קרן רוטשילד קיסריה

מכון ויצמן למדע
WEIZMANN INSTITUTE OF SCIENCE

"תוכנית רוטשילד-ויצמן למצוינות בהוראת המדעים"
במימונה של קרן קיסריה אדמונד בנימין דה רוטשילד

מעגל פויירבאך

מגישה: נתיב ליאת

מנחה: ד"ר זהבי נורית

אוקטובר 2013, חשון תשע"ד

תוכן עניינים

מבוא

במהלך לימודיי בתוכנית "רוטשילד ויצמן" נחשפתי בקורס הגיאומטריה למעגל פויירבאך ולמשפט פויירבאך והמשפט קסם לי . מאחר ואני מאד אוהבת ללמד גיאומטריה, ולשלב כלים ותוכנות דינמיות בעבודתי בכיתה, בחרתי בעבודה זו לעסוק בנושא זה.

הצגתי, באמצעות תוכנת ה- Geogebra, לשלוש תלמידות הלומדות 4,5 יחידות מתמטיקה שסיימו כיתה י' משולש שקדקודיו (4,0), (2,6), ו- (-4,0). כל תלמידה קיבלה משימה שונה. המשימה כללה סימון של נקודות מיוחדות, שרטוט של מעגל העובר דרך נקודות אלו, כתיבת משוואת המעגל וחישוב נקודת המרכז שלו ורדיוסו.

המשימה של התלמידה הראשונה הייתה לסמן את **אמצעי צלעות המשולש**,

המשימה של התלמידה השנייה הייתה לסמן את **נקודות מפגש הגבהים של המשולש עם צלעותיו** והמשימה של התלמידה השלישית הייתה לסמן את **נקודות האמצע בין נקודת מפגש הגבהים במשולש לבין קדקודיו**.

התלמידות הופתעו לגלות שכל אחת מהן שרטטה **בדיוק** את אותו מעגל. המעגל שקיבלו התלמידות הוא **מעגל 9 הנקודות** הקרוי **מעגל פויירבאך**.

בשנת 1822 הוכיח קארל פויירבאך (Karl Wilhelm Feuerbach 1800-1834) בעזרת ביטויים אלגבריים, תוך דקדקנות מופלאה את המשפט "**מעגל תשע הנקודות משיק למעגל החסום במשולש ומשיק גם לשלושת המעגלים החיצוניים המשיקים לצלע של המשולש ולהמשכי שתי הצלעות**". משפט זה תואר כאחד המשפטים היפים ביותר בגיאומטריה המודרנית של המשולש וזיכה אותו להערכה רבה. (המעגל התגלה גם על ידי פונסלט (Jean-Victor Poncelet 1788-1867) ובריינצ'ן (Charles Julien Brianchon 1785-1864)

עבודה זו כוללת ארבעה פרקים :

בפרק הראשון מוגדר מעגל 9 הנקודות – מעגל פויירבאך. בפרק זה מוצג המעגל וכן הוכחה באמצעות הגיאומטריה הסינטטית.

הפרק השני כולל ביוגרפיה קצרה על חייו ופועלו של המתמטיקאי קארל ויליאם פויירבאך.

הפרק השלישי כולל את משפט פויירבאך והוכחת המשפט באמצעות הגיאומטריה הסינטטית והדגמת המשפט בכלים של הגיאומטריה האנליטית בשילוב תוכנות דינמיות ה- Derive וה- Geogebra.

הפרק הרביעי מציג את מרכז מעגל פויירבאך כמקום גיאומטרי המושפע מתזוזות של קדקודים במשולש.

פרק ראשון: מעגל 9 הנקודות – מעגל פויירבאך

משפט:

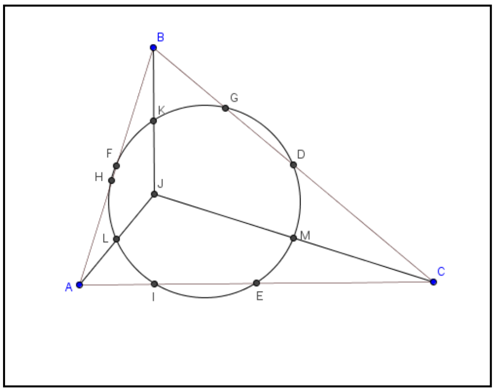
במשולש ABC

אמצעי הצלעות - E, F, D,

נקודות המפגש של הגבהים עם הצלעות - G, H, I

אמצעי הקטעים מהקדקודים למפגשי הגבהים -K, M, L

נמצאות על מעגל אחד



איור 1

נתון משולש ΔABC .

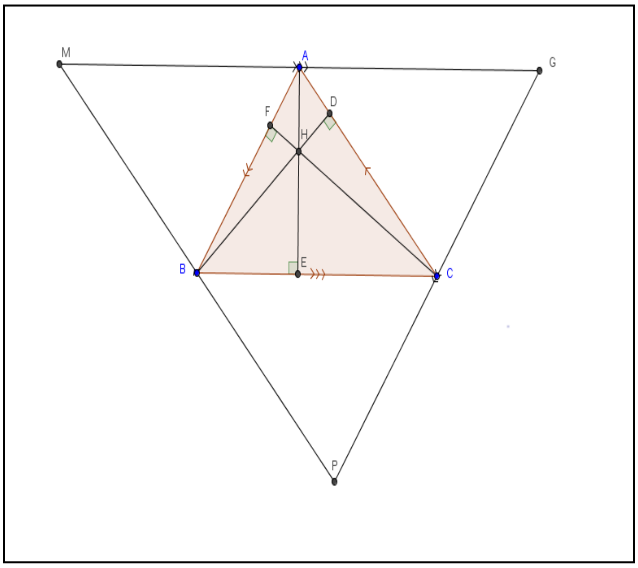
נעביר במשולש שלושה גבהים, BI, AG, CH. נסמן ב- J את נקודת המפגש (לפי טענת עזר 1)

הנקודות D , E, H הן בהתאמה אמצעי הצלעות BC, AC, AB, של המשולש.

הנקודות L, K, M הן בהתאמה אמצעי הקטעים JA, JB, JC .

ונוכיח כי דרך הנקודות E, M, D, G, K, H, F, L, I, עובר מעגל.

טענת עזר 1: במשולש שלושת הגבהים נפגשים בנקודה אחת[1]



איור 2

<u>נתון</u>: AE, CF, BD גבהים במשולש ΔABC

<u>צ"ל</u>: הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

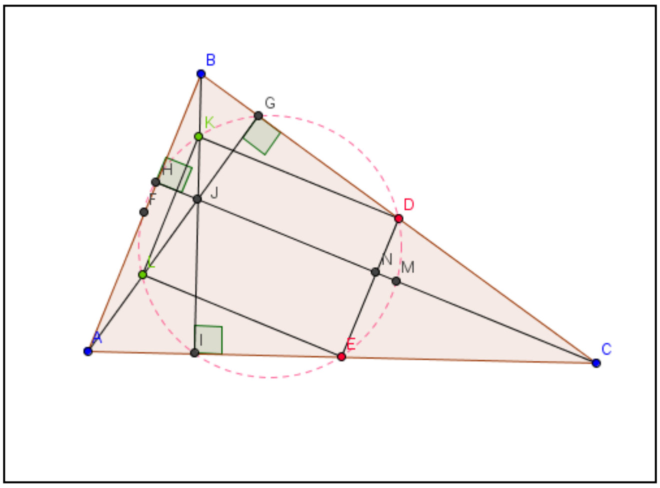
[1] ההוכחה מסתמכת על כך שבמשולש שלושת האנכים האמצעיים נפגשים בנקודה אחת

__הוכחה__ : **שלב 1**- אוכיח כי כל שני גבהים במשולש נחתכים. נניח בשלילה כי AE ו- BD אינם נחתכים. כלומר $AE||BD$. מאחר ונתון כי $BD\perp AC$ וכן כי $AE\perp BC$ אז גם $AC||BC$ אם שני ישרים מקבילים אז הישרים המאונכים להם מקבילים גם כן. מאחר ו- AC ו- BC צלעות המשולש הנפגשות בנקודה C זוהי סתירה, באופן דומה נוכיח כי BD ו- CF וכן כי CF ו- AE נפגשים, ולכן כל שני גבהים במשולש נפגשים.

שלב 2- נעביר ישרים מקבילים לצלעות המשולש העוברים דרך קודקודי המשולש ונקבל כי: $MG||BC$, $MP||AC$, $PG||AB$. מכאן נובע כי AGCB, CABP מקביליות, ולכן $BA=PC=CG$, כלומר AB הוא ק״א במשולש ΔMGP, (קטע המקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא ק״א במשולש). מאחר ו- $CF\perp AB$, ו- $PG||AB$ נובע כי $FC\perp PG$, כלומר FC הוא אנך אמצעי לצלע PG, באותו אופן ניתן להוכיח כי AE אנך אמצעי לצלע MG, וכי BD אנך אמצעי לצלע MP מאחר ושלושת האנכים האמצעיים במשולש נפגשים בנקודה אחת, גם שלושת הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת ■

__**הוכחת המשפט**__ :

נחבר את הנקודות L, K, D, E , נתבונן במרובע LKDE ונוכיח שהוא מלבן :



איור 3

$DE||BA$ ק״א במשולש ABC מקביל לצלע השלישית

$KL||BA$ ק״א במשולש BJA מקביל לצלע השלישית

לכן $DE || KL$ לפי כלל המעבר

$DE=\frac{1}{2}BA$ ק״א במשולש ABC שווה למחצית הצלע השלישית

$KL=\frac{1}{2}BA$ ק״א במשולש BJA שווה למחצית הצלע השלישית

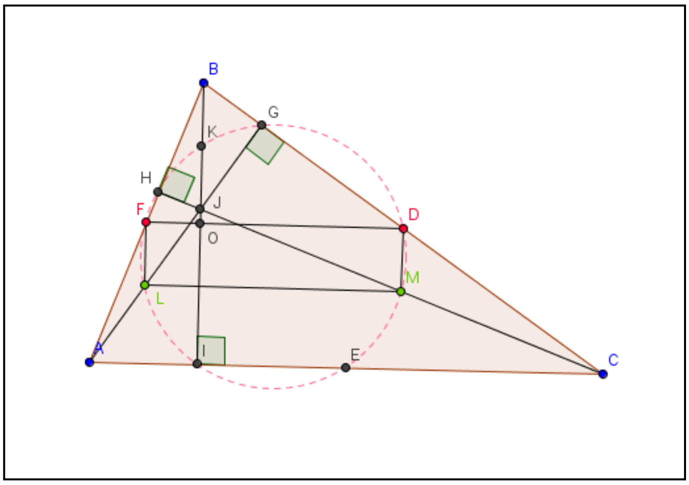
לכן DE=KL כלל המעבר ומכאן ש מרובע LKDE הוא מקבילית מאחר ויש לו זוג צלעות נגדיות שוות ומקבילות.

נתון כי AB⊥CH ומאחר ו- DE||KL||AB הזוויות סביב קדקוד N   ישרות

KD||HC ק״א במשולש BHC מקביל לצלע השלישית ולכן $\angle DNH = 90°$

ומכאן ש LKDE מלבן. כל מרובע שסכום זוויותיו הנגדיות הוא °180 ניתן לחסום במעגל ולכן הנקודות L, K, D, E נמצאות על מעגל אחד (1).

נחבר את הנקודות D, M, L, F , נתבונן במרובע DMLF ונוכיח שהוא מלבן :



איור 4

DF||AC ק״א במשולש ABC מקביל לצלע השלישית

LM||AC ק״א במשולש CJA מקביל לצלע השלישית

לכן DF || ML כלל המעבר

$DF = \frac{1}{2}AC$ ק״א במשולש ABC שווה למחצית הצלע   השלישית

$ML = \frac{1}{2}AC$ ק״א במשולש CIA שווה למחצית הצלע   השלישית

לכן DF=ML כלל המעבר

ומכאן ש מרובע DMLF הוא מקבילית מאחר ויש לו זוג צלעות נגדיות שוות ומקבילות.

