



**"תוכנית רוטשילד-ויצמן למצוינות בהוראת המדעים"
במימון של קרן קיסריה אדמונד בנימין דה רוטשילד**

מבט חדש על חתכי חרוט

Conic sections – A new perspective

מנחים: ד"ר נורית זהבי, ד"ר גיורא מן, פרופ' נח דנא-פיקארד

מגיש: טזרה לוריסו

אוקטובר 2012

תוכן העניינים

3	מבוא
4	חתכי חרוט
11	פרבולה בשיעור הגיאומטריה: "פרבולה אלגברית" ל"פרבולה גיאומטרית"
13	זווית הראייה
15	מה ניתן ללמוד כאשר משנים את נקודת המבט על חתך של חרוט? - זווית הראייה של הפרבולה
22	סיכום
23	ביבליוגרפיה

מבוא

בעיני מתמטיקאים רבים, המתמטיקה היא דרך חיים, המעניקה הזדמנות לחקור עניינים לא פתורים אשר דורשים מומחיות רבה. דוגמה טובה לכך היא העבודה שנעשתה בידי היוונים הקדמונים על "חתיכי חרוט" (עקומות המכונות "Conics"). חתכים אלו כוללים את הצורות: מעגל, אליפסה, פרבולה והיפרבולה או (במקרים מנוונים) זוג של קווים ישרים, ישר, נקודה. למעשה, עקומות אלו נחקרו לראשונה על ידי אחד מתלמידיו של אפלטון¹ אך מחקריו לא התפרסמו עד שהמתמטיקאי היווני אפולוניוס² כתב רבות על העקומות הללו. הוא גילה כיצד מושגות כל העקומות מחיתוך של חרוט³ ישר על ידי מישור. אם נסמן את הזווית בין מישור זה לבין מישור הבסיס של החרוט בתור θ , קל לראות שכאשר חותכים חרוט על ידי מישור המקביל לבסיסו ($\theta = 0^\circ$), צורת החתך המתקבל היא מעגל. קשה יותר לראות ולהוכיח שכאשר $0^\circ < \theta < 45^\circ$ מתקבל חתך בצורת אליפסה, שכאשר $\theta = 45^\circ$ מתקבלת פרבולה וכאשר $45^\circ < \theta < 90^\circ$ מתקבל חתך בצורת היפרבולה. אפולוניוס הראה את המכנה המשותף לארבע צורות גיאומטריות שונות במראן, ואיחדן תחת תורה גיאומטרית אחת. השלב הבא בהתפתחות תורת חתכי החרוט היה במאה ה-17, עת נמצאו לחתכי החרוט יישומים מדעיים חשובים. קפלר⁴ גילה כי כוכבי הלכת נעים במסלול אליפטי, גלילאו⁵ הוכיח כי כדורי תותח או קליעים אחרים נעים במסלול פרבולי (בהנחה שמתעלמים מהתנגדות האוויר) ודקארט⁶ בחר בפרבולה ככלי המחשה בגיאומטריה האנליטית החדשנית שלו. יישומים מדעיים נוספים נמצאו גם במהלך המאה העשרים, כגון רודולף מרקוס⁷ שזכה בפרס נובל בכימיה (1992) על מה שנקרא "Marcus Theory" העוסקת במעבר אלקטרוני ואנרגיה, אשר המודל המתמטי שלה משמשת בפרבולה.

עבודה זו תעסוק בחלק מחתכי החרוט (בעיקר בפרבולה והיפרבולה), מאחר שעל פי תוכנית הלימודים הממלכתית של משרד החינוך, הפרבולה נלמדת במסגרת לימודי מתמטיקה כבר בכיתה ט', אתמקד בעיקר בצורה זו. העבודה תכיל מספר פרקים. בכל אחד מהפרקים מוצגת תכונה אחת של פרבולה או בעיה שפתרונה קשור לפרבולה תוך כדי שימוש בטכנולוגיה, כלומר שימוש בתוכנה סימבולית גרפית מסוג CAS (Computer Algebra System) המסייעת לחקור, להתבונן, ואף לשכנע או להשתכנע. פן אחר עליו אתמקד בעבודתי הינו הצגת היתרון של CAS ככלי המכוון ומבקר את תהליך החישוב, תוך התייחסות לקשר בינו לבין המונח "חוש לסמלים" (Arcavi, 1994).

בנוסף, מאחר שהנושא של "פרבולה כמקום גיאומטרי" אינו נמצא בתוכנית הלימודים של כיתה ט', אלא רק במסגרת לימודי הגיאומטריה האנליטית בכיתה י"ב, רוב התלמידים נחשפים לפרבולה רק כנושא בשיעורי אלגברה, בעיקר כגרף של פונקציה ריבועית. אני מאמין שמורים המעוניינים בהרחבת אופקי תלמידיהם צריכים ללמד את הנושא 'חתכי חרוט' תוך קישור בין אלגברה לגיאומטריה, למשל: הגרף של המשוואה $y = x^2$ הוא פרבולה, כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור שמרחקן מהנקודה (0,0.25) (הנקראת "מוקד") שווה למרחקן מהישר $y = -0.25$ (הנקרא "מדריך").

¹Plato(427-347 BCE)

²Apollonius of Perga(262-190 B.C)

³החרוט שמדובר בו הוא משטח סיבוב בו הזווית בין הקו היוצר לציר הסיבוב היא 45° .

⁴Johannes Kepler(1571-1630)

⁵Galileo Galilei(1564-1642)

⁶René Descartes(1596-1650)

⁷Rudolph Marcus(1923-...wikipedia)

חתכי חרוט

חתך חרוט הוא עקום המתקבל כתוצאה מחיתוך בין מישור לבין חרוט ישר. לחלופין, ניתן להגדירו בעזרת הכלים של הגיאומטריה האנליטית על ידי משוואה השניונית בשני נעלמים. דרך נוספת להגדרת חתכי חרוט היא בעזרת המושג "אקסצנטריות" (Eccentricity). כל חתך חרוט ניתן להגדיר כמקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור, שיחס מרחקיהן מנקודה נתונה F (המוקד) ומישור נתון l (המדריך) הוא גודל קבוע. פרמטר זה נקרא "אקסצנטריות" ומסומן בדרך כלל באות- e . על פי הגדרה זו, ניתן למיין את חתכי החרוט בהתאם לאקסצנטריות e :

- $0 < e < 1$ זוהי אליפסה.
- אם $e = 1$ זוהי פרבולה.
- אם $e > 1$ זוהי היפרבולה.

כעת, נתחיל מהגדרת חתכי החרוט בעזרת אקסצנטריות ונמצא משוואה אלגברית לכל אחד מחתכי החרוט הקלסיים.

נבחר את הנקודה $F(p, 0)$ כמוקד ואת הישר $l: X = 0$ כמדריך.

תהי $P(X, Y)$ נקודה על העקום מחוץ למדריך. מרחק הנקודה מהמדריך $X = 0$ הוא $PM = |X - 0| = |X|$.

