



קרן רוטשילד קיסריה



"תוכנית רוטשילד-ויצמן למצוינות בהוראת המדעים"
במימונה של קרן קיסריה אדמונד בנימין דה רוטשילד

כיצד לנצח את יריבך בגירסאות שונות של המשחק הקומבינטורי MARK

ארנון חלמיש

מנחה: פרופ' אביעזרי פרנקל

מאי 2011

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

תוכן העניינים

1. מבוא..... 3

2. ניתוח גירסאות שונות למשחק MARK

א. הגירסה הרגילה..... 5

ב. משחק סכום..... 12

ג. משחק הפסד..... 18

ד. גירסת הערך העליון..... 20

ה. המקרה הכללי של הגירסה הרגילה..... 24

3. סיכום ומסקנות..... 28

4. מקורות..... 30

מבוא – משחקים קומבינטוריים

מה עם קצת משחקים, חברים?

כל מה שנדרש כדי לשחק MARK, זו ערימה מכובדת של אבנים, וקצת ראש מתמטי. ויצירתיות שתוביל לגירסאות שונות של המשחק.

המאמר הנוכחי מתאר מספר גירסאות של המשחק, ובוחר את האסטרטגיות המומלצות לפעולה עבור שני המשתתפים במשחק. האסטרטגיות המוצעות הן בסופו של דבר פשוטות וקלות להבנה, אך הדרך למציאתן ארוכה ומפותלת, וכוללת עיסוק במגוון מפתיע של תחומים מתמטיים.

בחירתי בנושא נבעה מכמה שיקולים. העיקרי ביניהם הוא היכרותי עם תחום המשחקים, הן כשחקן ומדריך שחמט, הן כמורה שאוהב לשחק משחקים עם תלמידיו ואפילו כחובב טיולים שנהנה לגלות ולשחק משחקים שונים במקומות הנידחים ביותר בעולם. סיקרן אותי לראות כיצד הופכים משחקים פשוטים-לכאורה לנושא מחקר מתמטי רב פנים.

הפרק הראשון של העבודה יוקדש לתיאור קצר של תחום המשחקים הקומבינטוריים ולהשלכות שלדעתי יש לתחום זה על הוראת המתמטיקה. הפרק השני הינו לב העבודה, ובו אדון באסטרטגיות הניצחון עבור ארבע גירסאות שונות של המשחק ובאסטרטגיה עבור גירסה מוכללת שלו. הפרק השלישי נועד לסכם את העבודה, הן בהיבט המתמטי והן בהיבט האישי שלי כמורה.

תחום המשחקים הקומבינטוריים הינו תחום עשיר ורחב, וכנראה גם עתיק מאד. בני אדם תמיד אהבו לשחק, וכאן מדובר במקרים רבים במשחקים שחוקיהם פשוטים להבנה, והם נגישים לכל ילד. אמנם יש בין משחקים אלו כמה שחוקיהם קצת יותר מורכבים, כמו שחמט, דמקה וגו, אך רבים אחרים, כמו נים, האקנבוש, וואיטהוף (Nim, Hackenbush, Wythoff) ודומיהם דורשים מעט ציוד ומעט חוקים לזכור.

העניין המתמטי במשחקים אלו החל כנראה בשנות השלושים של המאה העשרים, והוא צבר תנופה בשנות ה-60 וה-70, בעיקר סביב עבודתם של שלושה חוקרים - Conway, J. H.; Berlekamp, E.; Guy, R. בין העבודות שזכו לתהודה ציבורית ניתן לציין את המשחק "Game of Life" והספר "On Numbers and Games", שניהם של קונווי, ואת הספר המשותף לשלושת החוקרים "Winning Ways for your Mathematical Plays", שיציאתו לאור בשנת 1982 נחשבה לאירוע מכונן בתחום. הספר חשף עולמות מתמטיים שונים ומגוונים שדיון במשחקים אלו מעורר. מתברר שהערך של משחקים אלו מבחינה מתמטית רב משמעות. בין השאר הם עוסקים בקומבינטוריקה, בתורת המספרים, בלוגיקה ובסיבוכיות, ויש להם השלכות על תחומים מדעיים רבים כמו מדעי המחשב, ביולוגיה ועוד.

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

מבחינת החינוך המתמטי, העיסוק במשחקים קומבינטוריים עשוי לשמש דוגמה יפה לתהליך של עבודה מתמטית: פותחים בשלב אמפירי - משחקים, ממשיכים בנסיון לתהות על קנקנו של המשחק ובזיהוי מאפיינים שונים שלו, עוברים לשלב מעט טכני של הכנת רשימות של מצבים שונים, מתקדמים להכללה, למציאת חוקיות ולהסקת מסקנות, ומקנחים בשלב שהוא יותר תיאורטי-אנליטי – בוחנים תכונות של המספרים הכלולים ברשימות, מנסים ייצוגים שונים של אותם מספרים ובוחנים את התכונות של המספרים בייצוגם החדש. כאן גם אפשר להביא לידי ביטוי את היצירתיות – פיתוח שיטות ספירה חדשות, המצאת גירסאות שונות למשחק וכו'. בסופו של דבר, עשויים משחקים אלו לתרום לפיתוח אופני חשיבה מתמטיים רבים ומגוונים. ובעיקר מהנים. ולמרות כל המעלות הללו, התחום אינו נחשב כאחד מתחומי הליבה של לימודי המתמטיקה, לא ביסודי, לא בתיכון, ולא במסגרת הלימודים האקדמיים. ואולי זוהי עוד סיבה לכך שבחרתי לעסוק בתחום.

קבוצת המשחקים הקומבינטוריים ניתנת לחלוקה למספר תתי קבוצות הנבדלות ביניהן במאפיינים מסויימים של המשחק. כולם משחקים לשני שחקנים, עם אינפורמציה מלאה לגבי מצב המשחק והאפשרויות העומדות בפני שני השחקנים, מהלכי המשחק אינם כוללים מהלכים מבוססי-מזל, המשחק הוא סופי, וקיימת הכרעה ברורה לגבי התוצאה (ניצחון לשחקן א', ניצחון לשחקן ב' או תיקו). המשחק בו נדון הוא משחק קומבינטורי בלתי חלוק (Impartial Combinatorial Game), והמשמעות היא שהוא שייך לתת תחום הכולל משחקים עבורם אין מצב של תיקו ובפני שני השחקנים ניצבות בדיוק אותן אפשרויות בכל מצב של המשחק. ראוי לציין כי מבחינה ספורטיבית, המשחק המוצג להלן, כמו גם משחקים קומבינטוריים רבים אחרים, מאבד את משמעותו עבור שחקן שכבר מכיר את האסטרטגיה המנצחת. האתגר הוא לגלות את אותה אסטרטגיה. וזאת מה שנעשה במאמר.

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

ניתוח גירסאות שונות למשחק MARK

כמו רוב המשחקים, גם המשחק שלנו משוחק באופנים שונים. אנחנו נסתכל על ארבעה אופנים שונים, ועבור כל אחד מהם נחפש את האסטרטגיה המנצחת.

א. הגירסה הרגילה

המשחק משוחק באופן הבא: בפני שני השחקנים עומדת ערימה המונה מספר כלשהו של אסימונים. נקבע מי מתחיל, וכל שחקן בתורו מסיר אסימונים מהערימה באחת משתי הדרכים הבאות:

1. מהלך מהסוג הראשון - הוצאת אסימון אחד.

2. מהלך מהסוג השני - הוצאת אסימונים כך שבערימה ישארו $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ אסימונים (עבור

ערימה בעלת n אסימונים).