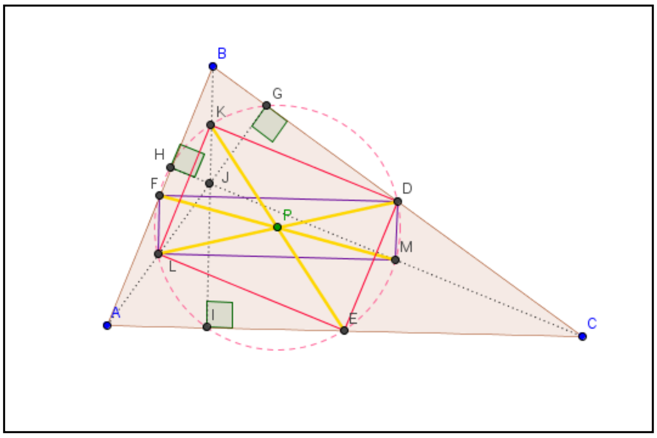
נתון כי BI ⊥ AC ומאחר ו- DF||ML||AC גם הזוויות סביב קדקוד O   ישרות

BI||FL ק״א במשולש BAI מקביל לצלע השלישית ולכן $\angle LFD = 90°$

ומכאן ש DMLF מלבן. כל מרובע שסכום זוויותיו הנגדיות הוא °180 ניתן לחסום במעגל ולכן הנקודות D, M, L, F נמצאות על מעגל אחד (2).

הוכחתי כי LKDE מלבן וכן כי DMLF מלבן. במלבן האלכסונים שווים זה לזה כלומר :

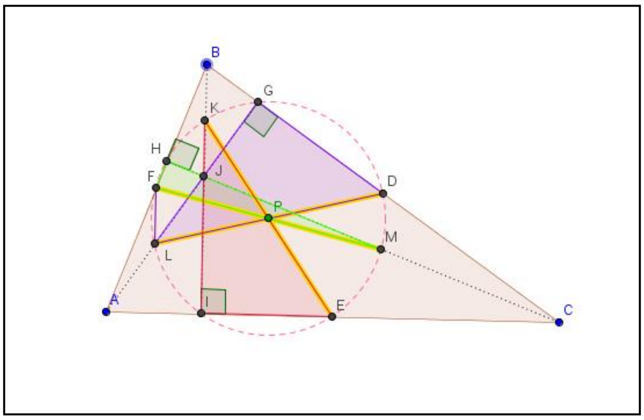
ולכן $KE=FM=DL$ $FM=DL, KE=DL$



איור 5

נתבון ב ΔKDE $\angle KDE=90°$ מאחר וזווית היקפית השווה ל $90°$ נשענת על קוטר KE קוטר במעגל, וכך גם לגבי DL, ו- FM ומכאן שהנקודות M, D, K, F, L, E נמצאות על מעגל אחד. שמרכזו בנקודה P. (3)

נתבונן במשולשים ΔLGD, ΔFHM, ΔKIE



איור 6

זוויות $\angle LGD$, $\angle FHM$, $\angle KIE$ הן בהתאמה זוויות ישרות בכל אחד מהמשולשים על סמך הנתון.

מאחר וכל שלוש נקודות שאינן נמצאות על ישר אחד קובעות מעגל, ניתן לומר כי שלושת הנקודות G, H, I, נמצאות על מעגל אחד.

משני התנאים הרשומים קודם נובע כי **LD, FM, KE הם שלושה קטרים של אותו מעגל**, הזוויות ההיקפיות G, H, I, הן זוויות ישרות הנשענות על קטרים אלו בהתאמה, ומאחר והוכחתי קודם (3) כי שלושת הקטעים הנ"ל הם קטרים במעגל העובר דרך הנקודות M, D, K, F, L, E נובע כי הנקודות G, H, I, נמצאות על אותו המעגל.

<u>**מסקנה**</u>: **הנקודות E, M, D, G, K, H, F, L, I, נמצאות על מעגל אחד, זהו מעגל 9 הנקודות הקרוי מעגל פויירבאך.**

פרק שני : חייו ופועלו של קארל ויליאם פויירבאך

איור 7 (WikiAnswers community)

2.1 קארל ויליאם פויירבאך –**1800-1832**

קארל ויליאם פויירבאך נולד ב- 30 למאי 1800 בג׳ינה שבגרמניה. לאביו פאול ג׳ון אנסלם ריטר וון פויירבאך (1775-1833) ולאמו אווה ווילהלמן מריה טרוסטר (1774-1852). אביו היה פרופסור למשפטים באוניברסיטה של ג׳ינה. קארל היה סטודנט מצטיין באוניברסיטה של ארלנגן ומאוחר יותר באוניברסיטה של פריבורג וקיבל את הדוקטורט שלו בפילוסופיה בהיותו בן 22 בלבד. בשנת 1822 הוא פרסם ספר שכלל 62 עמודים ונקרא : ״מאפיינים של כמה נקודות בולטות וקווים שונים במשולש מישורי, והמספרים שנקבעו על ידי נקודות אלה- מסה אנליטית טריגונומטרית״ (*Eigenschaft einiger merkwurdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren*"). בעמ׳ 38 למטה רשם : ״**המעגל העובר דרך נקודות המפגש של צלעות המשולש עם הגבהים של המשולש, משיק למעגל החסום במשולש ולכל אחד משולשת המעגלים המשיקים למשולש מבחוץ**״. משפט זה המבריק בפשטותו וההוכחה האלגברית המצורפת שניכר בה מיומנות וסבלנות מדהימה, היא שזיכתה את מעגל 9 הנקודות בשמו כיום מעגל פויירבאך.

$$\overline{OS}^2 = (AF - AP)^2 + (OP - SF)^2.$$

Nun ist aber $AF = \frac{1}{2}(-a+b+c)$ und $AP = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}$, folglich:

$$AF - AP = \frac{(a-b+c)(a+b-c)-c(a+b-c)}{2c};$$

ferner, weil (§. 35.) $OP = \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)}{8c\Delta}$, und (§. 2.) $SF = \frac{2\Delta}{a+b+c}$, so ist:

$$OP - SF = \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)-c(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{8c\Delta}.$$

Substituirt man nun im Ausdrucke für $\overline{OS}^2$, so wird man denselben endlich in diese Form bringen können:

$$\overline{OS}^2 = \frac{(-a+b+c)^2(a-b+c)^2(a+b-c)^2-(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{32\Delta^2},$$

woraus sich durch Einführung der Kreishalbmesser r, ρ, R ergiebt:

$$\overline{OS}^2 = 2r^2 - 2\rho R$$

איור 8 (pedoe,1979,p.92)

איור 8 הלקוח מתוך ספרו של פויירבאך, הוא דוגמא לכשרונו הגדול ויכולתו של פויירבאך לרדת לפרטי פרטים בפיתוח סימבולי. זוהי הוכחה אלגברית טהורה, שכוללת סימנים רבים. לצורך ההוכחה ניעזר פויירבאך בפיתוח האלגברי המופיע במאמר שכתב אויילר בשנת 1765, במאמר זה פותחו נוסחאות אלגבריות שונות לנקודות מיוחדות במשולש: מרכז מעגל חסום, מרכז מעגל חוסם, נקודת מפגש הגבהים, נקודת מפגש התיכונים ועוד.

כדי להוכיח שהמעגלים משיקים הוכיח פויירבאך סכום הרדיוסים של המעגלים המשיקים ושל מעגל 9 הנקודות שווים למרחק בין מרכזי שני המעגלים. זמן קצר לאחר פרסום הספר קיבל פויירבאך תואר פרופסור של גימנסיית ארלנגן.

בעקבות בעיות בריאות שונות הוא נפטר ב- 12 למרץ 1834.

2.2 קצת היסטוריה

יש הטוענים כי פויירבאך גילה את מעגל 9 הנקודות של המשולש אך, בספרו של פויירבאך, שהוזכר בתת הפרק הקודם, מוזכרים רק 6 מתוך 9 הנקודות הנ״ל ולא מוזכרות נקודות האמצע בין נקודת מפגש הגבהים לבין קודקודי המשולש, ונקודות אלו אף אינן מופיעות בשרטוט שלו (Pedoe, 1979).

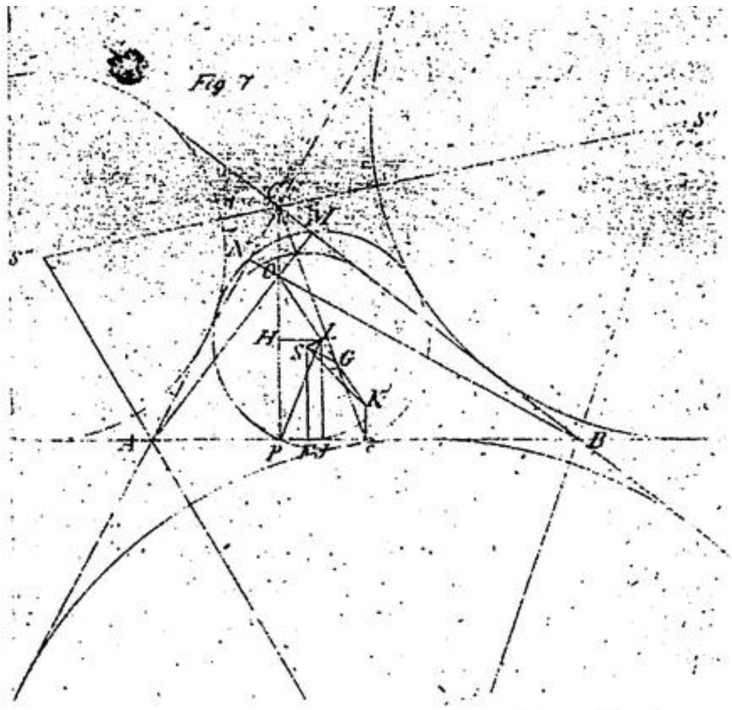


Diagram used in *Eigenschaften einiger merkwurdigen Punkte* ... to illustrate the theorem of Feuerbach. Note that three of the famous nine points, namely, the midpoints of the segments of the altitudes from the orthocenter to the vertices of the triangle, are not named on this diagram. [New York Public Library]

איור 9 (pedoe,1979,p.93)

פויירבאך לא היה הראשון שחקר את המעגל, בשנת 1821 ג׳ין ויקטור פונסלט (Jean Victor Poncelet 1788-1867) וצ׳רלס ג׳וליין בריינצ׳ן (Charles Julien Brianchon 1785-1864) הוכיחו כי ״המעגל העובר דרך נקודות המפגש של הגבהים במשולש עם צלעות המשולש, עובר גם דרך נקודות האמצע של הצלעות ונקודות האמצע בין נקודת מפגש הגבהים במשולש לבין קדקודי המשולש״.

