1. מבוא

נושא העבודה הוא סימטריות והעתקות איזומטריות במישור.

המילון החדש של אבן שושן מגדיר סימטריה וסימטרי כך:

"סימטריה - (מיוונית: syn יחד + metron מידה) תואם, התאמה מדויקת במצבם של חלקים כלפי השלם, סדר הרמוני ומכוון".

"סימטרי - שיש בו סימטריה, שיש בו יחס הרמוני ומתואם בין החלקים לגבי השלם"

ההתייחסות ביוון העתיקה לסימטריה היתה במובן של פרופורציה, כאשר היוונים הגדירו יצירת אומנות כסימטרית "הם התכוונו לומר שאדם יכול לזהות חלק קטן כלשהו של היצירה באופן כזה שממדיהם של כל שאר החלקים יכילו כפולות מדויקות של החלק הזה" (עמ' 16, מריו ליביו, שפת הסימטריה)

המתמטיקאי הגרמני הרמן וויל (1855-1955) Hermann Weyl גרס בהרצאותיו בנושא סימטריה כי יופי קשור בצורה הדוקה בסימטריה: "סימטריה במובן הרחב או הצר של המילה, תלוי איך מגדירים את המושג, מהווה אידיאולוגיה שבאמצעותה ניסה האדם לאורך כל תקופות ההיסטוריה להבין וליצור סדר, יופי ושלמות"

רוב האנשים המשתמשים במושג סימטריה מתכוונים לסימטריה שיקופית בלבד, כך גם הדוגמאות לשימוש במילה סימטריה מתוך מילון אבן שושן: "סימטריה של האיברים הזוגיים בגופו של האדם. השכונה נבנתה מתוך הקפדה על הסימטריה בבניה".

לעומת הדוגמאות במילון אבן שושן אשר מתייחסות לסימטריה שיקופית בלבד, בויקיפדיה קיימת כבר הגדרה מודרנית יותר: "עצם הוא סימטרי ביחס לטרנספורמציה מסוימת אם הטרנספורמציה אינה משנה אותו. " הגדרה זו היא המקובלת היום מכיוון שכוללת בתוכה סוגי סימטריות שונות כגון העתקת סיבוב, הזזה ושיקוף-הזזה שהם סוגי הסימטריה בהם אתמקד בעבודתי.

לסימטריה שימושים רבים בתחומים שונים, כימיה, פיסיקה, אומנות וארכיטקטורה; וטכנולוגיה

בכימיה נעשה שימוש בחבורת סימטריה שהיא קבוצה אליה משתייכות כל המולקולות המכילות את אותם סוגי סימטריה.

בפיסיקה, למולקולת החמצן ולמולקולות אחרות שיש להן מבנה דומה יש ציר סימטריה אורכי ושני צירי סימטריה אקוויוולנטים ניצבים לציר האורכי. עיקרון ההתמדה הפיזיקאלי של גלילאו מבוסס גם הוא על סימטריה.

באומנות ובארכיטקטורה, ערבסקות בארמונות אלהמברה בעיר גרנדה בדרום ספרד הן אחת מהדוגמאות לשימוש בסימטריה באומנות ובארכיטקטורה, דוגמאות נוספות הן ציורים של מאוריץ קורנליס אֶשֶר (M. C. Escher) (1898-1972), הגן היפני והגנים הבהאים.

בטכנולוגיה, שהינו תחום מודרני נעשים שימושים רבים בסימטריה, לדוגמא מידול תנועת היד באמצעים טכנלוגיים, עושה שימוש נרחב בעיקרון הסימטריה

רציונל ומטרת העבודה:

בישראל, למרות השימושים הרבים של הסימטריה, נלמד הנושא אך ורק בבתי הספר היסודיים.

בעבודתי אני מראה שניתן וחשוב ללמד את הנושא גם בחטיבות ביניים ובתיכונים.

בעיות גיאומטריות מורכבות ניתנות להוכחה פשוטה יותר באמצעות סימטריה. תלמידים רבים מתקשים בגישה דדוקטיבית פורמאלית של הוכחות גיאומטריות, אלה יוכלו להסתייע בויזואליות הקיימת בסימטריה כדי להתמודד בקלות רבה יותר עם הוכחות גיאומטריות.

המאמר שאני מציגה בעבודתי מחולק לשלושה חלקים, החלק הראשון מתמקד בחבורות הסימטריה של צורות הנדסיות במישור ובהוכחות של משפטים בגיאומטרית המישור הניתנות להוכחה בעזרת סימטריה. החלק השני מוקדש לקשר בין גרפים של פונקציות לבין סימטריה. בחלק השלישי אני מציגה מספר שאלות מאולימפיאדה זוטא שניתן לפתור בעזרת סימטריה.

תוכן עניינים

2. העתקות איזומטריות - רקע מתמטי

הגדרה: העתקה השומרת מרחקים נקראת איזומטריה.

$$\{f: R^n \to R^n | f\ Isometry\}$$

בפרט עבור איזומטריות במישור

$$\{f: R^2 \to R^2 | f\ Isometry\}$$

לכל איזומטריה מתקיים

א) אם f איזומטריה, גם f^{-1} איזומטריה

ב) אם f, g איזומטריה, גם $f \circ g$ איזומטריה.

ג) העתקת זהות משאירה כל נקודה במישור במקומה היא איזומטריה, נסמן אותה ב- Id

לכן היא חבורה עם איבר יחידה Id.

מסמנים אותה ב- Iso(☼^{2}).

נכניס סימונים לתנועות איזומטריות במישור:

1) $T_{\vec{u}}$ הזזה בווקטור $\vec{u}$

2) R_O^α סיבוב בזוית α סביב נקודת שבת O.

3) S_l סימטריה שיקופית ביחס לישר l

4) $G_{\vec{u},l}$ שיקוף-הזזה – הזזה בווקטור $\vec{u}$ ולאחר מכאן שיקוף ביחס לישר l המקביל לווקטור הזזה.

<u>נקודת שבת של איזומטריה</u>

הגדרה: תהי f איזומטריה. נקודה P נקראת נקודת שבת של f אם $f(P) = P$.

אם R_O^α סיבוב סביב נקודה O ($R_O^\alpha \neq Id, \alpha \neq 2\pi n$) אז O היא נקודת השבת היחידה.

אם S_l היא שיקוף ביחס לישר l, אז כל הנקודות על הישר אינן משתנות על ידי S_l לכן כל הנקודות על הישר l הן נקודות שבת.

לאיזומטריות הזזה ושיקוף-הזזה אין נקודות שבת (אם $\vec{u} \neq 0$).

תהי P נקודת שבת של איזומטריה f, אז P היא נקודת שבת גם של איזומטריה f^{-1}.

תהי P נקודת שבת של איזומטריות f ו- g, אז P היא נקודת שבת גם של איזומטריה $g \circ f$.

<u>אוריינטציה – שימור כיוון</u>

כל איזומטריה מעבירה בסיס אותונורמלי לבסיס אותונורמלי. קיימות שתי אפשרויות: או ששני הבסיסים הם מאותו סוג או ששני הבסיסים מסוגים הפוכים.

איזומטריות ששומרות על סוג הבסיס נקראות איזומטריות שומרות אוריינטציה (שומרות כיוון) והן הזזה וסיבוב. חבורת הזזות וסיבובים היא תת חבורה נורמאלית של Iso(☼^{2}).

איזומטריות שהופכות את סוג הבסיס נקראות איזומטריות הופכות אוריינטציה והן שיקוף ושיקוף-הזזה.

2.1 הרכבה של העתקות איזומטריות.

הרכבה של הזזה והזזה

איזומטרית הזזה מעתיקה כל נקודה במישור לפי כוון של ווקטור הזזה $\vec{u}$ ובמרחק השווה ל $|\vec{u}|$ הזזה נקבעת על פי ווקטור ההזזה, קבוצת ההזזות במישור היא אינסופית. לאיזומטרית הזזה **אין נקודות שבת** והיא **שומרת אוריינטציה**.
הרכבה של שתי הזזות היא הזזה בווקטור המהווה סכום הווקטורים של שתי ההזזות. ניתן להגיד שקבוצת הזזות סגורה תחת פעולת ההרכבה ולכן היא מהווה תת חבורה של חבורת איזומטריות. חיבור ווקטורי היא פעולה חילופית מכאן שהחבורה הזאת היא חבורה אבלית.

$$T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\overrightarrow{u+v}} = T_{\overrightarrow{v+u}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$$

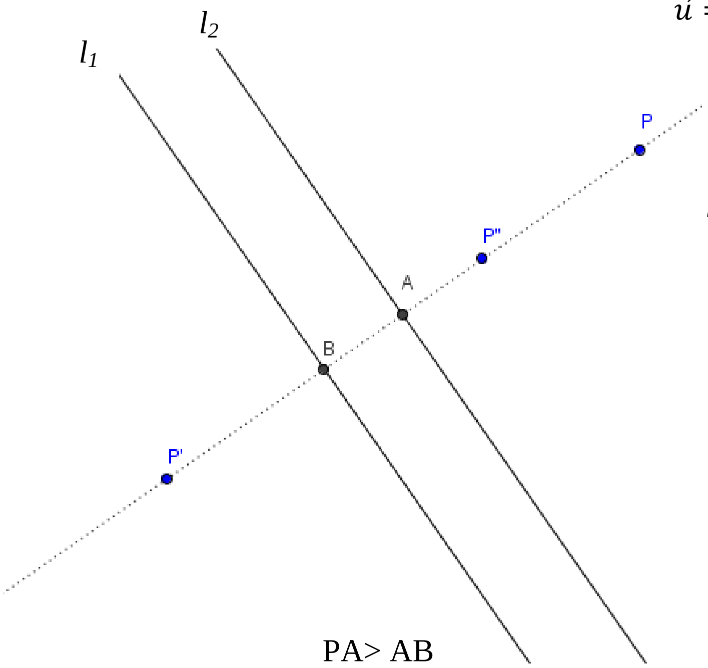
הרכבה של שיקוף ושיקוף

נגדיר שיקוף ביחס לישר בצורה הבאה:
יהי l ישר כלשהו הנתון במישור. תהי P נקודה כלשהי במישור. אם P נמצאת על l אז $S_l(P)=P$, אם P אינה על l אז $S_l(P)=P'$ כאשר P' היא נקודה שעבורה הקטע PP' נחצה על ידי l ומאונך לו.

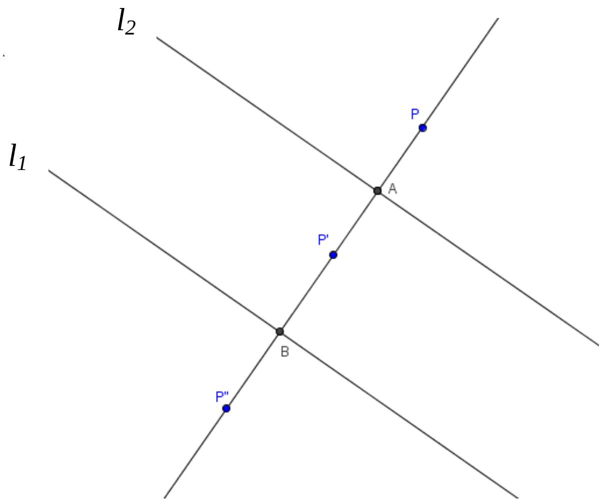
שיקוף נקבע על פי ישר שביחס אליו נעשה שיקוף.
קבוצת השיקופים היא אינסופית.
איזומטרית שיקוף **אינה שומרת אוריינטציה**. יש לה **אין סוף נקודות שבת** הנמצאות על ישר השיקוף.
היא לא מהווה תת חבורה כי קבוצת שיקופים אינה סגורה תחת פעולת הרכבה (הרכבה של שני שיקופים היא אינה שיקוף).