השחקן שנותר ללא אפשרות לביצוע מהלך, כלומר בפניו ערימה ריקה – הוא המפסיד.

על מנת למצוא את האסטרטגיה המנצחת במשחק, כולל ההחלטה אם כדאי להיות השחקן המתחיל או דווקא השחקן השני בכל מצב, מומלץ לנסות לשחק את המשחק עם ערימה בעלת מספר אסימונים קטן. ברור, למשל, כי אם בערימה אסימון אחד בלבד, כדאי לך שיהיה זה תורך. אז תוכל להשתמש בכל אחת משני סוגי המהלכים כדי להסיר את האסימון הזה ולנצח. אם, לעומת זאת, בערימה שני אסימונים, אזי כל אחד מסוגי המהלכים יותיר את יריבך עם אסימון אחד. ובמצב זה, כפי שכבר ראינו, אתה תפסיד. בדרך זו, ותוך בחירת המהלכים האופטימליים בכל מצב, נוכל לערוך רשימה הקובעת עבור כל מצב אם המנצח הוא השחקן שתורו ("הבא") או השחקן השני ("הקודם").

נגדיר מצבים בהם מנצח השחקן הבא (מצבי N , לציון Next) ומצבים בהם מנצח השחקן הקודם (מצבי P , לציון Previous). נגדיר שתי סדרות ונראה כי סדרות אלו הן הסדרות עבור מצבים מנצחים ומפסידים. הנה כי כן פתרנו את המשחק! אך אבוי, מדובר בעבודת הכנה רבה שבכל מקרה תניב רשימה סופית כלשהי, אשר לא תוכל לספק לנו תשובה עבור מספר אסימונים גדול שאינו מופיע ברשימה. מכאן עולה הצורך במציאת חוקיות כלשהי המאפיינת במפורש את רשימת המצבים המנצחים עבור השחקן הבא ועבור רשימת המצבים המנצחים עבור השחקן הקודם.

בבניית הסדרות נעשה שימוש בכלל המובן מכללי המשחק עצמו:

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

1. מצב בו אין מהלך חוקי אפשרי הוא מצב P.
2. מצב N הוא מצב עבורו קיים מהלך חוקי המוביל למצב P.
3. מצב P הוא מצב ממנו כל המהלכים החוקיים מובילים למצבי N.

כך קל לראות כי 4 הוא מצב N, משום שניתן לעבור ממנו למצב P (2) ע"י מהלך מהסוג השני, ו-8 הוא מצב P, משום ששני המהלכים האפשריים ממנו (7 ע"י מהלך מהסוג הראשון, 4 ע"י מהלך מהסוג השני) מובילים למצבי N. הנה, אם כן, רשימה הכוללת את תחילתן של שתי הסדרות:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	0	1	3	4	5	7	9	11	12
b_n	0	2	6	8	10	14	18	22	24

נשים לב כי שתי הסדרות מאופיינות ע"י:

1. $\forall n \geq 0, a_n = \text{mex}\{a_i, b_i : 0 \leq i < n\}$.
2. $\forall n \geq 0, b_n = 2a_n$.

(הערה: גם כאן וגם בהוכחות הבאות, אנו מתייחסים לאפיוני הסדרות כנתונים – נתון 1, נתון 2, ...)

כאשר mex של קבוצה סופית של מספרים שלמים אי-שליליים, הוא השלם האי-שלילי הקטן ביותר שאינו נמצא בקבוצה. כך, mex של הקבוצה הריקה הוא 0.

ראשית, נרצה להראות כי שתי הסדרות הינן סדרות משלימות, כלומר הן זרות וכוללות את כל המספרים האי-שליליים, שהרי עלינו להיות ערוכים לכל מצב-משחק.

טענה 1: הסדרות (a_1, a_2, a_3, \dots) , (b_0, b_1, b_2, \dots) הן מונוטוניות עולות ממש.

הוכחה: נניח כי $0 < i < j$. ברור מהנתון הראשון כי $a_i \neq a_j$. עכשיו, נניח כי קיימים שני איברים

$a_i > a_j$, אזי לפי הנתון הראשון, צריך להופיע בסדרה לפני a_i , וסתירה. מכאן כי הסדרה

(a_1, a_2, a_3, \dots) הינה מונוטונית עולה ממש. מהנתון השני נובע כי גם הסדרה (b_0, b_1, b_2, \dots) הינה

מונוטונית עולה ממש. ■ (טענה 1)

טענה 2: תהיינה $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n$, $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} b_n$ שתי הסדרות הינן סדרות משלימות, כלומר:

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

1. $A \cap B = \emptyset$.
2. $A \cup B = \square_{\geq 0}$.

הוכחה:

1. נראה כי הקבוצות זרות. נניח בשלילה כי קיימים n, m חיוביים כלשהם כך ש- $a_n = b_m$, אזי, אם $m > n$, מתקבלת סתירה לנתון 1, כי אז a_n איבר בתוך הקבוצה $\{a_i, b_i : 0 \leq i < n\}$. אם $n \leq m$, אזי $a_n = \frac{b_n}{2} < b_n \leq b_m$ (נתון 2, חיוביות B, טענה 1), כלומר $a_n < b_m$ וסתירה. (1) ■

2. נראה כי כל מספר שלם אי-שלילי חייב להופיע באחת הקבוצות.

טענת עזר 1: לכל מספר x שלם אי-שלילי, $a_x \geq x$.

הוכחה: הטענה נובעת ישירות מטענה 1 – מונוטוניות-עולה ממש של הסדרה (a_1, a_2, a_3, \dots) .

טענת עזר 2: לכל x שלם אי-שלילי, $x \in \bigcup_{i=0}^x a_i \cup \bigcup_{i=0}^x b_i$.

הוכחה: אם $a_x = x$, סיימנו, לפיכך ולפי טענת עזר 1, $a_x > x$. על פי נתון 1, כל המספרים

$\{0, 1, \dots, a_x - 1\}$ נמצאים ב- $\bigcup_{i=0}^{x-1} a_i, \bigcup_{i=0}^{x-1} b_i$, כלומר גם x שייך לאיחוד זה. (טענת עזר 2) ■

טענת עזר 2 מראה כי כל מספר שלם אי-שלילי נמצא באחת משתי הקבוצות. (2) ■

(טענה 2) ■

אם כן, שתי הסדרות מכילות את כל מצבי המשחק האפשריים, וכל מצב שייך בדיוק לאחת משתי הסדרות. עכשיו נראה כי הן אכן מייצגות את המצבים המנצחים והמפסידים, ועל הדרך גם נלמד על האסטרטגיה לבחירת המהלך הנכון בכל מצב.

טענה 3: $N = A, P = B$

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

כלומר :

1. לכל n , כל מהלך מ- b_n מוביל ל- a_i כלשהו ($i \in \mathbb{N}_{>0}$).

2. לכל n , מ- a_n קיים מהלך המוביל ל- b_i כלשהו ($0 \leq i < n$).

הוכחה :

1. לכל n , b_n תמיד זוגי (נתון 2), לכן מהלך מהסוג הראשון יוביל למסי אי-זוגי של אסימונים, כלומר בהכרח למספר שאינו ב- B , ולפי טענה 2 מספר זה שייך ל- A , כלומר זהו a_i כלשהו)

$$\left\lfloor \frac{b_n}{2} \right\rfloor = \frac{b_n}{2} = a_n \quad (i \in \mathbb{N}_{>0}).$$

מהלך מהסוג השני – לפי נתון 2, מהלך זה מוביל ל- a_n .

(1) ■

טענת עזר : אם $y = 2x$, אזי מתקיים אחד מהשנים : או $x \in B$ (א) וגם $y \in A$, או

(ב) $y \in B$ וגם $x \in A$.