מרחק הנקודה מהמוקד $(p, 0)$ הוא $\sqrt{(X - p)^2 + Y^2}$

מאחר שאנו מתייחס לאקסצנטריות, קיים יחס בין המרחקים, לכן נקבל את המשוואה:

$$\sqrt{(X - p)^2 + Y^2} = e|X|$$

נעלה בריבוע $(X - p)^2 + Y^2 = e^2 X^2$ ולכן $X^2 - 2pX + p^2 + Y^2 = e^2 X^2$

$$(1 - e^2)X^2 - 2pX + Y^2 + p^2 = 0 \quad \text{-----} > (2)$$

כאשר הערך של $e = 1$, מתקבלת המשוואה $Y^2 = 2p(X - \frac{p}{2})$

ובכן, אם נבצע טרנספורמציה, במקרה הזה היא הזזה, כך ש- $X \rightarrow x + \frac{p}{2}$ ו- $Y \rightarrow y$

נקבל את משוואת הפרבולה הקנונית: $y^2 = 2px$ ----- > (3)

שעבורה המדריך הוא הישר $x = -\frac{p}{2}$ והמוקד הוא הנקודה $F = (\frac{p}{2}, 0)$.

במקרה שבו $e < 1$, נגדיר את ההעתקה כך ש- $X \rightarrow x + K$ ו- $Y \rightarrow y$

או משוואה (2) $(1-e^2)X^2 - 2pX + p^2 + Y^2 = 0$

תראינה $(1-e^2)(x+K)^2 - 2p(x+K) + p^2 + y^2 = 0$

$$(1-e^2)x^2 + 2x[(1-e^2)K - p] + y^2 + (1-e^2)K^2 + p^2 = 0$$

נציב $p = K(1-e^2)$ (על מנת לאפס את המקדם של x)

ונקבל $(1-e^2)x^2 + y^2 = (1-e^2)(eK)^2$

מכאן, מאחר ש- $e \neq 1$, ניתן לבצע חילוק ונקבל $\frac{x^2}{(eK)^2} + \frac{y^2}{(eK)^2(1-e^2)} = 1$

ובסוף אם נציב: $eK = a$ ו- $b^2 = a^2(1-e^2)$ נקבל:

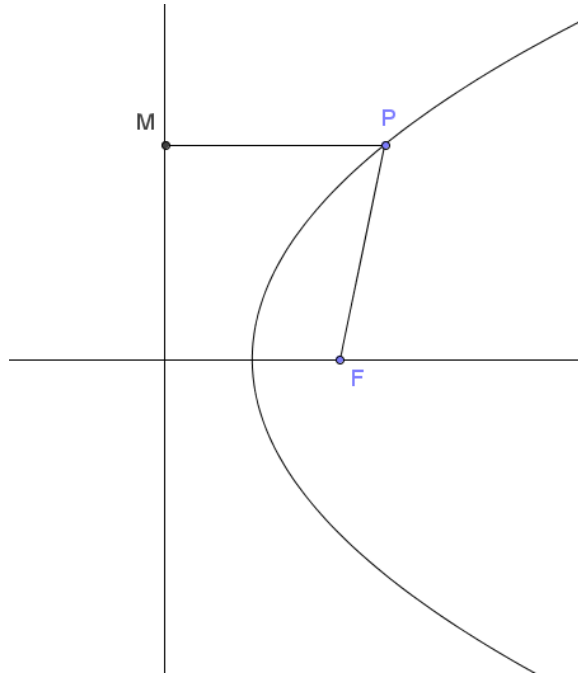
(4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ וזו משוואת האליפסה הקנונית.

המקרה שבו- $e > 1$, דומה למקרה שבו $e < 1$, אך דורש שינוי קטן, כלומר, נשתמש באותה הטרנספורמציה

$X \rightarrow x + K$ ו- $Y \rightarrow y$ אך נציב $K(e^2 - 1) = p$.

לאחר מכן נציב $eK = a$ ו- $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ ונקבל את משוואת ההיפרבולה הקנונית:

(5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



איור 1: הפרבולה, מקרה שבו יחס מרחקיהן של כל הנקודות מנקודה (המוקד) ומהישר (מהמדריך) שווה ל-1

כלומר, המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את המשוואה $PM = PF$

נשים לב, כי בכל אחד מהמקרים שעסקנו, ציר הסימטריה של העקומות הוא ציר ה- x והמדריך הוא ישר שמקביל לציר ה- y . השאלה הנשאלת היא: מה אם ציר הסימטריה הוא לא ציר ה- x או שהמדריך אינו מקביל לאחד מהצירים?

כדי לענות על השאלה, נתייחס במקרים ספציפיים הבאים:

נבחר את הישר $l: x + y = 1$ כמדריך ואת ראשית הצירים $F(0,0)$ כמוקד.

תהי (x, y) נקודה על חתך החרוט. מרחק הנקודה מהמדריך (מהישר) על פי הנוסחה $\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

הוא: $\frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$ ומרחק הנקודה מהמוקד הוא: $\sqrt{x^2+y^2}$.

מקרה 1: נניח שיחס המרחקים הוא 1, כלומר: $\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{x^2+y^2}$

נעלה בריבוע את שני האגפים ונקבל: $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 2(x^2 + y^2)$

ומכאן $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$

מקרה 2: נניח שיחס המרחקים קטן מ-1, למשל 0.5, אז: $\sqrt{x^2 + y^2} = 0.5 \cdot \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$

נעלה בריבוע ונקבל: $8(x^2 + y^2) = x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1$

ומכאן $7x^2 - 2xy + 7y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$

מקרה 3: נניח שיחס המרחקים גדול מ-1, למשל 3, כלומר: $\sqrt{x^2 + y^2} = 3 \cdot \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$

נעלה בריבוע ונקבל: $2(x^2 + y^2) = 9 \cdot (x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1)$

ומכאן $7x^2 + 18xy + 7y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$

נשים לב, כי בשלושת המקרים קבלנו משוואה שניונית מהצורה $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

על פי התנאים על המרחקים, המשוואה שהתקבלה במקרה 1 היא משוואת פרבולה, במקרה 2 היא משוואת אליפסה ובמקרה 3 היא משוואת היפרבולה.

באופן כללי, אם נתחיל במדריך הכללי $l: ax + by + c = 0$, במוקד $F = (u, v)$ ובנקודה (x, y) על חתך החרוט ונרשום את המשוואה על פי התנאים על המרחקים נקבל כי המשוואה:

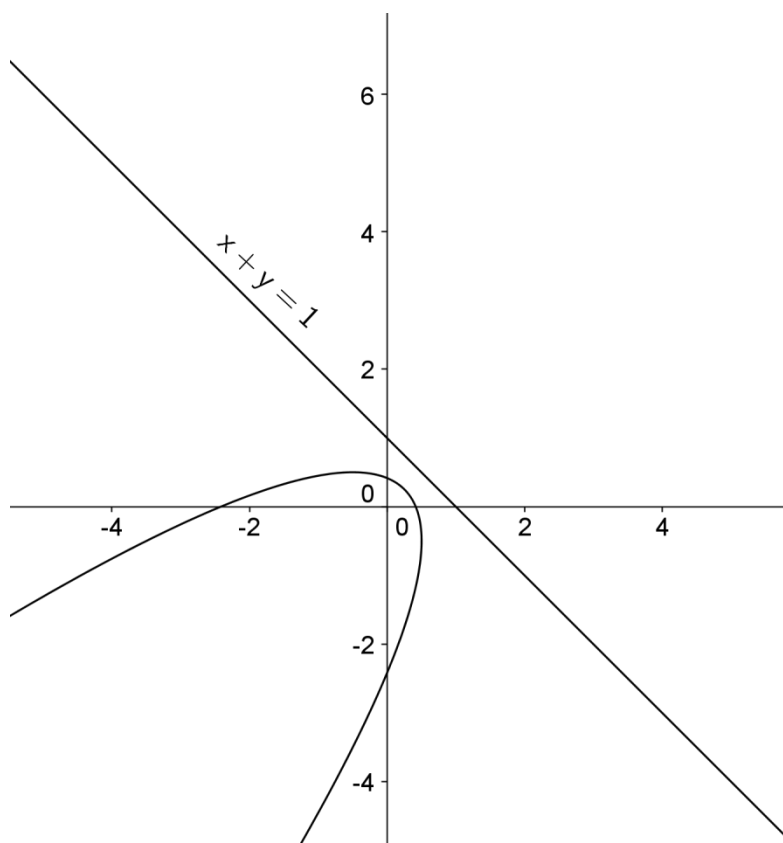
$$\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} = e \cdot \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

