קרן רוטשילד קיסריה

מכון ויצמן למדע
WEIZMANN INSTITUTE OF SCIENCE

"תוכנית רוטשילד-ויצמן למצוינות בהוראת המדעים"
במימונה של קרן קיסריה אדמונד בנימין דה רוטשילד

משפט ליובייל –
שימוש בקירובים רציונאליים להבנת
"טבע" המספרים האלגבריים והמספרים
הטרנסצנדנטיים

מגישה: אליאן בן דרור

מנחה: פרופ' סרגיי יעקובנקו

תאריך הגשה: 17.5.2011

תוכן עניינים

מבוא

נושא העבודה הנבחר הוא היכרות עם שיטת הקירובים הרציונאליים למספרים ממשיים ושימוש בשיטה זו להבנת תכונות של מספרים ממשיים באופן כללי, ותכונות מספרים אלגבריים ומספרים טרנסנדנטיים בפרט.

בעבודה התמקדתי במשפט ליובייל (Liouville's Theorem, 1844) , משפט שעושה שימוש בשיטת הקירובים הרציונאליים כדי להוכיח קיומם של מספרים טרנסנדנטיים ונותן דרך לבנות מספרים כאלה.

כאשר התחלתי לחשוב על נושא לעבודת גמר, חיפשתי נושא שמשלב מספר תחומים : חשיפת תלמידים להיבטים בעבודה של מתמטיקאי, תחום מתמטי שמשלב היכרות עם ההיסטוריה של המתמטיקה ונושא מתמטי שמעניין ומרתק אותי.

במסגרות הלימוד השונות, שמעתי לא פעם על עבודתו של המתמטיקאי הגרמני דויד הילברט (1862-1943) ובעיקר על תרומתו של הילברט, כמנהיג וכמתווה דרך לעבודתם של מתמטיקאים במאה ה-20.

בקונגרס הבינלאומי השני של המתמטיקאים, שנערך בפריז בשנת 1900, הציג הילברט רשימה של 23 בעיות מתמטיות חשובות שלא נפתרו עד זמנו.

גדולתו של הילברט נובעת מכך שהיתה לו היכולת לסקור את התחומים השונים במתמטיקה ולהצביע על 23 בעיות שהיו בעיניו המוקדים שאותם מתמטיקאים צריכים לחקור במאה ה-20.

אחדות מהבעיות שנכללו ברשימה נפתרו מאז, אחדות הוכחו כבלתי פתירות ואחדות עדיין פתוחות בימינו. בשנת 2000 פורסמו 7 בעיות חדשות, "בעיות המילניום של מכון קליי", שמטרתן הצבת יעדים חדשים למתמטיקאים למאה ה-21. על פתרון כל אחת מהבעיות הללו הוצע פרס של מיליון דולר.

לעיתים קרובות מידי, עולה מדברי התלמידים שמתמטיקה הוא מקצוע משעמם, שבו לומדים אוסף של חוקים, שהרלוונטיות שלהם לחיי היום יום אינה ברורה להם. לא פעם אני נתקלת בשאלה, "אבל בשביל מה צריך ללמוד את זה" ולרוב אין לשאלות הללו תשובה, לפחות לא אחת שמספקת את התלמידים.

הרעיון המקורי שלי היה לבחור אחת מהבעיות שמופיעות ברשימת 23 הבעיות של הילברט ולהציגה בפני מורים ותלמידים. מטרתי היתה לעורר מוטיבציה אצל תלמידים להבין יותר טוב את מהות העבודה של המתמטיקאים, להציג את המתמטיקה כתחום רחב שכולל נושאים שונים, תחום שחוקרים אותו בכל העולם, לאורך ההיסטוריה אבל הוא גם רלוונטי ועכשווי. תחום מעניין שלפעמים עוסק בתחומים שימושיים ויישומים ולפעמים עוסק במהות, בחקר, בהבנה של תכונות. תחום מסקרן, מאתגר ויפה. בנוסף, חשבתי זאת תהיה הזדמנות טובה גם שאני אכיר יותר לעומק את הבעיות שנמצאות ברשימה ואוכל להתמקד לפחות באחת מהן.

מבין 23 הבעיות, בחרתי את הבעיה השביעית שעוסקת במספרים אלגבריים ומספרים טרנסנדנטיים, כלומר בעיה מתחום של תורת המספרים, תחום שאותי מרתק כל פעם מחדש.

בהמלצת מנחה העבודה, פרופ׳ סרגיי יעקובנקו, בחרתי לבסוף להתמקד במשפט ליובייל, שהוא פשוט יותר להבנה ולהסבר לתלמידים, שלא דורש הרבה רקע מתמטי קודם ועוסק גם הוא במספרים אלגבריים ומספרים טרנסנדנטיים. ליובייל היה למעשה הראשון שהוכיח במשפט זה את עצם קיומם של מספרים טרנסנדנטיים.

בפרק הראשון של העבודה, הצגת התחום המתמטי, מתוארת ההתפתחות ההיסטורית של מערכת המספרים האי-רציונאליים מימי יוון העתיקה ועד ימינו.

הפרק השני מתאר את שיטת הקירובים הרציונאליים. בנוסף מובאות הוכחות של שני משפטים על קירוב מספרים אלגבריים מסדר ראשון ושני ע״י סדרה אינסופית של קירובים רציונאליים.

בפרק השלישי אציג הוכחה למשפט ליובייל והשימוש במשפט לבניית מספרים טרנסצנדנטיים – מספרי ליובייל.

בפרק המסכם אתייחס להיבטים נוספים של משפט ליובייל, היבט גיאומטרי ובחינת קירובים רציונאליים בעזרת פונקציות.

הצגת התחום המתמטי

התחום המתמטי שבו עוסקת העבודה הוא תחום בתורת המספרים, שנוגע ב"טבע המספרים הממשיים".
דרך העבודה שלי היתה התחקות אחר ההתפתחות מושג המספר וחקר תכונותיו מהמספרים השלמים, למספרים הרציונאליים ועד המספרים הממשיים. לאחר מכן התעמקתי בשיטת הקירובים הרציונאליים ומשפט ליובייל.

עוד מימי קדם, האדם השתמש במספרים כדי למנות ולסדר איברים. המתמטיקה החלה עם הבנת המושג המופשט של המספר הטבעי (המספרים השלמים החיוביים).
פעולות החשבון הבסיסיות במספרים טבעיים והצורך במדידה, הובילו להרחבת עולם המספרים כגון, הוספת השברים, הוספת המספר אפס והוספת המספרים השליליים. כל אלו יוצרים את מערכת המספרים הרציונאליים, מערכת שהוכרה בשלמותה, כפי שאנו מגדירים כיום, רק במאה ה-17.
בימי קדם, כ-3500 שנה לפנה"ס, בתקופת מצרים העתיקה, הבבלים ויוון הקדומה, אריתמטיקה, גיאומטריה, אסטרונומיה ופיזיקה נחשבו לתחומים (מיומנויות) נפרדים כמעט לחלוטין.
תחום האריתמטיקה עסק במספרים, מספרים רציונאליים בלבד. לא היה צורך במשהו אחר, מכיוון שהמשוואות היחידות שידעו לפתור היו משוואות לינאריות (עם מקדמים שלמים, כמובן).