הוכחה (טענת עזר) : (ב) ברור מנתון 2. נסתכל על $x \in B$. אם $y = 2x \in B$, אז קיים מהלך

$2x \in B \rightarrow x \in B$ בסתירה לסעיף 1 של טענה זו. ■ (טענת עזר)

2. אם a_n הינו מספר זוגי, אזי קיים מהלך מהסוג השני $a_n \rightarrow \frac{a_n}{2}$, ולפי טענת העזר

$$\frac{a_n}{2} \in B$$

אם a_n הינו מספר אי-זוגי, אזי קיימים שני מהלכים אפשריים : $a_n \rightarrow \left\lfloor \frac{a_n}{2} \right\rfloor = \frac{a_n-1}{2}$ או $a_n \rightarrow$

$a_n - 1$, ולפי טענת העזר, אם $x = a_n - 1$ ו $y = \frac{a_n-1}{2}$, אזי אחד מבין המספרים x או

y שייכים ל- B , כלומר אחד המהלכים מוביל ל- b_i כלשהו ($0 \leq i < n$). ■ (2)

(טענה 3) ■

נחמד למצוא כלל נסיגה, שמלמד אותנו איך לעבור בין המצבים, אך מה אם תוצב בפנינו ערימה בעלת 1,000 אסימונים? כלומר, כמו עבור סדרות חשבוניות, גם כאן נשאל מהו האיבר הכללי של כל סדרה. לשם כך נעזר, כפי שנעזרים לפתרון המשחק נים, בשיטת ספירה בינארית.

ראשית, מספר הגדרות:

- X יקרא **זדוני** (**vile**), אם הצגתו הבינארית $X = x_{n-1}x_{n-2}\dots x_1x_0 = \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i$ מסתיימת

במספר זוגי של אפסים (כולל אפס אפסים), כלומר היא מהצורה $\langle \dots 10^{2k} \rangle$ עבור

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. אחרת, X יקרא **אוילי** (**dopey**). במקרה זה הצגתו הבינארית מסתיימת

במספר אי-זוגי של אפסים, כלומר הוא מהצורה $\langle \dots 10^{2k+1} \rangle$ עבור $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

- X יקרא **evil**, אם הצגתו הבינארית $X = x_{n-1}x_{n-2}\dots x_1x_0 = \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i$ כוללת מספר זוגי

של אחדות, כלומר $\#\{x_i : x_i = 1\} \bmod 2 = 0$. אחרת, X יקרא **odious**.

- אם עבור שני מספרים נתונים, אחד המספרים הוא odious והשני evil, נאמר כי לשני המספרים **רשעות** שונה.

*השמות הללו הינם תרגום שלי למונחים evil, odious, vile, dopey, spite, שנטבעו ע"י ברלקאמפ, גאי וקונווי בספרם "Winning Ways" וע"י אביעזרי פרנקל במאמרו אודות MARK. מלבד הפירושים החביבים שלהם, הם מבטאים משחק-מילים המתייחס למספרים זוגיים (even) ואי-זוגיים (odd) בשפה האנגלית, ומנסים להעביר את אותו המידע בעברית (זדוני עבור זוגי, אוילי עבור אי-זוגי). בעבודה הנוכחית נעשה שימוש לעיתים במונחים העבריים, ולעיתים, היכן שהנסיבות הכתיבו, במקוריים באנגלית.

הערות טכניות נוספות – כדי להבדיל בין הצגתם העשרונית של מספרים לבין הצגתם הבינארית, זו האחרונה תופיע בתוך סוגריים אלכסוניים (לדוגמה $\langle 1001 \rangle$). וכאשר נתעניין רק בסיפא של הצגה זו, נכתוב לדוגמה $\langle \dots 10 \rangle$. בנוסף, במקרים מסוימים יופיע הסימון $R_k(x)$, כשהכוונה היא להצגה של x בבסיס ספירה k .

עכשיו, מסתבר כי קיים קשר אמיץ בין המספרים הזדוניים לבין מספר האסימונים במצבים בהם מנצח השחקן הבא (N), ובין המספרים האויליים לבין מספר האסימונים במצבים בהם מנצח השחקן הקודם (P). לכל מספר זדוני **קיים** מהלך שמוביל למספר אוילי, ומכל מספר אוילי, **כל** המהלכים החוקיים מובילים למספרים זדוניים.

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

טענה 4 : בהנתן $A = N, B = P$, אזי $A = \{x : x \text{ is vile}\}, B = \{y : y \text{ is dopy}\}$

הוכחה :

נראה כי :

1. לכל $x \in A$ קיים מהלך אפשרי מ- x לאיזשהו $y \in B$.

2. לכל $y \in B$, כל המהלכים האפשריים מובילים לאיזשהו $x \in A$.

1. x הוא זדוני, אזי קיים m שלם אי-שלילי כך ש- x מסתיים ב- $2m$ אפסים $x = \langle \dots 10^{2m} \rangle$.
נסתכל על המקרים השונים.

א. אם $m > 0$, x מסתיים במספר זוגי חיובי של אפסים, אז מהלך מהסוג השני הוא בסה"כ הסרת האפס הימני ביותר ($\langle \dots 10^{2m-1} \rangle \rightarrow \langle \dots 10^{2m} \rangle$) , כך שמתקבל $y \in B$.

ב. אם $m = 0$, אז קיים n שלם חיובי כלשהו כך ש- x מסתיים ב- n אחדות $x = \langle \dots 1^n \rangle$.

ב. 1) אם $n > 1$ (x מסתיים בלפחות שני מופעים של '1') אזי מהלך מהסוג הראשון גורם

להפיכת האחד הימני לאפס ($\langle \dots 1^{n-1} 0 \rangle \rightarrow \langle \dots 1^n \rangle$) , ומתקבל $y \in B$.

ב. 2) אם $n = 1$ (x מסתיים בדיוק במופע אחד של '1') , אזי נסתכל על מספר האפסים

הקודמים לספרת ה'1' הימנית. יהי $t > 0$ מספר זה של אפסים $x = \langle \dots 0^t 1 \rangle$.

ב. 2) א) אם מספר האפסים הקודמים ל-1 הוא מספר זוגי, אזי הצגתו

הבינארית של x הינה $x = \langle \dots 0^{2t} 1 \rangle$ עבור t שלם חיובי כלשהו. מהלך מהסוג

הראשון גורם להפיכת האחד הימני לאפס $\langle \dots 0^{2t+1} \rangle \rightarrow \langle \dots 0^{2t} 1 \rangle$, ומתקבל

$y \in B$, לדוגמה $1000 \rightarrow 1001$ או $0 \rightarrow 1$.

ב. 2) ב) אם מספר האפסים הקודמים ל-1 הוא מספר אי זוגי, אזי הצגתו

הבינארית של x הינה $x = \langle \dots 0^{2t+1} 1 \rangle$ עבור t שלם אי-שלילי כלשהו. מהלך

מהסוג השני גורם להשמטת ה'1' הימני $\langle \dots 10^{2t+1} \rangle \rightarrow \langle \dots 10^{2t+1} \rangle$ ומתקבל

$y \in B$, לדוגמה $10 \rightarrow 101$ או $1000 \rightarrow 10001$.

