולסמנה  $U(x)$ . הכלכלן הגרמני הרמן גוסן (Hermann Gossen) ולאון וואלראס (Léon Walras) בשווייץ, התייחסו לתועלת בתחילה כאל תכונה מדידה של כל מוצר, באופן שתועלת ממוצר אחד

---

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

גדולה מזו של השני במספר מוגדר של יחידות ואינה מושפעת מצריכה של המוצר האחר. סך התועלת תלוי בכמויות הנצרכות מכל מוצר, באופן שככל שגדל השימוש כך גדלה התועלת, וסך התועלת הוא סכום התועלות הנפרדות, כלומר התועלת היא תכונה אדיטיבית:

$$U(x_1, x_2) = u(x_1) + u(x_2)$$

בהמשך הניחו שבדרך כלל היא לא אדיטיבית, ובמקום לבנות פונקציה תועלת לכל מוצר, יש לבנות פונקציה תועלת המקשרת את רמתה לשיעור הצריכה של כל המוצרים בו זמנית. גוסן פיתח בשנת 1854 הבחנה בין תועלת כוללת לתועלת שולית: התועלת השולית ממוצר נתון היא התוספת לתועלת הכוללת, הנובעת מצריכת היחידה האחרונה מאותו מוצר. תורת התועלת השולית, שלה תרם במקביל (1871) הכלכלן האנגלי וויליאם ג'ונס (William Jevons), הייתה מנוגדת לתורת הכלכלה הקלאסית בכך שהראתה שמחיר השוק אינו קשור בהכרח לעלויות הייצור אלא דווקא לביקוש מצד הצרכן. ג'ונס היה הכלכלן הבריטי הראשון שהשתמש בשיטות מתמטיות וכתב: "ברור שתורת הכלכלה, אם ברצוננו שתהיה מדע בכלל, חייבת להיות מדע מתמטי".

נציין כי בשפה מתמטית יותר, ברור שהתועלת השולית היא הנגזרת הראשונה של התועלת לפי כמות המוצר.

תורת התועלת נוסחה במלואה ע"י הכלכלן האנגלי אלפרד מרשל (Alfred Marshall) בספרו "The Principles of Economics" (1890). מרשל מייצג את המהפכה שהביאה לעולם את הזרם הניאו-קלאסי בכלכלה, הזרם שהציע מבט חדש על האופן בו נקבעים מחירים, ונוצרים התקשרויות בין אנשים בשוק: על פי התועלת השולית אותה ניתן להשיג, או שעליה יש לוותר, במסגרת האמצעים העומדים לרשותו של הצרכן. אדם יחליט לקנות כריך שני בהתאם למידת השובע שלו לאחר הכריך הראשון, וחברה תעסיק פועל נוסף בהתאם לתוספת הרווח המצופה שיביא לה.

השלב הנוסף נעשה על ידי הכלכלן האיטלקי וילפרדו פארטו (Vilfredo Pareto) בשנת 1906, שהדגיש שהמאפיין העיקרי של תורת התועלת הוא שניתן להחליף בצריכה מוצר אחד בשני, באופן שישאיר את רמת התועלת ללא שינוי. קודמיו הניחו שתועלת היא מדידה מבחינה קרדינאלית ותרומתו היתה להראות שדרושה רק מדידה אורדינאלית (סידורית) בין סלי הצריכה.

בין הכלכלנים של המאה ה-20 שתרמו בתחום תורת הצרכן, ניתן לציין את תרומתו של פול אנתוני סמואלסון (Paul Anthony Samuelson): כלכלן אמריקאי יהודי זוכה פרס נובל לכלכלה (1970), שספרו "Economics: An Introductory Analysis" שפורסם לראשונה ב-1948, הוא ספר הכלכלה הנמכר ביותר בכל הזמנים. בין היתר, הוא פיתח שיטה להגדרת

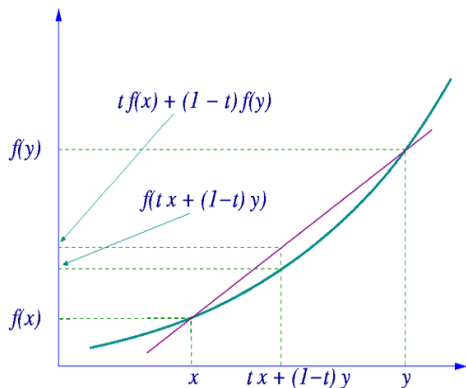
---

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

פונקציות תועלת מתוך חקר התנהגות הצרכן. הוא והבאים אחריו, הדגישו מאוד את האופי האורדינאלי של סדר העדיפויות והמעטו בערכה של פונקצית התועלת. ג'ון פון נוימן (John von Neumann) ואוסקר מורגנשטרן (Oskar Morgenstern) בשנות ה-40, החזירו במידה מסוימת עטרה ליושנה לפונקצית התועלת, ע"י התייחסות לשאלות של הגרלות בתורת המשחקים.

מושג הקמירות מופיע רבות במתמטיקה ונחקר באופן יסודי ע"י מתמטיקאי ופיסיקאי גרמני ממוצא יהודי, הרמן מינקובסקי (Hermann Minkowski) בסוף המאה ה-19.

נזכיר כי קבוצת נקודות במרחב וקטורי היא קבוצה קמורה (convex set) אם לכל שתי נקודות שבתוכה, גם הישר המחבר את שתי הנקודות נמצא כולו בתוכה.



פונקציה קמורה היא פונקציה כך שקבוצת הנקודות שנמצאות מעל הגרף שלה - היא קבוצה קמורה, כלומר הגרף לא עולה על מיתרי הפונקציה. פונקציה היא קמורה אם ורק אם לכל שתי נקודות  $x, y$  בתחום, ולכל  $0 \leq t \leq 1$ , ערך הפונקציה בנקודה שביניהן, בהשוואה לגובה המיתר בנקודה זו מקיים את:

$$f(t \cdot x + (1 - t) \cdot y) \leq t \cdot f(x) + (1 - t) \cdot f(y)$$

קמירות במובן החזק תתקיים כאשר אי-השוויון יהיה אי שוויון חזק לכל  $0 < t < 1$ . באותו אופן, ניתן להגדיר פונקציה קעורה (concave function): קבוצת הנקודות מתחת לגרף היא קבוצה קמורה, והגרף נמצא מעל המיתרים שלו. כלומר, פונקציה היא קעורה אם ורק אם לכל שתי נקודות  $x, y$  בתחום, ולכל  $0 \leq t \leq 1$ , מתקיים:

$$f(t \cdot x + (1 - t) \cdot y) \geq t \cdot f(x) + (1 - t) \cdot f(y)$$

במרחב  $n$  מימדי, את הנקודות שעל הישר המחבר בין שתי הנקודות  $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ו  $B(y_1, y_2, \dots, y_n)$  ניתן לבטא באמצעות ממוצע משוקלל של וקטורים: כל מספר  $t$  בקטע  $[0, 1]$ , הממוצע המשוקלל -  $t \cdot X + (1-t) \cdot Y = (t \cdot x_1 + (1-t) \cdot y_1, t \cdot x_2 + (1-t) \cdot y_2, \dots, t \cdot x_n + (1-t) \cdot y_n)$ . מייצג נקודה על הקטע בין  $B$  ו  $A$ . כאשר  $t = 1$  נקבל את נקודה  $A$ , וכאשר  $t = 0$  נקבל את נקודה  $B$ .

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

ברור כי קווי הגובה של פונקציה קעורה הם קמורים; במילים אחרות, הגרף של פונקציה קעורה מתאר הר קמור. ליתר דיוק: אם  $u(x), u(y) \geq u(z)$  אזי לכל  $0 \leq t \leq 1$  מתקיים  $u(tx+(1-t)y) \geq u(z)$ .

יש לציין כי המתמטיקאי האיטלקי ברונו דה-פינטי (Bruno de Finetti, 1906-1985) גילה כי ההפך לא נכון (1949): ייתכן בהחלט שקווי הגובה יהיו קמורים אולם אין בנמצא פונקציה קעורה שאלה הם קווי הגובה שלה, דהיינו לא כל סדר עדיפויות ניתן להקערה. גם עבודותיו וכתבי הרצאותיו של המתמטיקאי וורנר פנשל (Werner Fenchel, 1905-1988) בנושא הקמירות היו בעלי השפעה רבה על התחום. הוא דן בתוצאות שיש להן יישומים בתורת המשחקים ובבעיות תכנות. שניהם עסקו בסוגיית קיום פונקציה קעורה ליחסי העדפה קמורים והסוגיה הוגדרה כקיום התכונה "שהם ניתנים להקערה" (Concavifiability).

### מושגים במיקרו כלכלה

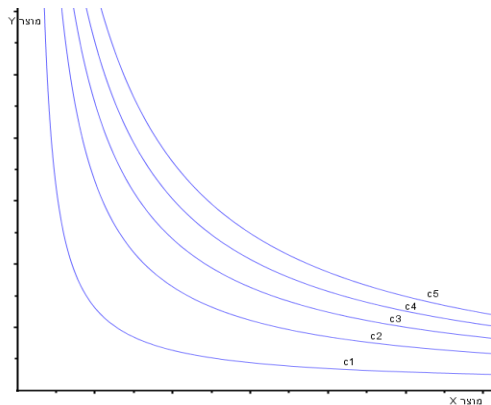
הרעיון המקורי של תועלת, שניתנת למדידה והמתאימה לצירופים מסוימים של מצרכים, מבטא את הרעיון שעל הצרכן להיות מסוגל להשוות סלי מצרכים אלטרנטיביים ולקבוע את סדר ההעדפה שלו ביניהם, בהתאם לתועלת שהוא מפיק מהם. למרות שיש מספר אינסופי של מוצרים, נדון במערכת ההעדפות של הצרכן בהנחה שמרחב המצרכים מכיל רק שני מוצרים. למשל: מזון וביגוד, הצגות וסרטים, לחם ושעשועים. נגדיר יחס העדפה (preference relation) ואת האקסיומות שהוא נדרש לקיים:

- יחס זה יוצר סדר העדפה בין כל סלי המצרכים האפשריים.
- היחס שסימונו  $>$  מסמן "עדיף מ", היחס שסימונו  $\sim$  מסמן "שקול ל/אדיש", והסימן  $\succsim$  מסמן את הקביעה "עדיף מ- או שקול ל-". אם לכל שני סלים  $A, B$  שונים, מתקיים או  $A > B$  או  $B > A$  או  $A \sim B$  אזי נאמר שיחס ההעדפה מקיים את אקסיומת השלמות (completeness).
- יחס ההעדפה מקיים את אקסיומת הרפלקסיביות, כלומר לכל סל  $A$ , הסל עדיף מ או שקול לעצמו ( $A \succsim A$ ).
- כאשר יש שלושה סלים ומתקיים  $B \succsim A$  ו  $C \succsim B$ , אזי מתקיים  $C \succsim A$  (אקסיומת הטרנזיטיביות). ובאופן דומה, אם  $A \sim C$  ו  $B \sim C$ , אזי  $A \sim B$ .
- אם הכמות של כל מצרך בסל  $A$  גדולה מ או שווה לכמות של אותו מצרך בסל  $B$ , אז הסל  $A$  עדיף מ או שקול לסל  $B$  ( $A \geq B \Rightarrow A \succsim B$ ). סל גדול תמיד עדיף על סל יותר קטן ( $A > B \Rightarrow A \succ B$ ). סל אחד גדול מן השני, אם הוא מכיל אותה כמות מכל מצרך כמו בסל השני, ולפחות יחידה אחת יותר, ממצרך אחד. (זוהי אקסיומת המונוטוניות החזקה).