<u>מערכת המספרים הרציונאליים</u>: שימוש בשברים ניתן למצוא בתקופת המצרים הקדמונים, אך באופן שונה מכפי שמשתמשים בהם כיום. המושג הכללי של שבר או יחס (ratio) כמנה של שני מספרים שלמים התפתח מאוחר יותר בתקופת יוון הקדומה. מהמילה ratio נובע גם מקור השם, מספרים רציונאליים.
עד תקופת יוון העתיקה היה העיסוק במתמטיקה תכליתי בלבד (בעיקר במתמטיקה המצרית והבבלית). המתמטיקאים היוונים תרמו רבות לידע המתמטי, אך פריצת הדרך שלהם היתה בלימוד המתמטיקה כשלעצמה, כתחום מחקרי עיוני ומופשט.
בתקופת יוון העתיקה ובעיקר בתקופתו של פיתגורס ותלמידיו – האסכולה הפיתגוראית (המאה ה-6 לפנה"ס), התפתח מושג המספר למושג בזכות עצמו. בתקופה זו החל למעשה חקר ופיתוח התחום המתמטי שנקרא "תורת המספרים". הפיתגוראים גילו קשר בין מספרים שלמים לפיזיקה ואסטרונומיה. גילוי זה גרם להם להצהיר שמספרים הם הבסיס להכל.
מבחינה פילוסופית, היוונים ראו במתמטיקה אמת מוחלטת, המתארת את המבנה והטבע של היקום. המתמטיקה אינה מומצאת ע"י המתמטיקאים אלא מתארת מצב קיים. הפיתגוראים השתמשו באמרה "הכל מספר", ששיקפה את אמונתם שהמספרים השלמים ומנתם (מספרים רציונאליים) מתארים את כל התחומים בעולם. תפיסה זו היא שהקשתה עליהם בהבנת המשמעות של גודל אי-רציונאלי כמספר.
הפיתגוראים חקרו גם את המשמעות הגיאומטרית של מספרים, כנקודה על ציר המספרים.
משמעות גיאומטרית של מספר: בציר המספרים נקבע מהו קטע היחידה – קטע המייצג את ההפרש בין שני מספרים שלמים עוקבים. כדי לייצג שבר שהמכנה שלו n, נחלק את קטע היחידה

ל-n חלקים שווים. ניתן להראות שבכל קטע שניקח, לא משנה מה גודלו, יש לפחות מספר רציונאלי אחד, ולכן יש אינסוף מספרים רציונאליים.

דרך הסתכלות נוספת על מספר רציונאלי היא הקשר בין שני קטעים a ו-b כך ש : $b = \frac{m}{n}a$.

כאשר מתקיים קשר זה נאמר ש a ו-b הם בעלי מידה משותפת.

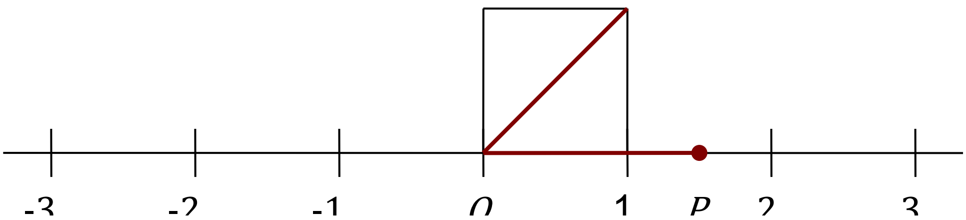
<u>מערכת המספרים האי-רציונאליים</u>

ניתן להסתכל על שתי תקופות עיקריות בהתפתחות מושג האי-רציונאליות :

א. תקופת יוון העתיקה – גילוי הגודל האי-רציונאלי הראשון, הגדרת קטעים חסרי מידה (פיתגוראים) ומתן לגיטימציה גיאומטרית לגדלים אלו (אוקלידס).
ב. המאה ה-16 וה-17 – ראשית האלגברה הסימבולית ופיתוח השברים העשרוניים תרמו להתפתחות המושג כמספר.

הפיתגוראים גילו במהרה את הגודל האי-רציונאלי הראשון $\sqrt{2}$, אורך האלכסון של ריבוע שצלעו 1, אך לא ידעו כיצד להתייחס אל גודל זה כמספר. במקום לפתח את מושג המספר, הם הפכו את הגיאומטריה לבסיס החקירה והנימוק של כל עבודתם.

היוונים ראו כי לא ניתן להציג את $\sqrt{2}$ כמנה של שני מספרים שלמים, או במשמעות הגיאומטרית של חלוקת קטע לקטעים שווים. למרות זאת, הצליחו לסמן את המספר כנקודה על ציר המספרים.



לפני כן, הפיתגוראים האמינו כי המספרים הרציונאליים מכסים את כל הנקודות על ציר המספרים. הם לא הצליחו להציג את הקשר בין צלעות הריבוע לאלכסונו ($b = \frac{m}{n}a$) ולכן קבעו שהוא קטע שאין לו מידה משותפת. הגדלים האלה לא היו הגיוניים בעיניהם ומכאן שמם של המספרים האי-רציונאליים.

התגלית הזו זעזעה את פיתגורס עד-כדי-כך שהוא הורה לשמור עליה בסוד מוחלט. יש אף סיפור שטוען, שהוא דן את אחד מהחברים באסכולה הפיתגוראית למוות בטביעה, כיוון שאיים לחשוף את הסוד הנורא.

היוונים הגבילו עצמם לבניות גיאומטריות שניתן היה ליישם בעזרת סרגל ומחוגה. זה אפשר להם להרחיב את עולם המספרים (הגדלים) ולכלול בו גם מספרים אי-רציונאליים ריבועיים (פתרונות של משוואה ריבועית עם מקדמים רציונאליים).

אולם, היוונים נתקלו בבעיות שהם לא יכלו לפתור גם בעזרת ההרחבה המצומצמת שהם אפשרו. בעיות אלו דרשו ידע בפתרון משוואות ממעלה שלישית ורביעית, כגון: בעיית הכפלת נפח קובייה ובעיית חלוקת זווית לשלושה חלקים שווים. לכן היוונים וויתרו והפסיקו לעסוק בתחום זה. ארכימדס היה יוצא דופן בתקופה זו והצליח להתעלות בדרך החשיבה שלו על חבריו. עבודתו מראה כי הוא התייחס גם למספרים אי-רציונאליים.
הקושי הגדול של היוונים בהבנה של מספרים רציונאליים נובע כנראה מהרצון שתהיה מערכת לוגית ואקסיומטית טהורה ובכך למעשה "פספסו" את גילוי החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי.

בערך באמצע המאה ה-15, קצת לפני תקופת קרדנו (1501-1576), התחילו להתייחס לשורשים ממעלה גבוהה מ-2 כאובייקטים אריתמטיים לגיטימיים. הרחבה זו של עולם המספרים, אפשרה לקרדנו למצוא פתרון למשוואות ממעלה שלישית ורביעית. לאחר מכן, לא היתה התקדמות בערך כ-300 שנה במציאת פתרון כללי למשוואות ממעלה חמישית ומעלה.
ראשית האלגברה, תחילת השימוש באותיות לסימון משתנים ושימושם לרישום ופתרון משוואות תרמה להתפתחות המושג כמספר. המספרים האי-רציונאליים הוגדרו כמספרים שלא ניתן לכתוב כמנה של שני מספרים שלמים, כלומר כמספרים רציונאליים. הגדרה זו נפוצה גם היום בבית הספר, בספרי הלימוד ומוכרת לכל המורים.
פיתוח השברים העשרוניים ע"י Simon Stevin (1548-1620) אפשר להציג את כל הנקודות על ציר המספרים בעזרת חלוקת כל קטע לקטעים בגודל של חזקות 10, כלומר הצגה עשרונית של מספר. הצגה כזאת מאפשרת למיין את המספרים הממשיים למספרים שניתן להציג אותם כמספרים עשרוניים סופיים ומספרים עשרוניים אינסופיים (מחזוריים ולא מחזוריים). הצגה עשרונית של שבר מספקת הגדרה נוספת למספר אי-רציונאלי. המספרים האי-רציונאליים הם המספרים העשרוניים האינסופיים הלא מחזוריים. בתוכנית הלימודים בכיתה י', כאשר לומדים על סדרות הנדסיות, לומדים על הקשר בין הייצוג של מספר עשרוני אינסופי מחזורי לבין ייצוגו כמנה של שני מספרים שלמים (שבר פשוט) ומעבר בין הייצוגים השונים.
לאחר שגלואה (1811-1832), אבל (1802-1829) ולגראנז' (1736-1813) פיתחו את התיאוריה של פתירות משוואות, אנשים הבינו שאי אפשר למצוא נוסחאות קסם למציאת השורשים של משוואות ממעלה חמישית ומעלה. זאת היתה תחילת של האלגברה המודרנית ושל הגיאומטריה האלגברית (ענף במתמטיקה העוסק בשילוב של אלגברה מופשטת וגיאומטריה).
הבנה כללית למושג של מספר אי-רציונאלי הושגה רק במאה ה-19 בעקבות עבודותיהם של קושי (1789-1857), ויירשטראס (1818-1897) ודדקינד (1831-1916). דדקינד אף הגדיר בצורה פורמאלית, שלא על דרך השלילה את המספרים האי-רציונאליים.