תוביל אותנו למשוואה שניונית מהצורה $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ כך שלפחות אחד מהמספרים A, B, C שונה מאפס.

על מנת להמחיש זאת, ניקח כדוגמה את "מקרה 1" שבו התקבלה המשוואה:

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$$

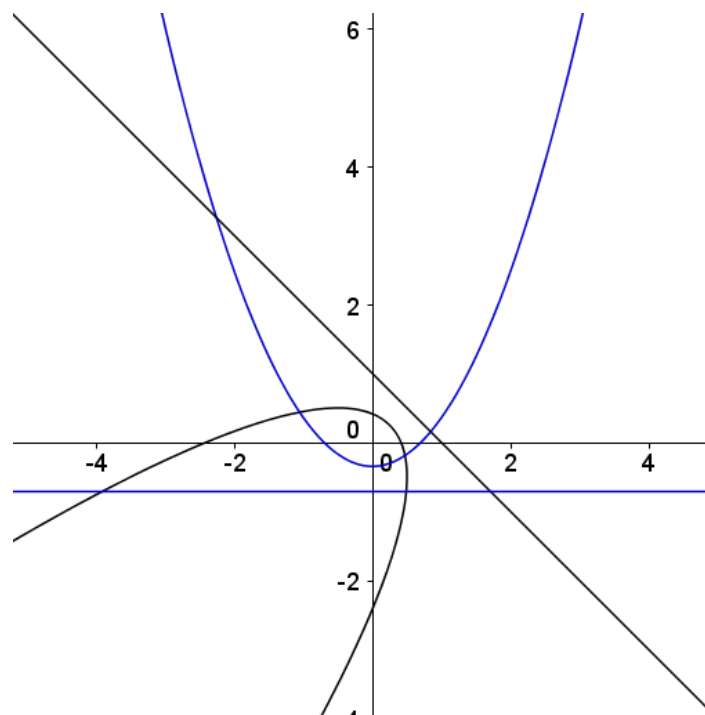
ונרצה להראות שהיא אכן משוואת הפרבולה.



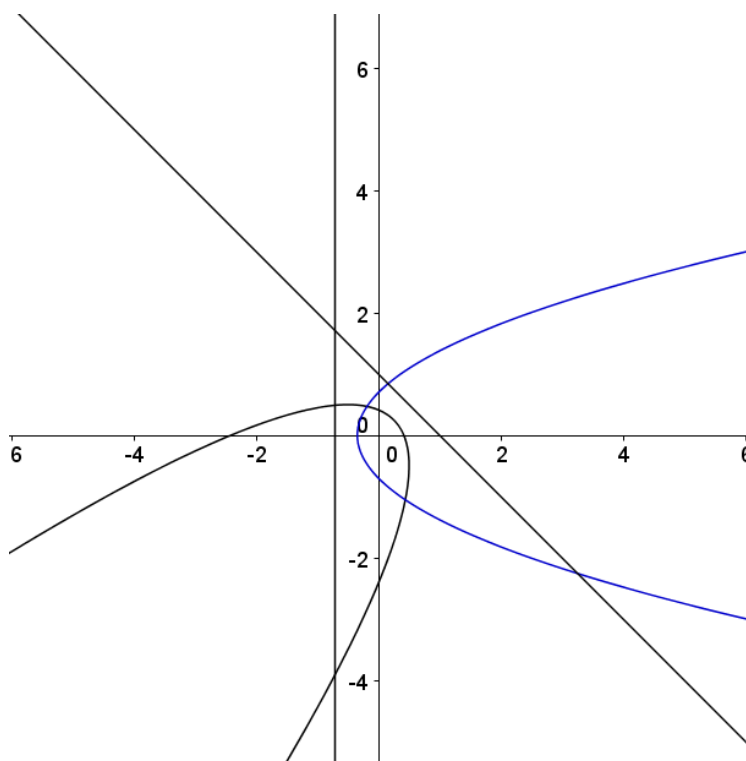
איור 2: גרף של המשוואה $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$ ושל הישר (המדריך) שמשוואתו $x + y = 1$ באמצעות התוכנה הדינאמית Geogebra.

נשים לב כי הגרף באיור 2 הוא אינו גרף של פרבולה הקנונית. לכן נבצע טרנספורמציה סיבוב סביב ראשית הצירים בזווית המתאימה וטרנספורמציה הזזה על מנת להביא את הגרף למצב של גרף של פרבולה הקנונית.

הבעיה העומדת לפנינו היא רק מציאת הזווית המתאימה לסיבוב. ובכן, אם ידועה לנו משוואת המדריך, אז זווית הסיבוב היא הזווית α הנוצרת על ידי המדריך עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , לדוגמה: במקרה שלנו הזווית שהמדריך יוצר עם ציר ה- x היא בת 135° לכן ניתן לבצע סיבוב בן 135° בכל כיוון שאנו בוחרים על מנת לקבל גרף של פרבולה שאנו רגילים לראות. באיורים הבאים מוצגים גרפים שהתקבלו לאחר סיבוב בשני הכיוונים:



איור 3 : הגרף בצבע התקבל לאחר סיבוב בזווית של 135° בכיוון השעון



איור 4 : הגרף בצבע התקבל לאחר סיבוב נגד כיוון השעון בזווית של 135°

כעת, נדון בהגדרת חתכי חרוט המתייחסת כמקום הגיאומטרי של הפתרונות למשוואה אלגברית ממעלה שנייה בשני נעלמים. כלומר, משוואה שניונית מהצורה $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ כאשר לפחות אחד משלושת הפרמטרים A, B, C אינו שווה אפס.

מקרה א': כאשר $B \neq 0$ ונרצה לדעת רק את צורת הגרף, מספיק לבצע את הבדיקות הבאות:

- אם $B^2 - 4AC = 0$ נקבל פרבולה.
- אם $B^2 - 4AC < 0$ נקבל אליפסה או מעגל.
- אם $B^2 - 4AC > 0$ נקבל היפרבולה.