2. y הוא אווילי, אזי קיים m שלם אי-שלילי כך ש- y מסתיים ב- $2m+1$ אפסים

$y = \langle \dots 10^{2m+1} \rangle$. מהלך מהסוג הראשון הופך את כל האפסים שמימין לאחדות

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

$\langle \dots 10^{2m+1} \rangle \rightarrow \langle \dots 10^{2m+1} \rangle$, ומתקבל $x \in A$ (111) \rightarrow 1000 או $\langle 1010 \rightarrow$. מהלך מהסוג
השני גורם להשמטת האפס הימני $\langle \dots 10^{2m} \rangle \rightarrow \langle \dots 10^{2m+1} \rangle$, ומתקבל $x \in A$, לדוגמה
 $1000 \rightarrow 110$ או $110 \rightarrow 110$.

(טענה 4)



כך, אם בפנינו ערימה בעלת 1,000 אסימונים, נבדוק את ייצוגו הבינארי של המספר 1,000 , נגלה
 כי זהו $\langle 1111101000 \rangle$. נשים לב כי המספר מסתיים במספר אי-זוגי של אפסים (שלושה), לכן הוא
 אוילי , כלומר זהו מצב המסתייך ל-P – מצב בו נעדיף לשכנע את יריבנו כי מוטב לו להיות
 השחקן הראשון . אם לעומת זאת היו בפנינו 2,000 אסימונים, היינו מזהים כי ההצגה הבינארית
 הינה $\langle 11111010000 \rangle$. זהו מצב זדוני ולכן אם תורנו לשחק נוכל לנצח. המהלך המנצח הוא כזה
 אשר יותיר את יריבנו עם מספר אסימונים שהוא אוילי. בפנינו שתי אפשרויות – לקחת אסימון
 אחד ולהותיר 1999, שהצגתו הבינארית הינה $\langle 1111101111 \rangle$, כלומר מספר זדוני , או לקחת חצי
 מהכמות ולהותיר 1,000, שכבר ראינו כי הוא אוילי. ברור שנבחר במהלך מהסוג השני.

מבט נוסף אל עבר ההצגה הבינארית של המספרים בשתי הסדרות יגלה תכונה נוספת שלהן.
 מסתבר שהמספרים בכל סדרה מתחלפים לסירוגין בין evil לבין odious. לתכונה זו אין כרגע
 משמעות, אולם היא תסייע לנו בהמשך, עת נטפל במשחק סכום.

טענה 5: בהנתן שתי הסדרות $A = \{vile\}, B = \{dopy\}$, אזי איברי כל סדרה מתחלפים לסירוגין
 בין odious-evil.

הוכחה:

נוכיח תחילה עבור הסדרה $A = (a_1, a_2, a_3, \dots)$. נראה כי לכל $n > 0$, a_n הוא evil $\Leftrightarrow a_{n+1}$ הוא
 odious. a_n הוא vile, ולכן קיים m שלם אי-שלילי כך ש- a_n מסתיים ב-2m אפסים
 $\langle \dots 10^{2m} \rangle$. אם $m > 0$, a_n מסתיים במספר זוגי של אפסים, המספר העוקב שלו הוא
 $\langle \dots 10^{2m-1} \rangle$ שהוא כמובן vile ולכן זהו a_{n+1} (כי A מונוטונית עולה ממש והסדרות משלימות).
 קל לראות כי מספר האחדות ב- a_{n+1} גדול באחד ממספר האחדות ב- a_n , ובכל מקרה הרשעות
 שלהם שונה. אם $m = 0$, אזי a_n מסתיים במספר כלשהו של אחדות. יהי t מספר חיובי ונבדיל בין
 המקרה בו מספר האחדות מימין הוא זוגי (2t) לבין המקרה שבו מספר האחדות מימין הוא אי-
 זוגי (2t-1).

אם מספר האחדות מימין זוגי $\langle \dots 01^{2t} \rangle$, אזי המספר העוקב לו הוא $\langle \dots 10^{2t} \rangle$, שהוא
 גם vile ולכן זהו a_{n+1} (כי A מונוטונית עולה ממש והסדרות משלימות). קל לראות כי במקום 2t

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין
 לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית
 הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

אחדות התקבל רק '1 יחיד, כך שמספר האחדות ב- a_{n+1} קטן ב $2t-1$ ממספר האחדות ב- a_n , ובכל מקרה הרשעות שלהם שונה.

אם מספר האחדות מימין אי-זוגי $\langle \dots 01^{2t-1} \dots \rangle$, אז העוקב הוא $\langle \dots 10^{2t-1} \dots \rangle$ שהוא dopy, והעוקב לו הוא $\langle \dots 10^{2t-2} \dots \rangle$ שהוא vile ולכן זהו a_{n+1} (כי A מונוטונית עולה ממש והסדרות משלימות). קל לראות כי במקום $2t-1$ אחדות התקבל רק 2 אחדות, כך שמספר האחדות ב- a_{n+1} קטן ב $(2t-1)-2=2t-3$ ממספר האחדות ב- a_n , ובכל מקרה הרשעות שלהם שונה.

ראינו, אם כן, כי A מתחלפת לסירוגין evil-odious.

קיום אותה התנהגות בסדרה B נובעת ישירות מקיומה בסדרה A. מכיוון ש- b_n הינו הזזה שמאלית של a_n (הזזה שמאלית של מספר, הינה המספר המתקבל מהזזת כל הספרות שמאלה, והוספת 0 במקום שהתפנה מימין. בייצוג העשרוני מדובר למעשה בהכפלת המספר המקורי פי 10, ובהצגה הבינארית מדובר בהכפלה פי 2), מספר האחדות בהצגה הבינארית של אחד המספרים שווה למספר האחדות בהצגה הבינארית של השני. כלומר, לכל n, a_n הוא evil $\Leftrightarrow b_n$ הוא evil, וכך כמובן גם לגבי odious. (טענה 5)

ב. משחק סכום (Sum-MARK)

בגירסה זו ניתן להציב בפני השחקנים יותר מערימה אחת, וניתן להתייחס לכך כסכום של משחקים רגילים. כל ערימה משוחקת לפי כללי המשחק הרגיל, והמפסיד הוא זה שתורו לשחק כאשר כל הערימות ריקות. קל לראות כי כאשר כל הערימות מכילות אסימון אחד בלבד, אם מספר הערימות הוא זוגי ינצח השחקן שאין זה תורו, ואם מספר הערימות אי-זוגי ינצח השחקן שתורו לשחק.

משחק-סכום יוגדר באופן הבא: $H = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ הוא משחק-סכום הכולל n משחקי MARK, כאשר x_i ($1 \leq i \leq n$) מציין את מצב (גודלי הערימות) המשחקים. אם $n=1$, מדובר למעשה בגירסה הרגילה של המשחק, אותה כבר ניתחנו לעיל.

בכדי למצוא אסטרטגיה מנצחת עבור גירסה זו, ננסה להיעזר ברשימות אותן הכנו עבור המשחק הרגיל. למשל, נבחן את המצב בו כל מספרי האסימונים בכל הערימות שייכים ל-P. נראה כי מצב זה הוא מצב P גם עבור משחק הסכום.

טענה: עבור משחק סכום $H = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $(1 \leq i \leq n, X_i \in P) \Rightarrow H \in P$.

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

הוכחה :

כפי שראינו עבור משחק בודד, כל מהלך ממצב ב-P מוביל למצב ב-N, כך שאם שחקן בוחר לפעול על ערימה כלשהי $X_i \in P$, אזי מהלך זה יוביל ל $X_i' \in N$, והמצב הכללי של משחק הסכום אחרי המהלך הראשון יהיה $\{X_1 + X_2 + \dots + X_i' + \dots + X_n\}$, כאשר $X_j \in P$ ו $\forall j \neq i, X_i' \in N$. וכפי שראינו עבור משחק בודד, מכל מצב מנצח קיים מעבר למצב מפסיד. השחקן במצב הנ"ל יבחר שוב בערימה i , יבצע בה מהלך המותיר בה $X_i'' \in P$ ויחזיר את משחק הסכום למצב בו מצבי כל הערימות שייכים ל-P.