המספרים הרציונאליים יחד עם המספרים האי-רציונאליים יוצרים את מערכת המספרים הממשיים. קנטור (1845-1918) הוכיח בשנת 1873 שמספרים רציונאליים הם קבוצת מספרים אינסופית בת מנייה ושקבוצת המספרים הממשיים הם לא בני מנייה, כלומר שקבוצת המספרים האי-רציונאליים הם לא בני מנייה. כדי לעשות זאת השתמש קנטור בהצגה של מספרים ממשיים כסדרה של מספרים רציונאליים.

במאה ה-16, בעקבות התחלת העיסוק בפתרון משוואות הורחבה מערכת המספרים פעם נוספת והוסף המספר $i = \sqrt{-1}$ (האות i באה מהמילה imaginary, מספר מדומה). מערכת מספרים זו נקראת מערכת המספרים המרוכבים.

במאה ה-19 נעשתה ההבחנה בין אלגברה לאנליזה לשני ענפים במתמטיקה.
האלגברה חוקרת מספרים וביטויים סופיים ואילו מהות האנליזה היא תהליכים אינסופיים (שברים עשרוניים אינסופיים כמספרים, אינטגרל כגבול של סכומים ועוד).
עבודתו של ליובייל מ-1844, במובן זה, היתה ניסיון לגשר בחזרה מהאנליזה לאלגברה. זאת באמצעות השאלה, האם אפשר להסתכל על סדרה אינסופית של קירובים רציונאליים למספר ממשי נתון ולהחליט האם המספר הוא אלגברי הוא לא.

שאלה זו קיבלה משנה חשיבות שלושים שנה מאוחר יותר, בעקבות עבודתו של קנטור על משמעות גודל קבוצה אינסופית (cardinality). קנטור כאמור הוכיח בשנת 1873 כי קבוצת המספרים הממשיים הם לא בני מנייה. יותר מזה הוא הראה כי המספרים האלגבריים הם בני מנייה, כלומר רוב המספרים האי-רציונאליים הם לא אלגבריים, כלומר טרנסצנדנטיים.

ליובייל הוכיח את קיומם של המספרים הטרנסצנדנטיים וגם מצא דרך לבנות מספרים כאלו, דבר שנראה כאתגר אמיתי, בהתחשב בכך שבהינתן מספר ממשי אקראי הוא יהיה באופן אוטומטי, לפי ההוכחה של קנטור, מספר טרנסצנדנטי.

קירובים רציונאליים

כאשר בוחנים מספרים אי רציונאליים רואים שישנם מספרים בעלי תכונות גיאומטריות, כגון π,
מספר המתאר את המנה בין היקף המעגל לקוטרו. דוגמא נוספת היא המספר $\sqrt{2}$, מספר המתאר את אורך האלכסון של ריבוע שצלעו 1.

ישנם מספרים שפותרים משוואות אלגבריות. לדוגמא, המספר $\sqrt{2}$ שפותר את המשוואה $x^2-2=0$. דוגמא נוספת היא המספר i, מספר מרוכב שפותר את המשוואה $x^2+1=0$. אך ישנם מספרים שטבעם אינו ברור.

<u>מספרים אלגבריים ומספרים טרנסצנדנטיים</u>

מספר אלגברי הוא מספר שהוא פתרון של משוואה אלגברית מהצורה:

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ $(n\ge 1\ , a_n\ne 0)$, a_k הם שלמים.

$f(x)$ הוא פולינום מינימלי ו-n (המעלה הגבוהה ביותר) נקרא הדרגה או הסדר של המספר האלגברי.

לדוגמא, המספר $\sqrt{2}$ הוא מספר אלגברי מסדר 2.

מספר שאינו פתרון של משוואה אלגברית נקרא מספר טרנסצנדנטי.

מקור השם מגיע ממאמר שכתב לייבניץ בשנת 1682, שם הוא הראה שפונקציית הסינוס אינה פונקציה אלגברית. טרנסצנדנטי – "מספר נעלה", מכיוון שמספרים אלו מתעלים על הכוח של השיטות האלגבריות. הראשון שהגדיר את המספרים הטרנסצנדנטיים היה אוילר.

<u>קירוב רציונאלי</u>: כל מספר ממשי α ניתן לקרב בכל רמת דיוק שנבחר לסדרת מספרים רציונאליים עם מכנים הולכים וגדלים (למעשה ניתן לייצג כל מספר ממשי ע"י שתי סדרות אינסופיות של מספרים רציונאליים).

לדוגמא, הצגת המספר $\sqrt{2}$ ע"י סדרה של קירובים רציונאליים (בהצגה עשרונית):

1) 1 , 1.4 , 1.41 ,1.414 , 1.4142 ...

2) 1 , 1.5 , 1.42 ,1.415 , 1.4145 ...

הצגה נוספת של המספר $\sqrt{2}$ בעזרת שברים משולבים:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ldots}}}}$$

ומתקבלת הסדרה הבאה: $\frac{3}{2},\frac{7}{5},\frac{17}{12},\frac{41}{29},\frac{99}{70}\ldots$

הגדרה: קירוב רציונאלי $\frac{p}{q}$ נקרא קירוב מסדר n אם $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\le\frac{C}{q^n}$ (עבור סדרה אינסופית של קירובים רציונאליים).

כאשר בוחנים את עבודתו של ליובייל, ניתן לנסות ולשער שהוא הסתכל על התהליך האינסופי שקובע את אופיו של מספר ממשי כקצב התכנסות של קירובים סופיים. לכן, שברים עשרוניים אינם מספקים מידע רב. קיטום שבר אינסופי כמעט תמיד נותן דיוק שנקבע לפי הספרה במקום הבא. לכן הוא בחר להסתכל על קירובים רציונאליים באופן כללי.

הערה נוספת שחשוב לציין היא, שצריך להסתכל על סדרה אינסופית של קירובים. קירוב מקרי בעל דיוק רב אינו מספיק כדי לתת מידע על טבעו של מספר.
לדוגמא, הקירוב הרציונאלי שהיה ידוע כבר בימי ארכימדס (בערך 200 לפנה"ס) למספר π היה השבר $\frac{22}{7}$. כיום מכירים את הקירוב הרציונאלי $\frac{355}{113}$ והדיוק הוא בסדר גודל של 6 אפסים אחרי הנקודה העשרונית. וזאת למרות שהמכנה הוא בערך 100 ולכן מצפים לדיוק של 1% בלבד. לכן, עלינו להסתכל על כל הקירובים הרציונאליים עם מכנים שאינם עולים על מכנה נתון ולבחון כמה מהר הדיוק של הקירוב הטוב ביותר גדל, כאשר המכנה גדל לאינסוף.

לפני שניגש להוכחה של משפט ליובייל עבור מספר ממשי כלשהו, נסתכל על קירובים רציונאליים למספרים רציונאליים.
מספר רציונאלי הוא מספר שפותר את המשוואה הלינארית $f(x)=ax+b$. כלומר, מספר רציונאלי הוא מספר אלגברי מסדר $n=1$.

משפט 1: לכל מספר אלגברי α מסדר $n=1$ (α רציונאלי) ניתן למצוא אינסוף מספרים רציונאליים $\frac{p}{q}$, $p,q\in Z$, $q\neq 0$, $\frac{p}{q}\neq\alpha$,

כך שמתקיים אי השוויון הבא: $0<\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\le\frac{1}{q}$.