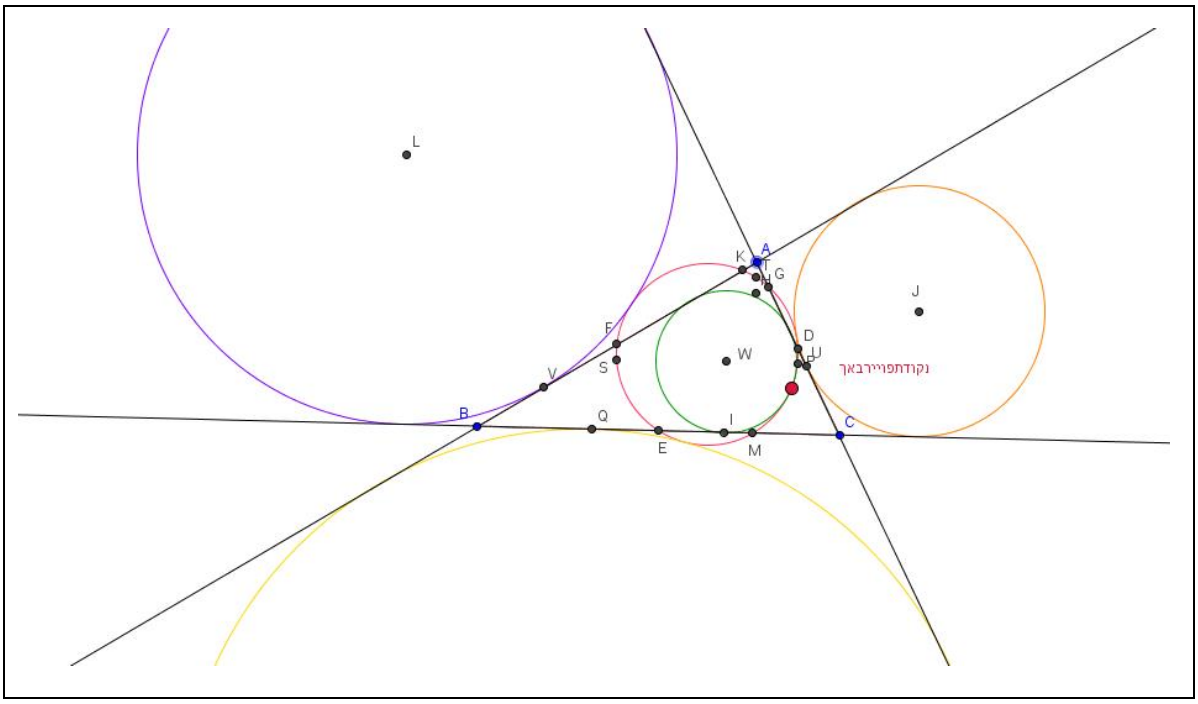
בשנת 1833 סטיינר (Jacob Steiner 1796-1863) טען כי לא ידע שהמעגל המדובר הוכח ע״י פויירבאך ואף כינה אותו מעגל פויירבאך. בשנת 1842 אולרי טרקיום (Olry Terquem 1782-1862) כתב מאמר ובו הציג הוכחה נוספת למעגל ואף קרא לו לראשונה מעגל 9 הנקודות.

פרק שלישי: משפט פויירבאך

בפרק זה אציג הוכחה למשפט פויירבאך בכלים גיאומטריים סינטטיים ההוכחה עובדה מתוך (Pedoe, 1979) עמ' 9-10 והדגמה למשפט זה בכלים אנליטיים.

3.1 ניסוח המשפט

"מעגל תשע הנקודות משיק למעגל החסום במשולש ומשיק גם לשלושת המעגלים החיצוניים המשיקים לצלע של המשולש ולהמשכי שתי הצלעות"



איור 10

משפט זה תואר כאחד המשפטים היפים ביותר בגיאומטריה המודרנית.

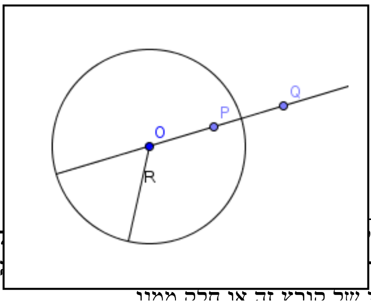
3.2 הוכחה בכלים גיאומטריים

בהוכחה זו ארבע טענות עזר:

טענות עזר:

1. אינוורסיה- הגדרה: העתקה של נקודות במישור השומרת על נקודות של מעגל כלשהו, ומחליפה בין נקודות פנימיות לחיצוניות. כלומר נקודה P עוברת לנקודה Q, אם הנקודות נמצאות על אותה קרן היוצאת מ- O, ובנוסף מתקיים $OP\cdot OQ=R^2$

כפי שמתואר בשרטוט הבא:

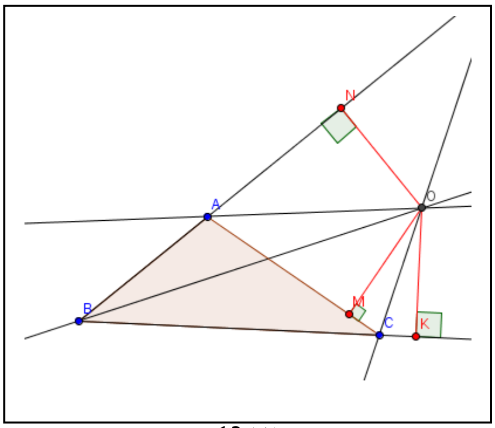


איור 11

2. במשולש חוצי הזוויות החיצוניות בשני קדקודים וחוצה הזווית הפנימית של הקדקוד השלישי נפגשים בנקודה אחת.

הוכחה: נשרטט משולש ABC ונעביר לזוויות A, C, חוצה זווית חיצוני הנפגשים בנקודה O.

OA, ו- OC בהתאמה כמתואר בשרטוט.

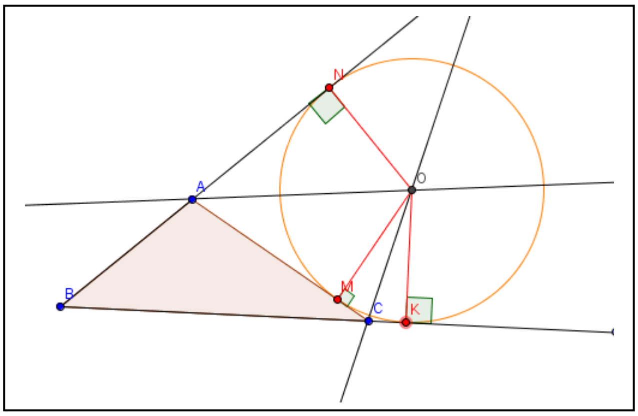


איור 12

הנקודה O נמצאת על חוצה הזווית החיצונית ∠ACK ולכן מרחקיה מהקטעים BC ו- AC שווים. כמו כן נקודה O נמצאת על חוצה הזווית החיצונית ∠NAC ולכן מרחקיה מהקטעים AC ו- BA שווים. ולכן מרחק הנקודה O מהקטעים AB ו- BC שווים, כלומר הנקודה O נמצאת על חוצה הזווית הפנימית B. וכך ניתן להוכיח כך לגבי כל שלשה קטעים הכוללים שני חוצי זוויות חיצוניים ואחד פנימי.

3. קיימים שלושה מעגלים המשיקים מבחוץ למשולש, שכל אחד מהם משיק לצלע אחת במשולש ולהמשכן של שתי הצלעות האחרות.

הוכחה: נעביר אנכים מנקודה O לצלעות המשולש או להמשכן ונסמן את נקודות המפגש שלהם ב- K, M, N . נשרטט מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו באורך OM מעגל זה יעבור דרך הנקודות N, M, K, ומכאן כי NO=MO=KO=r, r מייצג את רדיוס המעגל. כמתואר בשרטוט:



איור 13

קובץ זה נועד אך ורק לשימושם האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

באותו אופן ניתן לשרטט שני מעגלים נוספים ומכאן שקיימים עוד שני מעגלים.

4. נקודות ההשקה של המעגלים החיצוניים חוצות את היקף המשולש, ABC כאשר מתחילים את המדידה מן הקדקוד שמול נקודת ההשקה.
(ההוכחה מסתמכת על איור 13).

הוכחה: שני משיקים היוצאים מנקודה אחת למעגל שווים זה לזה באורכם, לכן: , BK=BN,

AM=AN, CM=CK.   BK+BN=BC+CK+BA+AN

לכן: BC+CK+BA+AN=BC+CM+BA+AM

BC+CM+BA+AM=BC+AC+AB

כלומר סכום שני המשיקים BN, BK שווים להיקף המשולש.

נסמן את היקף המשולש ב t , ולכן: BK+BN=t ומכאן ש.. $BK=BN=\frac{1}{2}t$.

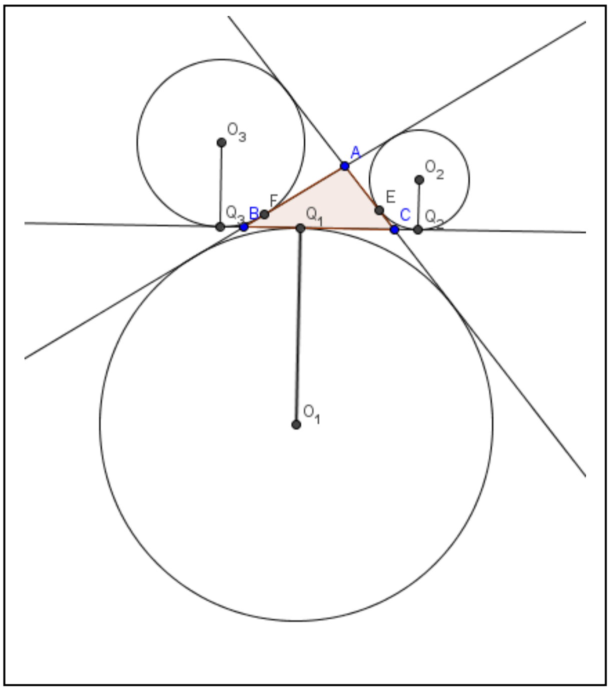
כלומר אורך כל משיק שווה למחצית מהיקף המשולש.

הוכחת המשפט: בהוכחה זו איעזר בטענות העזר שהוצגו לעיל ובאיור 7 לצורך המחשה.

נתון משולש ΔABC שצלעותיו משיקות למעגלים מבפנים ומבחוץ

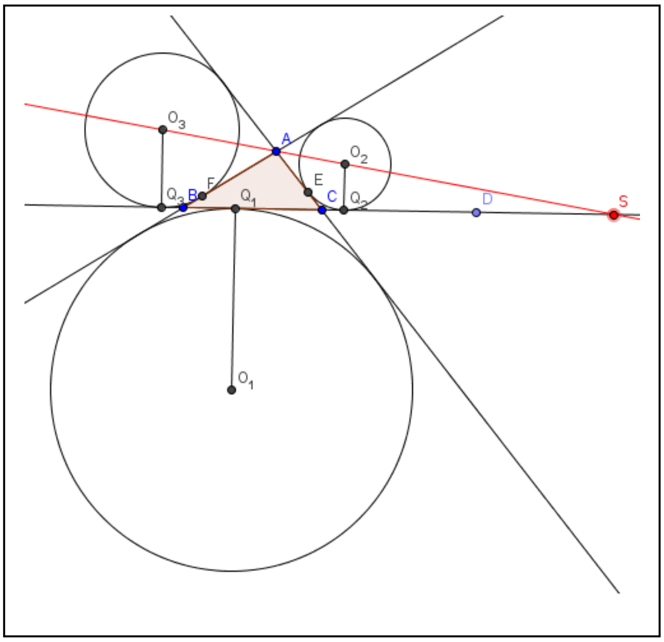
צ"ל: כל אחד ממעגלים אלו משיק למעגל פויירבאך

נתון משולש ΔABC ונתונים מעגלים המשיקים למשולש מבחוץ. נסמן את מרכזי המעגלים ב- O_1,O_2,O_3. ואת נקודות ההשקה שלהם עם הצלע BC או המשכה ב Q_1,Q_2,Q_3 בהתאמה כמתואר באיור 14.



איור 14

בשלב ראשון אוכיח את קיומה של הנקודה במעגלים 2, 3 .