הערה: אם נצטרך למצוא את המשוואה האלגברית של העקומה, לאחר הבדיקה, ניתן לבצע טרנספורמציה

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{סיבוב סביב ראשית הצירים וזווית } \alpha^8 \text{ ונשתמש במטריצת הסיבוב}$$

במשוואה השניונית $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$, זווית הסיבוב α היא בת 135° . לכן כדי לגלות את הערכים של x ו- y לאחר סיבוב בכיוון נגד השעון במערכת החדשה, נציב $\alpha = 135^\circ$ במטריצת הסיבוב:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 135^\circ & -\sin 135^\circ \\ \sin 135^\circ & \cos 135^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ y \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \end{cases}$$

מכאן הצבה במשוואה השניונית:

$$\frac{1}{2}(x+y)^2 - (x-y)(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)^2 - \sqrt{2}(x+y) - \sqrt{2}(x-y) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 = \sqrt{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

באופן דומה, כדי לבצע סיבוב בכיוון השעון, נציב $\alpha = -135^\circ$ ונקבל משוואה: $x^2 = \sqrt{2}\left(y + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

תרגיל: נתונה המשוואה השניונית $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 40x + 70y - 175 = 0$

(א) מהי צורת הגרף של משוואה זו? מהי משוואת המדרוך?

מקרה ב': כאשר $B = 0$, הבעיה היא יותר קלה וידועה.

⁸ למשוואה השניונית מהצורה $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, זווית הסיבוב נקבעת על פי הנוסחה

$$\cot 2\alpha = \frac{A-C}{B}$$

פרבולה בשיעור הגיאומטריה: הקשר בין "פרבולה אלגברית" ל"פרבולה גיאומטרית"

"Let no one ignorant of geometry enter here"

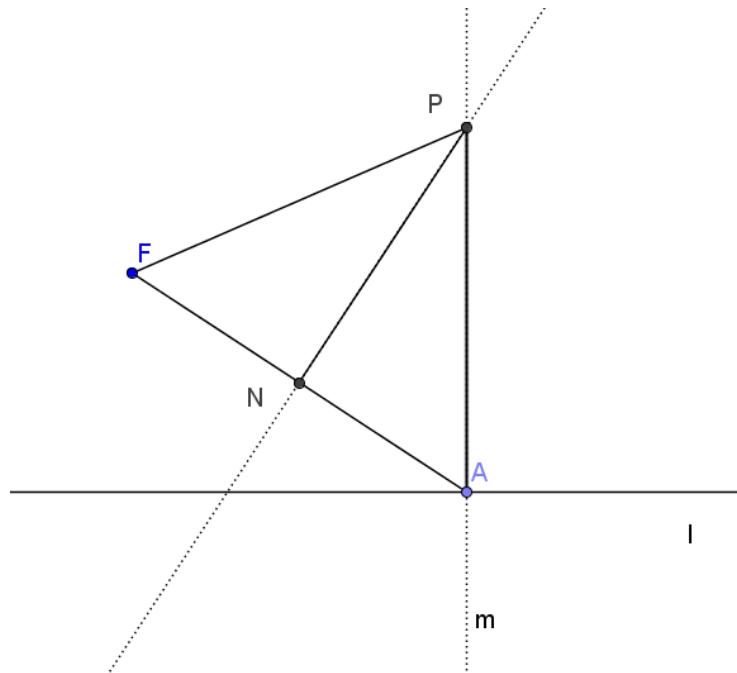
Plato

כמתואר במבוא, רוב התלמידים מכירים את העקומה המכונה פרבולה. הם נתקלים בה פעמים רבות בלימודיהם באלגברה. הם יודעים שהגרף של כל פונקציה ריבועית, $y = ax^2 + bx + c$, הוא פרבולה. חשוב לציין כי ברוב ספרי הלימוד ואף בתוכנית הלימודים רואים את הגדרת הפרבולה בהיבט האלגברי בלבד. מכאן נשאלת השאלה: כמה מהתלמידים נחשפים להיבט הגיאומטרי של הפרבולה (בעיקר בגיאומטריה המישורית)? בפרק הזה אתייחס לשאלה זו תוך כדי שימוש בתוכנות הדינמיות על מנת להראות את הקשר הישיר בין ההיבט הגיאומטרי של הפרבולה לבין ההיבט האלגברי שלה.

נתחיל בשרטוט של קו ישר l קבוע במישור, נסמן נקודה A על הישר l ונעביר דרכה אנך ונקרא לו m . נבחר נקודה F מחוץ לישר l . דרך N (אמצע קטע של AF) נשרטט אנך אמצעי לקטע AF ונאריך אותו עד שיפגוש את הישר m בנקודה P . ראה באיור 5.

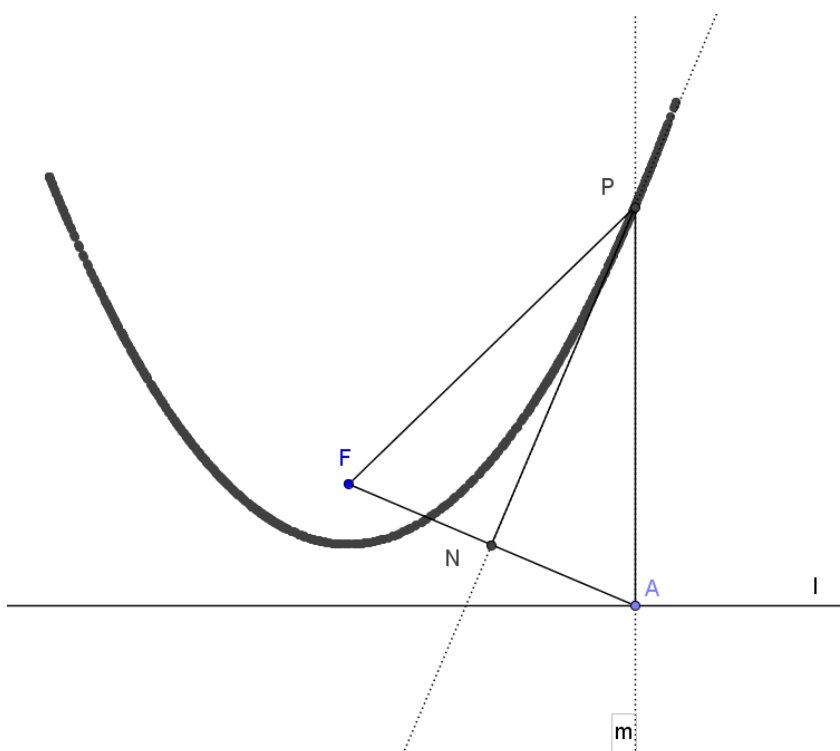
לפי משפט החפיפה (צלע – זווית – צלע) ניתן להוכיח שהמשולשים $\triangle ANP \cong \triangle FNP$ ולהסיק מסקנה כי

$AP = FP$ (צלעות מתאימות במשולשים חופפים שוות)



איור 5: בניית קטע FP

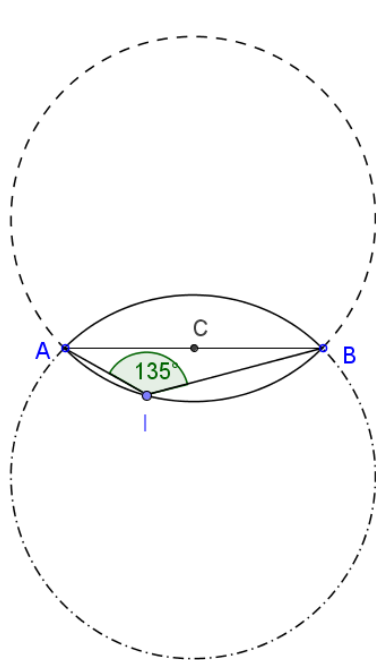
כתוצאה מכך נוכל לראות כי פרבולה הינה ייצוג דינמי של נקודות סטטיות במישור שמרחקן מנקודה F (המוקד) הקבועה ומהישר l (המדריך) הקבוע, הוא שווה. בעזרת התוכנה Geogebra, כאשר מזיזים את הנקודה A על הישר l , ניווכח שהעקבות של הנקודה P יוצרים גרף של פרבולה. ראה איור 6.