הוכחה:
משפט עזר: למשוואה $ax+by=1$ יש אינסוף פתרונות שלמים, כאשר a ו-b הם מספרים שלמים זרים ($\gcd(a,b)=1$).
ניעזר משפט Bézout שהוכח ע"י המתמטיקאי הצרפתי Étienne Bézout (1730-1783). המשפט אומר שאם קיימים שני מספרים שלמים חיוביים, $a,b\in Z$, $a,b\neq 0$ ו- d הוא המחלק המשותף המכסימלי שלהם, $\gcd(a,b)=d$, אז קיימים $x,y\in Z$ כך שמתקיים $ax+by=d$.

לכן, לפי משפט Bézout קיימים x_0 ו- y_0 שמקיימים את המשוואה $ax_0+by_0=1$ (נובע גם מהאלגוריתם של אוקלידס למציאת מחלק משותף מקסימלי).

ניקח: $x_n=x_0+bn$, $y_n=y_0-an$.

קל לראות, שעבור כל n שלם, מתקיים $ax_n+by_n=1$.

נחזור למשפט שלנו: נרשום $\alpha=\frac{a}{b}$. מכיוון שהמספר הרציונאלי מצומצם $\gcd(a,b)=1$. נגדיר לשם נוחות b ו- q מספרים טבעיים.

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{p}{q}\right|=\frac{|aq-bp|}{bq}$$

מכיוון ש $\frac{p}{q}\neq\frac{a}{b}$, $|aq-bp|>0$. כלומר, $\left|\frac{a}{b}-\frac{p}{q}\right|=\frac{|aq-bp|}{bq}>0$.

מצד שני, הראנו במשפט העזר שיש אינסוף מספרים שלמים p ו- q שהם פתרונות של המשוואה $|aq-bp|=1$.

לכן,

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{p}{q}\right|=\frac{|aq-bp|}{bq}=\frac{1}{bq}<\frac{1}{q}$$

מ.ש.ל

משמעות המשפט היא שלכל מספר רציונאלי אפשר למצוא סדרה אינסופית של קירובים רציונאליים מסדר $n=1$. בנוסף, לא ניתן למצוא סדרה אינסופית של קירובים מסדר גדול מ-1.

- הערה: קל לראות שכל מספר ממשי ניתן לקירוב מסדר ראשון.

אם α מספר ממשי, $\frac{p}{q}$ מספר רציונאלי, $\alpha\cdot q$ נמצא לכל היותר במרחק $\frac{1}{2}$ מהמספר השלם הקרוב ביותר. לכן נבחר p כך ש: $|\alpha\cdot q-p|\leq\frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leq\frac{1}{2q}$.

השלב הבא, יהיה להסתכל על קירובים למספרים אי-רציונאליים ריבועיים. כלומר למספרים אי-רציונאליים שפותרים משוואה ריבועית $f(x)=ax^2+bx+c$.

לכן, מספר אי-רציונאלי הוא מספר אלגברי מסדר $n=2$.

משפט 2: לכל מספר אלגברי α מסדר $n=2$ (α הוא אי-רציונאלי), ניתן למצוא אינסוף מספרים רציונאליים $\frac{p}{q}$, $p,q\in Z$, $q\neq 0$,

כך שמתקיים אי-השוויון הבא: $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leq\frac{1}{q^2}$.

כדי להוכיח משפט זה ניעזר במשפט של דיריכלה (1805-1859) על קירובים רציונאליים.
בהוכחה נשתמש גם בעקרון שובך היונים ולכן אזכיר בקצרה מהו.
עקרון שובך היונים נוסח באופן פורמלי בשנת 1834 ע"י דיריכלה. העיקרון קובע שאם מכניסים ל- n קופסאות (תאים בשובך) יותר מ- n אובייקטים (יונים), אז בקופסא אחת יהיו לפחות שני אובייקטים (בתא אחד לפחות בשובך יהיו לפחות שתי יונים).

משפט דיריכלה: לכל α מספר ממשי, n שלם חיובי, קיים מספר רציונאלי $\frac{p}{q}$, $p,q\in Z$, $0<q\leq n$, כך שמתקיים אי-השוויון הבא:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leq\frac{1}{(n+1)q}$$

הוכחה:

נסמן $[\alpha]$ - המספר השלם הגדול ביותר, שקטן או שווה למספר הממשי α.

נחלק את ההוכחה לשני מקרים:

$n=1$. כלומר $q=1$ ואז נבחר $\frac{p}{q}=\frac{[\alpha]}{1}$ או $\frac{p}{q}=\frac{[\alpha]+1}{1}$ וכל אחד מהם יקיים את אי-השוויון $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leq\frac{1}{2}$. (ראו הערה בעמ' 9).

$n\geq 2$. נסתכל על $n+2$ מספרים בקטע $[0,1]$:

$$0,\alpha-[\alpha],2\alpha-[2\alpha],...,n\alpha-[n\alpha],1$$

נניח α אי-רציונאלי ולכן, כל $n+2$ המספרים שבקטע שונים אחד מהשני. אם α רציונאלי, המספרים אינם שונים ואז אי-השוויון הוא טריוויאלי (מכיוון שאפשר לבחור $\frac{p}{q}=\alpha$).

את הקטע $[0,1]$ ניתן לחלק ל- $n+1$ חלקים שווים, אורך כל חלק $\frac{1}{n+1}$.

לפי עקרון שובך היונים, המרחק (בערך מוחלט) בין לפחות שני מספרים, יהיה לכל היותר $\frac{1}{n+1}$.

נסתכל על 3 אפשרויות לזוגות מספרים:

אם אחד המספרים הוא 0 והשני הוא $i\alpha-[i\alpha]$, $0<i\le n$, אז

$\frac{1}{n+1}\ge\left|i\alpha-[i\alpha]\right|=\left|i\alpha-[i\alpha]-0\right|$ ואז ע"י חלוקה ב- i של שני צידי האי-שוויון נקבל

$$\left|\alpha-\frac{[i\alpha]}{i}\right|\le\frac{1}{(n+1)i}.$$

אם נחליף את השבר $\frac{[i\alpha]}{i}$, בשבר מצומצם $\frac{p}{q}$, נקבל את האי-שוויון המבוקש.

באותה דרך נבחן את המרחק בין שני מספרים כשאחד מהם $j\alpha-[j\alpha]$, $j\le n$ והשני 1.

$\frac{1}{n+1}\ge\left|-j\alpha+1+[j\alpha]\right|=\left|1-(j\alpha-[j\alpha])\right|$ ואז ע"י חלוקה ב- j של שני צידי האי-שוויון נקבל

$$\left|\alpha-\frac{[j\alpha]+1}{j}\right|\le\frac{1}{(n+1)j}.$$

אם נחליף את השבר $\frac{[j\alpha]+1}{j}$, בשבר מצומצם $\frac{p}{q}$, נקבל את האי-שוויון המבוקש.

לבסוף, אם שני המספרים הם $i\alpha-[i\alpha]$ ו- $j\alpha-[j\alpha]$, $0<i<j\le n$, אז המרחק ביניהם יהיה:

$\frac{1}{n+1}\ge\left|(j-i)\alpha-([j\alpha]-[i\alpha])\right|=\left|j\alpha-[j\alpha]-(i\alpha-[i\alpha])\right|$. ואז ע"י חלוקת שני האגפים ב- $j-i$ נקבל:

$$\left|\alpha-\frac{([j\alpha]-[i\alpha])}{j-i}\right|\le\frac{1}{(n+1)(j-i)}.$$

נשים לב ש $j-i<n$, ולכן אם נחליף את השבר $\frac{[j\alpha]-[i\alpha]}{j-i}$ בשבר מצומצם $\frac{p}{q}$, נקבל את האי-שוויון המבוקש.