איור 15

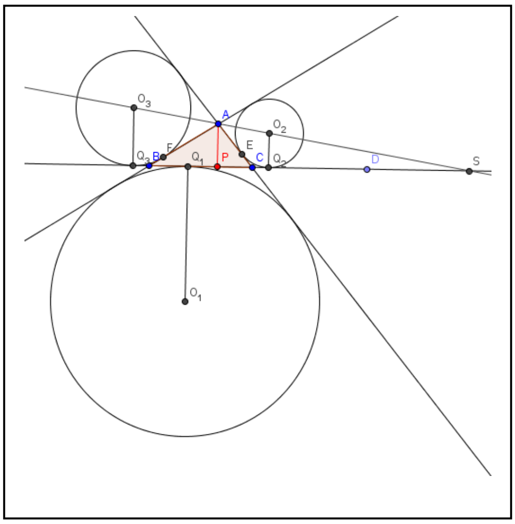
נחבר את O_2O_3 עם המשכה של הצלע BC מהכיוון של C ונסמן את נקודת המפגש ב- S, כמתואר באיור 12. S היא נקודה המחלקת את הקטע O_2O_3 חלוקה חיצונית ו- A היא נקודה המחלקת את הקטע O_2O_3 חלוקה פנימית. נקודות A, S, מחלקות את O_2O_3 חלוקה הרמונית כך ש : $\frac{AO_2}{AO_3}=\frac{SO_2}{SO_3}$

יחס זה שווה ליחס בין הרדיוסים של המעגלים. נסמן את רדיוס מעגל 3 ב r_3 ואת רדיוס מעגל 2 ב- r_2

ולכן : $\frac{AO_2}{AO_3}=\frac{SO_2}{SO_3}=\frac{r_2}{r_3}$. $O_2Q_2 || O_3Q_3$ נובע מהבנייה.

קובץ זה נועד אך ורק לשימושם האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

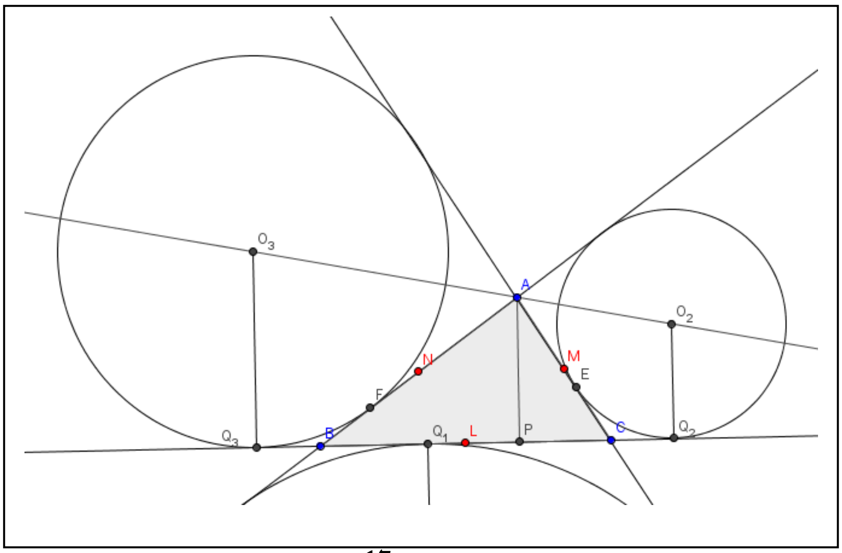
מנקודה A נוריד אנך ל- BC. נסמן את נקודת המפגש שלו עם צלע המשולש BC ב- P כמתואר באיור 16. P, S מחלקים את הקטע Q_2Q_3 חלוקה פנימית וחיצונית ביחס הרמוני כלומר: $\frac{PQ_2}{PQ_3}=\frac{SQ_2}{SQ_3}$



איור 16

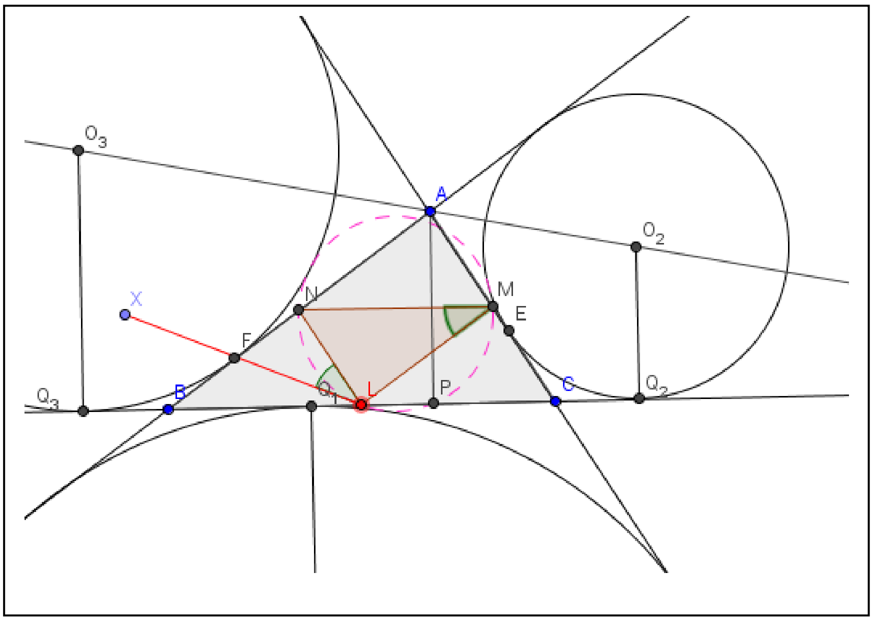
נסמן את הנקודות N, M, L, בהתאמה אמצעי הצלעות AB, AC, BC. לפי טענת עזר 4: $BL=LC$

ו- $BQ_2=\frac{1}{2}t=CQ_3$ ולכן: $LP\cdot LS=\overline{LQ_2}^2=\overline{LQ_3}^2$.



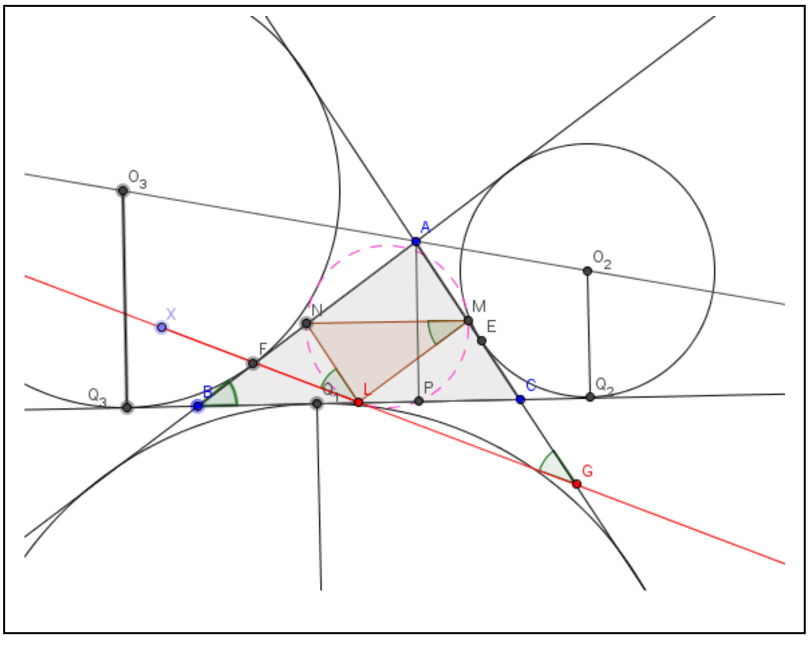
איור 17

מנקודה L (נקודת אמצע הצלע BC) הנמצאת על מעגל פויירבאך, נעביר משיק למעגל זה (נסמן ב- x נקודה על המשיק) כמתואר באיור 18, (מעגל פויירבאך מסומן בקווקוו ורוד). נחבר את אמצעי צלעות משולש ABC. מאחר וזווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על אותו מיתר, $\angle XLN=\angle NML$. $\Delta ABC\sim\Delta NML$ ולכן $\angle XLN=\angle NML=\angle ABC$



איור 18

נמשיך את המשיק LX מהכיוון של L עד לנקודת המפגש שלו עם AC. נסמן נקודת מפגש זו ב- G כמשורטט באיור 19. NL||AG, NL קטע אמצעים במשולש ΔABC, ולכן $\angle FLN=\angle FGA$ זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים שוות ולכן: $\angle ABC=\angle FGA$.

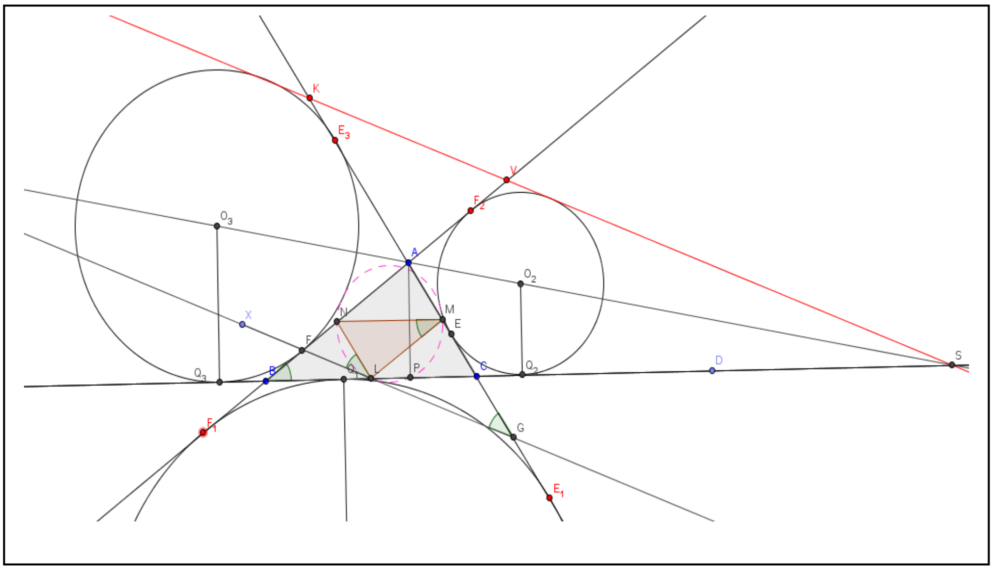


איור 19

נעביר מנקודה S משיק נוסף למעגל 3, ונסמן נקודות השקה נוספות בין המעגלים להמשכי צלעות המשולש ב E_1,E_3,F_2,F_1,K,V, כמתואר באיור 20. לפי טענות עזר - 4,5 - $t\frac{1}{2}$=$BF_2=CE_3=CQ_3$ וכן

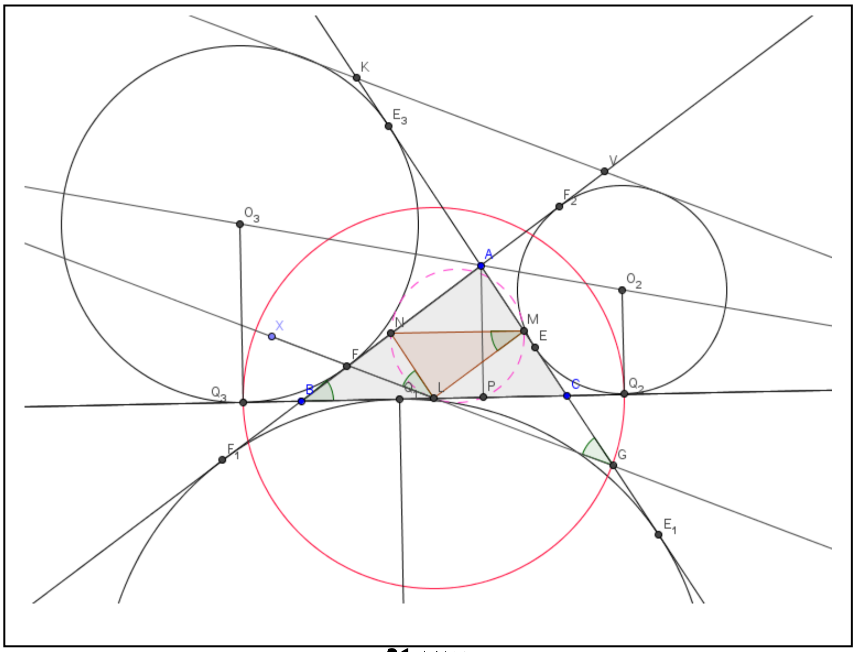
מתקיים כי: $BQ_3=BF=CE=CQ_2$, $AE_3=AF_2=CE_1=CQ_1$, $BQ_3=BF=AE=AF_2$