נבחן את המקרים של הרכבה של שני שיקופים ביחס לישרים:
א1) שני ישרים מקבילים (לא מתלכדים).
במקרה זה הרכבה של שני שיקופים היא הזזה של כל נקודה במישור לנקודה המרוחקת ממנה במרחק שהוא פי שניים המרחק בין הצירים ובכיוון המאונך לצירים.

אם $l_1||l_2$ אז $S_{l_1} \circ S_{l_2} = T_{\vec{u}}$ כאשר $\vec{u} = 2AB$



PA> AB



PA < AB

לפי הגדרת השיקוף אם P' היא שיקוף של P ביחס לישר l_1 אז המרחק $AP = AP'$ ו PP' מאונך ל- l_1.
כמו כן אם P'' היא שיקוף של P' ביחס לישר l_2 אז המרחק $BP' = BP''$ ו PP' מאונך ל- l_2.
נקודות P, P' ו- P'' נמצאות על ישר אחד שהוא מאונך לישרים l_1 ו- l_2.
אם $AP< AB$ אז $AB = BP'+ AP'$

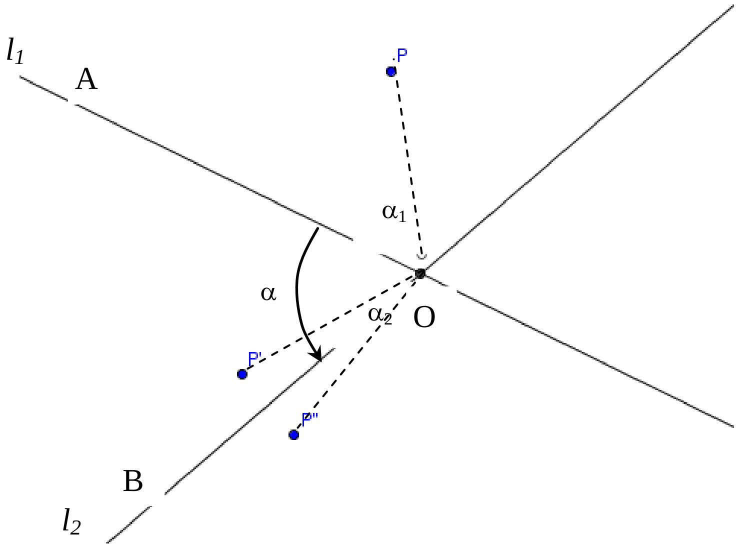
$$PP' = BP'' +BP'+AP'+AP$$
$$\Downarrow$$
$$PP'= 2AB$$

אם $AP > AB$ אז $AB = AP'- BP'$

$$PP' = AP' +AP -BP'-BP''$$
$$\Downarrow$$
$$PP'= 2AB$$

א2) שני ישרים מתלכדים $l_1 = l_2$
במקרה זה אנו משקפים את נקודה P ביחס לישר l_1 ומקבלים נקודה P' לאחר מכן אנחנו משקפים את נקודה P' ביחס לאותו ישר ומקבלים נקודה P'' שהיא למעשה נקודה P. מכאן שהרכבה זו היא העתקת הזהות.
אפשר להסביר את המקרה הזה גם כמקרה פרטי של ישרים מקבילים. במקרה של ישרים מקבילים כל נקודה זזה למרחק שהוא פי שניים מהמרחק בין הישרים, במקרה של ישרים מתלכדים המרחק בין הישרים הוא אפס ולכן ניתן להגיד שהנקודה זזה למרחק אפס או שאנחנו מקבלים הזזה טריביאלית (העתקת זהות).
ב) שני ישרים נחתכים בנקודה אחת בלבד O.
במקרה זה ההרכבה של שני שיקופים היא סיבוב סביב נקודת החיתוך של שני הישרים בזווית השווה לפעמיים הזווית בין שני הישרים

$$S_{l_1} \circ S_{l_2} = R_O^{2\alpha}$$



בשרטוט $\alpha_1 < \alpha$, $\alpha_2=\alpha-\alpha_1$
נקודה P' היא שיקוף של נקודה P ביחס לישר l_1 ונקודה O נמצאת על l_1

$$\measuredangle POA = \measuredangle AOP' = \alpha_1$$

נקודה P'' היא שיקוף של נקודה P' ביחס לישר l_2 ונקודה O נמצאת על l_2

$$\measuredangle P'OB = \measuredangle BOP'' = \alpha_2$$

$$\measuredangle AOB = \alpha_1 + \alpha_2$$
$$\Downarrow$$
$$\measuredangle POP" = 2\alpha$$

הרכבה של שני שיקופים אינה חילופית

$$S_{l_1} \circ S_{l_2} \neq S_{l_2} \circ S_{l_1}$$

ניקח לדוגמא $l_1 || l_2$ $(l_1 \neq l_2)$

$$(S_{l_1} \circ S_{l_2}) \circ (S_{l_2} \circ S_{l_1}) = \mathrm{Id}$$
$$S_{l_1} \circ S_{l_2} = T_{\vec{u}}$$
$$\Downarrow$$
$$S_{l_2} \circ S_{l_1} = T_{\overrightarrow{-u}}$$

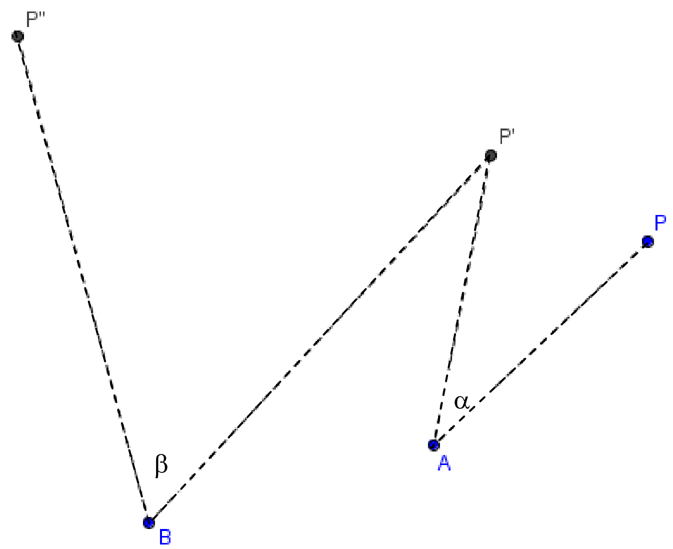
<u>הרכבה של סיבוב וסיבוב</u>

סיבוב נקבע על פי שני פרמטרים: א) נקודת מרכז סביבה מתבצע סיבוב. ב) זוית הסיבוב.
קבוצת הסיבובים במישור היא אינסופית. איזומטרית סיבוב **שומרת אוריינטציה** ויש לה **נקודת שבת אחת בלבד** שהיא מרכז הסיבוב.

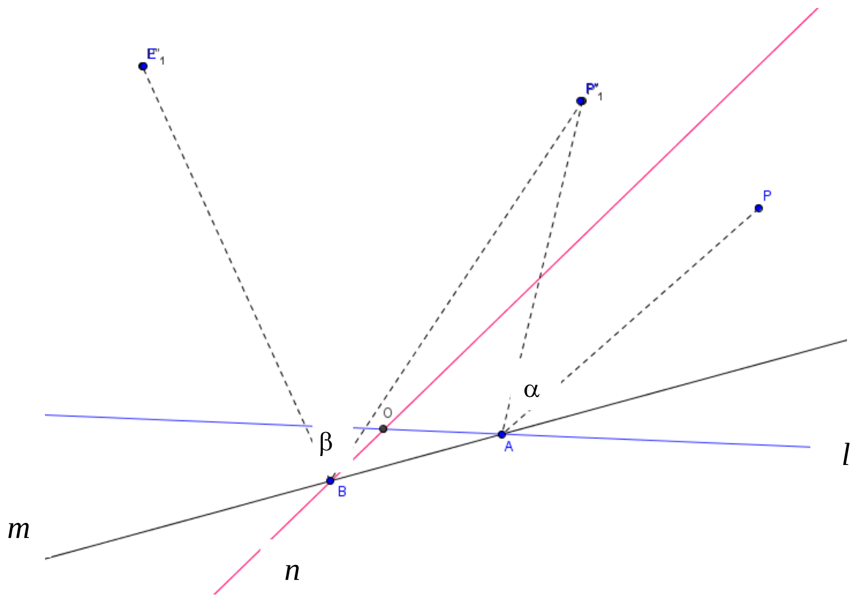
הרכבה של שני סיבובים סביב אותה נקודה היא סיבוב בזוית המהווה סכום של זויות הסיבוב.

$$R_O^{\alpha} \circ R_O^{\beta} = R_O^{\alpha+\beta}$$

נבחן הרכבה של שני סיבובים סביב נקודות שונות ובזוויות שונות.



ראינו שסיבוב סביב נקודה הוא הרכבה של שני שיקופים ביחס לישרים שנחתכים בנקודה שהיא מרכז הסיבוב והזווית ביניהם היא חצי מזווית הסיבוב.
נבחר את צירי השיקוף כך שאחד הישרים m יעבור דרך מרכזי הסיבוב A ו- B.



הישרים m ו- l עוברים דרך הנקודה A ויוצרים זווית של $\frac{\alpha}{2}$ ביניהם לכן $R_A^{\alpha} = S_l \circ S_m$

הישרים m ו- n עוברים דרך הנקודה B ויוצרים זווית של $\frac{\beta}{2}$ ביניהם לכן $R_B^{\beta} = S_m \circ S_n$

ניתן לכתוב הרכבה של שני הסיבובים בצורה הבאה:

$$R_A^{\alpha} \circ R_B^{\beta} = (S_l \circ S_m) \circ (S_m \circ S_n) = S_l \circ (S_m \circ S_m) \circ S_n$$

$\downarrow$

הרכבה בין שיקופים היא פעולה קיבוצית

הרכבה של שני שיקופים ביחס לאותו ישר היא העתקת זהות $S_m \circ S_m = Id$

$\Leftarrow$

$$R_A^{\alpha} \circ R_B^{\beta} = S_l \circ S_n$$

נבחן בשלושה מקרים:

א) הישרים l ו- n נחתכים בנקודה אחת בלבד O (α+β≠2πn)

במקרה זה הרכבה של שני שיקופים היא סיבוב סביב נקודה O

כאשר זווית הסיבוב היא α+β.

$$R_A^{\alpha} \circ R_B^{\beta} = S_l \circ S_n = R_O^{\alpha+\beta}$$

ב1) הישרים l ו- n מקבילים ולא מתלכדים (α+β=2πn, α≠2πn, A≠B)

במקרה זה הרכבה היא הזזה בווקטור המאונך לישרים ובמרחק השווה לפעמיים המרחק בין הישרים l ו- n.

$$(l||n)\ R_A^{\alpha} \circ R_B^{\beta} = S_l \circ S_n = T_{\overrightarrow{2AB}}$$

ב2) הישרים l ו- n מתלכדים (α+β=2πn, α=2πn, β=2πn, A=B).