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

לדוגמה: ניתן לראות שסל B בהשוואה לסל C, מכיל כמות זהה של מוצר X, אך בעל כמות גדולה יותר של מוצר Y, ולכן הצרכן יעדיף את סל B על סל C, ובאותו אופן את סל A על סל C, אך בדרך זו לא ניתן להשוות בין הסלים B ו A.

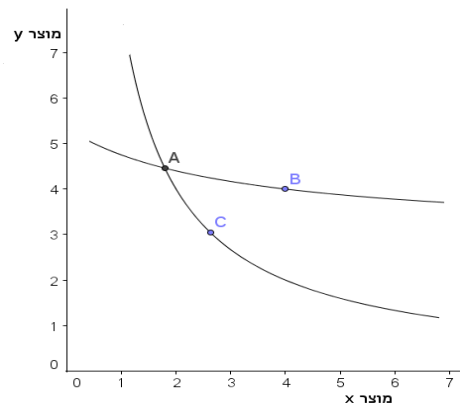
- יחס העדפה מקיים את אקסיומת הקמירות (convexity) אם לכל שני סלי מצרכים שקולים A ו B, כל ממוצע משוקלל שלהם, עדיף מ או שקול ל A ול B. כלומר לכל  $0 \leq t \leq 1$ :



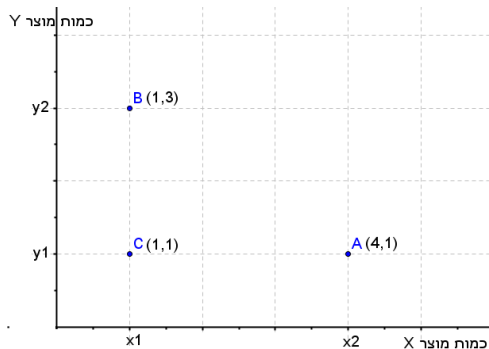
כאשר יחס ההעדפה מקיים את אקסיומת הרפלקסיביות, השלמות והטרנזיטיביות, מתקיים סדר בין כל הסלים במרחב המצרכים

ונוצרות קבוצות אדישות.

עקומת האדישות (indifference curve) היא המקום הגיאומטרי של כל הסלים האפשריים הרצויים לצרכן באותה מידה כמו הסל שבידו (כל אחד מהם מספק לצרכן אותה רמת תועלת) והוא אדיש לסלים שונים לאורכה של עקומת האדישות.



כל עקומה מתוארת על ידי המשוואה  $U(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$



כאשר c קבוע.

מפת אדישות (indifference map) נוצרת כאשר מאפשרים ל-c לקבל כל ערך אפשרי. מפה כזו מתארת את מערכת הטעמים של הצרכן, ומדרגת סלים לפי סדר העדפתו. עקומות אדישות עוברות בכל נקודה ונקודה

במרחב המוצרים. אין חשיבות למספרי התועלות, הקשורים בכל עקומת אדישות, חשובה רק צורת מפת האדישות. הצרכן מתייחס לסלים הנותנים אותה רמת תועלת כשקולים, וככל שהעקומה גבוהה יותר (יותר ימינה) רמת התועלת גבוהה יותר ולכן הסלים עליה עדיפים יותר.

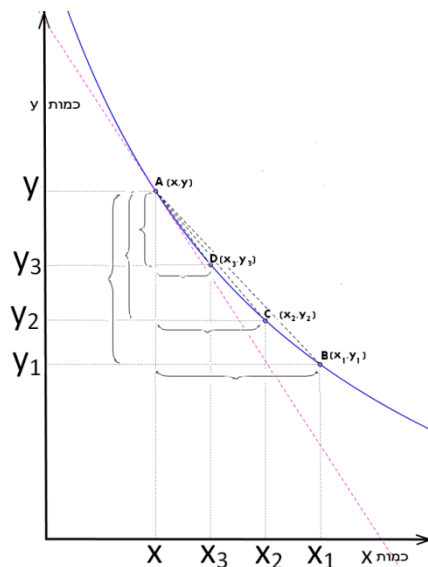
כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

שתי עקומות אדישות אינן יכולות להיחתך: מכיוון שאם ישנה נקודת חיתוך, משתמע ש  $A \sim B$  ו  $A \sim C$ . מכאן ש  $B \sim C$  שקולים זה לזה וחייבים להימצא על עקומת אדישות אחת ולא על עקומות נפרדות.

### שיעור התחלופה השולי

עקומות אדישות הן בעלות שיפוע שלילי המשקף את ההנחה שניתן להחליף מוצר אחד באחר, באופן שמשאיר את הצרכן באותה רמת תועלת. כדי שצרכן יסכים לוותר על כמות ממצרך אחד, יש צורך לפצותו בכמות מסוימת מהמצרך האחר. יש חשיבות לידיעת השיעור שבו רוצה הצרכן להמיר מצרך אחד באחר. הכמות המרבית של מצרך 2 שעליה מוכן הצרכן לוותר בתמורה לכל יחידה של מצרך 1 שיקבל, נקראת מחיר סף של מצרך 1 במונחי מצרך 2. כמות זו תעביר אותו לסל מצרכים אחר על אותה עקומת אדישות (לא תגרע ולא תשפר את רווחתו), והיא שווה לערך המוחלט של שיפוע המיתר המחבר בין שתי הנקודות. שיפוע המשיק לעקומת האדישות בנקודת הצריכה נקרא **שיעור התחלופה השולי של x עבור y** ( $MRS_{xy}$  – Marginal Rate of Substitution), כאשר x הוא המצרך שכמותו נמדדת בציר האופקי, ו y נמדד בציר האנכי.

**שיעור התחלופה השולי** מודד את מספר היחידות הממוצע של מצרך עליו מוכן הצרכן



לוותר, כדי להשיג יחידה נוספת של מצרך אחר. שיעור זה, הוא הגבול של מחירי הסף של מצרך x במונחי מצרך y, כאשר הכמות של מצרך x שואפת לאפס, לגבי סל מצרכים נתון. באיור הלה, סדרת הסלים  $B(x_1, y_1)$ ,  $C(x_2, y_2)$  ו  $D(x_3, y_3)$  מתכנסת לסל  $A(x, y)$ . סדרת היקף עסקות החליפין  $(x_i - x)$  שואפת לאפס, וסדרת שיפועי המיתרים  $\frac{y - y_i}{x_i - x}$  המחברים את הסל  $(x_i, y_i)$  עם הסל  $A(x, y)$  שואפת לשיפוע המשיק לעקומת האדישות בנקודה A.

שיעור התחלופה השולי אינו גודל קבוע, אלא משתנה לאורכה של עקומת האדישות.

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

כאשר תוספת כמות ממצרך כלשהו מעלה את הסל החדש במדרג ההעדפות של הצרכן, המצרך הוא אובייקט רצוי והצרכן אינו מגיע לרווייה בצריכתו. אם בנוסף, יחס ההעדפה מקיים את אקסיומת הקמירות, העקומות המתקבלות הן קמורות (קעורות מלמעלה). שיפוען בערכו המוחלט הולך וקטן עם תנועה במורד העקומה. שיעור התחלופה השולי יורד ככל שיותר  $x$  מוחלף עבור  $y$  לאורך עקומת האדישות. תכונה זו נקראת **חוק התחלופה השולית הפוחתת**. המשמעות היא, שככל שיצרוך הצרכן כמות קטנה ממצרך אחד, הפיצוי מהמצרך השני ילך ויגדל כדי שיסכים לוותר על כמות מהמצרך הראשון, שכמותו קטנה יחסית. בכיוון השני, ערך התוספת של כמות ממצרך אחד הולך ופוחת ככל שהכמות שבידו ממצרך זה, גדולה יותר (הערך נמדד במונחי כמות שהוא מוותר מהמצרך השני).

כך למשל באיור הבא:

במעבר בין הנקודות A ל B הצרכן נדרש לוותר על הכמות  $y_1 - y_2$  על מנת לקבל את הכמות  $x_2 - x_1$ , לכן שיעור התחלופה השולי בין מוצר  $x$  למוצר  $y$  בין הנקודות A ו B הוא היחס

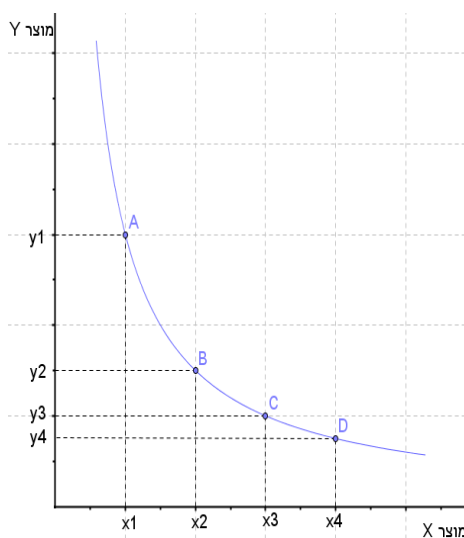
$$\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$$

שיעור התחלופה השולי בין מוצר  $x$  למוצר  $y$  בין הנקודות B ו C הוא היחס  $\frac{y_2 - y_3}{x_3 - x_2}$ , ואילו בין הנקודות C ו D הוא היחס  $\frac{y_3 - y_4}{x_4 - x_3}$ .

מאחר ובדוגמה, הפרשים בכמויות מוצר  $x$  זהים:  $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$  קל לראות שהיחס הולך וקטן.

### מגבלת התקציב

הצרכן בוחר מכל הסלים את הסל העומד במקום הגבוה ביותר מבחינת העדפותיו, מתוך



האפשרויות העומדות בפניו. ההנחה היסודית היא, שהצרכן מקצה את סכום הכסף המוגבל שבידו בין המוצרים והשירותים הקיימים, בדרך שתביא לו רווחה מרבית.