ולכן: $AB=AK$, $AC=AK$, $\angle KAV=\angle BAC$. $\Delta ABC\cong\Delta AKV$ לפי צ.ז.צ ומכאן ש $\angle AKV=\angle CBA=\angle AGL$



איור 20

ולכן: $XG \parallel KS$ (אם הזוויות המתחלפות שוות אז הישרים מקבילים). הוכחתי קודם כי: $LP\cdot LS=\overline{LQ_2}^2=\overline{LQ_3}^2$ מעגל פויירבאך העובר דרך הנקודות M,N,L הוא האינוורסיה (הוגדר בטענת עזר 1) של המשיק KS שמרכזו בנקודה L ורדיוסו LQ_2. מעגל פויירבאך מכיל את הנקודה P, ואינוורסי לישר העובר דרך S. המקביל לישר המשיק למעגל פויירבאך בנקודה L.
מאחר ומעגל האינוורסיה חותך את שני המעגלים 2, 3 אורתוגונלית, כל אחד מהמעגלים הנ"ל אינוורסי לעצמו. מאחר והמעגל האינוורסי למעגל פויירבאך נפגש עם המעגלים 2, 3, נובע מכך כי מעגל 9 הנקודות משיק למעגלים 2,3.



איור 21

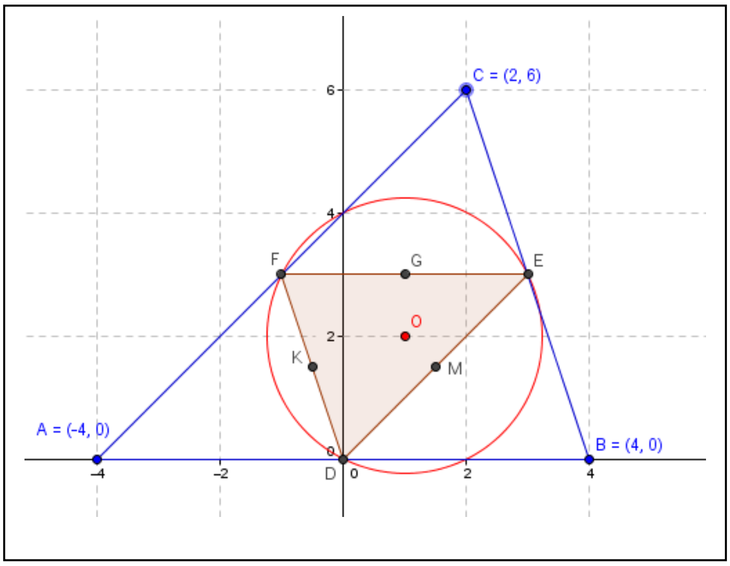
ובאופן דומה נוכיח שמעגל פויירבאך משיק למעגל החסום במשולש (מפנים) וכן משיק למעגל 1.

3.3 הדגמה של משפט פויירבאך בכלים אנליטיים

3.3.1 <u>הדגמה של מעגל פויירבאך בכלים אנליטיים</u> [2]

נתונות הנקודות : A(-4,0) B(4,0) C(2,6)

מציאת משוואת מעגל פויירבאך ונקודת המרכז שלו.



איור 22

D(0,0) F(–1,3) E(3,3)

1. מציאת נקודת מרכז מעגל פויירבאך

[2] החישובים נעשו באמצעות תוכנת Derive

נחשב ונמצא את נקודות J, ו- H: $J(-0.5,1.5)$, $H(1,3)$

נחשב ונמצא את משוואת האנך האמצעי לצלע FD $y=\frac{1}{3}x+1\frac{2}{3}$

נקודת מרכז מעגל פויירבאך: $(p, q)=(1,2)$

2. מציאת משוואת מעגל פויירבאך

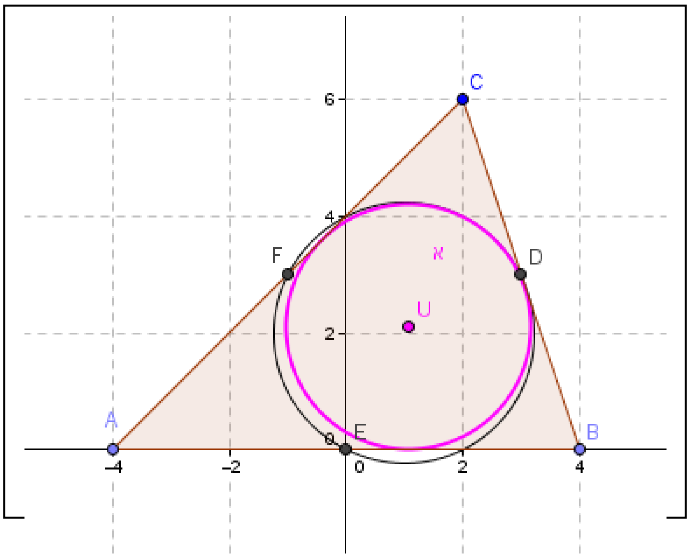
משוואת המעגל: $(x-2)^2+(y-1)^2=5$

3.3.2 הדגמה של משפט פויירבאך בכלים אנליטיים

נתון משולש ABC, ששיעורי הנקודות שלו $C(2,6)$ $B(4,0)$ $A(-4,0)$

נמצא את משוואות המעגלים המשיקים למשולש מבפנים ומבחוץ ונוכיח כי מעגלים אלו משיקים למעגל פויירבאך. החישובים התבצעו באמצעות תוכנת ה derive

משוואת מעגל א' *(המעגל הוורוד)*, המעגל המשיק מבפנים למשולש – המעגל החסום במשולש



נקודת מרכז המעגל– המעגל החסום במשולש: $U:\ \left(3\sqrt{2}-\sqrt{10},\sqrt{10}-2\sqrt{5}+\sqrt{2}+2\right)$

רדיוס המעגל: $R=\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5}+2$

משוואת המעגל החסום:

$$\left(y-\left(\sqrt{10}-2\sqrt{5}+\sqrt{2}+2\right)\right)^2+\left(x-\left(3\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)\right)^2=-4\sqrt{5}-16\sqrt{2}+36$$

$$x^2+\left(2\sqrt{10}-6\sqrt{2}\right)x+y^2-\left(2\sqrt{10}-4\sqrt{5}+2\sqrt{2}+4\right)y=12\sqrt{5}-28$$

כדי להוכיח שמעגל פויירבאך ומעגל א משיקים. נחשב את סכום הרדיוסים של שני המעגלים ואת קטע המרכזים ונוכיח שהם שווים.

<u>חישוב קטע המרכזים</u>:

$$U:\left(3\sqrt{2}-\sqrt{10},\sqrt{10}-2\sqrt{5}+\sqrt{2}+2\right)$$

$$d=\sqrt{\left(\left(3\sqrt{2}-\sqrt{10}-1\right)^2+\left(\sqrt{10}-2\sqrt{5}+\sqrt{2}+2-2\right)^2\right)}$$

$$d=-\sqrt{10}+3\sqrt{5}-\sqrt{2}-2$$

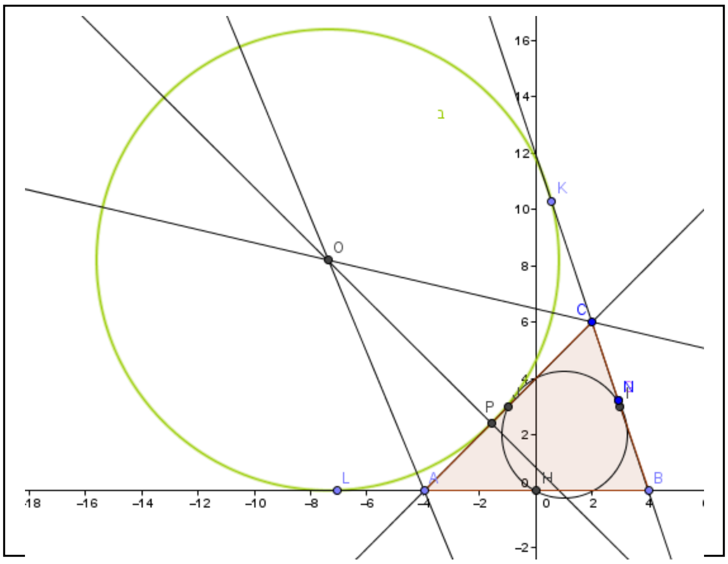
<u>חישוב הפרש הרדיוסים</u>:

$$R_2-R_1=\sqrt{5}-\left(\sqrt{10}-2\sqrt{5}+\sqrt{2}+2\right)$$

$$R_2-R_1=-\sqrt{10}+3\sqrt{5}-\sqrt{2}-2$$

<u>ולכן</u>: $d=R_2-R_1$, כלומר, המעגלים משיקים מבפנים.

משוואת מעגל ב' (המעגל הירוק), המעגל המשיק למשולש מבחוץ



איור 24

נקודת מרכז המעגל – $O:\left(-3\sqrt{2}-\sqrt{10},\sqrt{10}+2\sqrt{5}-\sqrt{2}+2\right)$

רדיוס המעגל: $R^2=4\sqrt{5}+16\sqrt{2}+36$

משוואת המעגל המשיק למעגל פויירבאך מבחוץ:

$$\left(y-\left(2\sqrt{5}+2-\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)\right)^2+\left(x-\left(-\sqrt{10}-3\sqrt{2}\right)\right)^2=4\sqrt{5}+16\sqrt{2}+36$$

$$x^2+\left(2\sqrt{10}+6\sqrt{2}\right)x+y^2+\left(2\sqrt{10}-4\sqrt{5}-2\sqrt{2}-4\right)y=-12\sqrt{5}-28$$

כדי להוכיח שמעגל פויירבאך ומעגל א משיקים. נחשב את סכום הרדיוסים של שני המעגלים ואת קטע המרכזים ונוכיח שהם שווים.