במקרה זה ההרכבה היא העתקת זהות.

$$(A = B, \alpha + \beta = 2\pi n)\ R_A^{\alpha} \circ R_B^{\beta} = S_l \circ S_n = T_{\vec{0}} = Id$$

<u>הרכבה של שיקוף ביחס לישר l והזזה בווקטור</u> $(\vec{u} \neq 0)$

אם $l||\vec{u}$ אז נקבל שיקוף-הזזה בציר שיקוף הזזה לפי הגדרה,

אם $l \nparallel \vec{u}$ אז נקבל שיקוף-הזזה בציר שונה מ l בווקטור $\vec{v} \neq \vec{u}$,

נפרק את ווקטור $\vec{u}$ לשני ווקטורים כך ש

$$\overrightarrow{u_2} \perp l, \overrightarrow{u_1} \parallel l$$

$$T_{\vec{u}} \circ S_l = T_{\overrightarrow{u_1}} \circ T_{\overrightarrow{u_2}} \circ S_l$$

$$T_{\overrightarrow{u_2}} \circ S_l = S_{l'} \quad \text{כאשר } l||l'$$

$$\Downarrow$$

$$T_{\vec{u}} \circ S_l = T_{\overrightarrow{u_1}} \circ S_{l'} = G_{\overrightarrow{u_1},l'} \quad \text{כאשר } \overrightarrow{u_1} \parallel l||l',\ \overrightarrow{ll'} = \frac{\overrightarrow{u_2}}{2}$$

<u>הרכבה של שיקוף-הזזה ושיקוף-הזזה</u> $(\vec{u} \neq 0)$

שיקוף-הזזה הוא הזזה בכיוון המקביל לישר l ולאחר מכן שיקוף ביחס לישר l.

איזומטריה זו **אינה שומרת אוריינטציה ואין לה נקודות שבת** $(\vec{u} \neq 0)$

שיקוף-הזזה ניתן לבצע כל הזזה ולאחר מכן שיקוף ביחס לישר המקביל לווקטור ההזזה או להפך, קודם שיקוף ביחס לישר ולאחר מכן הזזה בווקטור המקביל לציר השיקוף.

$$G_{\vec{u},l} = S_l \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ S_l$$

הרכבה של שיקוף-הזזה ביחס לישר l_1 עם שיקוף-הזזה ביחס לישר l_2 תלויה במצב הדדי בין שני ישרים.

א1) $l_1 \parallel l_2$ $(l_1 \neq l_2)$

$$G_{\vec{u},l_1} \circ G_{\vec{v},l_2} = T_{\vec{u}} \circ S_{l_1} \circ T_{\vec{v}} \circ S_{l_2} = T_{\vec{u}} \circ S_{l_1} \circ S_{l_2} \circ T_{\vec{v}} =$$
$$= T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\overrightarrow{u+a+v}}$$

א2) $l_1 = l_2 = l$

$$G_{\vec{u},l_1} \circ G_{\vec{v},l_2} = T_{\vec{u}} \circ S_{l_1} \circ T_{\vec{v}} \circ S_{l_2} = T_{\vec{u}} \circ S_l \circ S_l \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u}} \circ Id \circ T_{\vec{v}}$$
$$= T_{\overrightarrow{u+v}}$$

ב) l_1 ו- l_2 נחתכים בנקודה O בזוית שונה מ $2\pi n$.

$$G_{\vec{u},l_1} \circ G_{\vec{v},l_2} = T_{\vec{u}} \circ S_{l_1} \circ T_{\vec{v}} \circ S_{l_2} = T_{\vec{u}} \circ S_{l_1} \circ S_{l_2} \circ T_{\vec{v}} =$$
$$= T_{\vec{u}} \circ R_A^{\alpha} \circ T_{\vec{v}}$$

α שווה לפעמים זוית בין l_1 ו- l_2.

ראינו שניתן להציג את הזזה כהרכבת שני סיבובים:

$$T_{\vec{u}} = R_B^{\alpha} \circ R_A^{-\alpha} \quad \text{כאשר } \vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$$

$$T_{\vec{v}} = R_B^{-\alpha} \circ R_C^{\alpha} \quad \text{כאשר } \vec{v} = 2\overrightarrow{CB}$$

$$T_{\vec{u}} \circ R_A^{\alpha} \circ T_{\vec{v}} = R_B^{\alpha} \circ R_A^{-\alpha} \circ R_A^{\alpha} \circ R_B^{-\alpha} \circ R_C^{\alpha} = R_B^{\alpha} \circ Id \circ R_B^{-\alpha} \circ R_C^{\alpha}$$
$$= R_B^{\alpha} \circ R_B^{-\alpha} \circ R_C^{\alpha} = Id \circ R_C^{\alpha} = R_C^{\alpha}$$

כאשר $C: \overrightarrow{CA} = \frac{\vec{v}-\vec{u}}{2}$

<u>הרכבה של הזזה וסיבוב</u>

הרכבה של הזזה וסיבוב היא סיבוב

$$T_{\vec{u}} \circ R_A^{\alpha}$$

נציג את הזזה בצורה הבאה:

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} \text{ כאשר } T_{\vec{u}} = R_B^{\alpha} \circ R_A^{-\alpha}$$

$$T_{\vec{u}} \circ R_A^{\alpha} = R_B^{\alpha} \circ R_A^{-\alpha} \circ R_A^{\alpha} = R_B^{\alpha}$$

<u>הרכבה של הזזה ושיקוף-הזזה</u> ($\vec{u} \neq 0$)

$$T_{\vec{v}} \circ G_{\vec{u},l} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} \circ S_l = T_{\overrightarrow{v+u}} \circ S_l$$

הרכבה של הזזה בווקטור $\vec{v} \neq 0$ ושיקוף-הזזה בווקטור $\vec{u} \neq 0$ היא שיקוף-הזזה בווקטור $\overrightarrow{v+u}$
במקרה של $\vec{u} = 0$ שהוא הרכבה של הזזה ושיקוף נקבל הזזה-שיקוף

$$T_{\vec{v}} \circ S_l = G_{\vec{v},l}$$

<u>הרכבה של סיבוב והזזה</u>

$$R_A^{\alpha} \circ T_{\vec{u}} = R_A^{\alpha} \circ R_A^{-\alpha} \circ R_B^{\alpha} = R_B^{\alpha}$$

הרכבה של סיבוב בזווית $\alpha \neq 2\pi n$ סביב A והזזה בווקטור $\vec{u}$ היא סיבוב בזווית α סביב B כאשר $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$

<u>הרכבה של שיקוף וסיבוב</u>

$$R_A^{\alpha} \circ S_m$$

אם מרכז הסיבוב נמצא על ציר m אז קל לראות שההרכבה היא שיקוף עם ציר שיקוף n בסיבוב של חצי זווית.

$$R_A^{\alpha} \circ S_m = S_n$$

אם מרכז הסיבוב לא נמצא על ציר m, אז נציג את הסיבוב כהרכבה של הזזה וסיבוב ביחס לנקודה על הישר B נמצאת על הישר m.

$$R_A^{\alpha} \circ S_m = T_{\overrightarrow{2AB}} \circ R_B^{\alpha} \circ S_m = T_{\overrightarrow{2AB}} \circ S_n = G_{n,\overrightarrow{2AB}}$$

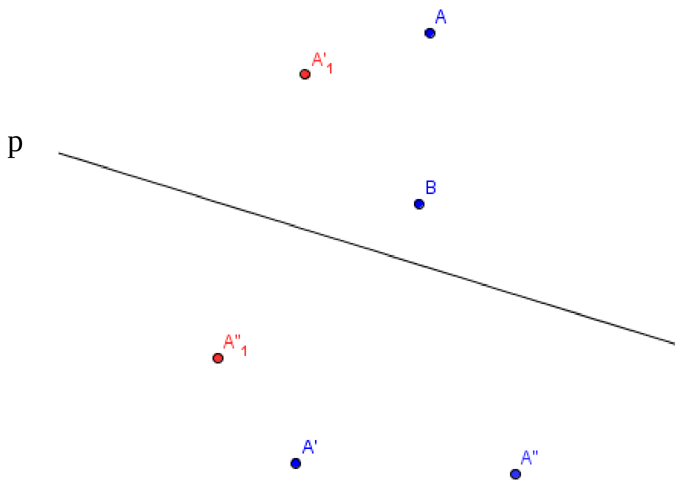
<u>הרכבה של סיבוב ושיקוף-הזזה</u> ($\vec{u} \neq 0$)

$$R_A^{\alpha} \circ G_{\vec{u},m} = R_A^{\alpha} \circ T_{\vec{u}} \circ S_m = R_A^{\alpha} \circ S_m \circ T_{\vec{u}} = S_n \circ T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = G_{b,\vec{w}}$$

הרכבה של סיבוב ושיקוף אינה חילופית.

$$R_A^{\alpha} \circ S_l \neq S_l \circ R_A^{\alpha}$$

דוגמא נגדית:



נתונה נקודה A. נבצע עליה סיבוב של 45° ביחס לנקודה B נקבל נקודה A'_1 לאחר מכן נבצע שיקוף p נקבל נקודה A''_1.
עכשיו נבצע שיקוף של נקודה נתונה A ביחס לישר p נקבל נקודה A' ואחריו נבצע סיבוב ביחס לנקודה B של 45° נקבל נקודה A". הנקודות A''_1 ו- A" לא מתלכדות ולכן ההרכבה זו אינה חילופית.

<u>הרכבה של כל פעולה ופעולה הפוכה לה היא העתקת זהות.</u>
הזזה בווקטור $\vec{u}$ ולאחריה הזזה בווקטור $-\vec{u}$ (ווקטור בכיוון הנגדי) משאירה כל נקודה במקום.

$$T_{\vec{u}} \circ T_{-\vec{u}} = T_{\vec{0}} = \mathrm{Id}$$

סיבוב בזווית l סביב נקודה O ולאחריו סיבוב בזווית -α (סיבוב בכיוון הנגדי) משאיר כל נקודה במקום.

$$R_O^{\alpha} \circ R_O^{-\alpha} = R_O^{0} = \mathrm{Id}$$

שיקוף ביחס לישר l ואחריו שיקוף נוסף ביחס לאותו ישר l משאיר כל נקודה במקום.

$$S_l \circ S_l = Id$$

הרכבה של שיקוף-הזזה ביחס לישר l בווקטור מקביל לציר השיקוף $\vec{u} \neq 0$ עם שיקוף-הזזה ביחס לישר l בווקטור בכיוון הנגדי $-\vec{u}$ היא העתקת זהות.

$$G_{\vec{u},l} \circ G_{-\vec{u},l} = (S_l \circ T_{\vec{u}}) \circ (S_l \circ T_{-\vec{u}}) = (S_l \circ T_{\vec{u}}) \circ (T_{-\vec{u}} \circ S_l)$$
$$= S_l \circ (T_{\vec{u}} \circ T_{-\vec{u}}) \circ S_l = S_l \circ Id \circ S_l = S_l \circ S_l = Id$$

נסכם את הרכבת איזומטריות בטבלה

⌊	**T**	**R**	**G**
T	T	R	G
R	R	R או T	G

T או R	G	G	**G**

הערה: נתייחס לשיקוף ביחס לישר כמקרה פרטי של שיקוף-הזזה בווקטור 0.

<u>2.2 הקלסיפיקציה של העתקות במישור לפי מספר נקודות השבת שלהם.</u>

נוכיח את המשפט הבא:
1) אם להעתקה יש 3 נקודות שבת שלא נמצאות על ישר אחד אז זאת העתקת זהות.

2) אם להעתקה יש 2 נקודות שבת A, B אז קיימות שתי אפשרויות:
א) אם העתקה שומרת אוריינטציה אז היא העתקת זהות Id,
ב) אם העתקה הופכת אוריינטציה אז היא שיקוף ביחס לישר ששתי הנקודות נמצאות עליו $S_{(AB)}$.