נשתמש במשפט דיריכלה כדי להוכיח את משפט 2.

מכיוון ש- $0<q\le n$ אז קיים $\frac{p}{q}$ כך ש:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\le\frac{1}{(n+1)q}\le\frac{1}{(q+1)q}<\frac{1}{q^2}.$$ מ.ש.ל

נשאר להראות רק שקיימים אינסוף קירובים רציונאליים כאלה.

נניח בשלילה שקיימים רק מספר סופי של קירובים רציונאליים $\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2},...,\frac{p_k}{q_k}$ שמקיימים את אי-השוויון.

אזי, קיים $\frac{p_i}{q_i}$, $1\le i\le k$ כך ש : $\left|\alpha-\frac{p_i}{q_i}\right|>0$.

מכיוון ש- α אי-רציונאלי, קיים מספר שלם חיובי n, כך ש $\left|\alpha-\frac{p_i}{q_i}\right|>\frac{1}{n+1}$.

אך זה סותר את משפט דיריכלה!

משמעות משפט 2 היא שלכל מספר אי- רציונאלי אפשר למצוא סדרה אינסופית של קירובים רציונאליים מסדר $n=2$. בנוסף, לא ניתן למצוא סדרה אינסופית של קירובים מסדר גדול מ-2.
אם מצאנו סדרה אינסופית של קירובים רציונאליים מסדר $n=2$, המסקנה היא ש- α חייב להיות אי-רציונאלי. וזאת משום שהראיתי במשפט 1 שלא ניתן למצוא סדרה אינסופית של קירובים מסדר גדול מ-1 למספר רציונאלי.

ניתן להסיק ממשפט 1 וממשפט 2 שניתן לאפיין מספרים רציונאליים ואי-רציונאליים גם לפי מידת הקירוב הרציונאלי.

בפרק הבא ארחיב על משפט ליובייל ועל שימוש במשפט זה לבניית מספרים טרנסצנדנטיים.

משפט ליובייל

משפט ליובייל: לכל מספר אלגברי α מסדר $n>1$, קיימת סדרה של אינסוף מספרים

רציונאליים $\frac{p}{q}$ ($q\neq 0$) כך שמתקיים אי השוויון הבא:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{q^{n+1}}$$

כלומר, לא ניתן למצוא קירוב רציונאלי שהסטייה שלו מ- α (המרחק מהמספר) קטנה מ $\frac{1}{q^{n+1}}$.

הוכחה:

נתון פולינום מינימלי $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$,

α שורש מסדר n של הפולינום - $f(\alpha)=0$.

נבחר קירוב רציונאלי $\frac{p}{q}$ ונסתכל על $f(\frac{p}{q})$.

הערה: $\frac{p}{q}$ אינו שורש של הפולינום ולכן $f(\frac{p}{q})\neq 0$

$$f(\frac{p}{q})=f(\frac{p}{q})-f(\alpha)=a_0+a_1\frac{p}{q}+a_2(\frac{p}{q})^2+..+a_n(\frac{p}{q})^n-\left(a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+...+a_n\alpha^n\right)$$

$$f(\frac{p}{q})=a_1(\frac{p}{q}-\alpha)+a_2\left((\frac{p}{q})^2-\alpha^2\right)+..+a_n\left((\frac{p}{q})^n-\alpha^n\right) \qquad (1)$$

נשתמש בזהות האלגברית:

$$x^k-\alpha^k=(x-\alpha)\left(x^{k-1}+\alpha x^{k-2}+\alpha^2x^{k-3}+...+\alpha^{k-2}x+\alpha^{k-1}\right)$$

ונפתח את (1).

$$f(\frac{p}{q})=(\frac{p}{q}-\alpha)\left(a_1+a_2\left(\frac{p}{q}+\alpha\right)+a_3\left((\frac{p}{q})^2+\frac{p}{q}\alpha+\alpha^2\right)+...+a_n\left((\frac{p}{q})^{n-1}+...+\alpha^{n-1}\right)\right)$$

$$\frac{f(\frac{p}{q})}{\frac{p}{q}-\alpha}=a_1+a_2\left(\frac{p}{q}+\alpha\right)+a_3\left(\left(\frac{p}{q}\right)^2+\frac{p}{q}\alpha+\alpha^2\right)+\ldots+a_n\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\ldots+\alpha^{n-1}\right) \qquad (2)$$

נסתכל על קירוב רציונאלי $\frac{p}{q}$, כך שהמרחק שלו מהמספר הממשי קטן מ-1: $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<1$ ואז $\alpha+\frac{p}{q}<2\alpha$.

הערה: אם המרחק גדול מ-1, משפט ליובייל הוא טריוויאלי. ($\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>1>\frac{1}{q^{n+1}}$).

ניתן לרשום את הקירוב הבא ל – (2)

$$\left|\frac{f(\frac{p}{q})}{\frac{p}{q}-\alpha}\right|<|a_1|+2|a_2|(|\alpha|+1)+3(|a|+1)^2+\ldots+n|a_n|(|\alpha|+1)^{n-1}=c(\alpha)$$

$c(\alpha)$ - הוא קבוע חיובי שתלוי ב- α.

קיבלנו: $\left|\frac{f(\frac{p}{q})}{\frac{p}{q}-\alpha}\right|<c(\alpha)$. נסדר את אי-השוויון כך:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{\left|f(\frac{p}{q})\right|}{c(\alpha)} \qquad (3)$$

נחזור לבחון את $f(\frac{p}{q})$. ראינו כי $f(\frac{p}{q})\neq 0$, מכיוון ש $\frac{p}{q}$ אינו שורש של הפולינום והפולינום הוא מינימלי.

נרשום את $f(\frac{p}{q})$ בצורה הבאה:

$$f(\frac{p}{q})=a_n\frac{p}{q^n}^n+a_{n-1}\frac{p}{q^{n-1}}^{n-1}+\ldots+a_1\frac{p}{q}+a_0=\frac{a_np_n+a_{n-1}p^{n-1}q+\ldots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n}{q^n}$$

נסתכל על המכפלה הבאה: $q^n \cdot \left|f(\frac{p}{q})\right|$.

מכיוון ש $q^n \neq 0$ נקבל $q^n \cdot \left|f(\frac{p}{q})\right| = \left|a_n p_n + a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n\right| \geq 1$

כלומר: $\left|f(\frac{p}{q})\right| \geq \frac{1}{q^n}$.

נחזור לאי-השוויון שקיבלנו בשלב (3).

נבחר מכנה q כך שהוא יהיה גדול מ- $c(\alpha)$ ונקבל ש:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{\left|f(\frac{p}{q})\right|}{q} > \frac{1}{q \cdot q^n} > \frac{1}{q^{n+1}}.$$ מ.ש.ל

<u>שימוש במשפט ליובייל לבניית מספרים טרנסצנדנטיים - מספרי ליובייל</u>

כיצד אפשר לבנות מספר טרנסצנדנטי בעזרת משפט ליובייל?

ליובייל הציע מספרים מהצורה הבאה:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}} = 0.a_1 a_2 000 a_3 0000000000\ 0000000\ a_4 00..$$

a_i - היא אחת מהספרות בין 1-9. הספרה a_i מופיעה במקום ה-$k!$ מימין לנקודה העשרונית.

(לדוגמא, במקום ה-1, 2, 6, 24 וכו' תהיה ספרה שונה מ-0).

המספר מאופיין בכך שבין a_i ל- a_{i+1} יש מספר הולך וגדל של אפסים.

נסתכל למשל על המספר $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$. ($a_i = 1$ לכל i).

נבחר $p = 10^{m!} \cdot \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{10^{n!}}$, $q = 10^{m!}$. m - מספר שלם חיובי.

$\frac{p}{q} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{10^{k!}}$.

כלומר, אנחנו בוחרים את השבר הרציונאלי כך: אנחנו לוקחים את המספר הממשי וקוטמים אותו בנקודה כלשהי (m - מקומות אחרי הנקודה העשרונית).