<u>חישוב קטע המרכזים</u>:

$$O:\ \left(-\sqrt{10}-3\sqrt{2},\sqrt{10}+2\sqrt{5}-\sqrt{2}+2\right)$$

$$d=\sqrt{\left(\left(-\sqrt{10}-3\sqrt{2}-1\right)^2+\left(2\sqrt{5}+2-\sqrt{2}+\sqrt{10}-2\right)^2\right)}$$

$$d=\sqrt{10}+3\sqrt{5}-\sqrt{2}+2$$

<u>חישוב סכום הרדיוסים</u>:

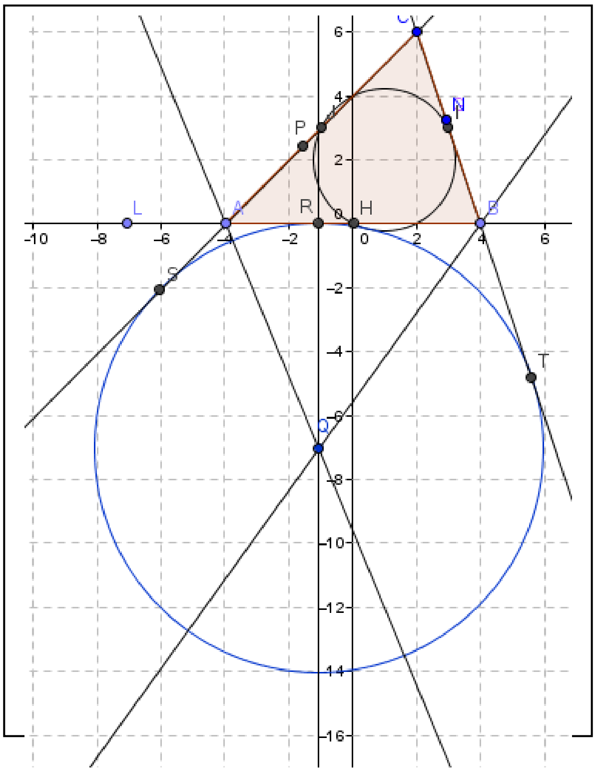
$$R_2+R_1=\sqrt{5}+\sqrt{4\sqrt{5}+16\sqrt{2}+36}$$

$$R_2+R_1=\sqrt{10}+3\sqrt{5}-\sqrt{2}+2$$

<u>ולכן</u>: $d=R_2+R_1$, כלומר, המעגלים משיקים מבחוץ.

בדיוק באותה דרך נחשב את משוואות המעגלים, ג' ד' , נדגים מתמטית את קיומה של נקודת ההשקה ונקבל:

משוואת מעגל ג' (המעגל הכחול), המעגל המשיק מבחוץ למשולש



נקודת מרכז המעגל : $Q:\ \left(-3\sqrt{2}+\sqrt{10},-\sqrt{10}-2\sqrt{5}-\sqrt{2}+2\right)$

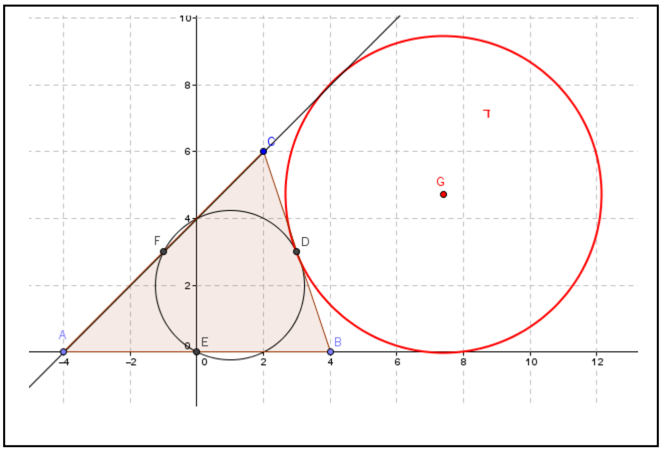
רדיוס מעגל: $R=\sqrt{10}+2\sqrt{5}+\sqrt{2}-2$

משוואת המעגל המשיק למעגל פויירבאך מבחוץ:

$$\left(y-\left(-2\sqrt{5}+2-\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)\right)^2+\left(x-\left(\sqrt{10}-3\sqrt{2}\right)\right)^2=-4\sqrt{5}+16\sqrt{2}+36$$

$$x^2+\left(-2\sqrt{10}+6\sqrt{2}\right)x+y^2+\left(2\sqrt{10}+4\sqrt{5}+2\sqrt{2}-4\right)y=12\sqrt{5}-28$$

משוואת מעגל ד' (המעגל האדום), המעגל המשיק מבחוץ למשולש



איור 26

נקודת מרכז המעגל: $G:\left(3\sqrt{2}+\sqrt{10},-\sqrt{10}+2\sqrt{5}+\sqrt{2}+2\right)$

רדיוס מעגל: $R^2=4\sqrt{5}-16\sqrt{2}+36$

משוואת המעגל המשיק למעגל פויירבאך מבחוץ:

$$\left(y-\left(2\sqrt{5}+2+\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)\right)^2+\left(x-\left(\sqrt{10}+3\sqrt{2}\right)\right)^2=4\sqrt{5}-16\sqrt{2}+36$$

$$x^2-\left(2\sqrt{10}+6\sqrt{2}\right)x+y^2+\left(2\sqrt{10}-4\sqrt{5}-2\sqrt{2}-4\right)y=-12\sqrt{5}-28$$

סיכום

משוואות ארבעת המעגלים המשיקים למעגל פויירבאך מבפנים ומבחוץ שקיבלתי:

מעגל א' – המעגל החסום, המשיק למשולש מבפנים

$$x^2+\left(2\sqrt{10}-6\sqrt{2}\right)x+y^2-\left(2\sqrt{10}-4\sqrt{5}+2\sqrt{2}+4\right)y=12\sqrt{5}-28$$

מעגל ב' - המעגל המשיק למשולש מבחוץ

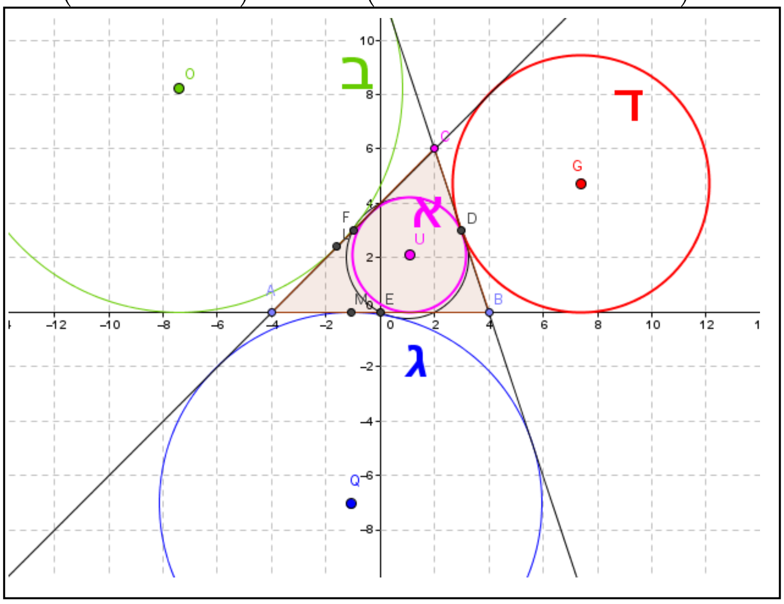
$$x^2+\left(2\sqrt{10}+6\sqrt{2}\right)x+y^2+\left(2\sqrt{10}-4\sqrt{5}-2\sqrt{2}-4\right)y=-12\sqrt{5}-28$$

מעגל ג' - המעגל המשיק למשולש מבחוץ

$$x^2+\left(-2\sqrt{10}+6\sqrt{2}\right)x+y^2+\left(2\sqrt{10}+4\sqrt{5}+2\sqrt{2}-4\right)y=12\sqrt{5}-28$$

מעגל ד' - המעגל המשיק למשולש מבחוץ

$$x^2-\left(2\sqrt{10}+6\sqrt{2}\right)x+y^2+\left(2\sqrt{10}-4\sqrt{5}-2\sqrt{2}-4\right)y=-12\sqrt{5}-28$$



איור 27

מרכזי המעגלים:

מעגל א' – המעגל החסום, המשיק למשולש מבפנים: $U:\left(3\sqrt{2}-\sqrt{10},\sqrt{10}-2\sqrt{5}+\sqrt{2}+2\right)$

מעגל ב' - המעגל המשיק למשולש מבחוץ: $O:\left(-3\sqrt{2}-\sqrt{10},\sqrt{10}+2\sqrt{5}-\sqrt{2}+2\right)$

מעגל ג' - המעגל המשיק למשולש מבחוץ: $Q:\left(-3\sqrt{2}+\sqrt{10},-\sqrt{10}-2\sqrt{5}-\sqrt{2}+2\right)$

מעגל ד' - המעגל המשיק למשולש מבחוץ: $G:\left(3\sqrt{2}+\sqrt{10},-\sqrt{10}+2\sqrt{5}+\sqrt{2}+2\right)$

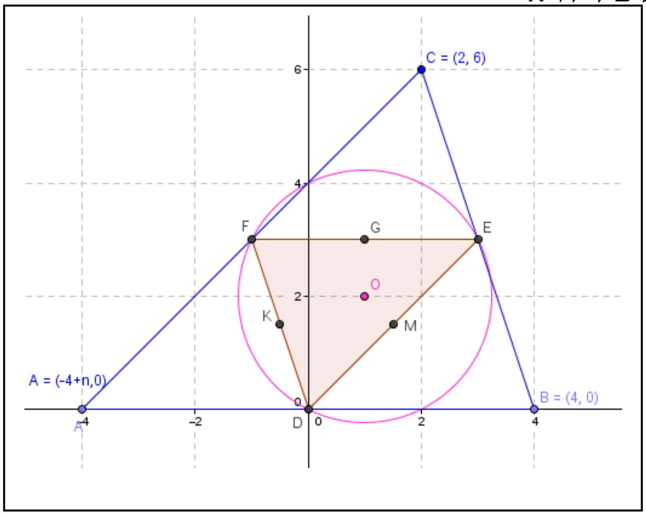
משוואות המעגלים המשיקים ונקודות מרכז המעגל שנתקבלו מפתיעות מאד, ואפשר לראות כי קיימים קשרים מיוחדים ביניהם. ארבעת המעגלים א, ב, ג, ד, משיקים למעגל פויירבאך (בשחור) שמרכזו בנקודה ששיעוריה (1,2).

פרק רביעי: מרכז מעגלי פויירבאך כמקום גיאומטרי המושפע מהזזות של קדקודים במשולש

מקום גיאומטרי לפי מילון אבן שושן הוא "ריכוז כל האלמנטים הגיאומטריים (נקודות, ישרים, מעגלים, זוויות וכדומה), הממלאים תכונה מסוימת". בפרק זה כולל הדגמה של מרכז מעגל פויירבאך כמקום גיאומטרי המתקבל מגרירה של קודקודי, צלעות משולש.

קדקודי המשולש הן הנקודות (-4,0), (4,0), (2,6), בכל תת פרק קדקוד אחד של המשולש, או צלע, נע ובכך משפיע על מיקומה של נקודת מרכז המעגל. אוסף הנקודות הנ"ל יוצר מקום גיאומטרי כלשהו, כפי שמופיע בקישור. הקישור נבנה באמצעות תוכנת ה- Geogebra.

4.1 המקום הגיאומטרי של מרכזי מעגל פויירבאך המתקבלים מגרירת קדקוד A של המשולש על ציר ה-x



איור 28

<u>**תהליך הבנייה**</u>: נסמן את נקודה A (-4+n,0) ונבטא את נקודת מרכז מעגל פויירבאך (p,q) (המעגל הוורוד המופיע באיור 25) באמצעות הפרמטרים המייצגים את נקודה A. על מנת לבצע זאת נמצא את משוואות האנכים האמצעיים לקטעים FE, ו- FD, נשווה ביניהם ונבטא באמצעות הפרמטר n את נקודת מרכז המעגל. כדי לקבוע מהו המקום הגיאומטרי אותו נקבל, נבטא נקודה זו באמצעות הפרמטרים (p,q), המוזכרים בתחילה.