3) אם להעתקה יש בדיוק נקודת שבת אחת אז היא סיבוב R_O^{α}, $\alpha \neq 2\pi n$

4) אם להעתקה אין נקודות שבת,אז
א) אם העתקה שומרת אוריינטציה אז היא הזזה $T_{\vec{u}}$
ב) אם העתקה הופכת אוריינטציה אז היא שיקוף-הזזה $G_{\vec{u},l} = T_{\vec{u}} \circ S_l$

הוכחה:
1) נתונה העתקה G שיש לה 3 נקודות שבת שונות $A \neq B \neq D$
ניקח $C \neq A,B,D$
לפי הנתון ש D,B,A נקודות שבת נובע
$|G(C)A| = |CA|$
$|G(C)D| = |CD|$
$|G(C)B| = |CB|$

נתבונן בשלושה מעגלים עם מרכזים בנקודות D,B,A העוברים דרך הנקודה C.
מעגלים אלה עוברים גם דרך הנקודה $G(C)$. עתה, אם $C \neq G(C)$, כל שלושת המרכזים נמצאים על האנך האמצעי לקטע $CG(C)$. סתירה.
לכן, $G(C) = C \Leftarrow G = Id$.

2) נתונה העתקה $G \neq Id$ שיש לה שתי נקודות שבת לא שוות אחת לשנייה $A \neq B$.
ניקח נקודה C לא על הישר AB. יהי $C' = G(C)$. סעיף 1) של המשפט גורר כי $C \neq C'$. שני מעגלים עם מרכזים ב-A ו-B שעוברים דרך נקודה C, חייבים לעבור גם דרך C'. לכן $C' = S_{(AB)}(C)$.
להרכבה $S_{(AB)} \circ G$ יש שלוש נקודות שבת A, B, C - לכן היא זהות ואז $G = S_{(AB)}$.

3) תהי G העתקה שיש לה נקודת שבת O אחת בלבד ו- G מעבירה את נקודה A ל-נקודה A'
$G(A)=A'$.
נניח ש G שומרת אוריינטציה, ניקח הרכבה של G עם סיבוב סביב לנקודה O המעביר את A' ל-A.
קיבלנו העתקה השומרת אוריינטציה ובעלת שתי נקודות שבת O ו- A מכך שהעתקה הזאת היא זהות,
$R_O^{\alpha} \angle G = Id$ נובע כי $G = R_O^{-\alpha}$.
לכן G היא העתקה הפוכה להעתקת סיבוב סביב O המעבירה את A' ל- A, זאת אומרת G היא סיבוב סביב O המעביר את A ל- A'.

נבחן אפשרות ש G אינה שומרת אוריינטציה, ניקח הרכבה של G עם שיקוף ביחס לישר העובר דרך נקודה O ומאונך ל 'AA. במקרה זה קיבלנו העתקה שומרת אוריינטציה ובעלת שתי נקודות שבת O ו- A . זאת אומרת היא העתקת זהות.

$$S_l \circ G = Id$$
$$\Downarrow$$
$$G = S_l$$

4) תהי G העתקה כלשהי ללא נקודות שבת, אשר מעבירה את נקודה A ל- 'A (אז A≠A')
ההרכבה של G עם הזזה בווקטור A'A משאירה את A במקום.
אם G שומרת אוריינטציה אז קיבלנו שהרכבה $T_{A'A} \circ G$ היא סיבוב R_A^α לפי (3).

$$T_{\overrightarrow{A'A}} \circ G = R_A^\alpha$$

אז $G = T_{\overrightarrow{AA'}} \circ R_A^\alpha$
אם $R_A^\alpha \neq Id$ אז $T_{\overrightarrow{AA'}} \circ R_A^\alpha$ היא סיבוב ואז יש לה נקודת שבת, סתירה לנתון.
קיבלנו ש $R_A^\alpha = Id$ ואז $G = T_{\overrightarrow{AA'}}$.

אם G הופכת אוריינטציה אז $T_{A'A} \circ G$ הופכת אוריינטציה ושומרת נקודה A

מכך נובע לפי הסעיפים (1)- (3) $T_{\overrightarrow{A'A}} \circ G = S_l$

$G = T_{\overrightarrow{AA'}} \circ S_l = G_{m,\vec{v}}$ לפי מה שהוסבר למעלה.

אפשר לסכם בטבלה

איזומטריה	נקודות שבת	שמירת אוריינטציה
הזזה	אין	שומרת אוריינטציה
סיבוב סביב נקודה	נקודת שבת אחת והיא מרכז הסיבוב	שומר אוריינטציה
שיקוף-הזזה ($\vec{u} \neq 0$)	אין	לא שומר אוריינטציה
שיקוף-הזזה ($\vec{u} = 0$) (שיקוף)	אין סוף נקודות שהן ישר השיקוף	לא שומר אוריינטציה

הערה: שיקוף ביחס לישר הוא מקרה פרטי של שיקוף-הזזה בווקטור 0.

2.3 טרנספורמציה ליניארית

יהיו V ו- W מרחבים ווקטוריים מעל שדה F. פונקציה $\varphi:V\to W$ נקראת טרנספורמציה לינארית או העתקה לינארית אם:

לכל $v_1, v_2\in V$ ולכל $\alpha_1, \alpha_2\in F$

$\varphi(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2) = \alpha_1\varphi(v_1) +\alpha_2\varphi(v_2)$

אם O נקודת שבת של איזומטריה, אז G מגדירה טרנספורמציה לינארית לפי נוסחה הבאה:

$$\varphi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OG(B)}$$

כל העתקה איזומטריה המשאירה את הראשית במקומה היא טרנספורמציה אורתוגונאלית.

כל טרנספורמציה ליניארית ניתן להציג בעזרת מטריצה מייצגת. $f(x) = Ax$

בבסיס $\{e_1,e_2\}$

אם נסמן:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \varphi(\overrightarrow{e_1})$$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \varphi(\overrightarrow{e_2})$$

אז

מטריצה מייצגת $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

כל טרנספורמציה אורתוגונאלית ניתנת לייצוג בעזרת מטריצה אורתוגונאלית.

(מטריצה אורתוגונאלית A^t היא מטריצה $n \times n$ כך ש $AA^t = A^tA = I$)

טרנספורמציה אורתוגונאלית $T:R^2\to R^2$ היא בהכרח טרנספורמציית הסיבוב או טרנספורמציה השיקוף.

תהא A מטריצה אורתוגונאלית 2 x2 $A^t A= I$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a^2 + c^2 = 1$$
$$b^2 + d^2 = 1$$
$$\Downarrow$$

$|a|, |b|, |c|, |d| \le 1$ וניתן לרשום $a = \cos\varphi$, $c = \sin\varphi$, $b = \sin\alpha$, $d = \cos\alpha$

התנאי $ad+bc=0$ נותן לנו

$$ab + cd = \cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha = 0$$

$$\sin(\varphi+\alpha) = 0$$

קיבלנו שתי אפשרויות:

א) $\varphi+\alpha= 0 \leftarrow \alpha = -\varphi$

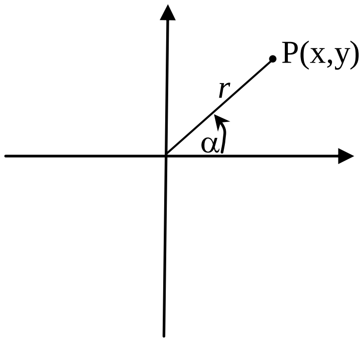
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\varphi & sin\alpha \\ sin\varphi & cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$$

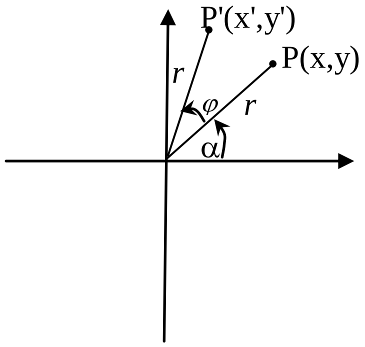
נסמן את A ב- r_φ. r_φ מטריצת סיבוב של העתקת סיבוב בזווית φ

$$r_\varphi = \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det r_\varphi = 1$$

אפשר להראות כי העתקת סיבוב היא טרנספורמציה לינארית.
נרשום את שיעורי נקודה P בעזרת קאורדינטות פולריות: r (רדיוס) - מרחק מהנקודה לראשית הצירים,
α - זוית בין הרדיוס לכיוון החיובי של ציר x.





אפשר לרשום את שיעורי הנקודה בצורה הבאה:
$x = rcos\alpha,\ y = rsin\alpha$
נסובב את הנקודה P סביב ראשית הצירים בזווית φ.

נקבל נקודה 'P אשר קואורדינאטות שלה הן (x',y').
$x' = rcos(\alpha+\varphi),\ \ y'= rsin(\alpha+\varphi)$

$(x',y') = (rcos(\alpha+\varphi), rsin(\alpha+\varphi)) = (rcos\alpha cos\varphi - rsin\alpha sin\varphi,\ rsin\alpha cos\varphi + rcos\alpha sin\varphi)$
לפי נוסחת sin ו- cos של סכום זוויות

$$(x',y') = (xcos\varphi - ysin\varphi,\ ycos\varphi + xsin\varphi)$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (xcos\varphi - ysin\varphi, ycos\varphi + xsin\varphi)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xcos\varphi - ysin\varphi \\ xsin\varphi + ycos\varphi \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$$

A מטריצה מייצגת של טרנספורמציה לינארית סיבוב

ב) $\varphi+\alpha = \pi \leftarrow \alpha = \pi - \varphi$

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cos\varphi & sin\alpha\\ sin\varphi & cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cos\varphi & \sin(\pi-\varphi)\\ sin\varphi & cos(\pi-\varphi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cos\varphi & sin\varphi\\ sin\varphi & -cos\varphi\end{pmatrix}$$

נסמן את A ב- s_φ.

$$s_\varphi=\begin{pmatrix}cos\varphi & sin\varphi\\ sin\varphi & -cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$\det s_\varphi=-1$$

נראה כי הישר $y=tan\frac{\varphi}{2}x$ הוא ישר שבת של העתקת שיקוף.

$$\begin{pmatrix}cos\varphi & sin\varphi\\ sin\varphi & -cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cos\varphi & sin\varphi\\ sin\varphi & -cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ tan\frac{\varphi}{2}x\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}xcos\varphi+xsin\varphi tan\frac{\varphi}{2}\\ xsin\varphi-xcos\varphi tan\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xcos\varphi+xsin\varphi\frac{1-cos\varphi}{sin\varphi}\\ xsin\varphi-xcos\varphi\frac{1-cos\varphi}{sin\varphi}\end{pmatrix}$$

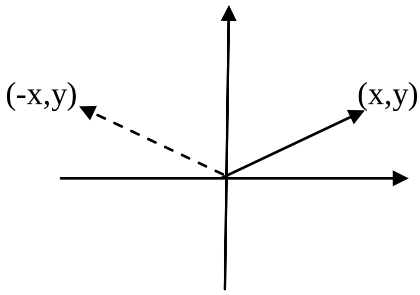
$$=\begin{pmatrix}x(\frac{cos\varphi sin\varphi+sin\varphi-cos\varphi sin\varphi}{sin\varphi}\\ x(\frac{sin^2\varphi-cos\varphi+cos^2\varphi}{sin\varphi})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ tan\frac{\varphi}{2}x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

s_φ מטריצת שיקוף ביחס לישר $y=tan\frac{\varphi}{2}x$

נראה מספר דוגמאות:

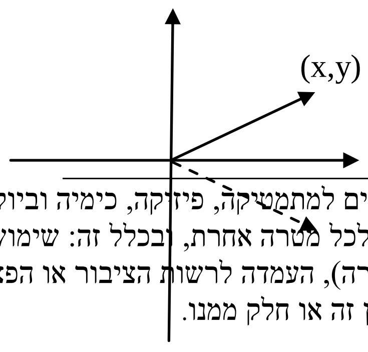
א) $\varphi=\pi$ - ישר השיקוף הוא ציר y.

$$\begin{pmatrix}cos\varphi & sin\varphi\\ sin\varphi & -cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cos\pi & sin\pi\\ sin\pi & -cos\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\ y\end{pmatrix}$$



ב) $\varphi=0$ - ישר השיקוף הוא ציר x.

$$\begin{pmatrix}cos\varphi & sin\varphi\\ sin\varphi & -cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cos0 & sin0\\ sin0 & -cos0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ -y\end{pmatrix}$$



(x,-y)

2.4 הומומורפיזם

סיבוב והזזה הם איזומטריות שומרות אוריינטציה, שיקוף ושיקוף-הזזה הן איזומטריות הופכות אוריינטציה. זה מגדיר הומומורפיזם: ψ: Iso(☼^{2}) →☪$_2$

$$\psi \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{איזומטריה שומרת אויינטציה} \\ -1 & \text{איזומטריה הופכת איריינטציה} \end{cases}$$

לטרנספורמציה לינארית אורתוגונאלית מתקיים:

$\{A|AA^t = I$ ❶ $detA = \pm 1\}$

det היא הומומורפיזם מטרנספורמציות ליניאריות אורתוגונאליות ל- ☪$_2$.