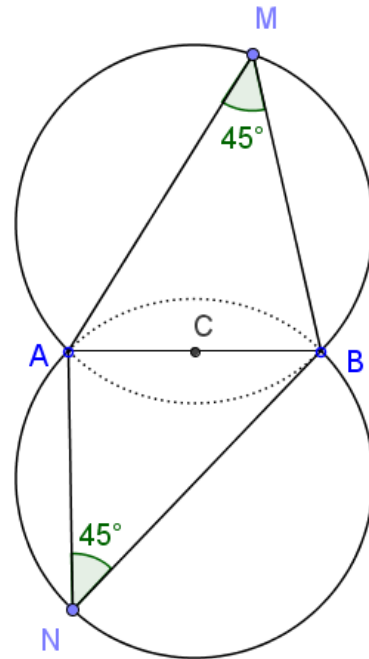
איור 6: פרבולה "גיאומטרית" שהתקבלה מנתונים גיאומטריים (נקודות וישרים).

זווית הראייה

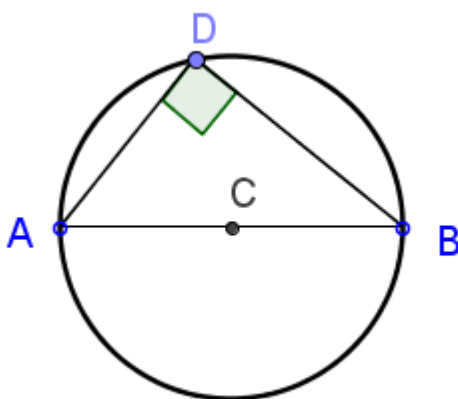
זווית הראייה במובן הכללי מוגדרת כזווית הנוצרת בין שתי קרני האור המוחזרות מגוף דרך עדשת העין. במתמטיקה בפרט, מוגדרת זווית ראייה כזווית הנוצרת בנקודת המפגש של שני ישרים העוברים דרך שני הקצוות של אובייקט, למשל, באיורים הבאים זווית הראייה של הקטע AB : מנקודות M ו- N היא בת 45° , ומנקודה I היא בת 135° , מנקודה D היא בת 90° , מנקודות $H-G$ היא בת 30° ומנקודה R היא בת 150° .



איור 8 – ב': מקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את הקטע AB בזווית של 135°



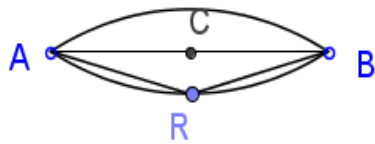
איור 8 – א': מקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את הקטע AB בזווית של 45°



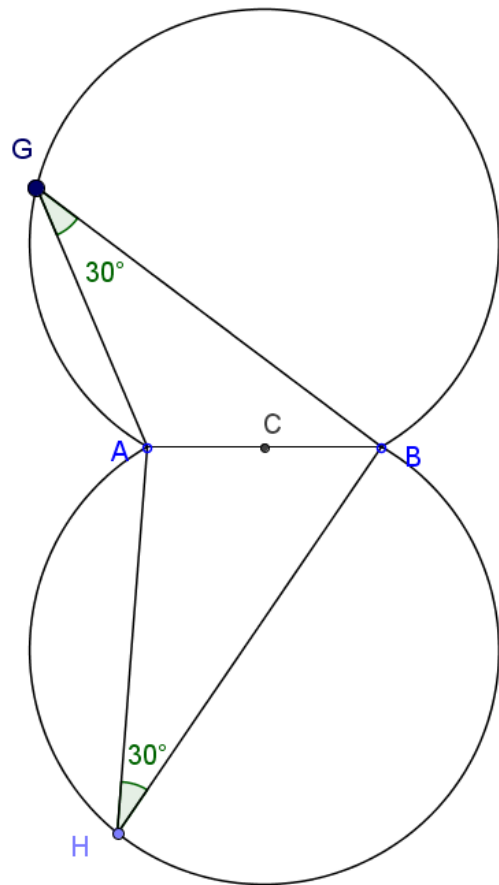
איור 9:

משפט: זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה ל- 90° .

המשפט הזה שגור בפי מורים המלמדים גיאומטריה אוקלידית. על פי המשפט ניתן להסיק כי את הקוטר "רואים" בזווית של 90° מכל הנקודות על הקשת חוץ מהנקודות A ו- B , לכן המקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את הקטע הנתון בזווית 90° הוא איחוד של שתי קשתות של מעגל שקוטרו הוא הקטע הנתון. (איור 9)



איור 10-א: מקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את הקטע AB בזווית של 150° ז"א $\angle ARB = 150^\circ$



איור 10-ב: מקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את הקטע AB בזווית של 30°

נשים לב כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את הקטע הנתון בזווית חדה ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) הוא איחוד של שתי הקשתות הגדולות של שני מעגלים סימטריים שהקטע הוא מיתר שלהם. לעומת זאת, המקום הגיאומטרי של הזווית הקהה ($180^\circ - \theta$) המשלימה לאותה זווית החדה הוא האיחוד של שתי הקשתות המשלימות של אותם שני המעגלים.

הערה: ניתן למצוא את הקוטר של כל מעגל על פי משפט הסינוסים.

מה ניתן ללמוד כאשר משנים את נקודת המבט על חתך של חרוט?

זווית הראייה של הפרבולה

בפרק זה נעסוק במקומות הגיאומטריים של כל הנקודות מהן רואים את הפרבולה בזוויות שונות. מאחר שהפרבולה היא לא קו ישר, זווית הראייה של הפרבולה מוגדרת כזווית הנוצרת בנקודת המפגש של כל שני משיקים לגרף הפרבולה.

ניקח את משוואת הפרבולה הקנונית: $y^2 = 2px$ עבור $p \neq 0$.

תהי (x_1, y_1) נקודה על הפרבולה. מחדו"א אנו יודעים שמגזירה סתומה של המשוואה $y^2 = 2px$, נקבל כי

$$2yy' = 2p \quad \text{ומכאן שיפוע המשיק בנקודה } (x_1, y_1) \text{ הוא } y' = \frac{p}{y_1}. \text{ לכן משוואת המשיק היא}$$

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1) \quad (6)$$

נכפול ב- y_1 ונקבל $yy_1 - y_1^2 = p(x - x_1)$. ז"א $yy_1 = px - px_1 + y_1^2$. מאחר שהנקודה (x_1, y_1) נמצאת על הפרבולה, לכן $y_1^2 = 2px_1$. לאחר הצבה נקבל כי $yy_1 = px - px_1 + 2px_1 = p(x + x_1)$.

כלומר, משוואת המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה (x_1, y_1) שעליה היא: $yy_1 = p(x + x_1)$.