כך ימשך המשחק עד לסופו, כאשר בתום כל מהלך של השחקן הראשון תהיה ערימה אחת שייכת ל-N, ושאר הערימות שייכות ל-P. ואחרי מהלך של השחקן השני, כל הערימות תהיינה שייכות ל-P.

אבל מסתבר שלפתרון הכללי של משחק סכום, אין זה מספיק להיעזר ברשימות שערכנו עבור הגירסה הרגילה. לפיכך נשתמש ב **Sprague-Grundy Function** (בקיצור פונקציית g), המוגדרת עבור כל משחק קומבינטורי לא-חלוק.

הגדרת הפונקציה הכללית : עבור מצב x , $g(x) = mex\{g(f_1), g(f_2), \dots, g(f_n)\}$, כאשר (f_1, f_2, \dots, f_n) הם קבוצת המצבים העוקבים של x (**מצב עוקב** של x הינו מצב אליו ניתן לעבור ע"י ביצוע מהלך חוקי מ-x). נשים לב כי הפונקציה מוגדרת בצורה רקורסיבית. ההגדרה הספציפית עבור הגירסה הרגילה של MARK הינה : $g(x) = mex\{g(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor), g(x-1)\}$ ($x \geq 1$).

כדרכנו, נפתח בבניית טבלה המציגה את ערכי הפונקציה עבור מספרים קטנים :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(n)$	0	1	0	2	1	2	0	1	0

נשים לב שהערכים האפשריים עבור הפונקציה הינם $\{0, 1, 2\}$, מה שנובע ישירות מהעובדה כי בכל מצב עלינו לבחור בין לא יותר משני מהלכים אפשריים. נראה כעת כי הפונקציה המוגדרת לעיל קשורה קשר הדוק למצבי ה-P וה-N שהוגדרו עבור הגירסה הרגילה של המשחק. בשלב הראשון נאפיין את המספרים עבורם

פונקציית g נותנת את הערכים השונים, כדי להימנע מהמלאכה המייגעת של הכנת הטבלה באמצעות הנוסחה הרקורסיבית של פונקציית g.

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

טענה 6: עבור ערימה בעלת n אסימונים, $g(n) \neq 0 \Leftrightarrow n \in N$, $g(n) = 0 \Leftrightarrow n \in P$.

הוכחה: הטענה נובעת ישירות מהגדרת פונקציה g וממאפייני הקבוצות N -ו- P . אם $g(n) = 0$, אזי ערך הפונקציה עבור כל המצבים העוקבים של n שונה מאפס. אם $g(n) \neq 0$, אזי ברור כי ערך הפונקציה עבור לפחות אחד המצבים העוקבים ל- n הינו 0. (טענה 6)

מסקנה חשובה נוספת שניתן להסיק מטענה זו ומטענה 4, היא כי אם $g(n) = 0$, אזי n אוילי, ואם $g(n) > 0$, אזי n זדוני.

ניתן לראות, אם כן, כי פונקציית g נותנת לנו אינפורמציה על מצבי המשחק השונים, אך האם יש משמעות גם להבדל בין מספרים עבורם $g(n) = 1$ לבין אלו עבורם $g(n) = 2$? נראה כי אמנם כך הוא הדבר.

טענת עזר: אם x זדוני, אז שני המהלכים האפשריים ממנו מובילים, האחד למספר זדוני עם רשעות שונה משלו, והשני למספר אוילי.

הוכחה: x זדוני, כלומר הסיפא של הצגתו הבינארית הינה $\langle 10^{2m} \rangle$ ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$). נבחן את המקרים השונים האפשריים.

1. $m > 0$, אזי x מסתיים באפסים. מהלך מהסוג הראשון $\langle \dots 01^{2m} \rangle \rightarrow \langle \dots 10^{2m} \rangle$ מוביל למספר זדוני ויש בו $2m-1$ יותר מופעים של 1 מאשר ב- x , כלומר הוא בעל רשעות שונה משלו.

מהלך מהסוג השני $\langle \dots 10^{2m-1} \rangle \rightarrow \langle \dots 10^{2m} \rangle$ מוביל למספר שהוא אוילי.

2. $m = 0$, כלומר הסיפא של x הינה $\langle 1^t \rangle$ ($t \in \mathbb{Z}_{>0}$). נבדיל בין המקרים הבאים:

א. $t \geq 2$, אזי מהלך מהסוג הראשון $\langle \dots 1^{t-1} 0 \rangle \rightarrow \langle \dots 1^{t-2} \rangle$ מוביל למספר אוילי,

ומהלך מהסוג השני $\langle \dots 1^{t-1} \rangle \rightarrow \langle \dots 1^{t-2} \rangle$ מוביל למספר זדוני, אשר יש בו מופע אחד פחות של 1, כלומר הוא בעל רשעות שונה.

ב. $t = 1$, אזי נפריד בין שני מקרים, על פי מספר האפסים הקודמים ל-1. מספר האפסים יכול להיות זוגי (נסמנו ב- $2s$) או אי-זוגי (נסמנו ב- $2s-1$).

1.ב.2) מספר האפסים זוגי, אזי הסיפא של x הינה $\langle 0^{2s} 1 \rangle$. מהלך מהסוג

הראשון $\langle \dots 0^{2s+1} \rangle \rightarrow \langle \dots 0^{2s} 1 \rangle$ מוביל למספר אוילי, ומהלך מהסוג השני

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

$\langle \dots 0^{2^s} 1 \rangle \rightarrow \langle \dots 0^{2^{s-1}} 1 \rangle$ מוביל למספר זדוני, אשר יש בו מופע אחד פחות של 1, כלומר הוא בעל רשעות שונה.

2.ב.2 מספר האפסים אי-זוגי, אזי הסיפא של x הינה $\langle 0^{2^s-1} \rangle$. מהלך מהסוג הראשון $\langle \dots 0^{2^s} \rangle \rightarrow \langle \dots 0^{2^{s-1}} 1 \rangle$ מוביל למספר זדוני, אשר יש בו מופע אחד פחות של 1, כלומר הוא בעל רשעות שונה. ומהלך מהסוג השני $\langle \dots 0^{2^s-1} \rangle \rightarrow \langle \dots 0^{2^{s-1}} \rangle$ מוביל למספר אווילי.

(טענת עזר)

טענה 7: $n_{vile-evil} \Rightarrow g(n) = 2$, $n_{vile-odious} \Rightarrow g(n) = 1$

הוכחה (באינדוקציה על n): בסיס האינדוקציה $g(1) = 1, g(3) = 2$ $1_{vile-odious}, 2_{vile-evil}$

נניח הטענה נכונה עבור כל גודל ערימה $i \leq n$, ונראה נכונותה עבור ערימה בגודל $n+1$.

אם $n+1$ הוא vile-odious, אזי לפי טענת העזר, המצבים העוקבים לו, אחד מהם dopey ואחד

מהם vile-evil. לפי טענה 6 ולפי הנחת האינדוקציה, $g(n+1) = mex\{0, 2\} = 1$.

אם $n+1$ הוא vile-evil, אזי לפי טענת העזר, המצבים העוקבים לו, אחד מהם dopey ואחד מהם

vile-odious. לפי טענה 6 ולפי הנחת האינדוקציה, $g(n+1) = mex\{0, 1\} = 2$.