אם G איזומטריה שומרת ראשית הצירים ו φ טרנספורמציה מוגדרת לפי

$$\varphi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OG(A)}$$

אז

$\psi(G) = \det \varphi$.

3. מאמר

נושא המאמר: סימטריות - העתקות איזומטריות במישור, שימושן בהוכחות גיאומטריות, גרפים של פונקציות ופתרון בעיות מתמטיות

תקציר: במאמר דרכים שונות להוכחות גיאומטריות בעזרת סימטריות, הקשר בין גרפים של פונקציות וסימטריות ודוגמאות לפתרון בעיות אולימפיאדה מתחומים מתמטיים שונים בעזרת סימטריה. הרקע המתמטי מתמקד בחבורות סימטריה של צורות הנדסיות וקלסיפיקציה של איזומטריות לאיזומטריות לפי נקודות שבת ואוריינטציה.

סימטריות - העתקות איזומטריות במישור (טרנספורמציות איזומטריות)

סימטריה היא אחד המושגים החשובים העובר כחוט השני בכל תחומי המדע.

בכל מקום ניתן לפגוש סימטריה. התפתחות הבנת הסימטריה עוברת דרך כל היסטוריית היצירה של האדם. כבר בתחילתו של הידע האנושי היה שימוש בעקרון הסימטריה, שימוש זה בסימטריה התרחב ונמצא כעת בכל תחומי המדע המודרני ללא יוצא מן הכלל. עיקרון הסימטריה משחק תפקיד חשוב בפיסיקה ומתמטיקה, כימיה וביולוגיה, טכנולוגיה וארכיטקטורה, שירה ומוסיקה.

"It is the harmony of the diverse parts, their symmetry, their happy balance; in a word it is all that introduces order, all that gives unity, that permits us to see clearly and to comprehend at once both the ensemble and the details"
Jules Henri Poincaré (1854-1912)

"זוהי הרמוניה של חלקים שונים, הסימטריה שלהם, האיזון המאושר שלהם; בקיצור, זה כל מה שמכניס סדר, כל מה שנותן אחדות, מה שמאפשר לנו לראות בבהירות ולהבין בבת אחת הן את המכלול ואת הפרטים"
אנרי פואנקרה מתמטיקאי צרפתי

אז מה זה בעצם סימטריה? ומדוע היא נמצאת בכל מקום ובכל תחום?

הימצאות הסימטריה בכל מקום ובכל תחום היא נושא מורכב ופילוסופי שמאמר זה אינו מתיימר לעסוק בו. במאמר זה אתייחס לסימטריה כהעתקה איזומטרית כאשר מוקד העניין במאמר הוא חשיפת מורי ותלמידי חטיבת ביניים וחטיבה עליונה לשימוש בהעתקות איזומטריות בנושאים הבאים:
הוכחות בגיאומטריה אלמנטרית, הקשר בין גרפים של פונקציות לבין סימטריה ובפתרון שאלות מאולימפיאדה זוטא בעזרת סימטריה.

3.1 רקע מתמטי

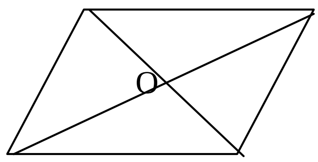
העתקה של נקודות המישור אל עצמה השומרת על המרחקים בין הנקודות נקראת העתקה איזומטרית.

במאמר זה נשתמש במושגים ומונחים רבים. להלן טבלה המסכמת את המושגים והמונחים השייכים לאיזומטריות:

סוגי איזומטריה	סימון	מאופיין על ידי	שומר אוריינטציה	נקודות שבת	מספר שיקופים בעזרתם אפשר להרכיב איזומטריה
שיקוף ביחס לישר Reflection	S_l סימטריה שיקופית ביחס לישר l	ציר סימטריה	לא	אין סוף נקודות שבת שהן ישר השיקוף	1
הזזה מקבילה (לא טריוויאלית) Translation	$T_{\vec{u}}$ הזזה בווקטור $\vec{u}$	וקטור הזזה	כן	אין	2 (שני שיקופים בצירים מקבילים)
סיבוב סביב נקודה (לא טריוויאלי) Rotation	R_O^α סיבוב בזוית α סביב נקודת שבת O.	מרכז וזווית הסיבוב	כן	נקודת שבת אחת והיא מרכז הסיבוב	2 (שני שיקופים בצירים נחתכים)
שיקוף-הזזה בציר שיקוף הזזה (הזזה לא טריוויאלית) Glide Reflection	$G_{\vec{u},l}$ – שיקוף-הזזה הזזה בווקטור $\vec{u}$ ולאחר מכאן שיקוף ביחס לישר l המקבילי לווקטור הזזה.	ישר השיקוף ווקטור הזזה המקביל לישיר השיקוף	לא	אין	3 (אפשרות א - שני שיקופים בצירים מקבילים ושלישי בציר נחתך, אפשרות ב' – שלושה שיקופים בצירים לא מקבילים שאינם נחתכים בנקודה אחת)
סימטריה מרכזית	Z_A סימטריה מרכזית ביחס לנקודה A	סיבוב של 180° סביב נקודה (מקרה פרטי של סיבוב)	כן	נקודת שבת אחת והיא מרכז הסיבוב	2 (שני שיקופים בצירים מאונכים)
העתקת זהות	Id		כן	כל הנקודות	2 (שני שיקופים בצירים מתלכדים)

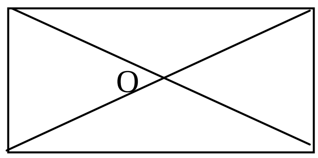
3.2 חבורות סימטריה של צורות הנדסיות במישור

<u>מקבילית (שהיא לא מלבן ולא מעוין)</u>

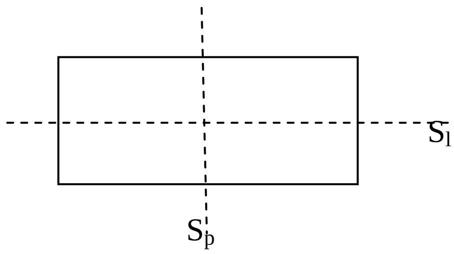


במקבילית קיים רק מרכז הסימטריה הסיבובית מסדר 2. נקודת שבת - מרכז הסימטריה היא נקודת החיתוך של אלכסונים.
החבורה המתאימה לסימטריות של מקבילית היא:
$C_2=\{Z_o, Id\}$

<u>מלבן (שהוא לא ריבוע)</u>
למלבן כמו למקבילית יש נקודת שבת של סימטריה סיבובית בנקודת חיתוך של אלכסונים

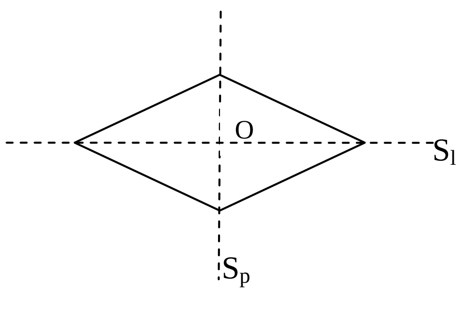


בנוסף למלבן 2 צירי סימטריה שיקופית.



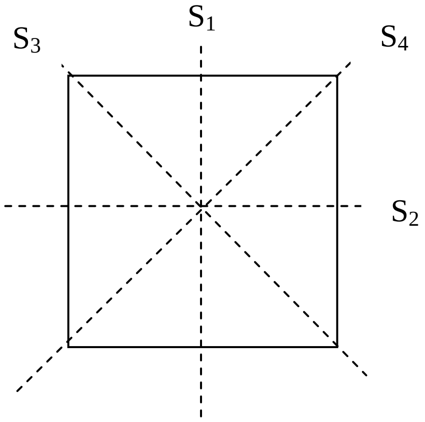
החבורה המתאימה לסימטריות של מלבן היא:
$D_2 \cong C_2 \times C_2 \quad \Leftrightarrow \quad \{ Id, Z_o, S_p, S_l\}$

<u>מעוין (שהוא לא ריבע)</u>
למעוין כמו למקבילית יש נקודת שבת של סימטריה סיבובית בנקודת חיתוך של אלכסונים



בנוסף אלכסונים מהווים גם צירי סימטריה לכן חבורת הסימטריה של מעוין היא כמו של מלבן:
$D_2 \cong C_2 \times C_2 \quad \Leftrightarrow \quad \{ Id, Z_o, S_p, S_l \}$

<u>ריבוע:</u>



חבורת הסימטריה של ריבוע היא
$D_4 = \{ Id, S_1, S_2, S_3, S_4, R, R^2, R^3 \}$.

$(R^2 = Z_0)$

נבנה את לוח לפעולת הצירוף

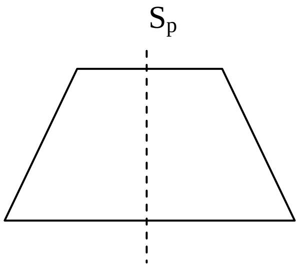
	Id	S_1	S_2	S_3	S_4	R	R^2	R^3
Id	Id	S_1	S_2	S_3	S_4	R	R^2	R^3
S_1	S_1	Id	R^2	R^3	R	S_4	S_2	S_3
S_2	S_2	R^2	Id	R	R^3	S_3	S_1	S_4
S_3	S_3	R	R^3	Id	R^2	S_1	S_4	S_2
S_4	S_4	R^3	R	R^2	Id	S_2	S_3	S_1
R	R	S_3	S_4	S_2	S_1	R^2	R^3	Id
R^2	R^2	S_2	S_1	S_4	S_3	R^3	Id	R
R^3	R^3	S_4	S_3	S_1	S_2	Id	R	R^2

S_1 – שיקוף בציר אנכי
S_2 – שיקוף בציר אופקי

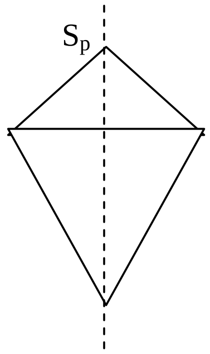
S_3 – שיקוף בציר אלכסוני
S_4 – שיקוף בציר אלכסוני

R – סבוב של $90°$.
R^2 – סבוב של $180°$ (סימטריה מרכזית Z_0)
R^3 – סבוב של $270°$.