נסתכל כעת על הסטייה של השבר מהמספר הממשי:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10^{k!}}-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{10^{k!}}=\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{10^{k!}}<\frac{10}{10^{(m+1)!}}=\frac{1}{10^{(m+1)!-1}}$$

כלומר, קיבלנו את אי-השוויון הבא:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{10^{(m+1)!-1}}.$$

מצד שני, לפי משפט ליובייל,

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{q^{n+1}}=\frac{1}{10^{m!(n+1)}}.$$

כלומר, $\frac{1}{10^{m!(n+1)}}<\frac{1}{10^{(m+1!-1)}}$.

מה שאומר ש: $m!(n+1)>(m+1)!-1$.

אבל אם נסתכל על אי-השוויון האחרון שקיבלנו ונפתח אותו נקבל:

$$m!(n+1)>(m+1)!-1=m!\cdot(m+1)-1>m!\cdot(m+1)-m!=m!m$$

$$m!(n+1)>m!m$$

אם m גדול מספיק ו- $m>n$, אז קיבלנו ש: $n+1>m$ וזאת סתירה!

כלומר α שבחרנו אינו מקיים את התנאי של משפט ליובייל ולכן אינו מספר אלגברי, לכן הוא מספר טרנסצנדנטי.

הערה: כאמור, ליובייל הצליח לבנות מספרים שאינם אלגבריים (מספרים טרנסצנדנטיים) בשנת 1844. זאת לפני שקנטור הוכיח בצורה פורמלית בשנת 1874 שבכלל קיימים מספרים כאלו.

כל מספרי ליובייל אינם מקיימים את משפט ליובייל ולכן הם מספרים טרנסצנדטיים, אך לרוע המזל לא כל המספרים הטרנסצנדנטיים הם מספרי ליובייל.

לדוגמא, המספרים e ו – π אינם מספרי ליובייל אבל הם מספרים טרנסצנדטיים.

בשנת 1873 הרמיט (Hermite) הוכיח כי המספר e הוא מספר טרנסצנדנטי. זה היה המספר הטרנסצנדנטי הראשון שלא נבנה למטרה זו (בניגוד למספרי ליובייל) והוכח שהוא כזה.

בשנת 1874 קנטור הוכיח כי המספרים הממשיים אינם בני מנייה. הוא הראה כי המספרים האלגבריים הם בני מנייה, כלומר קיימים מספרים ממשיים שאינם מספרים אלגבריים, כלומר מספרים טרנסצנדנטיים. קנטור הוכיח למעשה כי המספרים הטרנסצנדנטיים אינם בני מנייה.

בשנת 1882 לינדמן (Lindemann) הוכיח כי π הוא מספר טרנסצנדנטי.

משפט Thue–Siegel–Roth

לאחר עבודתו של ליוביל נעשו במשך כ- 80 שנה, עבודות שונות, ע״י מתמטיקאים שונים שמטרתם לשפר את הדיוק של הקירובים הרציונאליים.

המשפט אומר שלכל מספר אלגברי α , $\varepsilon > 0$, ניתן למצוא מספר סופי של קירובים רציונאליים שמקיימים את אי-השוויון הבא:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}.$$

ולכן קיים קבוע חיובי (שתלוי ב- α וב- ε) שעבורו קיימים סדרה אינסופית של שברים כך שמתקיים אי- השוויון הבא:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C(\alpha,\varepsilon)}{q^{2+\varepsilon}}.$$

Thue , הוכיח בשנת 1909 אי-שוויון זה עבור מעריך $r = \frac{d+2}{2} + \varepsilon$, כאשר d הוא הסדר של המספר האלגברי α.

Siegel הוכיח בשנת 1921 שאי-השוויון מתקיים גם למעריך $r = 2\sqrt{d} + \varepsilon$.

לבסוף, בשנת 1955 Roth הצליח להראות שאי-השוויון נכון עבור מעריך $r = 2 + \varepsilon$.

Roth זכה על הוכחה זאת בפרס פילדס היוקרתי בשנת 1958.

אסיים את סקירת הנושא עם הצגת הבעיה השביעית מתוך 23 הבעיות של הילברט ופתרונה.

בבעיה נשאלת השאלה האם המספר a^b הוא מספר טרנסצנדנטי, כאשר $a \neq 0,1$ אלגברי ו- b אלגברי אי-רציונאלי.

בשנת 1934 הוכיחו (כל אחד בנפרד) המתמטיקאים גלפונד ושניידר משפט שעונה על הבעיה השביעית של הילברט. משפט זה קרוי על שמם. במשפט הם הראו שהתשובה לשאלתו של הילברט היא חיובית. כלומר, עבור מספרים אלגבריים, a ו- b ($a \neq 0,1$, b אי-רציונאלי), המספר a^b הוא מספר טרנסצנדנטי .

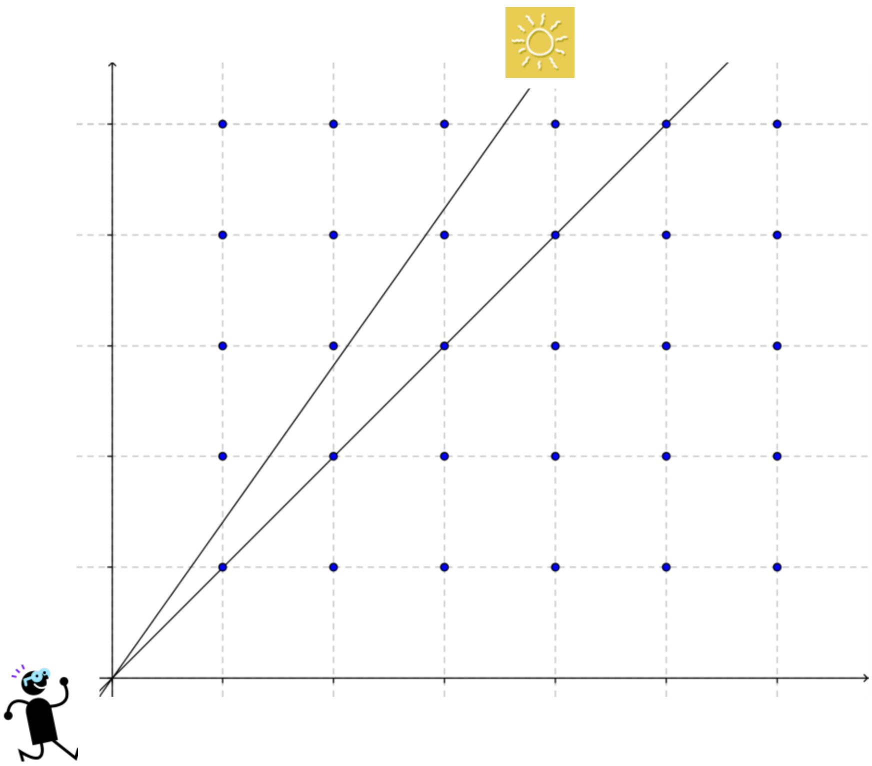
בעזרת משפט זה הוכיחו את הטרנסצנדנטיות של מספרים רבים.

היבטים נוספים למשפט ליוביל

<u>היבט גיאומטרי</u>

נסתכל על סריג דו-ממדי, הרביע הראשון של מערכת צירים, כאשר המספרים בציר x מייצגים את המכנה - q והמספרים בציר y מייצגים את המונה - p . כל נקודה בסריג מייצג מספר רציונאלי $\frac{p}{q}$.

אתאר זאת בעזרת הסיפור הבא:
כל נקודה בסריג היא עץ והסריג מייצג יער אינסופי.
אדם עומד בנקודת ראשית הצירים של הסריג ומסתכל לכיוונים שונים. הוא מחפש קרן ראיה, שבעזרתה יראה את האור מבעד לעצים. אם העצים הם נקודות, כלומר חסרי ממדים (קוטר 0) אז הקרניים "הרציונאליות" חסומות ואילו הקרניים "האי-רציונאליות" הן קרני ראיה אפשריות.