(טענה 7)

גילינו כי פונקציית g מאפשרת לנו לזהות מצבים בגירסה הרגילה של MARK, אך השאלה המעניינת אותנו היא כיצד ניתן לזהות מצבים במשחק הסכום. מסתבר כי הפונקציה הזו מאפשרת לנו לעשות בדיוק את זה.

הגדרה: **סכום-נים** של שני מספרים שלמים אי-שליליים הוא הסכום שלהם ללא העברה בבסיס 2 (חיבור מודולו 2 של הספרות התואמות).

לדוגמה:

1010

1110

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

ראוי לשים לב לתכונה חשובה המתקיימת עבור סכום נים : אם מתקיים $a \oplus b = c$, אז מתקיימים גם $a \oplus c = b$, $b \oplus c = a$.

מוטיבציה להשתמש בסכום נים : סכום נים אפס הוא מצב בו כל שינוי באחד המחבורים ישנה את הסכום למהו שונה מאפס, ומכל מצב אחר ניתן להגיע אליו. ממש כמו מצב P. וסכום נים שונה מאפס הוא מצב בו ניתן תמיד לבצע שינוי באחד המחבורים, כך שסכום נים החדש יהיה אפס. ממש כמו מצב N.

הרעיון הוא כי כל משחק מסוג זה הינו שווה ערך למצב נים כלשהו, כך שאם נחשב סכום נים של פונקציות g עבור סכום המצבים העומדים לפנינו, נוכל לדעת אם כדאי להתחיל, ומהו המהלך האופטימלי בכל מצב.

טענה 8 : בהינתן מצב במשחק סכום $H = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, נגדיר את פונקציית g עבור מצב המשחק כסכום נים של פונקציית g עבור מספרי האסימונים במשחקים השונים המרכיבים את משחק הסכום $g(H) = g(x_1) \oplus g(x_2) \oplus \dots \oplus g(x_n)$, אזי מצבי ה-N וה-P של מצב המשחק נקבעים ע"י $g(H)$. המצבים נקבעים באופן הבא :

$$g(H) = 0 \Leftrightarrow H \in P$$

$$g(H) > 0 \Leftrightarrow H \in N$$

הוכחה :

ראשית נראה כי הגדרת פונקציית g עבור משחק הסכום תואמת את הגדרת הפונקציה, כלומר, אם $b = g(x_1) \oplus g(x_2) \oplus \dots \oplus g(x_n)$, עבור מצב כלשהו X במשחק סכום, אזי $b = \text{mex}\{g(f_1) \oplus g(f_2) \oplus \dots \oplus g(f_n)\}$ כאשר $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ היא קבוצת כל המצבים העוקבים של X. נראה אם כן כי :

(1) לכל a שלם אי-שלילי הקטן מ-b, קיים F(X) מצב עוקב של X כך ש- $g(F(X))=a$.

(2) אין F(X) מצב עוקב של X כך ש- $g(F(X))=b$.

כדי להוכיח את (1), נסמן $d = a \oplus b$. יהי k מספר הספרות בהצגה הבינארית של d, כך ש $2^{k-1} \leq d < 2^k$, ובהצגה הבינארית של d, הספרה ה-k מימין (הספרה השמאלית) היא 1. ומכיוון ש $a < b$, בהצגה הבינארית של שניהם, הספרה ה-k מימין של b היא 1 ושל a היא 0. מכך ש- $b = g(x_1) \oplus g(x_2) \oplus \dots \oplus g(x_n)$, נובע כי אצל לפחות אחד מ- $g(x_i)$, ההצגה הבינארית שלו

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

כוללת 1 בספרה ה-k מימין. בלי הגבלת הכלליות נניח כי מדובר ב- $g(x_1)$. אזי ב- $d \oplus g(x_1)$ הספרה ה-k מימין הינה 0, כלומר $d \oplus g(x_1) < g(x_1)$. נזכר כי מהגדרת הפונקציה g נובע כי אם $g(x) = y$ אזי ניתן ל"הוריד" את ערך הפונקציה לכל מספר שלם אי-שלילי קטן מ- y ע"י ביצוע מהלך חוקי במשחק. מכאן שיש מהלך כלשהו מ- x_1 ל- x_1' , כך ש- $g(x_1') = d \oplus g(x_1)$. המשמעות היא שקיים מהלך חוקי במשחק הסכום $(x_1', x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n)$, כך ש-

$$g(x_1') \oplus g(x_2) \oplus \dots \oplus g(x_n) = d \oplus g(x_1) \oplus g(x_2) \oplus \dots \oplus g(x_n) = d \oplus b = a$$

(1) 

(2) נניח בשלילה כי קיים מצב עוקב של X , עבורו פונקציית g נותנת ערך דומה לזה שהיא נותנת עבור X . בלי הגבלת הכלליות, נניח כי המצב העוקב הזה נובע מהסרת אסימונים מערימה 1, כלומר $g(x_1') \oplus g(x_2) \oplus \dots \oplus g(x_n) = g(x_1) \oplus g(x_2) \oplus \dots \oplus g(x_n)$. ע"י הפחתת הגורמים המתאימים משני צידי המשוואה, נקבל $g(x_1') = g(x_1)$, וזאת בסתירה להגדרת הפונקציה g עבור משחק בודד.


(2) 

עד כאן הראינו כי הגדרת הפונקציה g טובה עבור משחק הסכום. בעצם, הראינו הרבה יותר מכך – הראינו כי משחק סכום MARK עם n ערימות שקול למשחק נים עם n ערימות. ולא רק MARK, אלא כל משחק קומבינטורי בלתי-חלוק! . כעת הקביעה כי

$$g(H) = 0 \Leftrightarrow H \in P$$

$$g(H) > 0 \Leftrightarrow H \in N$$

נובעת ישירות מאותה התכונה עבור משחק נים. הסבר טוב לכך הוא התכונה של סכום-נים שהוזכרה לעיל, ממנה נובע כי כל שינוי באחד המחבורים משנה את הסכום, וכי אם הסכום הוא S , אזי ניתן להגיע לכל סכום רצוי בתחום $\{0, 1, \dots, S-1\}$ ע"י ביצוע שינוי באחד המחבורים. כך שאם $g(H) = 0$, אזי כל מהלך יוביל ל- $g(H) \neq 0$, ואם $g(H) \neq 0$, אזי קיים מהלך המוביל ל- $g(H) = 0$. פירוט בדבר אסטרטגיית הניצחון במשחק נים (כיצד לבחור את הערימה בה יש לבצע שינוי, וכיצד מחשבים את השינוי שיש לבצע בערימה זו) ניתן למצוא במסגרת הוכחת Bouton's Theorem במאמר Game Theory – Part I: Impartial Combinatorial Games של פרגוסון (2008).

(טענה 8) 

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

טענה זו מובילה אותנו לאסטרטגית הניצחון עבור Sum-MARK. בהינתן משחק סכום עם n ערימות $H = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, נכתוב את מספר האסימונים בכל ערימה בהצגה בינארית, נבדוק עבור כל מספר אם הוא אווילי, זדוני-מסוג-evil או זדוני-מסוג-odious, נמצא בהתאמה את ערכי פונקציית g עבור כל ערימה, ונחשב סכום-נים של ערכים אלו. סכום-נים במשחק שלנו יכול להיות רק אחת מהאפשרויות $\{0, 1, 2, 3\} = \{<00>, <01>, <10>, <11>\}$, והצעד שלנו יהיה - אם סכום נים זה שווה לאפס, ננסה להעביר את תורנו ליריב, ואם סכום נים זה שונה מאפס, נבצע מהלך מאחת הערימות כך שסכום נים החדש יהיה שווה אפס.