הערה א': השיפוע לא יכול להיות אפס. מכיוון שאם השיפוע הוא אפס, אז $y' = \frac{p}{y_1} = 0$ ונקבל כי $p = 0$ וזה בניגוד להגדרה עבור הערכים של p .

הערה ב': אם $x_1 = 0$ או $y_1 = 0$ לכן המשיק לפרבולה בנקודה $(0, 0)$ הוא ציר ה- y .

כעת נתבונן במשוואת הישר $y = mx + n$ (כאשר $n \neq 0, m \neq 0$) ואם נרצה שהישר הוא משיק לפרבולה

$$y^2 = 2px, \text{ אז קיימת נקודה } (x_1, y_1) \text{ על הפרבולה כך ש- } y_1 = \frac{p}{m} \text{ ומכאן } y_1^2 = \frac{p^2}{m^2} = 2px_1$$

$$\text{ונובע כי } x_1 = \frac{p}{2m^2} \text{ לכן } n = \frac{p}{y_1} x_1 = m \frac{p}{2m^2} = \frac{p}{2m} \text{ (זוה תנאי ההשקה)}$$

לכן משוואת המשיק לפרבולה הקנונית $y^2 = 2px$ לפי השיפוע m של הישר היא: $y = mx + \frac{p}{2m}$

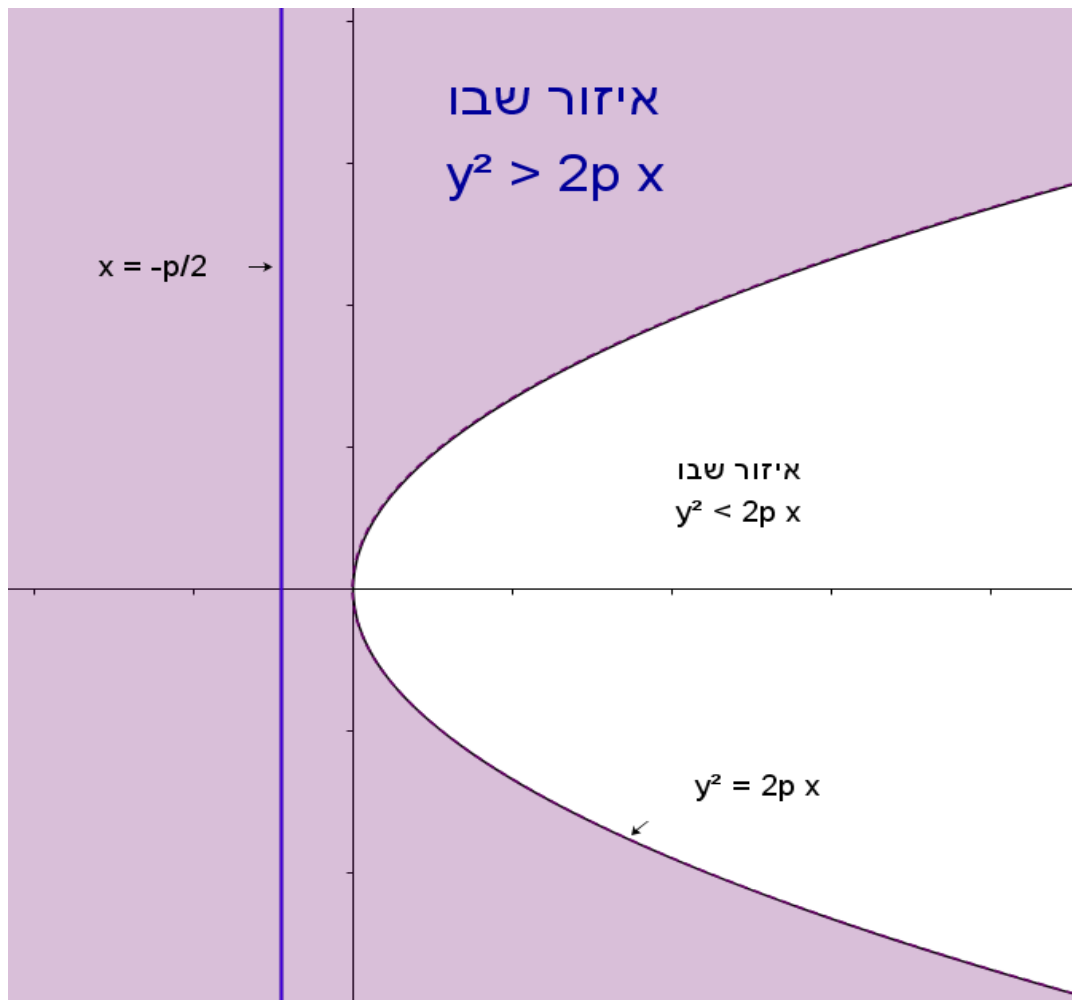
ולכן מכל נקודה (x, y) המקיימת את המשוואה זו ניתן להביע את m באמצעות x, y ו- p

$$\text{כלומר, אם נכפול ב- } m \text{ נקבל: } m^2x - my + \frac{p}{2} = 0 \text{ ומכאן הפתרונות עבור } m \text{ הם}$$

$$m_1 = \frac{y + \sqrt{y^2 - 2px}}{2x}, \quad m_2 = \frac{y - \sqrt{y^2 - 2px}}{2x}, \quad x \neq 0 \quad \text{-----} \succ (7)$$

על פי הפתרונות שקיבלנו עבור שיפוע של המשיק לפרבולה, אפשר להסיק כי אחד מהמקרים הבאים יתקיים בוודאות לכל נקודה $P(x, y)$ במישור:

- אם $y^2 > 2px$, יוצאים שני משיקים מנקודה אחת (כי $m_1 \neq m_2$).
 - אם $y^2 = 2px$, יוצא משיק אחד בלבד.
 - כאשר $y^2 < 2px$, אין משיק בעל שיפוע ממשי לפרבולה.
- באיור הבא מתואר איזורים שבהם יוצאים שני משיקים, משיק אחד ואין משיק.



איור 11: איזורי המישור ביחס לפרבולה $y^2 = 2px$ עבור $p > 0$

נשים לב כי לכל שתי נקודות שונות על הפרבולה, קיימים שני משיקים שונים ואינם מקבילים זה לזה. לכן קיימת זווית בין כל שני משיקים ולכן הזווית הזו או הצמודה לה מכונה כ- "זווית הראייה" של הפרבולה. מאחר שרצינו לדון בזווית הראייה של הפרבולה, אתייחס לנקודות מאזור שבו יוצאים שני משיקים. ואנסה לענות על השאלות הבאות:

- שאלה 1: מהו מקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את הפרבולה בזווית ישרה?
- שאלה 2: מהו מקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את הפרבולה בזווית חדה או קהה?
- שאלה 3: מהו הקשר בין זווית הראייה של פרבולה לתשובה לשאלה 2?

נתחיל משאלה 1:

מאחר שזווית הראייה מוגדרת כזווית הכלואה בין משיקים, ניתן להיעזר בנוסחה למציאת זווית בין ישרים מתחום הגיאומטריה האנליטית, אך נשים לב כי זווית הראייה β והזווית בין שני הישרים α הן שתי זוויות

יכולות להיות שוות או צמודות זו לזו. לכן, ניתן להשתמש בנוסחה $\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ על מנת למצוא זווית

בין שני ישרים, כאשר m_1 ו- m_2 הם שיפועי המשיקים ולאחר מכן לקבוע את גודל הזווית הראייה.