השאלה מה קורה כאשר לעצים יש קוטר.
לפי משפט דיריכלה, יער אחיד, שבו כל העצים הם בעלי קוטר s, $s>0$, כל כיווני הראיה חסומים.
אסביר זאת בעזרת ההצגה הגיאומטרית של הקרניים והיער.

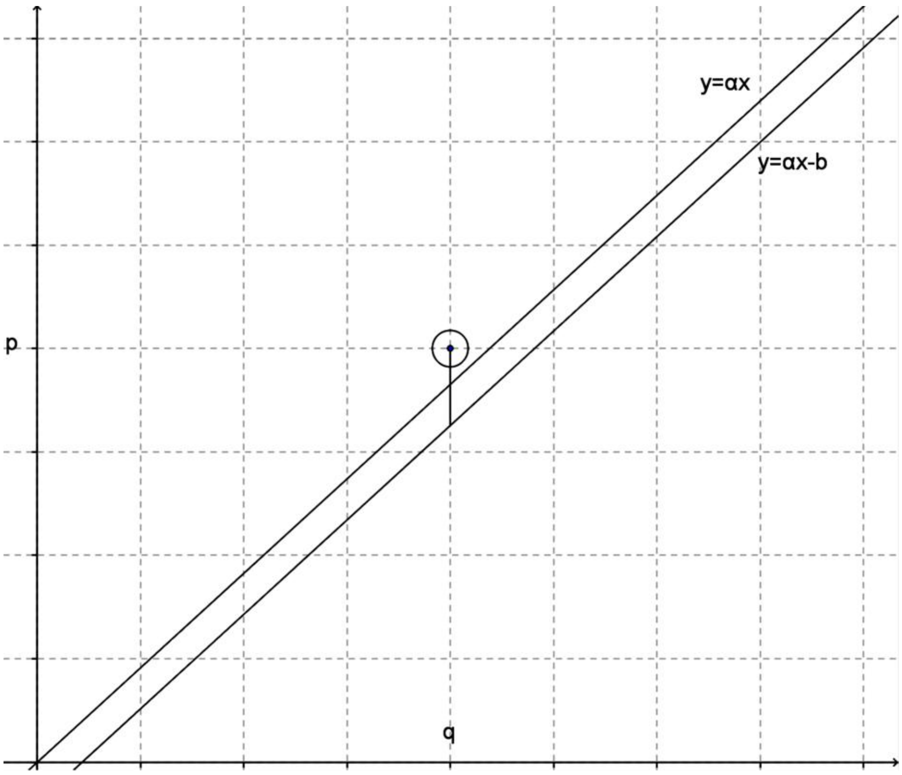
לשם פשטות, נניח שקרן הראייה היא בזווית של $-1<\left|\frac{y}{x}\right|<1$.

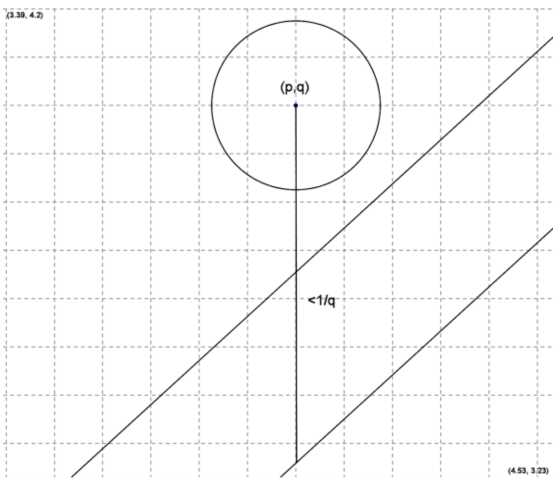
נשים לב, שעבור כל שיפוע $\alpha=\frac{y}{x}$ (α - מספר ממשי) יש קירוב $\frac{p}{q}$ שהוא טוב מאשר $\frac{1}{q^2}$

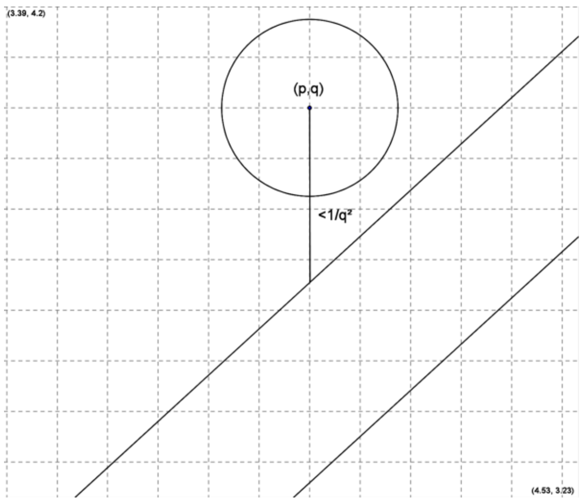
(משפט 2 – דיריכלה עמ׳ 10).

לכן, $|q\alpha - p| \le \frac{1}{q}$. המשמעות של זה היא שישר שהשיפוע שלו α, עובר לפחות במרחק $\frac{1}{q}$ מהעץ עבור כל q גדול.

אם $q > \frac{1}{s}$, s קוטר של העץ, אז $s > \frac{1}{q}$. כלומר כיוון הראייה יהיה חסום.







יותר מזה, אם לאיש שלנו יש גרזן והוא יכול לחטוב את כל העצים, מלבד ריבוע מסביב לראשית, זה לא יעזור. משפט דיריכלה אומר שעצים שחוסמים כל קרן ראיה אפשרית, יהיו בכל מרחק שנרצה מהראשית.

האפשרות היחידה לראות קרן אור היא אם נסתכל על עצים עם קטרים שונים.
אם נניח שככל שמתרחקים מהראשית, העצים הולכים ונעשים יותר דקים אז יתכן ותהיה לנו קרן ראיה. כלומר, עץ שממוקם בנקודה (p,q) הקוטר שלו יהיה $s=\frac{1}{q^{r-1}}$.
בשפה של משפט ליובייל, המשמעות היא שכאשר העצים ביער הולכים ונעשים דקים במהירות $r>n$, n הסדר של α, אז בכל הכיוונים "האלגבריים האי-רציונאליים" נראה קרן אור.

<u>הסתכלות נוספת על משפט ליובייל בעזרת פונקציות</u>

נגדיר פונקציה $L(n)$ ונקרא לה פונקציית ליובייל.

$L(n)=\frac{1}{\min\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|}$, כאשר α מספר ממשי, $p,q\in Z$, $0<|q|<n$ ו $\alpha\neq\frac{p}{q}$.

$L:N\rightarrow R$.
למעשה, לשם נוחות, אנחנו מסתכלים על הגידול בדיוק במקום על הירידה בשגיאה.
הפונקציה $L(n)$ היא חיובית ולא יורדת. ככל ש-n גדול יותר, יש יותר קירובים רציונאליים אפשריים (מכנה יותר גדול).
אנחנו רוצים לחקור את קצב הגידול של הפונקציה כאשר n שואף לאינסוף.
לדוגמא: אם α מספר רציונאלי אז $L(n)<C(\alpha)\cdot n$, כאשר $C(\alpha)$ הוא קבוע שתלוי ב-α.
ועבור מספר אינסופי של נקודות n, $L(n)>n$. שתי המסקנות הללו נובעות ממשפט 1 שהוכחתי בעמ' 8.
דוגמא נוספת: אם α מספר אי-רציונאלי ריבועי, אז $L(n)<C(\alpha)\cdot n^2$ ועבור מספר אינסופי של נקודות n, $L(n)>n^2$. שתי המסקנות הללו נובעות ממשפט 2 שהוכחתי בעמ' 10.
בשתי הדוגמאות הגרף של פונקציית ליובייל חסום בין שתי פונקציות חזקה: n^r ו- $C(\alpha)\cdot n^r$.
דוגמאות אלו מצביעות על כך שאפשר למדוד את קצב הגידול של הדיוק באמצעות פונקציות חזקה.