נניח שישנם שני מוצרים שמחיריהם  $p_x$  ו  $p_y$  והם נקנים בכמויות  $x$  ו  $y$  בהתאמה. הסכום המוצא על המוצרים לא יכול לעלות על ההכנסה I (Income)

$$x \cdot p_x + y \cdot p_y \leq I$$

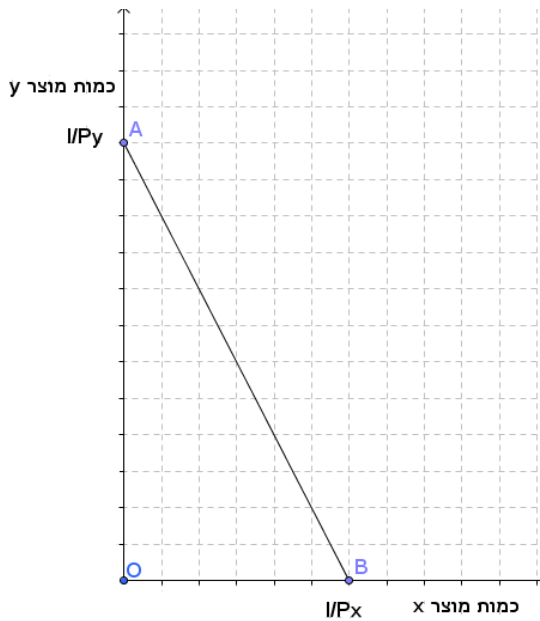
השוויון מתאר משוואת קו ישר במרחב המוצרים המכיל שני משתנים ונקרא

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

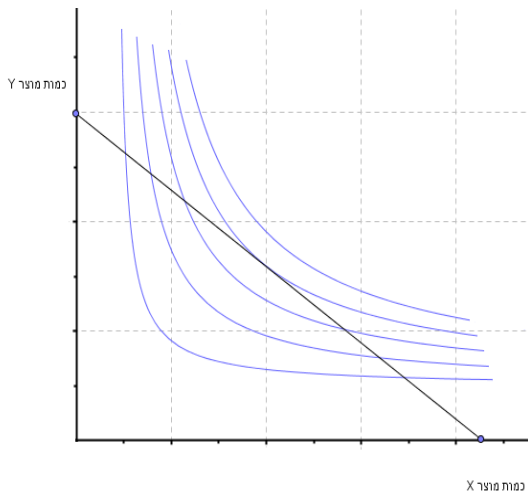
**קו התקציב:**  $y = -\frac{p_x}{p_y}x + \frac{1}{p_y}I$

נקודת החיתוך עם ציר y היא  $\frac{1}{p_y} \cdot I$ , המראה את הכמות של y שניתן לקנות אם לא קונים אף יחידה של x.  
 נקודת החיתוך עם ציר x היא  $\frac{1}{p_x} \cdot I$ , המראה את הכמות של x שניתן לקנות אם לא קונים אף יחידה של y.  
 שיפוע הקו הינו שלילי ונתון על ידי  

$$-\frac{OA}{OB} = -\frac{\frac{1}{p_y}I}{\frac{1}{p_x}I} = -\frac{p_x}{p_y}$$
 ובערכו המוחלט הוא יחס המחירים.

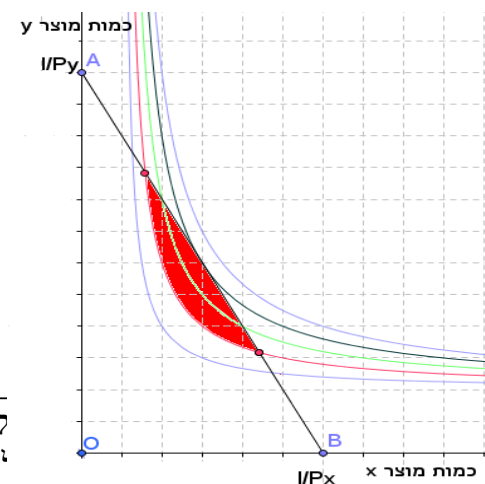


התיאור הגרפי של אי השוויון כולל גם את קו התקציב וגם את כל הסלים שהוצאה עבורם קטנה מ I, והוא השטח התחום בין קו התקציב למערכת הצירים (המשולש OAB), ונקרא **מרחב התקציב**. בחירתו של הצרכן מוגבלת לסלים הנמצאים במרחב התקציב.



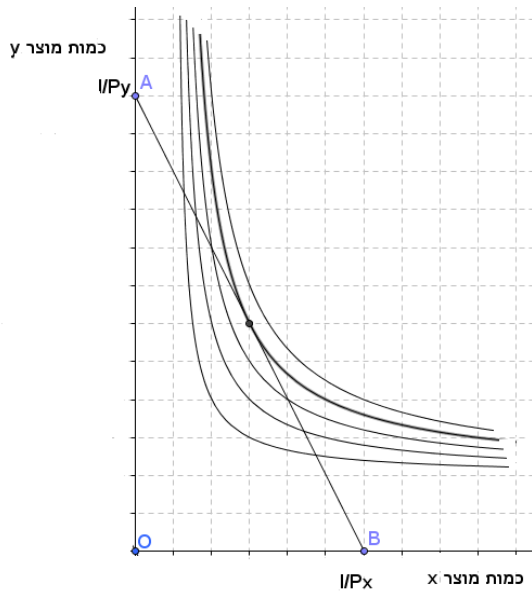
נשלב את קו התקציב עם מפת האדישות של הצרכן ונראה שהקו חותך חלק מעקומות האדישות בשתי נקודות: במקרים הללו יש שטח בין קו התקציב לעקומת האדישות, שהוא בתוך מרחב התקציב, ומכיל סלים עדיפים יותר מנקודות החיתוך, ולכן לצרכן כדאי להתקדם לעקומות אדישות גבוהות יותר:

מצד שני, חלק מעקומות האדישות נמצאות מחוץ למרחב התקציב, ואין להן חיתוך כלל עם קו התקציב, ולכן הצרכן לא יכול לטפס אליהן. הנקודה האופטימאלית תהיה על העקומה הגבוהה ביותר שעדיין נוגעת בקו התקציב (עומדת במגבלות התקציב).



לאחר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, יהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

ישנה עקומת אדישות אחת שקו התקציב משיק לה. בנקודת ההשקה, וקטור המחירים  $(P_x, P_y)$  ניצב הן לקו התקציב והן לעקומת האדישות. באזור נקודת ההשקה, כל סל טוב יותר לא אפשרי, וכל סל אפשרי, פחות טוב ממנה.



בנקודת שיווי משקל זו, שיפוע עקומת האדישות שהוא שיעור התחלופה השולי של  $x$  עבור  $y$ , שווה לשיפוע קו התקציב, דהיינו ליחס המחירים  $p_x / p_y$  בסימן מינוס. שיעור התחלופה השולי מראה את השיעור שבו הצרכן מוכן להחליף את מוצר  $x$  עבור  $y$ , ויחס המחירים מראה את השיעור בו הצרכן יכול להחליף את  $x$  עבור  $y$ . כל עוד היחסים אינם שווים ניתן לעשות חליפין כלשהו, לשנות את צירופי  $x$  ו  $y$ , כדי להשיג רמת רווחה גבוהה יותר.

### קעירות פונקצית התועלת וקמירות קווי האדישות

מפת האדישות מראה באופן חלקי את יחס ההעדפה של הצרכן ואת הסדר בין הסלים. כיוון ההעדפה הוגדר כך שהעקומות הגבוהות יותר, עדיפות יותר, וראינו שאפשר לפרש כל עקומה כשוות "גובה" כשהגובה הוא ערך מספרי המייצג את דרגת עדיפותו בהשוואה לעקומות אחרות, כמו במפה טופוגראפית.

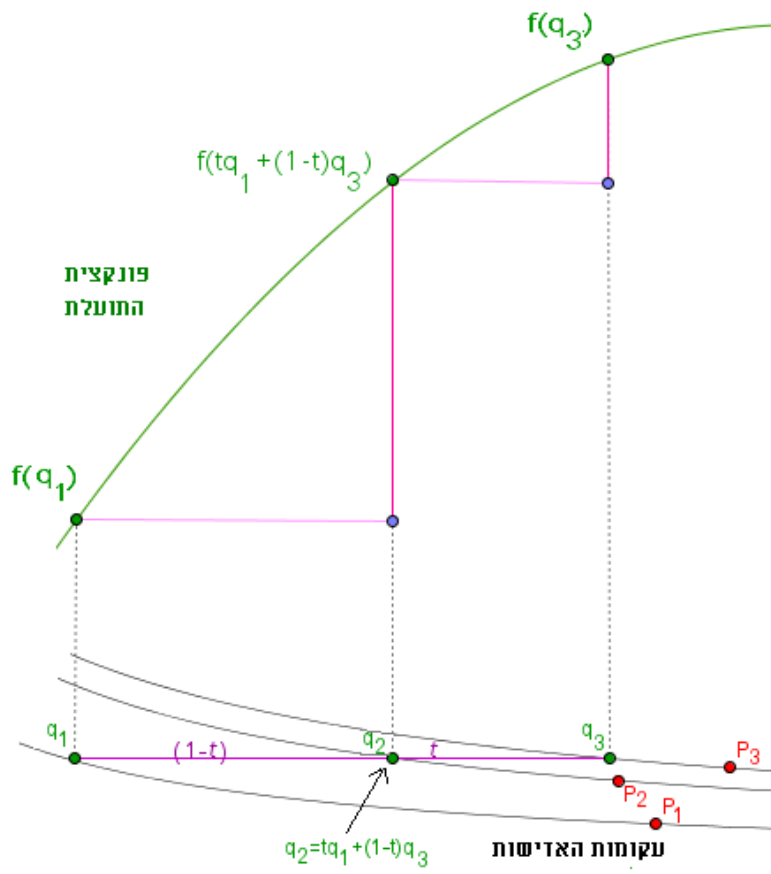
תהליך המספור שקול לתהליך בניית הפונקציה המייחסת לכל אחד מקבוצת סלי המצרכים

$$f(x) \geq f(y) \Leftrightarrow x \succcurlyeq y \quad \text{כל שני סלי מצרכים } x \text{ ו } y$$

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

כלומר פונקציה המתאימה לסל  $x$  מספר ממשי גדול מ- או שווה למספר ממשי שהיא מתאימה לסל  $y$  אם ורק אם הסל  $x$  עדיף מ- או שקול לסל  $y$ .  
 פונקציה כזו נקראת **פונקציית התועלת (Utility function)**, ולכן נוכל לקרוא לעקומת האדישות עקומה שוות תועלת.

אנו מעוניינים לדעת את התנאים לקיומה של פונקציית תועלת קעורה המייצגת את יחס ההעדפה  $\succsim$ , שידועה כסוגיית ה **Concavifiability** - סוגיית התכונה "ניתנת להקערה":  
**בהינתן תת-קבוצה  $K$  קמורה של  $R^m$ , ויחס העדפה  $\succsim$  קמור רציף ושלם ב  $K$ , האם קיימת פונקציה  $f$  קעורה ב  $K$  המייצגת את יחס ההעדפה  $\succsim$ .**  
 לשם כך, נתייחס לשלוש נקודות על עקומות אדישות עוקבות  $p_1 < p_2 < p_3$ , שלא דווקא נמצאות על קו ישר, כמו באיור:



נוכל תמיד לבחור נקודות שקולות כך ש  $q_1 \sim p_1$  ו  $q_3 \sim p_3$  ויהיה קיים  $0 < t < 1$  כך ש  $q_2 \sim p_2$  שיקיים  $q_2 = t \cdot q_1 + (1 - t) \cdot q_3$

התנאי לפונקציה קעורה מעל הנקודות  $q_1$  ו  $q_3$  הוא:

$$f(t \cdot q_1 + (1 - t) \cdot q_3) \geq t \cdot f(q_1) + (1 - t) \cdot f(q_3)$$

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

$$t \cdot f(t \cdot q_1 + (1-t) \cdot q_3) + (1-t) \cdot f(t \cdot q_1 + (1-t) \cdot q_3) \\ \geq t \cdot f(q_1) + (1-t) \cdot f(q_3)$$

$$t \cdot [f(t \cdot q_1 + (1-t) \cdot q_3) - f(q_1)] \geq (1-t) \cdot [f(q_3) - f(t \cdot q_1 + (1-t) \cdot q_3)]$$

כלומר התנאי גם ניתן להצגה כ:

$$\frac{f(t \cdot q_1 + (1-t) \cdot q_3) - f(q_1)}{f(q_3) - f(t \cdot q_1 + (1-t) \cdot q_3)} = \frac{f(q_2) - f(q_1)}{f(q_3) - f(q_2)} \geq \frac{(1-t)}{t} = \frac{|q_2 - q_1|}{|q_3 - q_2|}$$