לשם כך נחזור לשני השיפועים m_1 ו- m_2 שקיבלנו קודם וכשנציב במשוואה הנ"ל ונקבל:

$$\tan \alpha = \frac{\frac{y + \sqrt{y^2 - 2px}}{2x} - \frac{y - \sqrt{y^2 - 2px}}{2x}}{1 + \frac{y - \sqrt{y^2 - 2px}}{2x} \cdot \frac{y + \sqrt{y^2 - 2px}}{2x}}$$

$$\tan \alpha = \frac{2\sqrt{y^2 - 2px}}{2x + p}$$

ומכאן

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{y^2 - 2px}}{x + \frac{p}{2}} \quad \text{-----} > (8) \quad \text{או}$$

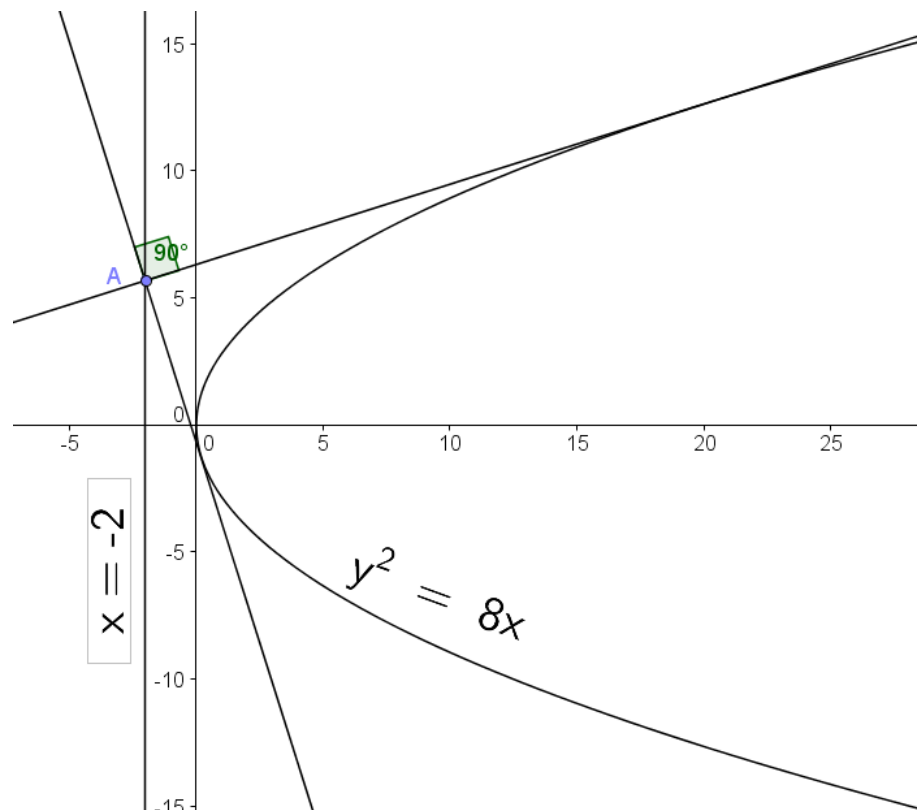
מהתוצאה שהתקבלה עבור זווית הראייה של הפרבולה, אם נתבונן היטב נראה כי המונה של הביטוי באגף ימין מכיל בתוך השורש הריבועי את המשוואה של הפרבולה והמכנה מכיל את המשוואה של המדריך לפרבולה. תופעה זו, על פי אברהם הרכבי (1994) על "חוש לסמלים" (symbol sense), מעודדת אותנו להמשיך בעבודתנו או לעצור. אברהם הרכבי טוען שלאדם בעל "חוש לסמלים" יש את היכולת לבחון את הפעולות האלגבריות שעשה במהלך הביצוע, לחזות את סוגי התוצאות שיקבל או להעריך את התוצאות שקיבל. אדם כזה יבדוק את סבירות התוצאה שקיבל וכך יחליט אם לעצור או להמשיך בעבודתו.

יתירה מזאת, ידוע שפונקצית טנגנס היא פונקציה שאינה מוגדרת עבור זוויות ישרות. לפי המשוואה (8) שקיבלנו, המקרה של זווית ישרה שקול למקרה שבו $x = -\frac{p}{2}$, וזו המשוואה של המדריך, לפיכך, מקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את הפרבולה בזווית ישרה הוא המדריך של הפרבולה.

הערה: שני ישרים מאונכים זה לזה אם, ורק אם, מכפלת השיפועים שווה ל- (-1). לכן פישוט המשוואה

$$m_1 m_2 = -1 \quad \text{נותן} \quad x = -\frac{p}{2}$$

באיור הבא מתואר מקרה שבו רואים את הפרבולה $y^2 = 8x$ (או $p = 4$) בזווית ישרה:



איור 12: המקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את הפרבולה $y^2 = 8x$ בזווית ישרה הוא הישר שמשוואה שלו היא $x = -2$, כלומר, מאחר ש- $p = 4$, משוואת המדריך היא $x = -2$.

כעת ניגש לשאלה 2.

הערה: לפני שנעלה בריבוע את המשוואה (8), נסמן $t = \tan \alpha$ ונדגיש ש- $t > 0$ עבור $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. נוכל

להסיק מכך שזווית הראייה של הפרבולה היא $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ כאשר $x > -\frac{p}{2}$. לעומת זאת, עבור $t < 0$

, כלומר, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, זווית הראייה של הפרבולה היא $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ כאשר $x < -\frac{p}{2}$. בעצם, המדריך של פרבולה

מחלק את המישור לשני חלקים וקובע את גודל זווית הראייה של הפרבולה. יחד עם זאת, נשים לב כי לכל שתי

זוויות α ו- β כך ש- $\alpha \neq \beta$ ו- $\alpha + \beta = 180^\circ$ מתקיים ש: $|\tan \beta| = |\tan \alpha|$, לכן נתייחס בסוף הביצוע לשני

המקרים. כאשר נעלה בריבוע את המשוואה $t = \frac{\sqrt{y^2 - 2px}}{x + \frac{p}{2}}$ נקבל $y^2 - 2px = t^2(x + \frac{p}{2})^2$

$$t^2 x^2 + p(t^2 + 2)x - y^2 + \frac{t^2 p^2}{4} = 0 \quad \text{ולכן} \quad y^2 - 2px = t^2(x^2 + px + \frac{p^2}{4})$$

נשתמש בשיטת "השלמה לריבוע" לאחר חילוק ב- t^2 ונקבל:

$$x^2 + \frac{p(t^2 + 2)}{t^2}x + \frac{p^2(t^2 + 2)^2}{4t^4} - \frac{y^2}{t^2} = \frac{p^2(t^2 + 2)^2}{4t^4} - \frac{p^2}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{p(t^2 + 2)}{t^2}x + \frac{p^2(t^2 + 2)^2}{4t^4} - \frac{y^2}{t^2} = \frac{p^2(t^2 + 2)^2}{4t^4} - \frac{p^2}{4}$$

$$\Rightarrow (x + \frac{p(t^2 + 2)}{2t^2})^2 - \frac{y^2}{t^2} = \frac{p^2(t^2 + 1)}{t^4}$$