סיכום

במהלך העבודה התחבטתי לא פעם כיצד העבודה תראה בסופה. נושא העבודה היה מוגדר מאוד מההתחלה, אך אופן הצגת הנושא התבהרה לי רק במהלך הכתיבה עצמה.
ליובייל משתמש בשיטת הקירובים הרציונאליים כדי להוכיח את המשפט ולכן למדתי להכיר תחום זה מקרוב. במהלך המחקר וחיפוש החומר נתקלתי במאמרים ובדוגמאות רבות, יפות ומעניינות של שימושים בקירובים רציונאליים. אולם, בעבודה זו, בחרתי להציג חלק קטן בלבד וזאת מכיוון שניסיתי להתמקד ולהדגיש את היופי והכלליות של הוכחת משפט ליובייל. למרות זאת, אני רוצה לציין את השימוש בשברים משולבים כדי לייצר סדרה של קירובים רציונאליים ובמשפט הטוען שהקירוב הרציונאלי הטוב ביותר נעשה באמצעות הצגה כזו של שברים.
נושא נוסף, שנחשפתי לו לראשונה, היה סדרות פרי (Farey Series) והוכחת משפט ליובייל באמצעותן. נחשפתי גם לתחום של משוואות דיופנטיות והתפתיתי להמשיך לחקור וללמוד גם תחום זה, למרות שלא היה קשור ישירות לנושא העבודה. אני בטוחה שבעתיד אמשיך והעמיק באחד מהנושאים הרבים שלמדתי להכיר במהלך העבודה הזאת.

מחקרים בחינוך מתמטי מצביעים על חשיבות שילוב הוראת ההיסטוריה של המתמטיקה בלימודי המתמטיקה בבתי הספר ובהכשרת מורים למתמטיקה (למשל, Arcavi, Bruckheimer & Ben-Zvi 1982, Struik 1980). שילוב היסטוריה של המתמטיקה בהוראה יכול להשפיע באופן חיובי על היחס למקצוע, מוטיבציה, הבנה ועוד. Arcavi, Bruckheimer & Ben Zvi (1987) מציינים מספר משתנים שיש להתחשב בהם כגון : רלוונטיות, מקורות המידע, למידה פעילה והתפתחות היסטורית של מושג. במאמר הם מתארים קורס שמיועד למורים ומטרתו להציג את התפתחות המושג האי-רציונאליות מראשיתו במשמעות הגיאומטרית של המושג בימי יוון העתיקה ועד הכרתו כמספר. הקורס כלל שישה דפי עבודה למורים בנושאים לפי סדר כרונולוגי של התפתחות המושג. בכל דף עבודה ניתן קטע מקור ולאחריו מספר שאלות שבאמצעותן המורים חקרו את הנושא לעומקו. נושאי הדפים היו : הפיתגוראים וגילו קטעים חסרי יחידת מידה משותפת, אוקלידס וספרו "האלמנטים" – המשך חקירת קטעים שאין להם יחידת מידה משותפת, גישת המתמטיקאים למספרים אי-רציונאליים במאות ה-16 וה-17, שני דפי עבודה על שיטות לקירוב שורשים של מספרים טבעיים – Rafael Bombelli ו- Nicholas Saunderson ודף עבודה מסכם על הגדרת המספרים האי-רציונאליים באופן פורמאלי ע"י דדקינד.

במהלך העבודה, חשבתי לאיזה קהל יעד הצגת הנושא שחקרתי מתאימה. התייעצתי עם חברי ללימודים ועם עמיתיי בבית הספר. מרבית המורים לא הכירו תחום זה וחשבו שרוב התלמידים לא ימצאו בו עניין, במיוחד לא במסגרת בית הספר. חלק מהמורים הביעו עניין במה שסיפרתי להם והיו מעוניינים לשמוע עוד כחלק מהשתלמות. אני חושבת שאפשר היה לשלב את הנושא אותו חקרתי, כחלק מקורס כדוגמת הקורס כפי שמתואר במאמר של Arcavi, Bruckheimer & Ben Zvi (1987). לדעתי, הצגת משפט ליובייל, ללא הצגת התפתחות מושג האי-רציונאליות, מאבדת מהבנת החשיבות, הכוח והיופי של משפט זה. אחד הקשיים שלי בעבודה היה לדעת להתמקד בנושא הנבחר ולא להרחיב ולחקור נושאים נוספים. גם בעבר, כאשר קראתי על נושאים

מתחום תורת המספרים, רציתי לחזור אחורה, לראשית, ולנסות להבין מאיפה הנושאים השונים התפתחו ולמה הם התפתחו בדרך זאת ולא אחרת. אולם, החומר הוא רב ולעיתים הידע המתמטי הדרוש אינו בידי התלמיד או המורה. אם רוצים להציג נושא באופן כללי לא נוכל להעמיק ואם נבחר להציג חלק ממנו, ייתכן ונאבד את הראיה הרחבה, שדרושה להבנת הנושא. בנוסף, יש לקחת בחשבון סוגים שונים של לומדים, חלקם לא יוכלו להבין ללא ראיה רחבה של הנושא ויש כאלו שיעדיפו להתמקד ולהעמיק בנושא מצומצם. אני הייתי מעדיפה לשלב נושא זה שחקרתי, כחלק מקורס רחב וכולל יותר.

חקירת הנושא היתה תהליך מעניין ומאתגר. אני רוצה להודות לפרופ׳ סרגיי יעקובנקו על ההנחיה והעזרה הרבה שהוא הושיט לי בכל אחד משלבי העבודה. המפגשים איתו סיפקו לי הצצה לדרך העבודה ואופן החשיבה של מתמטיקאי מהשורה הראשונה. היכולת שלו לפשט את הנושא, לספר סיפור שיעזור להבין את הדקויות ולהסביר בסבלנות רבה לכל שאלה שעלתה, לימדה אותי על האופן שבו מורה צריך ללמד ולא רק על נושא המחקר עצמו.

אני חושבת שיש חשיבות גדולה בהתנסות כזאת של חקירת נושא מתמטי, גם אם אינני הולכת לשלב זאת באופן ישיר בהוראה שלי. הרחבת הידע המתמטי מעניקה לי את הביטחון לייצג את המתמטיקה בכיתה ולנסות להבין יותר לעומק את השאלות והקשיים של התלמידים. אין ספק שהעבודה השאירה אצלי ״טעם של עוד״ להמשיך ללמוד ולהכיר עוד תחומים ונושאים של המתמטיקה. הלמידה מגבירה את היופי, העניין והאתגר שאני מוצאת במתמטיקה ואולי אצליח לסחוף אחרי גם את תלמידי.

רשימת מקורות

Arcavi A., Bruckheimer M., Ben-Zvi R., Maybe a Mathematics Teacher can Profit from the Study of the History of Mathematics. *For the learning of Mathematics*, 1982, 3(1), pp. 30-37

Arcavi A., Bruckheimer M., Ben-Zvi R., History of Mathematics for Teachers: the Case of Irrational Numbers. *For the learning of Mathematics*, 1987, 7(2), pp. 18-23

Burger E., Exploring the number jungle :a journey into diophantine analysis. AMS, 2000.

Courant R., Robbins H., Stewart I. What is mathematics. 2ed., Oxford, 1996, pp. 52-107

Fuchs D., Tabachnikov S., Mathematical Omnibus: Thirty Lectures on Classic Mathematics. American Mathematical Society, 2007, pp. 5-26

Hardy G.H., Wright E.M, Introduction to theory of numbers. 6ed., Oxford, 2007, pp. 198-227

Sally J., Sally P., Roots to Research: A Vertical Development of Mathematical Problems. American Mathematical Society, 2007, pp. 195-242

Struik D.J, Why study the History of Mathematics? *The journal of Undergraduate Mathematics and its Applications* (UMPA), 1, 1980, pp. 3-28