את התנאי הזה אפשר להחיל גם על שלוש נקודות כלשהן (לאו דווקא על ישר אחד)

שנמצאות על עקומות אדישות עוקבות  $p_1 < p_2 < p_3$ , ולהגדיר קבוע אופייני לכל שלשה:

$$\alpha(p_1, p_2, p_3) = \sup_{q_i \sim p_i} \frac{|q_2 - q_1|}{|q_3 - q_2|}$$

תנאי הכרחי אם כן, לקעירותה של פונקצית התועלת המייצגת את יחס ההעדפה  $\succsim$ , יהיה

שעבור כל שלוש נקודות  $p_1, p_2, p_3$  המקיימות  $p_1 < p_2 < p_3$ , יתקיים

$$\frac{f(p_2) - f(p_1)}{f(p_3) - f(p_2)} \geq \alpha(p_1, p_2, p_3), \quad \alpha(p_1, p_2, p_3) < \infty$$

או בדרך אחרת, המציגה את התנאי על הנקודה האמצעית מבין השלוש:

$$f(p_2) \geq \frac{f(p_1)}{1 + \alpha} + \frac{\alpha f(p_3)}{1 + \alpha}$$

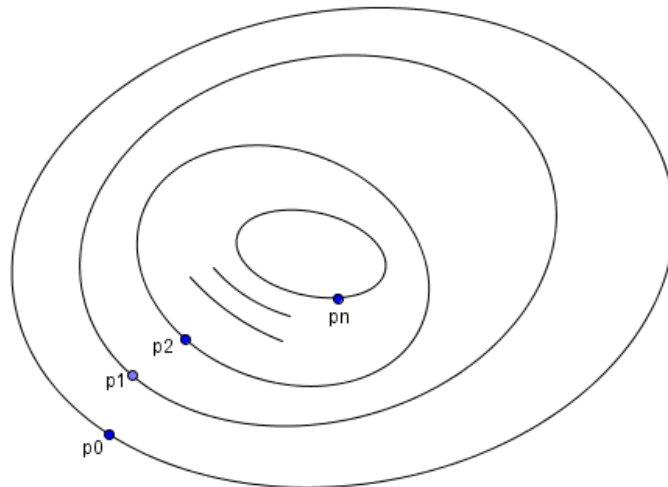
כשנעבור לסדרה סופית של נקודות נוכל לכתוב סדרה של תנאים, עבור כל שלוש עקומות

עוקבות:

$$f(p_1) - f(p_0) \geq \alpha_1 [f(p_2) - f(p_1)]$$

$$f(p_2) - f(p_1) \geq \alpha_2 [f(p_3) - f(p_2)]$$

$$f(p_{k-1}) - f(p_{k-2}) \geq \alpha_{k-1} [f(p_k) - f(p_{k-1})]$$



כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

אם נציב את אגף שמאל של כל אי שוויון באגף ימין של קודמו נקבל

$$f(p_1) - f(p_0) \geq \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{k-1} [f(p_k) - f(p_{k-1})]$$

$$f(p_2) - f(p_1) \geq \alpha_2 \cdots \alpha_{k-1} [f(p_k) - f(p_{k-1})]$$

$$\cdot$$

$$f(p_{k-1}) - f(p_{k-2}) \geq \alpha_{k-1} [f(p_k) - f(p_{k-1})]$$

$$f(p_k) - f(p_{k-1}) \geq [f(p_k) - f(p_{k-1})]$$

אם נוסיף את

ונחבר את  $k$  אי השוויונים,

$$f(p_k) - f(p_0) \geq (1 + \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}\alpha_{k-1} + \cdots + \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{k-1}) [f(p_k) - f(p_{k-1})]$$

נוכל להציג את אי השוויון המתקיים עבור הנקודה האמצעית:

$$f(p_{k-1}) \geq \frac{f(p_0)}{(1 + \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}\alpha_{k-1} + \cdots + \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{k-1})} + \frac{(\alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}\alpha_{k-1} + \cdots + \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{k-1}) f(p_k)}{(1 + \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}\alpha_{k-1} + \cdots + \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{k-1})}$$

ניתן לראות שעבור  $k=2$  יש התלכדות בין תנאי זה לתנאי שמצאנו עבור שלוש נקודות.

ניתן לנסח את המשפט למקרה הכללי:

בהינתן סדרת נקודות המקיימות  $p_0 < p_1 < \cdots < p_n$  ו  $f$  פונקצית תועלת קעורה עבור יחס

$$\alpha_j = \alpha(p_{j-1}, p_j, p_{j+1}) \quad 1 \leq j \leq n-1$$

אזי מתקיים

$$f(p_j) \geq \frac{(1 + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_{j+1} \alpha_j \cdots \alpha_{n-1}) f(p_0)}{(1 + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_{j+1} \alpha_j \cdots \alpha_{n-1} + \alpha_j \cdots \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1})} + \frac{(\alpha_j \cdots \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}) f(p_n)}{(1 + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_{j+1} \alpha_j \cdots \alpha_{n-1} + \alpha_j \cdots \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1})}$$

לכל  $1 \leq j \leq n-1$

וזהו צירוף קמור של  $f(p_0)$  ו  $f(p_n)$  כשהמשקלים של  $f(p_0)$  הולכים ויורדים, והמשקלים של

$f(p_n)$  הולכים ועולים.

ניתן להשתמש באגף ימין כדי לקרב את יחס ההעדפה הקמור ע"י פונקציה קעורה:

אם נגדיר את  $f(p_0) = 0$  ו  $f(p_n) = 1$  נוכל להגדיר פונקצית תועלת על קבוצת איחוד קווי

האדישות  $A = \cup_{i=0}^n \{p \in K : p \sim p_i\}$  באופן הבא:

$$0 \leq j \leq n, \quad p \sim p_j \quad \text{אם} \quad u(p) = \frac{\alpha_j \cdots \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}}{1 + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}}$$

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

פונקציה זו קעורה בתחום הגדרתה אם עבור  $0 \leq t \leq 1, a, b \in A$  מתקיים

$$u(t \cdot a + (1-t) \cdot b) \geq t \cdot u(a) + (1-t) \cdot u(b)$$

למעשה, אם  $p \succsim q$  עבור  $p, q \in A$  אזי  $u(p) \geq u(q)$ .

אם  $a \sim b$  אזי נובע מהקעירות של היחס  $\succsim$

ש  $a, b \succsim ta + (1-t)b$  ולכן התועלת בנקודה הזו גבוהה מהתועלות של  $a$  ו  $b$ :

$$u(t \cdot a + (1-t) \cdot b) \geq u(a), u(b)$$

(והרי אם  $a \sim b$  אז  $u(a) = u(b)$ , ואז הממוצע המשוקלל הוא גם  $u(a)$ , ולכן

$$(u(t \cdot a + (1-t) \cdot b) \geq t \cdot u(a) + (1-t) \cdot u(b))$$

לכן נניח ללא הגבלת הכלליות ש  $a < b$  ו  $a \sim p_i$  ו  $b \sim p_k$  ( $0 \leq i < k \leq n$ ).

אז  $p_j \sim ta + (1-t)b$  עבור איזשהו  $j$  ( $i < j < k$ ). לכל  $j$  קיים

$$t_j \text{ ממשי } (0 \leq t_j \leq 1)$$

כך ש  $p_j \sim t_j a + (1-t_j)b$ . נגדיר  $t_i = 1, t_k = 0$  ונקבל שלוש

נקודות על קו אחד –

$$t_{j-1}a + (1-t_{j-1})b, t_j a + (1-t_j)b, t_{j+1}a + (1-t_{j+1})b$$

שעבורן מתקיים:

$$\alpha_j = \alpha(p_{j-1}, p_j,$$

$$p_{j+1}) \geq \frac{|t_j a + (1-t_j)b - t_{j-1} a + (1-t_{j-1})b|}{|t_{j+1} a + (1-t_{j+1})b - t_j a + (1-t_j)b|} =$$

$$\frac{|t_{j-1} - t_j|}{|t_j - t_{j+1}|}$$

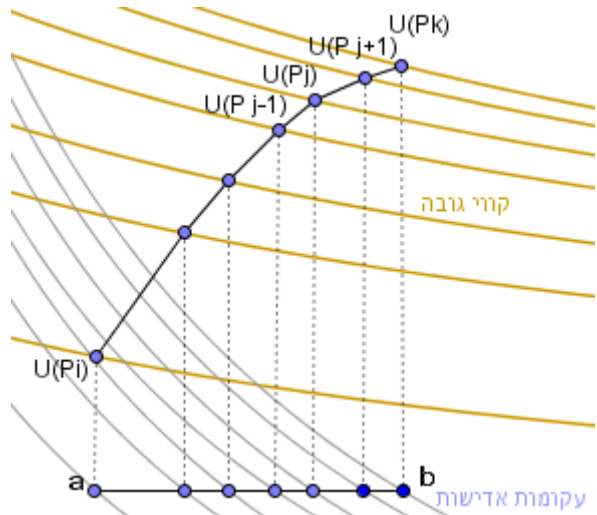
נשתמש במסקנות הקודמות, נציב ונקבל:

$$u(p_j) - u(p_{j-1}) \geq \alpha_j [u(p_{j+1}) - u(p_j)] \quad \rightarrow$$

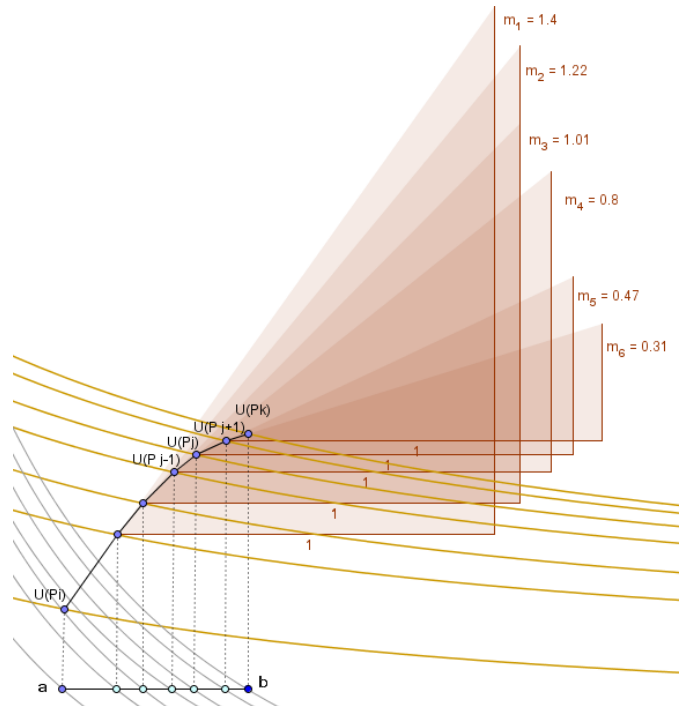
$$u(t_j a + (1-t_j)b) - u(t_{j-1} a + (1-t_{j-1})b) \geq$$

$$\frac{|t_{j-1} - t_j|}{|t_j - t_{j+1}|} [u(t_{j+1} a + (1-t_{j+1})b) - u(t_j a + (1-t_j)b)]$$

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.



בעצם שיפועי הקווים המחברים בין הנקודות, הולכים וקטנים:



אפשר להרחיב את הפונקציה  $u$  מהתחום  $A$  לקמור של  $A$  ( $\text{conv}(A)$ ) שבו

לכל  $p \in \text{conv}(A)$  קיימים  $a, b \in A$  כך ש  $p = ta + (1-t)b$  ,  $0 \leq t \leq 1$ .