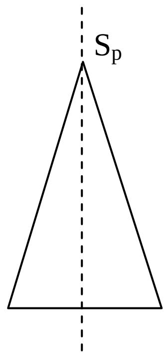
<u>טרפז שווה שוקיים:</u>
לטרפז שווה שוקיים יש רק ציר סימטריה שיקופית s
שלא עובר דרך הקודקודים
ולכן חבורת הסימטריה שלו מסדר 2
$\{ Id, S_p \}$



<u>דלתון</u>
לדלתון יש ציר סימטריה שיקופית s שעובר דרך שני קודקודיו הנגדיים
ולכן חבורת הסימטריה שלו מסדר 2
$\{ Id, S_p \}$

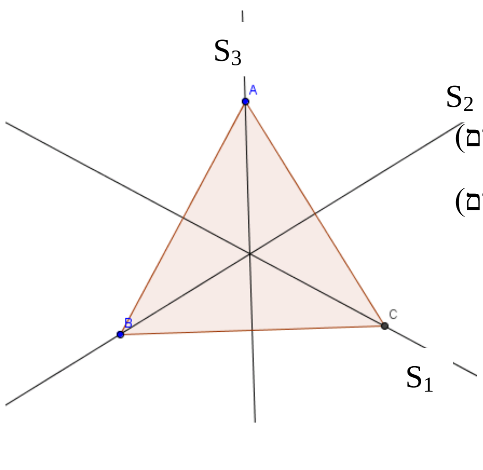


<u>משולש שווה שוקיים (שהוא לא משולש שווה צלעות):</u>
למשולש שווה שוקיים יש רק ציר סימטריה שיקופית s
שעובר דרך קודקוד הראש של המשולש
ולכן חבורת הסימטריה שלו מסדר 2
$\{ Id, S_p \}$



<u>משולש שווה צלעות</u>
למשולש שווה צלעות יש 3 סימטריות סיבוביות
$R = Id$ – סיבוב של $0°$.
$R_O^{\frac{2\pi}{3}}$ – סיבוב של $120°$ ביחס לנקודה O (נקודת המפגש של הגבהים)
$R_O^{\frac{4\pi}{3}}$ – סיבוב של $240°$ ביחס לנקודה O (נקודת המפגש של הגבהים)

3 סימטריות שקופיות כאשר צירי הסימטריה הם
אנכים העוברים דרך קודקודי המשולש.
חבורת הסימטריה של משולש שווה צלעות
$D_3=\{ Id, R_O^{\frac{2\pi}{3}}, R_O^{\frac{4\pi}{3}}, S_1, S_2, S_3\}$

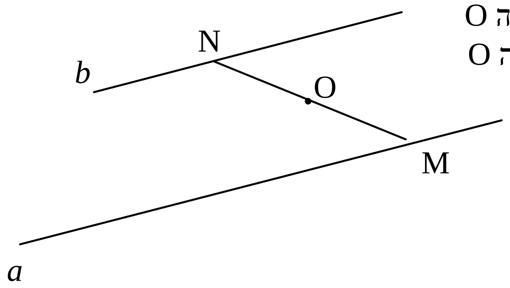


3.3 הוכחת משפטים בגיאומטרית המישור בעזרת סימטריה

משפט עזר: אם ישר a סימטרי לישר b ביחס לנקודה O, אז הישרים a ו- b מקבילים.

הוכחת המשפט:
נבחן שני מקרים: $O\in a$ ו- $O\notin a$.

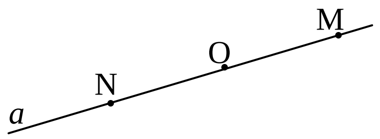
א) $O\notin a$



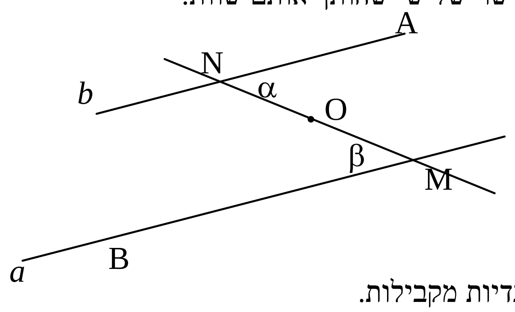
יהי $O\notin a$ כמו בשרטוט, מהנתון שישר a סימטרי לישר b ביחס לנקודה O
נובע שלכל נקודה $N\in b$ קיימת נקודה M סימטרית ל-N ביחס לנקודה O
כך ש $M\in a$.
מכאן $N\notin a$ כי אם נקודה N הייתה שייכת ל-a אז גם הקטע MN
היה שייך ל- a, ובפרט נקודה O הייתה שייכת ל- a, אבל הנחנו ש
$O\notin a$ לכן כל נקודה N הנמצאת על b לא נמצאת על a. מכאן
שלישרים a ו- b אין נקודה משותפת, זאת אומרת ש $a||b$

ב) $O\in a$

יהי $O\in a$ מכאן כל נקודה M של ישר a עוברת לנקודה N שהיא גם על הישר a.
זאת אומרת הישרים a ו- b מתלכדים,
לפי ההגדרה כל ישר מקביל לעצמו, ומכאן $a\parallel b$



משפט אשר אפשר להוכיח בעזרת סימטריה מרכזית הוא משפט של זויות בין ישרים מקבילים.
זויות מתחלפות הנוצרות בין שני ישרים מקבילים (לא מתלכדים) ויישר שלישי שחותך אותם שוות.
הוכחה:
הישרים a ו- b מקבילים ונקודה O היא מרכז הסימטריה לכן
נקודה M על הישר a עוברת לנקודה N על הישר b
והקרן MB עוברת לקרן AN מכך שהזווית β עוברת לזווית α.
זאת אומרת שהזוויות שוות.

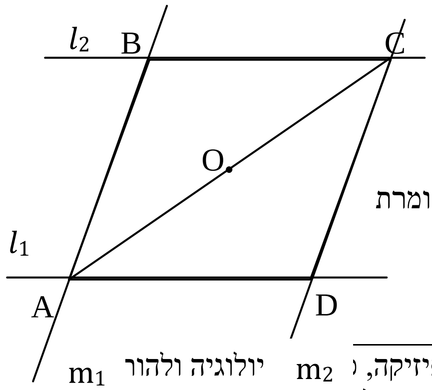


מקבילית: מקבילית לפי הגדרה מרובע בעל שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות.
נוכיח את מתכונותיה של מקבילית בעזרת סימטריה מרכזית

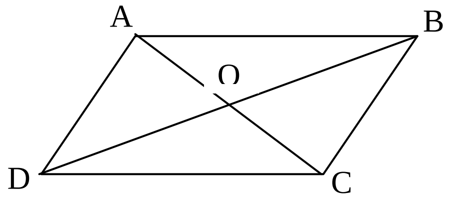
<u>תכונות מקבילית</u>

1) אמצע של אלכסון המקבילית הוא מרכז הסימטריה של מקבילית.

הוכחה:במרובע ABCD נעביר אלכסון AC,
נסמן ב-O מרכז האלכסון.
סימטריה ביחס לנקודה O מעבירה את נקודה A בנקודה C
והישר l_1 עובר לישר העובר דרך הנקודה C ומקביל לישר l_1, זאת אומרת
l_1 עובר לישר l_2. כנ"ל לגבי m_1 , m_2 מכאן שנקודה O מהווה
מרכז הסימטריה של מרובע ABCD .



2) אלכסוני מקבילית נחצים בנקודת החיתוך שלהם.
הוכחה: תהיי נקודה O מרכז הסימטריה של המקבילית. מכך נובע שהקודקודים A ו- C הן נקודות סימטריות ביחס למרכז הסימטריה נקודה O. ולכן אלכסון AC עובר דרך נקודה O ונחצה על ידה.
כנ"ל גם לגבי הקודקודים B ו- D, גם נקודות אלה סימטריות ביחס לנקודה O וכן האלכסון BD עובר דרך נקודה O ונחצה על ידה. מכאן נקודה O היא נקודה משותפת של AC ו- BD ואמצע של כל אחד מהאלכסונים.
מכאן מרכז הסימטריה של המקבילית הוא גם נקודת המפגש של אלכסונים.

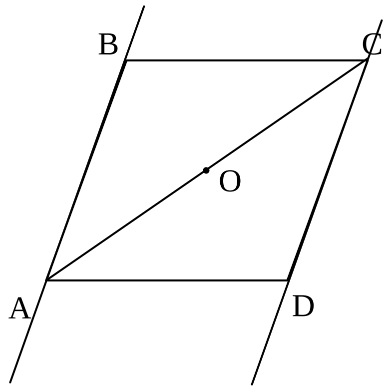


3) צלעות נגדיות במקבילית שוות.
הוכחה: צלעות המקבילית AB ו- DC סימטריות ביחס לנקודה O לפי הגדרת המקבילית ולכן הן שוות.
כנ"ל הצלעות AD ו- BC.

4) זויות נגדיות במקבילית שוות.
הוכחה: זויות A ו- C סימטריות ביחס לנקודה O לפי הגדרה המקבילית ולכן הן שוות.
כנ"ל הזויות D ו- B.

<u>תנאים לכך שמרובע הוא מקבילית</u>

אם במרובע זוג אחד של צלעות נגדיות מקביל וגם שווה אז המרובע הוא מקבילית.
הוכחה: יהי ABCD מרובע שבו AB||CD ו CD=AB.
נעביר אלכסון AC ונסמן את מרכז האלכסון בנקודה O.
מהנתון ש AB||CD נובע שישרים AB ו- CD סימטריים זה לזה ביחס לנקודה O. מהנתון ש CD =AB נובע שגם הנקודות B ו- D סימטריות ביחס לנקודה O. מכאן שנקודה O היא מרכז הסימטריה של מרובע ABCD ולכן AD || BC ABCD מקבילית.



3.4 העתקות איזומטריות במישור וגרפים של פונקציות.

נבחן את התנועות האיזומטריות ביחס לגרף של פונקציה f(x).

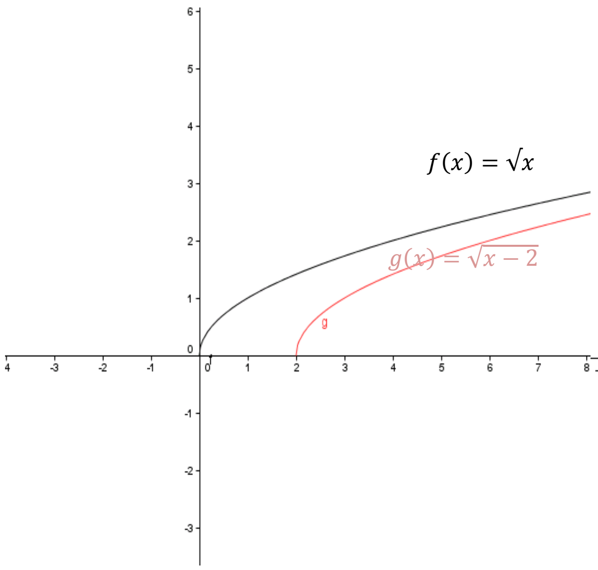
- הזזה
- סימטריה מרכזית Z_O ביחס לנקודה O ראשית הצירים.
- שיקוף בציר שיקוף (ציר הסימטריה)
- שיקוף-הזזה בציר שיקוף הזזה

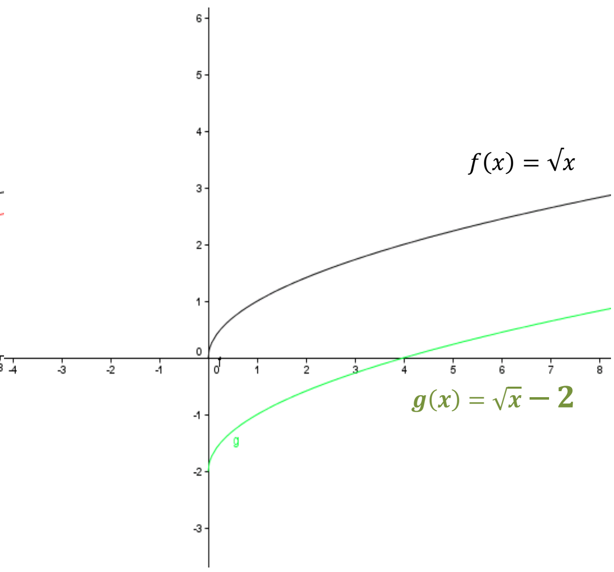
נתון גרף של פונקציה f(x).
ניתן לקבל גרפים של פונקציות הבאות בעזרת תנועות איזומטריות:

<u>הזזה</u>

גרף הפונקציה f(x+b) מתקבל כאשר מזיזים את גרף הפונקציה f(x) הזזה אופקית על ציר x , (אם b>0 הזזה שמאלה, אם b<0 הזזה ימינה).
תהיה $A(x_0,y_0)$ נקודה הנמצאת על גרף הפונקציה f(x).