לדוגמה, אם מצב משחק הסכום הוא $\{9, 8, 7, 6\}$, נבדוק את ההצגה הבינארית $\{<1001>, <1000>, <111>, <110>\}$, נשים לב כי המספרים הם - $\{<1001>, <1000>, <111>, <110>\}$ זדוני-מסוג-evil, אווילי, זדוני-מסוג-odious, אווילי } כך שערכי פונקציית g הם $\{2, 0, 1, 0\}$. נחשב סכום נים ונקבל 3. נרצה לבצע מהלך מהסוג השני על הערימה הראשונה, כלומר לקחת מהערימה בת 9 ($<1001>$) האסימונים ולהותירה עם 4 ($<100>$) אסימונים, כך שבמקום זדוני-מסוג-evil יהיה לנו מספר זדוני-מסוג-odious, כך שהערכים המעודכנים של g הם $\{1, 0, 1, 0\}$ וסכום נים שווה ל-0.

ג. גירסת "משחק הפסד" (misère)

בגירסה זו של המשחק, השחקן שמבצע את הפעולה האחרונה **מפסיד** את המשחק. כאן ערימה ובה אסימון אחד מובילה להפסד, ערימה עם 2 אסימונים תוביל לניצחון. נפתח, כהרגלנו, בהכנת רשימה עבור מספר אסימונים קטן:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	0	2	3	5	7	8	9	11	12
b_n	1	4	6	10	14	16	18	22	24

מה אנחנו רואים ברשימה?

$$1. \forall n \geq 0, a_n = \text{mex}\{a_i, b_i : 0 \leq i < n\}.$$

$$2. b_0 = 1$$

$$3. \forall n > 0, b_n = 2a_n.$$

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

למעשה, אם ניטיב להתבונן, נראה כי הרשימה הזו דומה עד מאד לרשימה שהכינונו עבור הגירסה הרגילה. ההבדל היחיד ביניהן, הוא לגבי הערימות שבהן מספר האסימונים הוא חזקה של 2, כלומר מספרים מסוג 2^k כאשר k הוא מספר שלם אי-שלילי. כאן, מספרים מסוג 2^{2^k} מופיעים בסדרה $\{b_n\}$ ומספרים מסוג $2^{2^{k+1}}$ מופיעים בסדרה $\{a_n\}$.

טענה 9: תהיינה $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} b_n$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n$. **שתי הסדרות הינן סדרות משלימות, כלומר:**

1. $A \cap B = \emptyset$.
2. $A \cup B = \mathbb{N}_{\geq 0}$.

הוכחה: (הוכחת טענה 2 תקפה גם כאן).

טענה 10: $N = A$, $P = B$.

הוכחה: (הוכחת טענה 3 תקפה גם כאן).

אולם לא נוכל להסתפק בכך, ושוב עולה הצורך למצוא נוסחה מפורשת שתקל עלינו למצוא אם המצב בפנינו אנו עומדים הוא מצב מנצח או מצב מפסיד. כך שאנו שבים לייצוג הבינארי של המספרים.

טענה 11:

א. אם המספר הוא חזקה של 2 (כלומר ייצוגו הבינארי הוא $\langle 10^t \rangle$ עבור $t \in \mathbb{N}_{\geq 0}$),

אזי $x_is_dopey \Rightarrow x \in N$, $x_is_vile \Rightarrow x \in P$.

ב. אחרת, $x_is_dopey \Rightarrow x \in P$, $x_is_vile \Rightarrow x \in N$ (בדומה לגירסה הרגילה).

הוכחה:

טענת עזר ראשונה: איברי הסדרה $\{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$ מתחלפים לסירוגין בין vile ל-dopey: אם

$x = 2^k$ הוא vile (dopey), אז $y = 2^{k+1}$ הוא dopey (vile).

הוכחה (טענת עזר ראשונה): כפל ב-2 משמעו בייצוג הבינארי הינו הוספת 0 מימין.

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

טענת עזר שניה: איברי הסדרה $\{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$ מתחלפים לסירוגין בין N ל- P :

$$2^k \in P(N) \Leftrightarrow 2^{k+1} \in N(P)$$

הוכחה (טענת עזר שניה): אם $2^k \in N$, אז לפי נתון 3 וטענה 10, $2^{k+1} \in P$. אם $2^k \in P$, אז מ- 2^{k+1} יש שתי אפשרויות. אחת מהן היא מהלך מהסוג השני, אשר מוביל ל- 2^k , כלומר ל- P . ומצב ממנו יש אפשרות להוביל ל- P , הינו מצב השייך ל- N .

שתי טענות העזר, אגב, טובות גם עבור הגירסה הרגילה של המשחק, ומהן נובע, כי איברי הסדרה $\{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$ מתחלפים לסירוגין בין vile ל-dopey ובין N ל- P . אם אנו יודעים כי 1 הוא vile, וכי הוא שייך ל- P , אזי מוכח סעיף א' של הטענה.

לגבי סעיף ב' של הטענה. נטען כי כאן אין הבדל בין הגירסה הרגילה לבין גירסת משחק ההפסד.

אם $x \neq 2^k$ (שלם k) $(0 \leq k)$. אם $x \neq 2^k + 1$, אזי אין שינוי מטענה 4, לפיה

$$x \in N \Rightarrow x \text{ is vile} \text{ ו- } x \in P \Rightarrow x \text{ is dopey} \text{ . אם } x = 2^k + 1 \text{ (} k \neq 0 \text{) אזי } x \text{ אי-זוגי}$$

כלומר vile, וקיימים ממנו שני מהלכים, האחד מוביל ל- $y = 2^k$ והשני מוביל ל- $z = 2^{k-1}$ ולפי

טענות העזר, $z \text{ is dopey} \Leftrightarrow y \text{ is vile}$ ו- $z \in P \Leftrightarrow y \in N$. כלומר במקרה זה $x \in N$.

(טענה 11) ■

נניח במשחק הפסד ניצבת בפני ערימה ובה 512 אסימונים. מספר זה הוא כמובן חזקה שלמה של 2, והצגתו הבינארית הינה $\langle 1000000000 \rangle$. מכך ש- $512 = 2^9$, אני אפילו לא חייב לספור את האפסים בהצגה הבינארית כדי לגלות שזהו מספר אווילי. מכך אני מסיק כי המצב שלפני שייך ל- N , וכי אני יכול לנצח במשחק. המהלך המנצח הוא כמובן מהלך מהסוג השני, המותיר את יריבי עם ערימה שמספר אסימוניה $256 = 2^8$, שהוא מספר זדוני, ולכן שייך ל- P .

ד. גירסת הערך העליון (Up-MARK)

בגירסה זו, סוג המהלך הראשון (הוצאת אסימון אחד) עודו בתוקף, אולם הסוג השני שונה מעט,

באשר עתה הוא מותיר את הערך העליון של חצי מספר האסימונים $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

הבעייתיות הנוצרת ממשחק בצורה זו נובעת מכך שאם נותר אסימון אחד, מהלך מהסוג השני מוביל ל... אותו המצב! אסימון אחד היה, ואסימון אחד ישאר, כך שהמשחק עלול להיכנס ללולאה אינסופית. נסכים אם כן כי המנצח הוא השחקן אשר מותיר את יריבו עם אסימון אחד בלבד.