$u(p)$  תהיה הסופרמום של  $u(ta + (1-t)b)$  על כל  $a, b, t$ , והיא קעורה בתחום הגדרתה.

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

תנאי הכרחי ומספיק לקעירותה של הפונקציה  $u(p)$ : כאשר  $K$  גוף קמור, ויחס ההעדפה  $\succsim$  שלם רציף וקמור, הוא שעבור כל  $p \in K$  (לא מקסימאלי ביחס ל  $\succsim$ ) הסופרמום של פונקציות התועלת קטן מ-1:

$$\sup \frac{\alpha_j \cdots \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}}{1 + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}} < 1$$

כאשר הסופרמום מחושב על כל סדרה סופית  $p_0 < p_1 < \cdots < p_n$  כאשר  $p_i \in K$ ,  $0 \leq i \leq n$ , ו  $p_n$  הוא מקסימאלי ביחס ליחס  $\succsim$ ,  $\alpha_j = \alpha(p_{j-1}, p_j, p_{j+1})$ , וכן  $p_j = p$ . הסופרמום הזה הוא פונקציות תועלת קעורה.

$K$  תחום קומפקטי לכן ניתן לבחור פונקציה לא שלילית:  $f(p_n) > 0$ . מאי השוויון של המקרה הכללי (למעלה), נסיק

$$f(p_j) \geq \frac{(\alpha_j \cdots \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}) f(p_n)}{(1 + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_{j+1} \alpha_j \cdots \alpha_{n-1} + \alpha_j \cdots \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1})}$$

כלומר

$$\frac{(\alpha_j \cdots \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1})}{(1 + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1})} \leq \frac{f(p_j)}{f(p_n)}$$

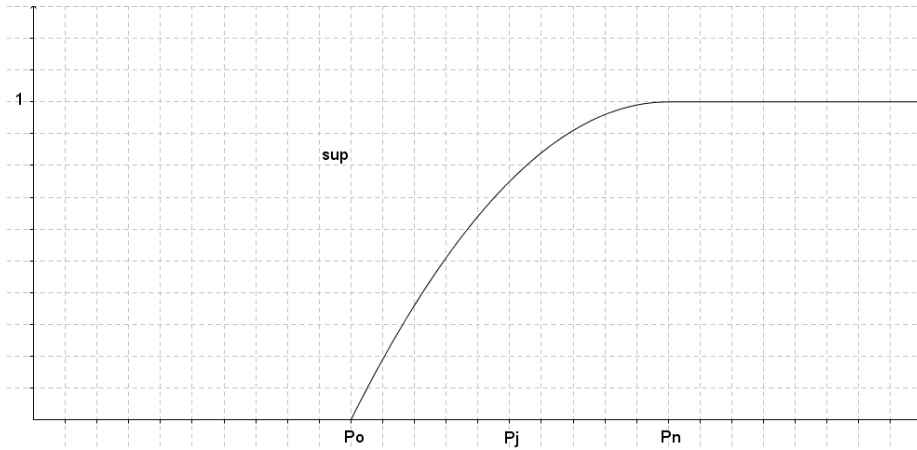
מאחר ו  $p_j = p$ , אזי  $f(p_j) = f(p)$ , ומאחר ו  $p_n$  הוא מקסימאלי ביחס ליחס  $\succsim$ , נקבל

$$\frac{(\alpha_j \cdots \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1})}{(1 + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1})} \leq \frac{f(p_j)}{f(p_n)} = \frac{f(p)}{f(p_n)} < 1$$

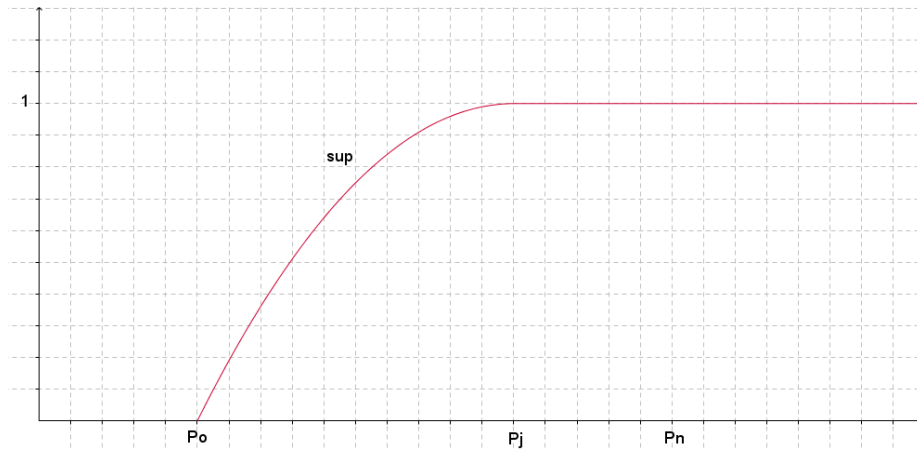
אם לוקחים סדרה של סדרות סופיות  $\{p_{i,n}\}$ ,  $0 \leq i \leq n < \infty$  של נקודות המקיימות  $p_{0,n} < p_{1,n} < \cdots < p_{n,n}$  כאשר  $p_{n,n}$  מקסימאלי ו  $p_{0,n}$  מינימאלי ביחס לסדר ההעדפה  $\succsim$ , אזי הפונקציות הקעורות  $u_n(x)$  מעל  $K$  מקיימות לכל  $n=1,2,\dots$ , ולכל  $x$ ,  $0 \leq u_n(x) \leq 1$ . אפשר לבחור תת סדרה מתכנסת לפונקציה קעורה  $u$  המוגדרת על פנים  $K$ . התנאי  $\sup \frac{\alpha_j \cdots \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}}{1 + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}} < 1$  ניתן להמחשה בגרפים הבאים, כאשר הגבול קטן או שווה ל 1 בנקודות לא מקסימאליות:

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

א. מקרה של קעירות:



ב. מקרה של אי-קעירות:



הצורך בקומפקטיות הוא לשם קיום המקסימום בתחום (פונקציה ממשית רציפה המוגדרת על קבוצה קומפקטית היא חסומה, ומקבלת את ערך המקסימום שלה בתחום ההגדרה).

**מסקנה הנובעת מתנאי זה:**

אם ישנה שלשה של נקודות  $p < q < r$

וסדרת סדרות סופיות  $p_{0,n} = p < p_{1,n} < \dots < p_{n-1,n} = q < p_{n,n} = r$

כך שמתקיים:  $\alpha_{1,n} \alpha_{2,n} \dots \alpha_{n-1,n} \rightarrow \infty$

אזי התנאי (ההכרחי ומספיק לקעירות) הנ"ל לא מתקיים, ויחס ההעדפה  $\succcurlyeq$  אינו קעור.

הוכחה: עבור  $j=n-1$  נציב באי השוויון הנ"ל ונקבל:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\alpha_{j,n} \dots \alpha_{n-1,n} + \dots + \alpha_{1,n} \alpha_{2,n} \dots \alpha_{n-1,n})}{(1 + \alpha_{n-1,n} + \dots + \alpha_{1,n} \alpha_{2,n} \dots \alpha_{n-1,n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{\alpha_{j,n} \dots \alpha_{n-1,n}}{\alpha_{1,n} \alpha_{2,n} \dots \alpha_{n-1,n}} + \dots + 1)}{(\frac{1}{\alpha_{1,n} \alpha_{2,n} \dots \alpha_{n-1,n}} + \frac{\alpha_{n-1,n}}{\alpha_{1,n} \alpha_{2,n} \dots \alpha_{n-1,n}} + \dots + 1)} = 1$$

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

בסתירה לנדרש בתנאי.

דוגמה ליישום המסקנה: נוכיח שיחס ההעדפה הבא אינו קעור בריבוע היחידה ( $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ )

$$U(x_1, x_2) = \frac{x_2}{1+x_1}$$

ניקח לכל  $n \geq 3$ , את הסדרה  $p_i = \left(0, \frac{i}{2n}\right)$  ונשים לב כי לכל  $3 \leq i \leq n$

$$p_{i+1} = \left(0, \frac{i+1}{2n}\right)$$

$$q_i = \left(\frac{1}{i}, \frac{i+1}{2n}\right) \sim p_i$$

$$\bar{q}_{i-1} = \left(\frac{2}{i-1}, \frac{i+1}{2n}\right) \sim p_{i-1}$$

מה שאומר שהנקודות  $p_{i+1}, q_i, \bar{q}_{i-1}$  הן על קו ישר אחד, לכן

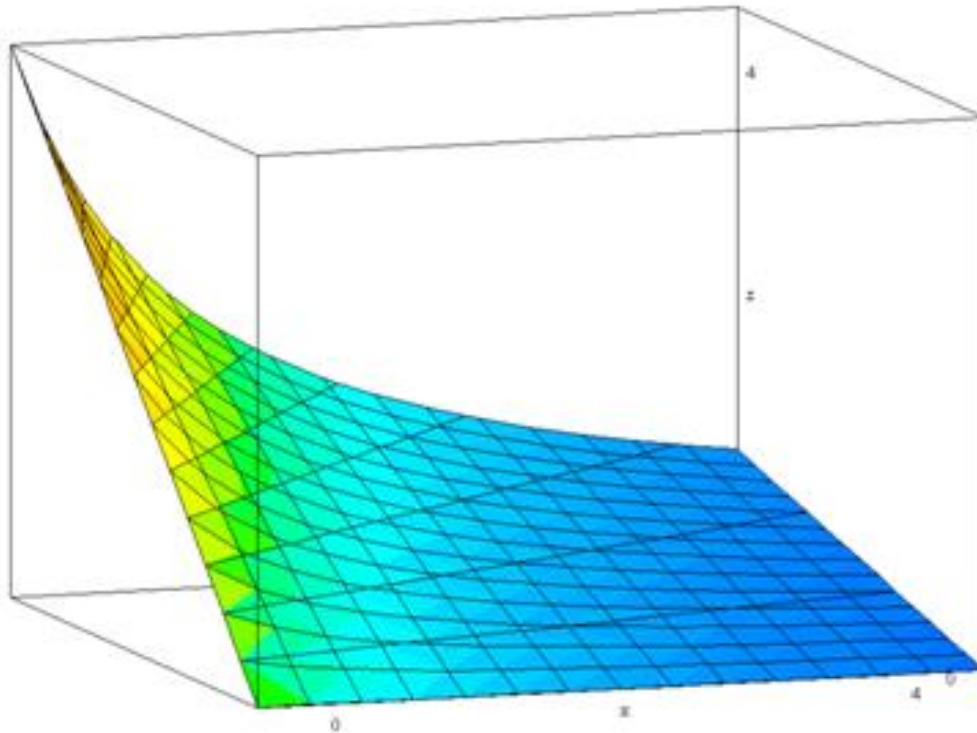
$$\alpha(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) \geq \frac{|\bar{q}_{i-1} - q_i|}{|q_i - p_{i+1}|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{2}{i-1} - \frac{1}{i}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{i} - 0\right)^2}} = \frac{\frac{i+1}{i(i-1)}}{\frac{1}{i}} = \frac{i+1}{i-1}$$

$$\prod_{i=3}^{n-1} \frac{i+1}{i-1} = \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{7}{5} \dots \frac{(n-3)}{(n-5)} \cdot \frac{(n-2)}{(n-4)} \cdot \frac{(n-1)}{(n-3)} \cdot \frac{n}{(n-2)} = \frac{n(n-1)}{6} \quad \text{ועל כן}$$

$$\prod_{i=3}^{n-1} \alpha(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) \rightarrow \infty \quad \text{כלומר}$$