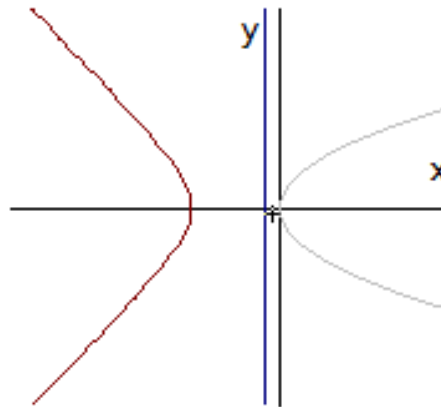
$$k = \frac{p(t^2 + 2)}{2t^2} \quad \text{ו-} \quad b^2 = \frac{p^2(t^2 + 1)}{t^2} = a^2 t^2, \quad a^2 = \frac{p^2(t^2 + 1)}{t^4} \quad \text{נציב}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+k)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ונקבל: (9) } \text{-----}$$

קיבלנו משוואת היפרבולה שציריה מקבילים לצירים x ו- y ומרכזה בנקודה $(-k, 0)$

יש להתייחס לכך שמדובר בשני איזורים זרים מהם רואים את הפרבולה, לכן המשוואה הזאת נכונה לכל איזור בנפרד, כלומר, בשטח הנמצא בין מדריך הפרבולה לגרף הפרבולה, זווית הראייה היא זווית קהה ($\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$), לכן המקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את הפרבולה בזווית קהה הוא זרוע אחת של ההיפרבולה. לעומת זאת, בשטח שמעבר למדריך הפרבולה, זווית הראייה של הפרבולה היא חדה $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, לכן המקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את הפרבולה בזווית חדה הוא הזרוע השנייה של ההיפרבולה. באיורים הבאים מופיעות דוגמאות לשני המצבים בעזרת התוכנה Derive.

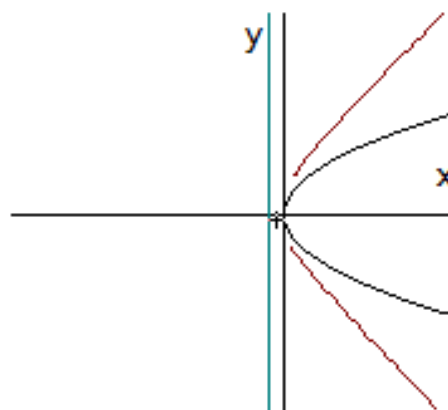
דוגמה 1:



איור 11: המקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את הפרבולה $y^2 = 12x$ בזווית 45° , כלומר, הפתרון של

$$\frac{(x-9)^2}{72} - \frac{y^2}{72} = 1 \quad \text{המשוואה} \quad -1 = \frac{\sqrt{y^2 - 12x}}{x+3} \quad \text{הוא הזרוע השמאלית של ההיפרבולה (הכתום)}$$

דוגמה 2:



איור 12: המקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את הפרבולה $y^2 = 12x$ בזווית 135° , כלומר,

$$\frac{(x-9)^2}{72} - \frac{y^2}{72} = 1 \quad \text{הפתרון של המשוואה} \quad 1 = \frac{\sqrt{y^2 - 12x}}{x+3} \quad \text{הוא הזרוע הימנית של ההיפרבולה (הגף הכתום)}$$

שאלה 3 :

מאחר שהגענו למסקנה שהיפרבולה היא מקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את הפרבולה בזווית הנתונה והמשלימה לה ל- 180° , ניתן לשאול את השאלה זו בניסוח החילופי - " מהו הקשר בין האקסצנטריות של ההיפרבולה שהתקבלה כפתרון של שאלה 2 לזווית הראייה של הפרבולה?". לכן נרצה למצוא את הקשר בין אקסצנטריות של היפרבולה וזווית הראייה של הפרבולה.

נזכור כי בהינתן משוואת ההיפרבולה הקנונית $1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, האקסצנטריות של ההיפרבולה

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \quad \text{מוגדרת על פי הנוסחה}$$

במקרה שלנו, המשוואה האלגברית של ההיפרבולה שהתקבלה כמקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים

את הפרבולה $y^2 = 2px$ בזווית β ו- $\pi - \beta$ היא $1 = \frac{(x+k)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ כאשר

$$t = |\tan \beta| = |\tan(\pi - \beta)| \quad \text{ו-} \quad k = \frac{p(t^2 + 2)}{2t^2}, \quad b^2 = \frac{p^2(t^2 + 1)}{t^2} = a^2 t^2, \quad a^2 = \frac{p^2(t^2 + 1)}{t^4}$$

לכן

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{a^2}} \\ &= \sqrt{1 + t^2} \\ &= \sqrt{1 + \tan^2 \beta} \\ &= |\sec \beta| \end{aligned}$$

מסקנה :

לכל זווית הראייה $\beta \neq \frac{\pi}{2}$ של הפרבולה, מקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את הפרבולה הוא

ההיפרבולה שהאקסצנטריות שלה קשורה לזווית הראייה של הפרבולה. תוצאה זו אינה מוכרת בתוכנית הלימודים הקלאסית.

סיכום

בעבודה זו ניסיתי להראות את הקשר המעניין בין פרבולה להיפרבולה דרך זווית הראייה. כאשר זווית הראייה היא זווית הנוצרת ביו שני משיקים לפרבולה היוצאים מנקודה אחת. דבר זה בא לידי ביטוי כאשר ידועה לנו

זווית הראייה $\beta \neq \frac{\pi}{2}$ ו- $\beta \in (0, \pi)$ של הפרבולה, המקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את

הפרבולה הוא אחת מזרועות ההיפרבולה שהאקסצנטריות שלה קשורה לזווית הראייה של הפרבולה. אני מאמין שהתוצאות המעניינות שהתקבלו לגבי המשיקים לפרבולה או/ו זווית הראייה של הפרבולה יכולים לעורר אצל התלמידים או אצל הקורא המעוניין ביופי של הנושא, להמשיך בחקירה דומה לגבי אליפסה והיפרבולה.

במהלך העבודה זו נעזרתי רבות בתוכנות עזר מתמטית שנקראות Geogebra , Derive הן כדי להבין טוב יותר את המתמטיקה שלמדתי והן כדי להמחיש את הטעונים בעבודה. בנוסף, מאחר והתוכנות יודעות לשרטט עקומות המוגדרות על ידי משוואות הנתונות בצורה סתומה, את הגרף של מקום הגיאומטרי, אני חושב שבעתיד אשאף להציג את כל העבודה לתלמידים ולמורים דרך ההתנסות אינטראקטיבית בגיאוגברה או/ו בדרייב.

Akopyan, A.V. and Zaslavsky, A.A. (2007) *Geometry of Conics*. American Mathematical Society. pp. 134.

<http://www.jewishvirtuallibrary.org/jsource/biography/RMarcus.html>

<http://www.sinclair.edu/centers/mathlab/pub/findyourcourse/worksheets/Calculus/2ndDegreeEquation.pdf>

C.G.Gibson (2010), *Elementary geometry of differentiable curves*: Cambridge, pp 32-35.

נורית זהבי, גיורא מן, נח דנא-פיקארד, (2007), מה לומדים כאשר משנים את נקודת המבט על חתך של חרוט?, עלייה 38, עמ' 22-31

Abraham Arcavi (1994), *Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics*, pp 24-35