גרף הפונקציה f(x)+b מתקבל כאשר מזיזים את גרף הפונקציה f(x) הזזה אנכית על ציר y , (אם b>0 הזזה למעלה, אם b<0 הזזה למטה).





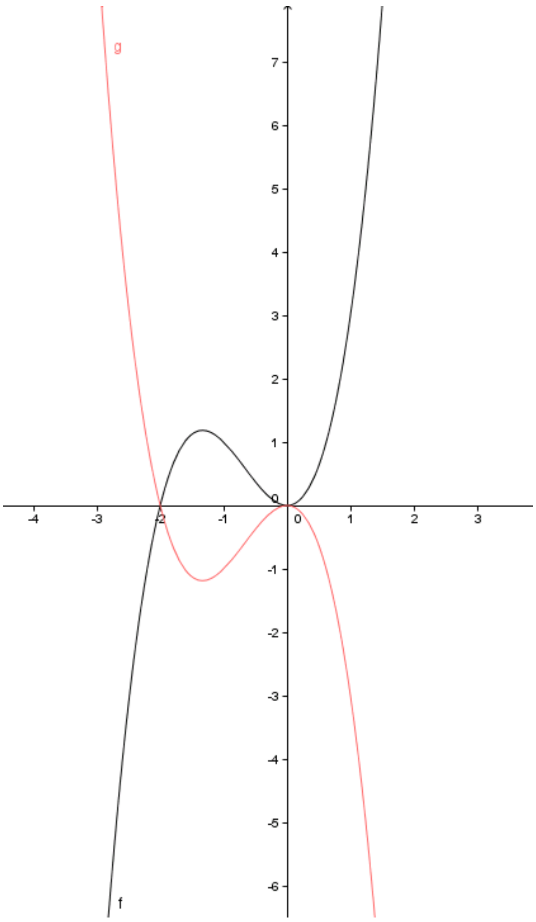
פונקציות מחזוריות
ניתן לראות את הגרף של פונקציה מחזורית כהזזה של חלק מגרף הפונקציה הזזה אופקית על ציר x בגודל של מחזור.

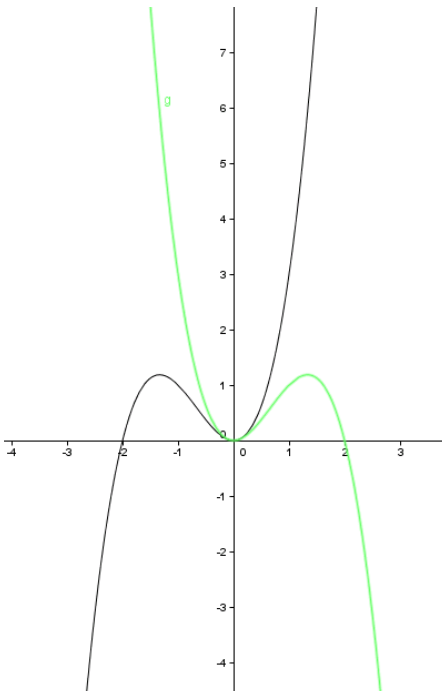
שיקוף

גרף הפונקציה $-f(x)$ הוא שיקוף של גרף הפונקציה $f(x)$ ביחס לציר x.

גרף הפונקציה $f(-x)$ הוא שיקוף של גרף הפונקציה $f(x)$ ביחס לציר y.

$f(x)= x^3+2x^2$ $g(x)= -(x^3+2x^2)$ $f(x)= x^3+2x^2$ $g(x)= (-x)^3+2(-x)^2$

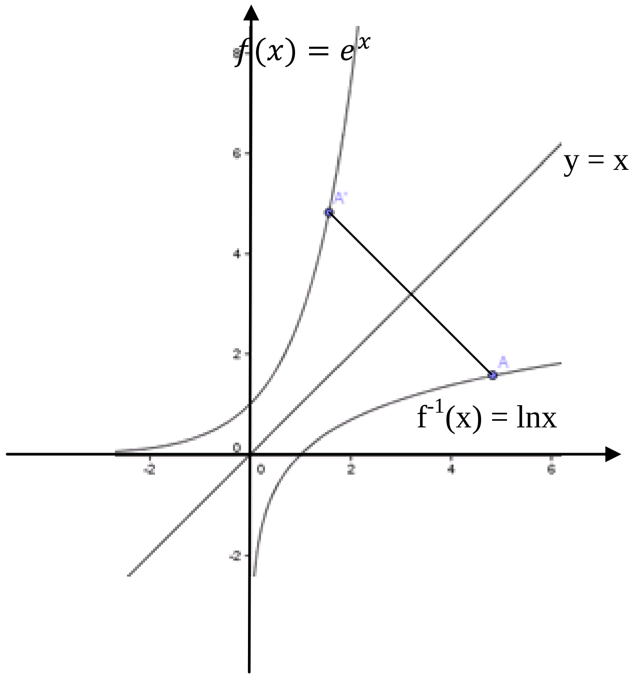




גרף הפונקציה $|f(x)|$ מתלכד עם גרף הפונקציה $f(x)$ כאשר $f(x)⌑0$ ושווה לגרף של $-f(x)$ כאשר $f(x)<0$.

גרף הפונקציה $f(|x|)$ מתלכד עם גרף הפונקציה $f(x)$ כאשר $x⌑0$ ושווה לגרף של $f(-x)$ כאשר $x<0$.

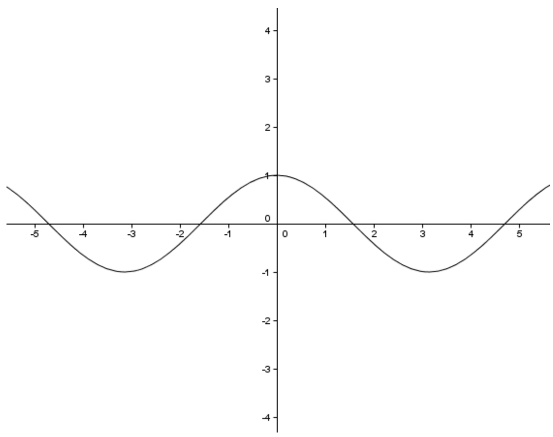
גרפים של פונקציות הפוכות סימטריות לגבי הישר y = x



אפשר לראות שהנקודות A ו- 'A הנמצאות על הגרפים של $f^{-1}(x)$ ו- f(x) בהתאמה הן סימטריות ביחס לישר y = x.

גרף של פונקציה זוגית סימטרי לגבי ציר y כי $f(x) = f(-x)$

f(x) = cosx



נסמן ב- $\Gamma_{f(x)}$ גרף של פונקציה f(x) ,

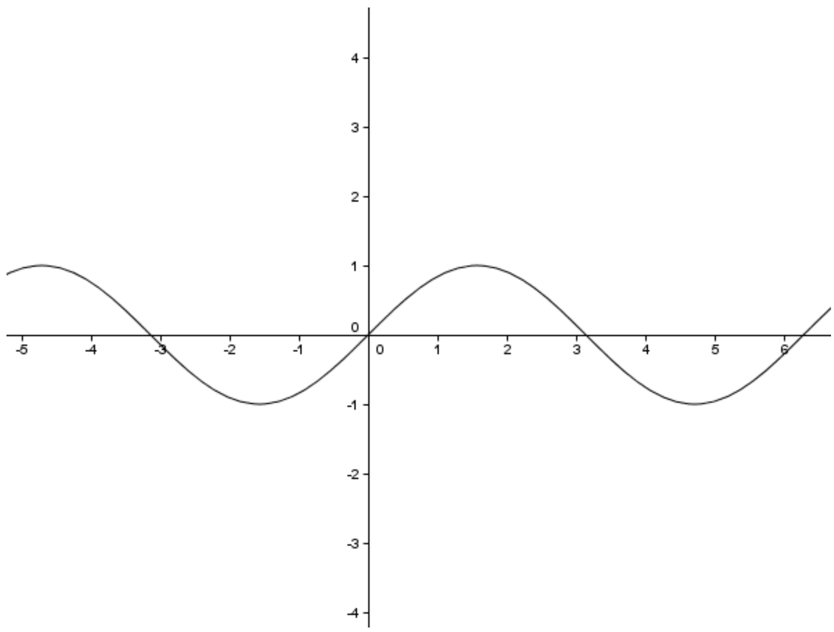
$$\Gamma_{f(-x)} = S_y(\Gamma_{f(x)})$$

<u>Z_0 סימטריה מרכזית ביחס לנקודה O ראשית הצירים</u>

לגרף של פונקציה אי זוגית יש סימטריה סיבובית סביב נקודת השבת שהיא ראשית הצירים.

$f(x) = -f(-x)$

$f(x) = \sin x$

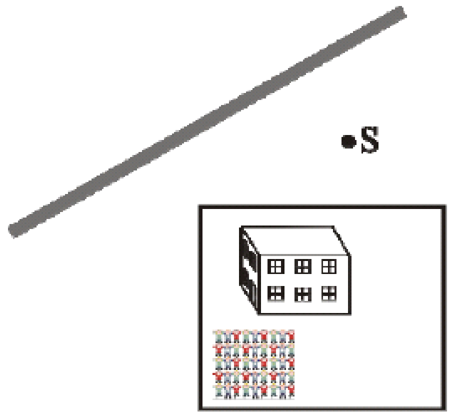


$$\Gamma_{-f(-x)} = S_x \circ S_y(\Gamma_{f(x)}) = Z_0(\Gamma_{f(x)})$$

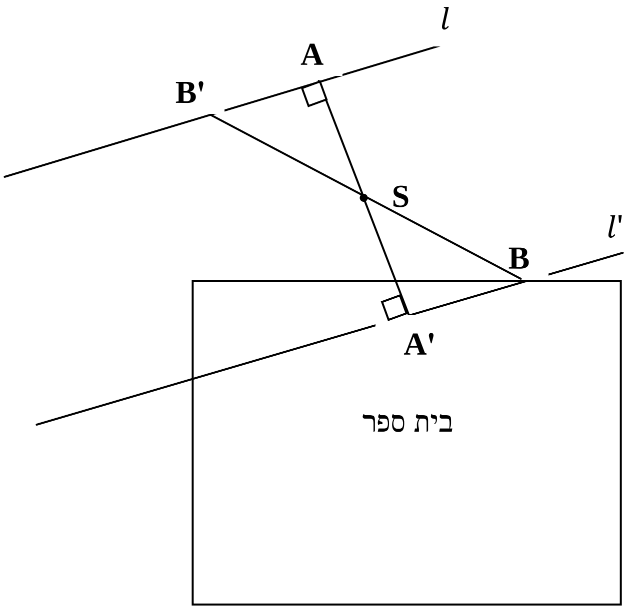
3.5 דוגמאות לשאלות שניתן לפתור בעזרת סימטריה.