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביוולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

ואכן כך נראה המשטח  $z = y/(1+x)$



#### • יחידות פונקצית התועלת

בהינתן יחס העדפה של צרכן, הקיום של פונקציה, המייצגת את תנאי הייצוג, מבטיח זהות בין כל מפת קווי גובה של הפונקציה ובין מפת אדישות מתאימה של הצרכן, ומבטיח שהפונקציה תייחס לעקומת האדישות ערכים ממשיים, שמהם אפשר ללמוד על כיוון ההעדפה של הצרכן. אולם, בהינתן פונקצית תועלת  $u$ , המייצגת את יחס ההעדפה, אפשר לקבל מספר אינסופי של פונקציות תועלת המייצגות את אותו יחס העדפה, על ידי הרכבה

---

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

של הפונקציה  $u$  עם פונקציה  $f$  מונוטונית עולה (ממש) כלשהי  $v = f \circ u$  :

הפונקציה  $u$  מקיימת את:  $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$

הפונקציה  $f$  היא מונוטונית עולה (ממש), לכן:  $u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow f(u(x)) \geq f(u(y))$

מכאן,  $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow f(u(x)) \geq f(u(y))$ , או  $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow v(x) \geq v(y)$

כלומר, הפונקציה  $v = f \circ u$  גם היא פונקצית תועלת המייצגת את יחס ההעדפה הנתון.

אם שתי פונקציות תועלת  $v$  ו  $u$ , מייצגות את אותו יחס העדפה, האם כל אחת מהן תתקבל

על ידי הרכבה של האחרת עם פונקציה מונוטונית עולה (ממש)? מאחר ומפות קווי הגובה

שלהן מתלכדות, ולכל נקודה על עקומת אדישות נתונה, מיוחסות שתי רמות תועלת

$u_0 = u(x_1, x_2)$  ו  $v_0 = v(x_1, x_2)$ , ההתאמה בין רמת התועלת  $u_0$  לבין רמת התועלת  $v_0$  היא

פונקציה המקיימת  $v(x_1, x_2) = f(u(x_1, x_2))$ .

מאחר ו  $u$  ו  $v$  הן פונקציות תועלת המייצגות את אותו יחס העדפה, אזי לגבי הסלים  $(x_1, x_2)$

ו  $(y_1, y_2)$  :  $u(x_1, x_2) \geq u(y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow v(x_1, x_2) \geq v(y_1, y_2)$

$\Leftrightarrow f(u(x_1, x_2)) \geq f(u(y_1, y_2))$

כלומר הפונקציה  $f$  היא מונוטונית עולה (ממש).

ניתן לומר שפונקצית התועלת המייצגת יחס העדפה נתון, היא יחידה במשמעות שכל

האחרות יכולות להתקבל ממנה על ידי הרכבה. כלומר, יחידה עד כדי טרנספורמציה

מונוטונית עולה. [במאמר מוסגר למתקדמים, נציין, כי פונקציות התועלת של פון נוימן

ומורגנשטרן יחידות עד כדי העתקה ליניארית, והוא הדין לגבי הצגות "מתאימות" של סדרי

עדיפות הניתנים להקערה].

### • שיעור התחלופה השולי בצריכה

נבטא את שיעור התחלופה השולי בצריכה באמצעות פונקצית התועלת, המייצגת את יחס

ההעדפה של הצרכן.

התועלת של סל נתון  $u(x_1, x_2)$  תשתנה ב  $\Delta u$ , כאשר הכמות של מצרך 1 תשתנה ב  $\Delta x_1$  :

$$\Delta u = u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)$$

היחס  $\Delta u / \Delta x_1$  המבטא את השינוי בתועלת ליחידת מצרך, כשחל שינוי בכמות הנצרכת

ממנו, תלוי בהיקף השינוי  $\Delta x_1$ , ולכן נתייחס לגבול, כאשר גודל השינוי שואף לאפס:

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

גבול זה, כשהוא קיים, הינו הנגזרת החלקית של פונקצית התועלת ביחס ל  $x_1$  (ובאותו אופן

לגבי  $x_2$ ).

---

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

נגזרת זו היא התועלת השולית (marginal utility) של מצרך 1 בסל  $x=(x_1, x_2)$  ומסומנת

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) = u_1(x_1, x_2)$$

ובאופן כללי, כשקיימים  $i$  מצרכים:

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{u(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = u_i(x_1, \dots, x_n)$$

מאחר ושיעור התחלופה השולי בצריכה, שווה לערך המוחלט של שיפוע עקומת האדישות בנקודה המייצגת את הסל, ועקומת האדישות היא שוות תועלת, אזי היא מתלכדת עם הגרף של פונקצית התועלת  $U=u(x_1, x_2) = c$ . נגזור את הפונקציה הסתומה ונקבל:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

כלומר, שיפוע עקומת האדישות שווה ל  $-\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}$

ושיעור התחלופה השולי בסל הוא היחס בין התועלת השולית של  $x_1$  לבין התועלת השולית של  $x_2$ .

יחס התועלות השוליות של מצרכים בסל נתון, לא תלוי בבחירת פונקצית התועלת המייצגת את יחס העדפת הצרכן:

נחשב יחס זה לפונקציה  $v = f \circ u$  שהיא הרכבה של פונקציה מונוטונית עולה ממש של  $u$ ,

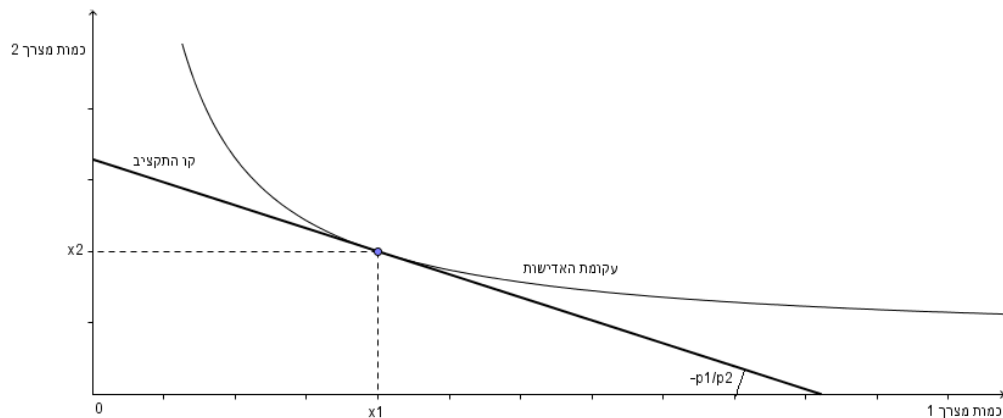
$$\frac{\frac{\partial v}{\partial x_1}}{\frac{\partial v}{\partial x_2}} = \frac{\frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x_2}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}}$$

ואפשר לראות שמתקבל אותו יחס.

תנאי הכרחי לקיום פתרון לבעיית הצרכן הוא השוויון בין שיעור התחלופה השולי ויחס

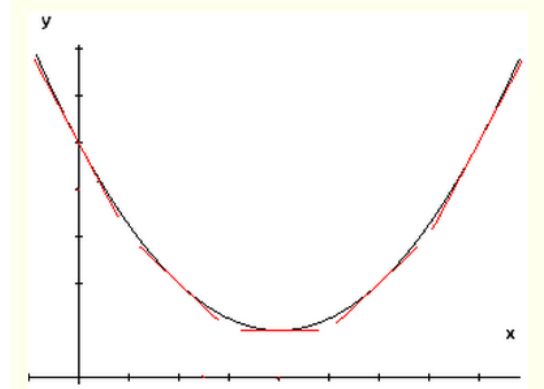
$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{(יחס המחירים)}$$

תנאי זה בא לידי ביטוי בהשקת עקומת האדישות לקו התקציב בנקודת הסל אופטימאלי, כך ששיפוע קו התקציב שווה לשיפוע העקומה בנקודה, כפי שניתן לראות באיור:

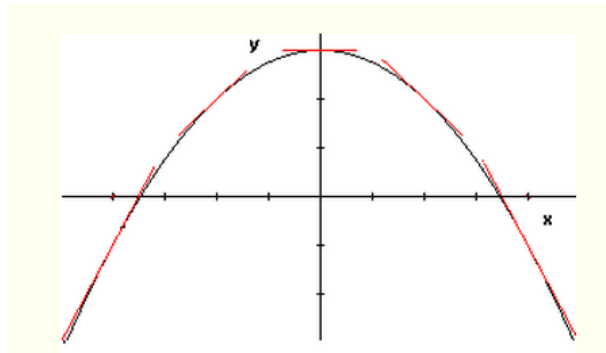


כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

מאפיין נוסף לקמירות הוא הקשר בינה לקווים המשיקים, ולנגזרת הראשונה. כאשר מדובר בפונקציה במשתנה אחד, אם הפונקציה  $f$  גזירה בקטע פתוח אזי היא קמורה בו אם ורק אם הנגזרת הראשונה  $f'$  היא פונקציה מונוטונית עולה. כלומר, אם  $x_1 \geq x_0$  אז  $f'(x_1) \geq f'(x_0)$  מכאן ששיפועי המשיקים הולכים וגדלים, כפי שניתן לראות בשרטוט הבא, לדוגמה:



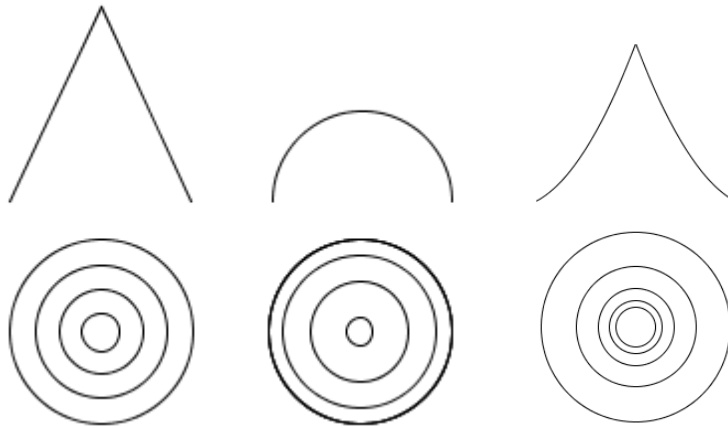
מנגד, הפונקציה היא קעורה אם ורק אם הנגזרת הראשונה  $f'$  היא פונקציה מונוטונית יורדת. כלומר, אם  $x_1 \geq x_0$  אז  $f'(x_1) \leq f'(x_0)$  כלומר כאשר שיפועי המשיקים הולכים וקטנים:



### קוואזי קעירות וקמירות

אפשר לראות הבדלים בקווי המתאר של הרים בצורת כיפה, חרוט וחרוט "לחוף". היכן הפונקציה המתארת את פני השטח קעורה? אם כל קו ישר המחבר בין שתי נקודות על פני השטח נמצא על או מתחת לפני השטח.