<u>שלב 1</u>: נבטא את אמצעי צלעות משולש ΔABC

$$D(\frac{n}{2},0) \qquad F(\frac{n-2}{2},3) \qquad E(3,3)$$

<u>שלב 2</u>: נחשב את משוואות האנכים האמצעיים לצלעות FE, ו- FD:

הנקודה K: $K=\left(\frac{n-1}{2},1.5\right)$, הנקודה G: $G=\left(\frac{n+4}{4},3\right)$

קובץ זה נועד אך ורק לשימושם האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

משוואת האנך האמצעי לקטע FE $x=\frac{n+4}{4}$

משוואת האנך האמצעי לקטע FD : $y=\frac{1}{3}x+\frac{10-n}{6}$

שיעורי נקודת מרכז מעגל פויירבאך : $(p,q)=\left(\frac{n+4}{4},\frac{24-n}{12}\right)$

<u>שלב 3 :</u>

נפתח נקודה זו ונקבל :

$$(p,q)=\left(\frac{n+4}{4},\frac{24-n}{12}\right)$$

$$\begin{pmatrix} p=\frac{n+4}{4}, & q=\frac{24-n}{12} \\ n=4p-4, & n=24-12q \end{pmatrix}$$

$$4p-4=24-12q$$

$$q=-\frac{p}{3}+\frac{7}{3}$$

כלומר ניתן לרשום את q כמשוואת ישר התלויה ב- p

ולכן המקום הגיאומטרי הוא **משוואת ישר**.(ניתן לראות הדגמה דינמית בתחתית האיור)

משוואת מעגל פויירבאך :

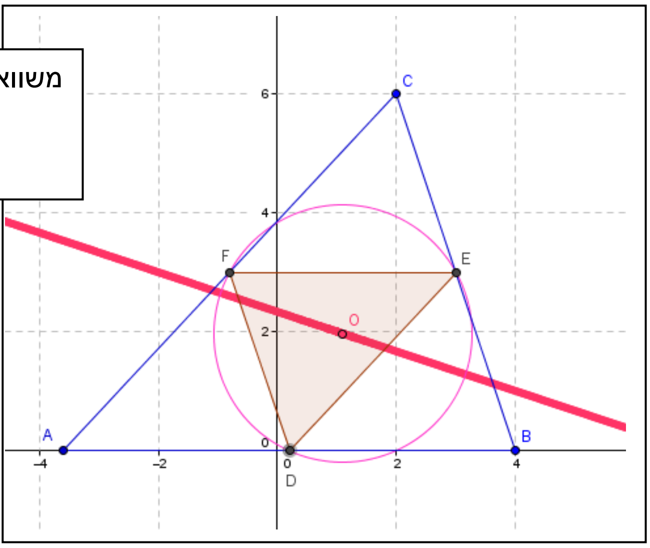
$$R^2=\left(\frac{n+4}{4}-0\right)^2+\left(\frac{24-n}{12}-0\right)^2=\frac{n^2-4n+40}{8}$$

$$\left(x-\frac{n+4}{4}\right)^2+\left(y-\frac{24-n}{12}\right)^2=\frac{10n^2+24n+720}{144}$$

משוואת הישר שהתקבל:

$$y=-\frac{x}{3}+\frac{7}{3}$$

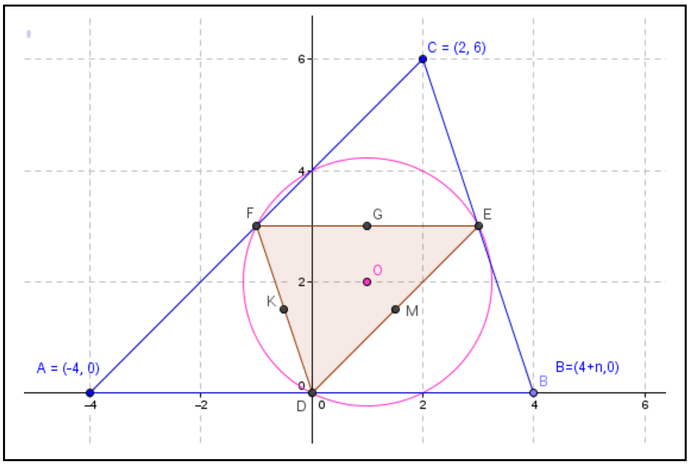
קישור להנפשה



איור 29

קובץ זה נועד אך ורק לשימושם האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

4.2 המקום הגיאומטרי של מרכזי מעגל פויירבאך המתקבלים מגרירת קדקוד B של המשולש על ציר ה-x



איור 30

<u>**תהליך הבנייה**</u> : נסמן את נקודה B $(4+n,0)$ ונבטא את נקודת מרכז מעגל פויירבאך (p,q) (המעגל הוורוד המופיע בשרטוט) באמצעות הפרמטרים המופיעים בנקודה B. על מנת לבצע זאת נמצא את משוואות האנכים האמצעיים לקטעים FE, ו- ED, נשווה ביניהם ונבטא באמצעות הפרמטר n את נקודת מרכז המעגל. כדי לקבוע מהו המקום הגיאומטרי אותו נקבל, נבטא נקודה זו באמצעות הפרמטרים (p,q), המוזכרים בתחילה.

<u>שלב 1</u> : נבטא את אמצעי צלעות משולש ΔABC

$$D(\frac{n}{2},0) \quad F(-1,3) \quad E(\frac{6+n}{2},3)$$

<u>שלב 2</u> : נחשב את משוואות האנכים האמצעיים לצלעות FE, ו- FD :

הנקודה M : $M=\left(\frac{3+n}{2},1.5\right)$, הנקודה G : $G=\left(\frac{n+4}{4},3\right)$

משוואת האנך האמצעי לקטע FE $\quad x=\frac{n+4}{4}$

משוואת האנך האמצעי לקטע ED : $y=-x+\frac{n+6}{2}$

שיעורי נקודת מרכז מעגל פויירבאך : $(p,q)=\left(\frac{n+4}{4},\frac{n+8}{4}\right)$

שלב 3 :

נפתח נקודה זו ונקבל :

$$(p,q)=\left(\frac{n+4}{4},\frac{n+8}{4}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ll} p=\frac{n+4}{4}, & q=\frac{n+8}{4} \\ n=4p-4, & n=4q-8 \end{array}\right)$$

$$4p-4=4q-8$$
$$q=p+1$$

כלומר ניתן לרשום את q כמשוואת ישר התלויה ב- p

ולכן המקום הגיאומטרי הוא **משוואת ישר**.(ניתן לראות הדגמה דינמית בתחתית האיור)

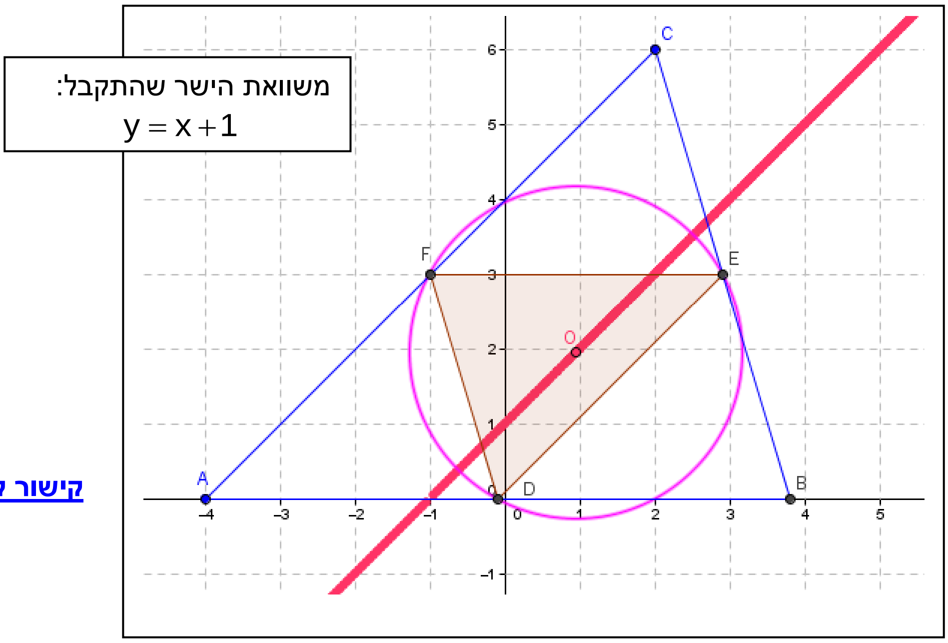
למשוואת ישר זו תכונה נוספת, היא מקבילה לצלע AC של המשולש.

משוואת הצלע AC היא : y=x+4, וניתן לראות שלשני הישרים אותו השיפוע, 1

משוואת מעגל פויירבאך :

$$R^2=\left(\frac{n+4}{4}-\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{n+8}{4}-0\right)^2=\frac{n^2+4n+20}{2}$$

$$\left(x-\frac{n+4}{4}\right)^2+\left(y-\frac{n+8}{4}\right)^2=\frac{n^2+4n+20}{2}$$

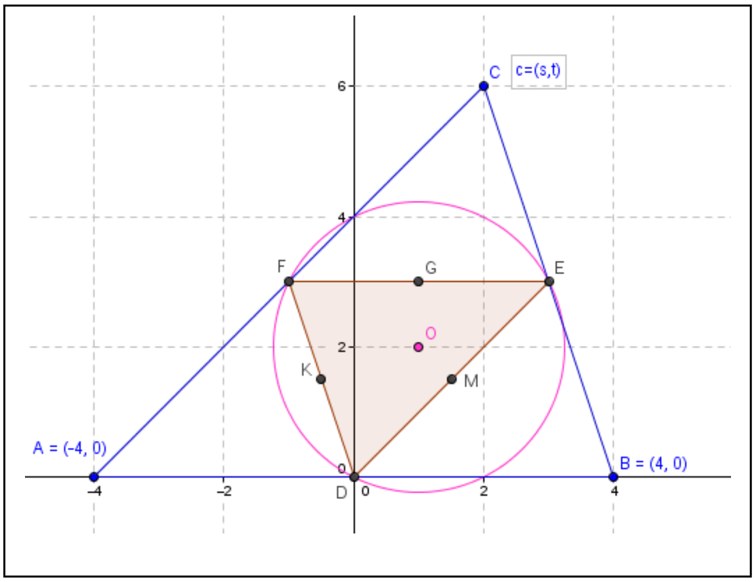


[קישור להנפשה](#)

איור 31

קובץ זה נועד אך ורק לשימושם האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

4.3 המקום הגיאומטרי של מרכזי מעגל פויירבאך המתקבלים מגרירת קדקוד C במשולש



איור 32

<u>תהליך הבנייה</u> : נסמן את נקודה C (s,t) ונבטא את נקודת מרכז מעגל פויירבאך (p,q) (המעגל הוורוד המופיע בשרטוט) באמצעות הפרמטרים המופיעים בנקודה C. על מנת לבצע זאת נמצא את משוואות האנכים האמצעיים לקטעים FE, ו- FD, נשווה ביניהם ונבטא באמצעות הפרמטרים s, ו- t את נקודת מרכז המעגל. כדי לקבוע מהו המקום הגיאומטרי אותו נקבל, נבטא נקודה זו באמצעות הפרמטרים (p,q), המוזכרים בתחילה.