<u>שאלה 1 (מתוך אולימפיאדה זוטא כיתה ז' תש"ע – שלב א', מכון ויצמן)</u>

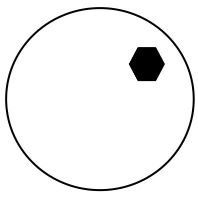
הגלידרייה של הדוד קמצוץ עומדת בנקודה S. העירייה החליטה לבנות בית ספר מוקף גדר ולהציב תחנת אוטובוס חדשה על הכביש. עזרו לדוד קמצוץ לסמן על המפה את מיקום התחנה ואת שער הכניסה לבית הספר כך שהגלידרייה תהיה בדיוק באמצע מסלול ישר מתחנת האוטובוס לשער בית הספר.



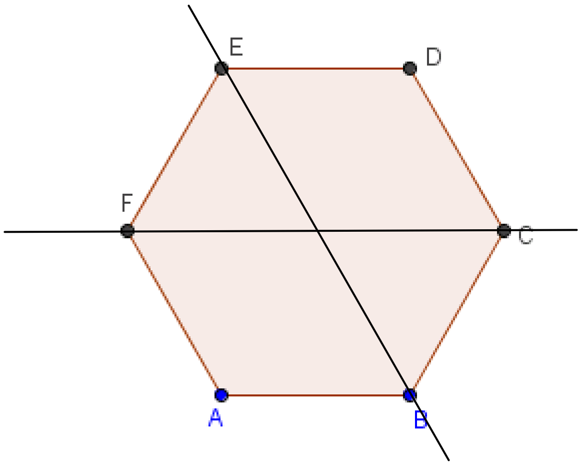
פתרון: נעזר בפתרון בעקרון של סימטריה מרכזית. נבנה תחילה ישר שהוא סימטרי לישר הנתון (כביש) ביחס לנקודה S. כדי לבנות ישר זה נוריד אנך מ-S לישר l ונקבל נקודה A, נבנה נקודה סימטרית לה יחסית לנקודה S. 'A נמצאת על הישר l' שהוא מקביל לישר l. (הישרים l ו- l' מאונכים ל-'AA).
לכל נקודה על הישר l' תהיה נקודה סימטרית על הישר l ביחס לנקודה S ולכן גם לנקודת החיתוך של הישר l' עם הגדר B יש נקודה סימטרית לה על הישר l ביחס לנקודה S היא נקודה 'B (B'S=BS).
מכאן תחנת אוטובוס צריכה להיות בנקודה 'B ושער בית הספר בנקודה B.



<u>שאלה 2 (מתוך אולימפיאדה זוטא כיתה ח' תשע"א – שלב א', מכון ויצמן)</u>
בעזרת חיתוך אחד יש לחתוך עוגה עגולה עם חתיכת שוקולד בצורת משושה משוכלל כך שגם העוגה וגם השוקולד יחולקו לשני שטחים שווים.



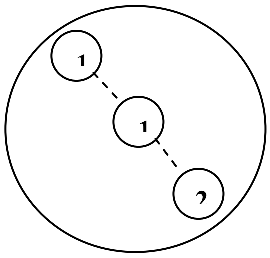
פתרון: נבסס את הפתרון על הטענה שאם לצורה יש מרכז סימטריה אז כל ישר העובר דרך נקודה זו מחלק את הצורה לשתי צורות שווי שטח וכל ישר שלא עובר דרך מרכז הסימטריה לא מחלק את הצורה לשתי צורות שווי שטח.



מרכז הסימטריה של משושה משוכלל הוא נקודת המפגש של אלכסונים. מרכז הסימטריה של המעגל הוא מרכז המעגל ולכן ישר העובר דרך מרכז הסימטריה של המשושה ושל המעגל מחלק גם את המעגל וגם את המשושה המשוכלל לשתי צורות חופפות.

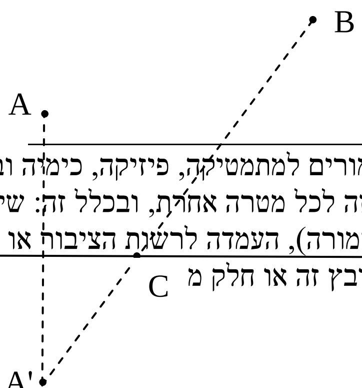
<u>שאלה 3 (מתוך י.מ. פרמונובה (2000) סימטריה במתמטיקה, מוסקבה)</u>
שני שחקנים מניחים כל אחד בטורו מטבע זהה על שולחן עגול כך שהמטבעות לא יכסו אחד את השני. בהנחה שלא עושים טעויות, מי מהשחקנים ינצח?

פתרון: במשחק נכון (השקן הראשון לא עושה מהלך שגוי) ינצח השחקן שמתחיל ראשון.
במהלך ראשון הוא מניח את המטבע במרכז השולחן (מרכז המעגל), במהלך שני הוא מניח את המטבע סימטרית למטבע של שחקן שני ביחס למרכז המעגל. ברור שאם המהלך של שחקן שני אפשרי אז אפשרי גם המהלך הסימטרי של שחקן ראשון ולכן שחקן ראשון מנצח.



<u>שאלה 4 (מתוך י.מ. פרמונובה (2000) סימטריה במתמטיקה, מוסקבה)</u>
נתון ישר l ושתי נקודות A ו- B הנמצאות באותו צד של ישר. צריך למצוא נקודה C על הישר l, כך שסכום הקטעים AC ו- BC יהיה מינימלי.

פתרון: נבנה נקודה 'A שהיא סימטרית לנקודה A ביחס לישר l. עבור כל נקודה C על ישר l מתקיים A' C = AC



מכאן
$AC+BC = A'C+BC$
לפי אישוויון משולש
$A'C+BC$ מינימלי אם ורק אם נקודה C
נמצאת על $A'C+BC$.
מכאן נקודה C היא נקודת החיתוך של הישר l
והקטע $A'C+BC$.

4. סיכום

הכוונה הראשונית שלי בעבודה הייתה להתמקד ב-17 חבורות טפט במישור. נושא זה קשור לריצופים שהוא נושא מאוד ויזואלי ומתאים לתלמידי חטיבת ביניים. במהלך הכנת העבודה נחשפתי לעולם הרחב והמעניין של העתקות איזומטריות, מורכבות הרכבתם, טרנספורמציות ליניאריות ומטריצות מייצגות הקשורות לאיזומטריות במישור, בסופו של דבר כתבתי מאמר שמתמקד בשימושים של סימטריות בתחומים שונים הנלמדים בחטיבות ביניים ובתיכונים.

נוכחתי לדעת שנושא הסימטריה נלמד בישראל רק בבתי הספר היסודיים כאשר חסרים לתלמידים מושגים רבים לצורך הבנת הנושא, לדוגמא: איזומטריות הזזה ושיקוף נלמדות בכיתות א' וב', בשלב זה תלמידים עדיין לא מכירים את המושג מקבילות, איזומטרית סיבוב נלמד בכיתה ג' כאשר תלמידים עדין לא מכירים את המושג זווית.
זו הסיבה שרציתי לחשוף את המורים המלמדים בחטיבת ביניים ובחטיבה העליונה לאפשרויות הלימוד של סימטריה ברמות אלו.

במסגרת עבודתי כמדריכה ניסיתי לעניין צוותי מורים בבתי הספר בלימוד הסימטריה ברמות גבוהות, אך נתקלתי בתגובה כי סימטריה היא נושא לבתי הספר היסודיים. תגובה זו תואמת את גישת משרד החינוך בארץ ובהתאם את ספרי הלימוד (הישנים ואלו של התוכנית החדשה) אשר מתעלמים משימוש בסימטריה לצורך הוכחות ואף לא נעזרים ביסודות הסימטריה שנלמדו בבתי הספר היסודיים. בנקודה זו אציין כי שימוש בסימטריה לצורך הוכחות מקובל בארצות אחרות כמו בחלק מארה"ב, אוסטרליה ורוסיה.

בכיתה שבה אני מלמדת (כיתה ח' רמה של 5 יחידות לימוד) עברנו עם התלמידים על סוגי הסימטריות והרכבות השונות בעזרת תוכנות מחשב (גיאו-גברה). בנינו ביחד לוח סימטריות של ריבוע. למרות שלא לימדתי בפועל שימושים של סימטריה על הוכחת בעיות גיאומטריות, בשיעור האחרון כשרצינו להוכיח חפיפה פשוטה אחד מהתלמידים נעזר בסימטריה לצורך ההוכחה. שימוש בסימטריה מאוד עוזר לילדים שהתחום החזק שלהם הוא ויזואלי להתמודד עם הוכחות דדוקטיביות של גיאומטריה.

מטרת המאמר הייתה לא רק לחשוף את המורים לסימטריה, אלא להראות להם את יתרונות לימוד הסימטריה ברמות גבוהות ושימושה לצורך פתרון בעיות.
בתחילת החלק הראשון של המאמר התייחסתי לחבורות של צורות הנדסיות. בהמשך החלק הראשון בחרתי להתמקד בהוכחות של תכונות ותנאים של מקבילית מכיוון שנושא זה נלמד בחטיבת ביניים והוא בסיס להוכחות מתקדמות. בנושא המקבילית תלמידים נחשפים בפעם הראשונה להוכחות של משפטים גיאומטריים, תכונות ותנאים. הוכחות שהצגתי בעזרת סימטריה הן במידה רבה אינטואיטיביות.

בחלק השני של המאמר התייחסתי לקשר בין גרפים של פונקציות לבין סוגי סימטריות, חשיפת תלמידים לקשר זה מסייעת להם בהבנה טובה יותר של תכונות משותפות של פונקציות: הזזה של פונקציות, פונקציות זוגיות, פונקציות אי-זוגיות, מחזוריות של פונקציות, נקודות האפס של הפונקציות ופונקציות הפוכות.

בחלק השלישי והאחרון של המאמר הצגתי מספר בעיות מאולימפיאדת זוטא של מכון ויצמן המיועדת לתלמידי חטיבת ביניים והראתי את פתרונן בעזרת סימטריה.

ואסיים בנימה קצת יותר ביקורתית לגבי הסימטריה. מריו ליביו בספרו "שפת הסימטריה" לאחר כ 250 עמודים בהם הוא מהלל ומדבר בשבחה של הסימטריה, מעלה תהייה לגבי האם הסימטריה שולטת, הוא טוען כי יתכן שהסיבה שבגינה אנו רואים סימטריה בכל מקום היא לא בהכרח כי הסימטריה אכן קיימת בכל מקום אלא אולי מכיוון ש"... העדפתה של נפשנו את הסימטריה מחדירה הטיה דומה לתפיסתנו את מה שבסיס באמת ובתמים ביקום" ?

5. ביבליוגרפיה

1. Alekseev V.B.,(2001), Abel's Theory, Moscow, Russia

2. Berger Marcel, (2004) Geometrie, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, France

3. Yaglom I.M., Geometric Transformations, Moscow, *Russia*

4. Vinberg E. B. (2003) A Course in Algebra, *Moscow State University, Russia*

5. בורנשטיין אברהם, (1995)מבנים אלגבריים, פרקים 7-8, , האוניברסיטה הפתוחה.

6. אשנב למתמטיקה, (1976) יחידה 7 – איזומטריות, , האוניברסיטה הפתוחה.

7. וייל הרמן (Hermann Weyl), (1968) סימטריה תרגום לרוסית בירוקוב, דנילוב, הוצאה לאור "נאוקה", מוסקבה.

8. ליביו מריו, (2006) שפת הסימטריה, ניר הוצאה לאור, תל אביב

9. פרמונובה י. מ. (2000) סימטריה במתמטיקה, מוסקבה

10. רייכמיסט ר. ב., (1991) גרפים של פונקציות, מוסקבה