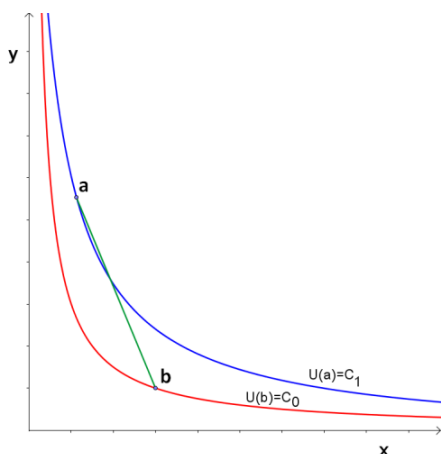
כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.



פונקציה תקרא קוואזי-קעורה אם לכל  $x, y \in \mathbb{R}^n$  כך ש-  $f(x) \geq f(y)$  מתקיים:

$$f(tx + (1-t)y) \geq f(y) \quad \forall t \in [0,1]$$

כלומר פונקציה היא קוואזי קעורה אם ורק אם הקטע המחבר נקודות על שתי עקומות אדישות נמצא תמיד לא מתחת לעקומה המתאימה לערך הנמוך של הפונקציה.



ניתן לראות באיור שבו  $c_1 > c_0$ , כל הנקודות על הקו המחבר בין  $a$  ו  $b$  נמצאות על או מעל עקומת האדישות המתאימה לערך הנמוך של הפונקציה  $(C_0)$ .

דוגמה של פונקציה קוואזי קעורה שאיננה קעורה ואיננה ניתנת להקערה היא פונקצית התועלת

$$U(x_1, x_2) = \frac{x_2}{1+x_1} \quad (\text{בעמוד 18}).$$

פונקציה תקרא קוואזי-קמורה אם לכל  $x, y \in \mathbb{R}^n$  כך ש-  $f(x) \geq f(y)$  מתקיים:

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(y) \quad \forall t \in [0,1]$$

פונקציה תקרא קוואזי-קמורה חזק אם לכל  $x, y \in \mathbb{R}^n$  כך ש-  $f(x) \geq f(y)$  מתקיים:

$$f(tx + (1-t)y) < f(y) \quad \forall t \in [0,1]$$

בכיפה, כל קו ישר המחבר בין שתי נקודות על פני השטח נמצא מתחת לפני השטח - לכן הפונקציה קעורה. גם בחרוט המושלם זה מתקיים - הקו תמיד יהיה בדיוק על פני השטח. בחרוט "הלחוף" שהולך ונהיה תלול יותר עם הגובה, הקו יהיה מעל ולכן הפונקציה קמורה.

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

## תכנון פעילות בנושא

הפעילות מיועדת למורים, אך בחלקה אפשרית גם להעשרת תלמידים בנושא משוואת הקו הישר, כשמדובר בתלמידים בעלי מיומנויות בסיסיות של קריאת נתונים מגרף במערכת צירים, לאחר שלמדו והתנסו בחישוב שיפוע על פי שתי נקודות, ובניית משוואת קו ישר ע"פ שתי נקודות, או ע"פ נקודה ושיפוע. תלמידים שלמדו על היפרבולות ועל נגזרות יוכלו לבצע משימות נוספות בפעילות.

זוהי פעילות היכרות של משוואת התקציב וחקר ההשפעות על קו התקציב בליווי יישום של Geogebra עם אפשרות לקבוע באופן דינמי את ההכנסה  $I$ , ואת המחירים של שני המוצרים  $(P_x, P_y)$ , ולמצוא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת השיפוע של קו התקציב.

בדוגמה נחקרת משפחת קווי האדישות מסוג היפרבולות שמשוואתן  $xy = a$ , כאשר ניתן לקבוע באופן דינמי גם את  $a$ .

הפעילות מתוכננת כחקר עצמאי, כאשר לימוד הנושא הכלכלי והמושגים מתורת הצרכן קודם לכן לא מחויב המציאות, ולא מהווה תנאי מקדים. במהלך הפעילות, הלומדים יכירו את הקשרים בין ההכנסה, המחירים והכמויות הנצרכות, ויסיקו כיצד השנויים בהכנסה משפיעים על הכמויות המרביות הנצרכות, ועל נקודות שיווי המשקל, וכיצד מגיב הצרכן על שינויים בהכנסתו או במחירי השוק של המוצרים שהוא צורך.

---

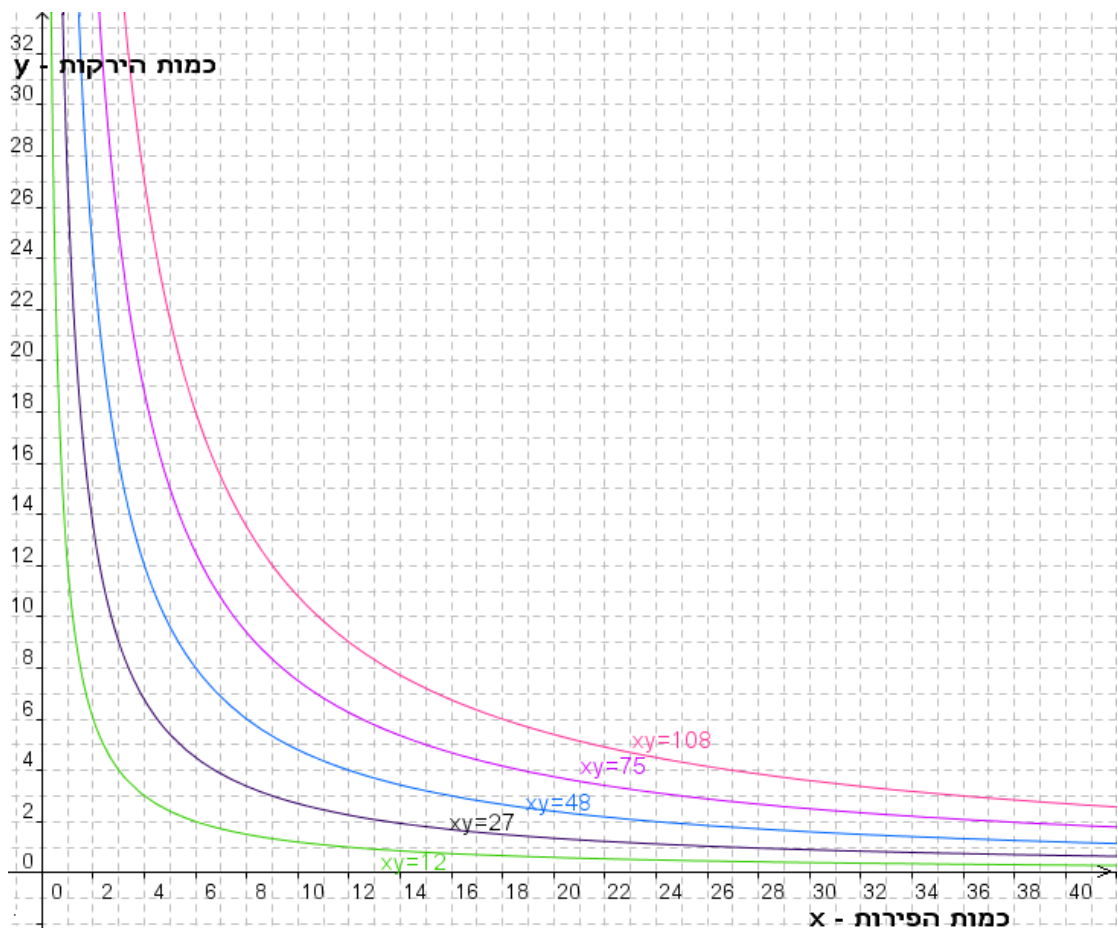
כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

## דף פעילות

### שלב א' – בניית קו התקציב ושינויים בהכנסה

התרשים הבא מציג מערכת הטעמים של הצרכן יואב לגבי פירות וירקות. ציר ה-x מציין את כמות הפירות, וציר ה-y את כמות הירקות. כל נקודה על עקומה מייצגת סל מצרכים  $(x, y)$ . כל עקומה בפני עצמה מייצגת אוסף של סלים שהצרכן מעדיף באותה מידה, והיא נקראת עקומת אדישות. בין העקומות, קיים יחס ההעדפה הבא: ככל שהעקומה גבוהה יותר (ימינה) הצרכן מעדיף אותה יותר.

(ggb פעילות ראשונה)



נתונים המחירים הבאים: מחיר יחידת פרי (x) הוא  $P_x = 13.5$  ₪

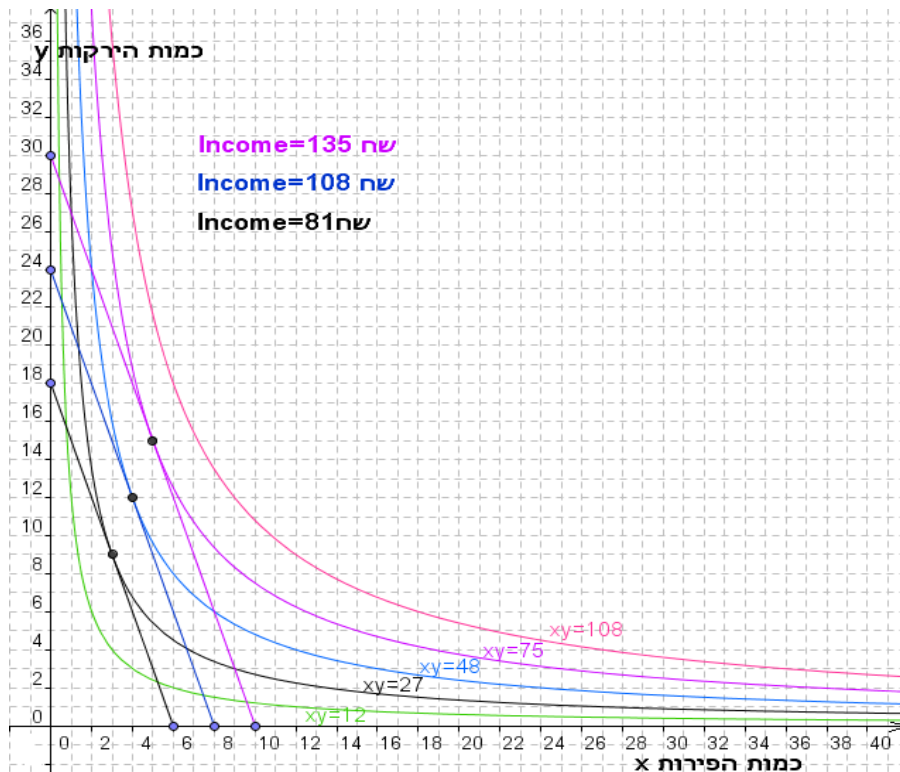
ומחיר יחידת ירק (y) הוא  $P_y = 4.5$  ₪

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

- א. בהנחה שהכנסתו של יואב היא 108 ₪,  $I =$ , והוא מוציא את כולה על רכישת פירות, כמה יחידות פרי יוכל לרכוש?
- ב. אם לחילופין, יבחר להוציא את כל הכנסתו על ירקות, כמה יחידות ירק ירכוש? סמנו על מערכת הצירים את הנקודות המבטאות את הכמויות המרביות שמצאתם בסעיף א', וחברו אותם בקו. זהו קו התקציב של יואב, שמתאים להכנסתו הנתונה.
- ג. כתבו את משוואת קו התקציב. מהו שיפועו?
- ד. אחת מעקומות האדישות מיוצגת במשוואה:  $xy = 48$  ( $y = 48/x$ ). חשבו את נקודת החיתוך של קו התקציב עם עקומה זו, ואשרו ע"י ה Geogebra ("חיתוך שני עצמים"). נקודת החיתוך מייצגת את סל המצרכים שהצרכן מעדיף, והוא עומד בו מבחינת התקציב שלו. ביחס לסל זה, יתר הסלים על עקומת האדישות, נמצאים מעל קו התקציב, לכן מחוץ להישג ידו של הצרכן.
- ה. גזרו את הפונקציה של עקומת האדישות הזו, וחשבו את שיעור הנגזרת בנקודת החיתוך עם קו התקציב. השוו אותו ליחס בין מחיר יחידת פרי ליחידת ירק, ולשיפוע משוואת קו התקציב ונסחו את מסקנתכם.
- ו. שערו כיצד ישתנה המצב כשהכנסה תעלה מ 108 ₪ ל 135 ₪  $I_2 =$ , בהנחה שהמחירים נשארים קבועים:
- מה יהיו נקודות החיתוך עם הצירים (הכמויות המרביות החדשות שיוכל לצרוך מכל מוצר)? האם יהיה שינוי בשיפוע הישר (יחס המחירים)? בצעו את השינוי ב Geogebra ובדקו את השערותיכם.
- ז. רשמו את משוואת קו התקציב החדש (בהתאם להכנסה החדשה), וחשבו את נקודת החיתוך עם עקומת האדישות הגבוהה ביותר שהוא חותך.
- ח. בצעו את שלבים ו' וז' למקרה שהכנסה ירדה ל 81 ₪  $I_3 =$ .