<u>שלב 1</u> : נבטא את אמצעי צלעות משולש ΔABC

$$D(0,0) \qquad F\left(\frac{s-4}{2},\frac{t}{2}\right) \qquad E\left(\frac{s+4}{2},\frac{t}{2}\right)$$

<u>שלב 2</u> : נחשב את משוואות האנכים האמצעיים לצלעות FE, ו- FD :

הנקודה K : $K=\left(\frac{s-4}{4},\frac{t}{4}\right)$ הנקודה G : $G=\left(\frac{s}{2},\frac{t}{2}\right)$

משוואת האנך האמצעי לקטע FE $x=\frac{s}{2}$

משוואת האנך האמצעי לקטע FD : $y=-\frac{s-4}{t}x+\frac{s^2+t^2-8s+16}{4t}$

שיעורי נקודת מרכז מעגל פויירבאך : $(p,q)=\left(\frac{s}{2},-\frac{s^2-t^2-16}{4t}\right)$

שלב 3: נפתח נקודה זו ונקבל:

$$(p,q)=\left(\frac{s}{2},-\frac{s^2-t^2-16}{4t}\right)$$

$$\begin{pmatrix} p=\frac{s}{2}, & q=-\frac{s^2-t^2-16}{4t} \\ s=2p, & 4tq=t^2-s^2+16 \end{pmatrix}$$

נבטא את t באמצעות p, ו- q ונקבל:

$$4tq=t^2-4p^2+16$$
$$(t-2q)^2=4p^2+16+4q^2$$
$$(t-2q)^2=4\left(p^2+4+q^2\right)$$
$$t=2\left(\sqrt{p^2+4+q^2}+q\right)$$

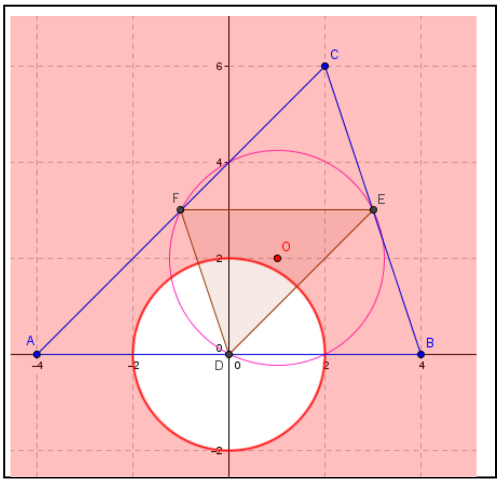
כאשר $p^2+4+q^2\geq 0$ מתקבל פתרון ממשי, כלומר $p^2+q^2\geq 4$

התקבלה משוואה של מעגל, ולכן המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים הוא על המעגל ומחוץ למעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו 2.

רדיוס מעגל פויירבאך: $R^2=\left(\frac{s}{2}\right)^2+\left(\frac{-s^2+16+t^2}{4d}\right)^2$

משוואת מעגל פויירבאך: $\left(\frac{s}{2}\right)^2+\left(\frac{t^2-s^2+16}{4t}\right)^2=\left(x-\frac{s}{2}\right)^2+\left(y-\frac{t^2-s^2+16}{4t}\right)^2$

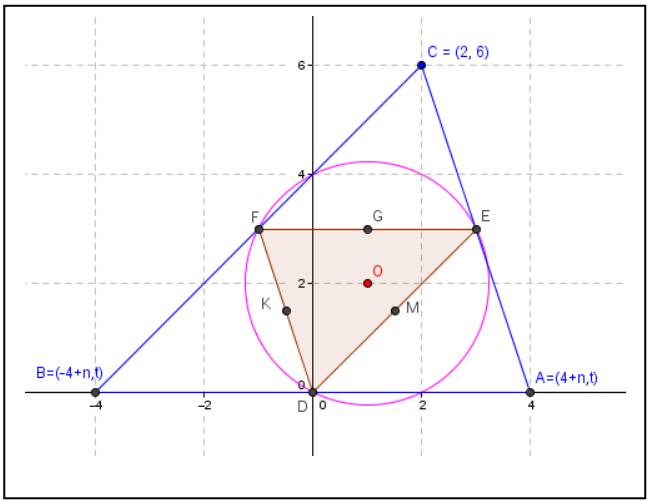
$$x^2-sx+y^2-2\frac{t^2-s^2+16}{4t}y=0$$



איור 33

משוואת המעגל שהתקבלה:
$x^2+y^2\geq 4$

4.4 המקום הגיאומטרי של מרכזי מעגלי פויירבאך המתקבלים מגרירת הצלע AB במשולש במקביל לציר ה- x



איור 34

<u>תהליך הבנייה</u> : נסמן את נקודה B (4+n,t) ואת נקודה A (-4+n,t)ונבטא את נקודת מרכז מעגל פויירבאך (p,q) (המעגל הוורוד המופיע בשרטוט) באמצעות הפרמטרים המופיעים בנקודות A, B. כדי לבצע זאת נמצא את משוואות האנכים האמצעיים לקטעים FE, ו- ED, נשווה ביניהם ונבטא באמצעות הפרמטרים n, ו- t את נקודת מרכז המעגל. כדי לקבוע מהו המקום הגיאומטרי אותו נקבל, נבטא נקודה זו באמצעות הפרמטרים (p, q), המוזכרים בתחילה.

<u>שלב 1</u> : נבטא את אמצעי צלעות משולש ΔABC

$$D(n,t) \quad F\left(\frac{n-2}{2},\frac{6+t}{2}\right) \quad E\left(\frac{6+n}{2},\frac{6+t}{2}\right)$$

<u>שלב 2</u> : נחשב את משוואות האנכים האמצעיים לצלעות FE, ו- FD :

הנקודה K : $K=\left(\frac{3n-2}{4},\frac{3t+6}{4}\right)$ הנקודה G : $G=\left(\frac{2+n}{2},\frac{6+t}{2}\right)$

משוואת האנך האמצעי לקטע FE : $x=\frac{2+n}{2}$

משוואת האנך האמצעי לקטע FD : $y=\frac{n+2}{6-t}x-\frac{3n^2+4n-4}{4(6-t)}+\frac{3t+6}{4}$

שיעורי נקודת מרכז מעגל פויירבאך : $(p,q)=\left(\frac{2+n}{2},\frac{-n(n-4)+3(4t+16-t^2)}{4(6-t)}\right)$

<u>שלב 3</u> : נפתח נקודה זו ונקבל :

$$(p,q)=\left(\frac{2+n}{2},\frac{-n(n-4)+3\left(4t+16-t^2\right)}{4(6-t)}\right)$$

$$\begin{pmatrix} p=\dfrac{2+n}{2}, & q=\dfrac{-n(n-4)+3\left(4t+16-t^2\right)}{4(6-t)} \\ n=2p-2, & 3t^2-(12+4q)t+24q+n^2-4n-48=0 \end{pmatrix}$$

$$3t^2-(12+4q)t+24q+(2p-2)^2-4(2p-2)-48=0$$

$$t_{1,2}=\frac{12+4q\pm 2\sqrt{\left(36-12q+q^2-3p^2+12p\right)}}{3}$$

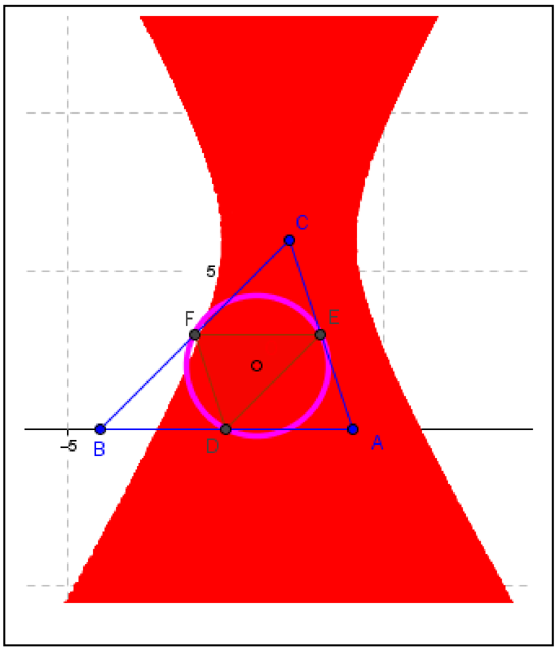
תנאי לקיום פתרון ממשי :

$$\left(36-12q+q^2-3p^2+12p\right)\geq 0$$
$$\left(36+12q-q^2+3p^2-12p\right)=0$$
$$3(p-2)^2-(q-6)^2=12$$

מרכזי המעגלים שהתקבלו נמצאים על ומחוץ להיפרבולה שמרכזה בנקודה C (2,-3). המרחק בין המוקדים הוא 8 (אורך הצלע AB), המרחק בין קדקודי ההיפרבולה הוא 4 (מחצית אורך הצלע AB).
מוקדי ההיפרבולה בנקודות (6,6) ו- (-2,6).

משוואת ההיפרבולה שהתקבלה:

$$3(x-2)^2-(y-6)^2\leq 12$$



[קישור להנפשה]

איור 35

פרק חמישי: סיכום

עבודה זו נעשתה בשילוב של שתי תוכנות: כלי דינמי (Geogebra) וכלי סימבולי (Derive), שהשילוב ביניהם אפשר לחקור את אחד מהמשפטים היפים של הגיאומטריה המודרנית במשולש, משפט פוֹיירבאך.

השימוש בכלים אלגבריים סימבולים וגיאומטריים דינמיים, באמצעות הטכנולוגיה העכשווית, מנת חלקן של התוכנות, מאפשר באופן פשוט וקל להדגים ולהוכיח את המשפט עד כדי נגישות קלה יחסית לתלמידים, זאת בניגוד לקארל פויירבאך שהוכיח את המשפט, אבל לשם כך, כדי לא לטעות, היה זקוק לאותה דקדקנות מופלאה שאפיינה את כתיבתו.

דוגמא טובה לכך הן משוואות המעגלים המשיקים לצלעות המשולש ונקודות המרכז שלהם, שקיבלתי באמצעות ה- Derive, המציגות קשר מיוחד בשינוי סימנים קלים בין הביטויים של משוואות אלו, קשר מפתיע ואלגנטי מאד.

מעגל ומשפט פויירבאך טומנים בחובם הקשרים מתמטיים שונים ואף נחקרו ונחקרים בידיי אנשים שונים בתחום. אני בחרתי להתמקד במרכז מעגל פויירבאך כמקום גיאומטרי הנבנה מהזזת קודקודי המשולש. במהלך החקירה שכללה שימוש ב- Geogebra, ובטכניקה אלגברית גיליתי תגליות מעניינות שגם אותן אפשר להביאן בפני התלמידים בכיתה: בהינתן משולש, כשגררתי את קדקודיו (כל אחד בנפרד), המקום הגיאומטרי של כל נקודות מרכזי מעגלי פויירבאך המתקבלים היה קו ישר. כששרטטתי משולש שאחת מצלעותיו מקבילה לציר ה- x השתנו מעט המסקנות וחלקן אף היה מאד מפתיעות. כשגררתי את הקדקוד בצדו הימני של המשולש קיבלתי ישר המקביל לצלע הנמצאת מול קדקוד הגרירה, וכאשר באותו משולש גררתי את הקדקוד שנמצא ממול לצלע המקבילה לציר ה- x, קיבלתי את שטח המישור פרט למעגל ברדיוס מסוים. הנקודה המפתיעה ביותר הייתה גרירתה של הצלע המקבילה לציר ה- x תוך שימור אורך הצלע ותכונת ההקבלה שלה. גרירה זו הובילה לקבלת שטח על ומחוץ להיפרבולה.

הפעילות עם התלמידות שכללה שילוב של כלים טכנולוגיים שהוזכרו קודם, משתלבת באופן טבעי בתוכנית הלימודים ומאפשרת לתלמידים, גם אלו שטרם למדו בבית הספר גיאומטריה אנליטית, להיחשף ליופי של הגיאומטריה ככלי אלגברי, שילוב זה מאפשר הרחבה והעמקה במשפטים יפים בגיאומטריה שאינם מופיעים בספר הלימוד אך יש לתלמידים מספיק כלים כדי להתמודד לחקור ולתהות על קנקנם.

ברצוני להודות לד"ר זהבי נורית על ההנחיה והעזרה הרבה שנתנה לי בכתיבת עבודה זו, למדתי ממנה רבות.

מקורות

ברוקהיימר, מ'. (2006). מעגל פויירבאך. *דיסק העשרה מתמטית*.

Pedoe, D .(1979) .*Circles a mathematical view* .New York: Dover Publication.

WikiAnswers community ,Nine-point circle: Information from Answers.com: http://www.answers.com/topic/nine-point-circle#CITEREFFeuerbach1822