\*\*הגרפים שאמורים להתקבל: ([פעילות ראשונה תוצאות](#))

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.



שלב ב' - שינויים במחירים:

בחלק זה של הפעילות, יש לעבוד עם הקובץ [ggb.פעילות שנייה](#) בו מופיעים ארבעה סרגלי גרירה:

a עבור הפרמטר שבפונקציה המתארת את עקומת האדישות  $y = a/x$ , שערכו נעים בין

0-150 ברווחים של 0.1

$P_x$  עבור מחיר מוצר x שנע בין הערכים 1-20 ברווחים של 0.1

$P_y$  עבור מחיר מוצר y שנע בין הערכים 1-20 ברווחים של 0.1

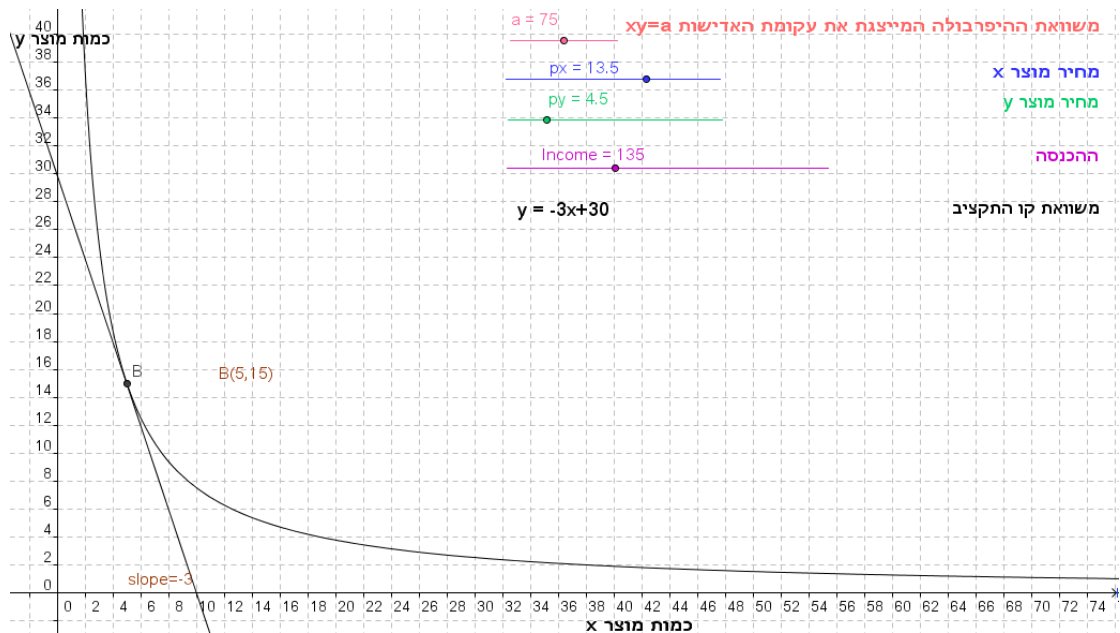
I עבור ההכנסה שנעה בין הערכים 0-400 ברווחים של 0.001

במצב הראשוני בקובץ, מופיעה עקומת האדישות  $xy=75$ , ומשיק לה קו התקציב של יואב:

$$13.5x + 4.5y = 135, \text{ המשתכר } 135 \text{ ₪, כאשר מחירי המוצרים } x \text{ ו- } y \text{ הם:}$$

$$P_x = 13.5 \text{ ₪, } P_y = 4.5 \text{ ₪.}$$

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.



כעת נודע כי הכנסתו ירדה ל 90 ש"ח, אך גם מחירו של מוצר x הוזל. יואב טוען שהוא נשאר שבע רצון באותה מידה, כלומר הסל האופטימאלי שהוא יכול לרכוש נמצא על עקומת האדישות  $xy=75$ . מצאו בקירוב, בעזרת ה Geogebra את המחיר החדש של מוצר x המאפשר זאת. חשבו גם באופן אלגברי. נסו מהמצב אליו הגעתם, להוזיל את מחיר מוצר y, לשנות את ההכנסה, ולמצוא עקומת אדישות משיקה לקו החדש.

### פתרון:

הירידה בהכנסה, והעובדה שמחיר מוצר y נשאר ללא שינוי, גורמות לשינוי בכמות המרבית שניתן לרכוש ממוצר y :  $y = I/P_y = 90/4.5 = 20$  לכן נקודת החיתוך עם ציר y היא  $(0,20)$ .

$P_x$  קטן לכן השיפוע של קו התקציב קטן (בערכו המוחלט)  $m = -P_x/P_y = -P_x/4.5$  קו התקציב משיק לעקומת האדישות בנקודת סל התקציב האופטימאלי, לכן שיפועו שווה

$$m = y' = -75/x_1^2$$

$$\cdot y - y_1 = -\frac{75}{x_1^2}(x - x_1)$$

$$\cdot y_1 = \frac{75}{x_1} \text{ נקודת ההשקה } (x_1, y_1) \text{ מקיימת } xy=a=75 \text{ לכן}$$

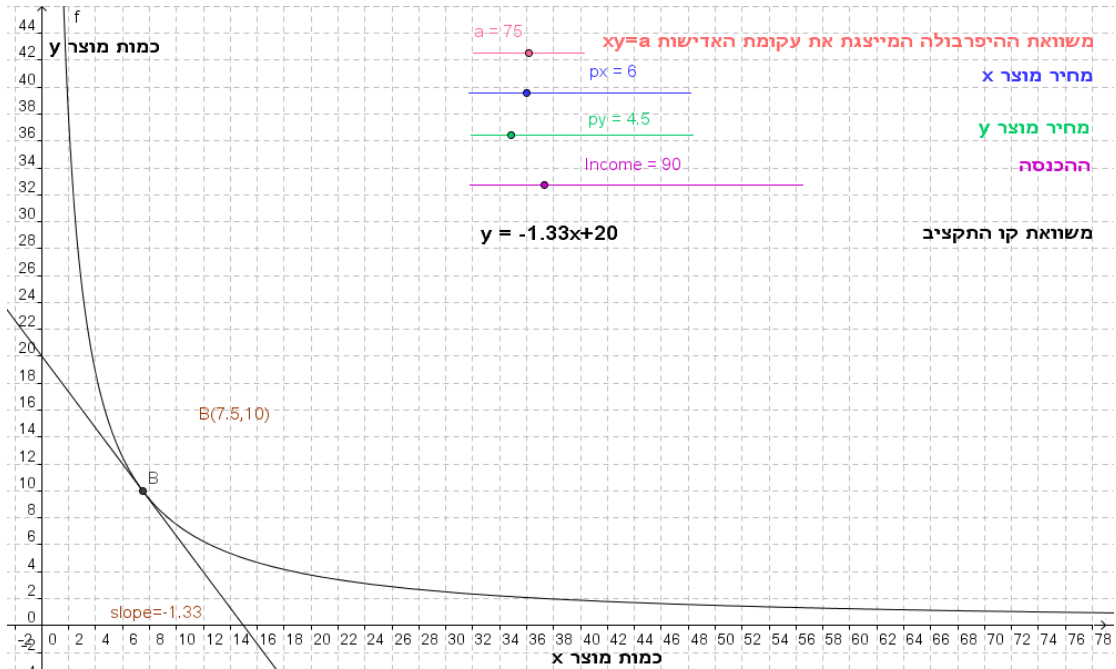
בנוסף, הנקודה  $(0,20)$  נמצאת על הישר. לכן:

$$20 - \frac{75}{x_1} = -\frac{75}{x_1^2}(0 - x_1) \rightarrow 20 = \frac{150}{x_1} \rightarrow x_1 = 7.5, y_1 = \frac{75}{7.5} = 10$$

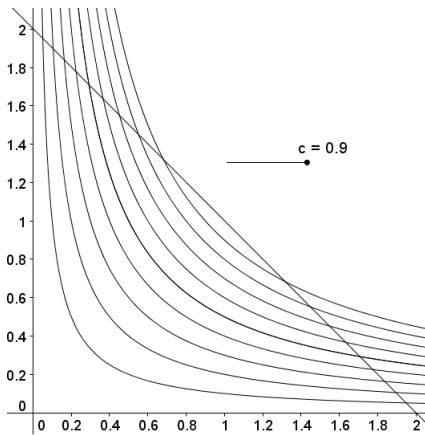
כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

$P_x \cdot 7.5 + 4.5 \cdot 10 = 90 \rightarrow P_x = 6$  מכאן שמחיר מוצר x הוא 6 ש"ח

(ggb פעילות שנייה תוצאות)



שלב ג' – בניית פונקציית התועלת



נתונה מערכת עקומות אדישות שצורתה משפחה של היפרבולות  $xy = c$   $[0.1 \leq c \leq 0.9]$  בתחום  $x > 0, y > 0, x + y < 2$ . תארו כיצד תיראה פונקציית התועלת המתאימה להן, ואת הבנייה שלה.

רשימת מקורות

Kannai, Y. (1981). Concave utility functions – existence, constructions and cardinality. In: S. Schaible and Ziemba, W.T. (eds.), *Generalized concavity in optimization and economics* (pp. 543–611). New York: Academic Press.

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995). *Microeconomic Theory*. New York: Oxford Univ. Press.

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

יניב, ג. (תשמ"ב 1982). מבוא לכלכלה מיקרו: יחידה 3. תחרות משוכללת: התנהגות הצרכן. תל-אביב: הוצאת האוניברסיטה הפתוחה.

יערי, מ., ניצן ש., ועמיאש ז'. (תשנ"ו 1996). תורת המחירים: יחידה 1-2. תורת הצרכן א'. תל-אביב: הוצאת האוניברסיטה הפתוחה.

פרגוסון, ס.א. (1971). תיאוריה מיקרו כלכלית. תל אביב: הוצאת שוקן.

---

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.