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

בדומה למשחק בגירסתו הרגילה, נפתח גם כאן בהתנסות עם מספרים קטנים של אסימונים, נכין רשימה של מצבים "מנצחים" ו"מפסידים" וננסה לזהות את מאפייניה. ובכן, רשימה:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	0	2	4	5	6	8	10	12	13
b_n	1	3	7	9	11	15	19	23	25

מה אנחנו רואים בטבלה?

$$1. \forall n \geq 0, a_n = \max\{a_i, b_i : 0 \leq i < n\}.$$

$$2. b_0 = 1$$

$$3. \forall n > 0, b_n = 2a_n - 1.$$

נשים לב כי הסדרה $\{b_n\}$ מורכבת ממספרים אי-זוגיים בלבד, אולם הסדרה $\{a_n\}$ כוללת גם מספרים זוגיים וגם מספרים אי-זוגיים.

טענה 12: תהיינה $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} b_n$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n$ שתי הסדרות הינן סדרות משלימות, כלומר:

$$1. A \cap B = \emptyset.$$

$$2. A \cup B = \mathbb{N}_{\geq 0}.$$

הוכחה: (הוכחת טענה 2 בתוקף)

$$\text{טענה 13: } N = A, P = B.$$

כלומר:

$$1. \text{ לכל } n, \text{ כל מהלך מ- } b_n \text{ עובר ל- } a_i \text{ כלשהו } (i \in \mathbb{N}_{>0}).$$

$$2. \text{ לכל } n, \text{ מ- } a_n \text{ קיים מהלך העובר ל- } b_i \text{ כלשהו } (0 \leq i < n).$$

הוכחה:

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

1. לכל n , b_n תמיד אי-זוגי (נתון 3), לכן מהלך מהסוג הראשון יוביל למס' זוגי של אסימונים, כלומר בהכרח למספר שאינו ב- B , ולפי טענה 12 מספר זה שייך ל- A , כלומר זהו a_i כלשהו)

$$\left\lfloor \frac{b_n}{2} \right\rfloor = \frac{b_n + 1}{2} = a_n \quad (i \in \mathbb{N}_{>0})$$

(1) ■

טענת עזר: אם $y = 2x - 1$, אזי מתקיים אחד מהשנים: או $x \in B$ וגם $y \in A$, או

(ב) $x \in A$ וגם $y \in B$.

הוכחה (טענת עזר): (ב) ברור מנתון 3. לגבי (א) נסתכל על $x \in B$. אם $y = 2x - 1 \in B$, אז y אי-זוגי ולכן קיים מהלך $x \in B \rightarrow y = 2x - 1 \in B$ בסתירה לסעיף 1 של טענה זו.

(טענת עזר) ■

2. אם a_n הינו מספר אי-זוגי, אזי קיים מהלך מהסוג השני $\frac{a_n + 1}{2} = \left\lfloor \frac{a_n}{2} \right\rfloor \rightarrow a_n$, ולפי טענת

העזר $\frac{a_n + 1}{2} \in B$. אם a_n הינו מספר זוגי, אזי קיימים שני מהלכים אפשריים:

$$a_n \rightarrow \left\lfloor \frac{a_n}{2} \right\rfloor = \frac{a_n}{2} \quad \text{או} \quad a_n \rightarrow a_n - 1, \quad \text{ולפי טענת העזר, אם } x = a_n - 1 \text{ ו } y = \frac{a_n}{2}, \text{ אזי אחד}$$

המהלכים מוביל ל- b_i כלשהו ($0 \leq i < n$). ■ (2)

(טענה 13) ■

ושב נוכל להרכיב רשימות כאלה מתחילתן ללא קושי כדי להבין את המצב העומד בפנינו. אך כפי שכבר התרגלנו, עבור מצבים בהם מספר האסימונים גדול, הזמן שידרש לנו להכין רשימות כאלה איננו סביר, ועלינו לחפש מאפיינים שיאפשרו לנו לבצע זאת מהר יותר – כלומר עלינו למצוא נוסחה מפורשת עבור מספר n כלשהו. נפנה שוב להצגה הבינארית של המספרים בסדרות הני"ל.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	0	10	100	101	110	1000	1010	1100	1101
b_n	1	11	111	1001	1011	1111	10011	10111	11001

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

ראינו כבר כי הסדרה $\{b_n\}$ מורכבת ממספרים אי-זוגיים בלבד, אולם הסדרה $\{a_n\}$ כוללת גם מספרים זוגיים וגם מספרים אי-זוגיים. אם נוכל לאפיין את אותם מספרים אי-זוגיים בסדרה $\{a_n\}$, תהיה תדרכנו לפתרון סלולה.

ובכן, ההצגה הבינארית אכן מאפשרת לנו לזהות את המספרים הללו. אלו הם כל המספרים האי-זוגיים שהסיפא של הצגתם הבינארית הינה $\langle 10^{2k+1} \rangle$ עבור $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

טענה 14: מצב שייך לקבוצת המצבים ה"מנצחים" N אם ורק אם הוא מספר אי-זוגי שהסיפא של הצגתו הבינארית הינה $\langle 10^{2k+1} \rangle$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) או אם הוא מספר זוגי. מצב שייך לקבוצת המצבים ה"מפסידים" P אם ורק אם הוא מספר אי-זוגי שהסיפא של הצגתו הבינארית הינה $\langle 10^{2k} \rangle$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$).

הוכחה: נגדיר את שתי הקבוצות הבאות:

$$(k, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \begin{cases} N' = \{x : x \text{ is even} \mid R_2(x) = \langle 0, 1 \rangle^m 10^{2k+1} \rangle \\ P' = \{x : R_2(x) = \langle 0, 1 \rangle^m 10^{2k} \rangle \end{cases}$$

נשים לב כי שתי הקבוצות זרות, ונרצה להראות כי $N' = N$ ו- $P' = P$. זאת נעשה ע"י כך שנראה לכל מצב השייך ל- P' , כל המצבים העוקבים שלו שייכים ל- N' , וכי לכל מצב השייך ל- N' , ישנו מצב עוקב השייך ל- P' .

אם x זוגי, אזי $x \in N'$. מנתון 3 ($\forall n > 0, b_n = 2a_n - 1$) נובע כי הסדרה $\{b_n\}$ מורכבת ממספרים אי-זוגיים בלבד, אזי לפי טענה 12 כל המספרים הזוגיים שייכים לסדרה $\{a_n\}$, מכאן שלפי טענה 13 הם שייכים ל- N .

אם x אי-זוגי, אזי $x \in N'$ או $x \in P'$.

יהי x מספר אי-זוגי השייך ל- P' , ונסתכל על שני מקרים.

במקרה הראשון $k=0$, אזי עפ"י הגדרת הקבוצה P' הסיפא של x היא $\langle 11 \rangle$. מהלך מהסוג הראשון יוביל למספר זוגי, כלומר למספר השייך ל- N' . מהלך מהסוג השני

$$x \rightarrow \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \frac{x+1}{2} = (\text{binary}) \frac{\langle \dots 11 \rangle + 1}{2} = \frac{\langle \dots 00 \rangle}{2} = \langle \dots 0 \rangle$$

כלומר שוב ל- N' .

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

במקרה השני $k > 0$, ועפ"י הגדרת הקבוצה P' הסיפא של x היא $\langle 10^{2k} \rangle$. מהלך מהסוג הראשון יוביל למספר זוגי, כלומר למספר השייך ל- N' . מהלך מהסוג השני הינו

$$x = \langle \dots 10^{2k} 1 \rangle \rightarrow \frac{\langle \dots 10^{2k} 1 \rangle + 1}{2} = \frac{\langle \dots 10^{2k-1} 10 \rangle}{2} = \langle \dots 10^{2k-1} \rangle$$

שייך ל- N' . כלומר, לכל $x \in P'$, כל המצבים העוקבים לו שייכים ל- N' .

יהי x מספר אי-זוגי השייך ל- N' , אז הסיפא של הצגתו הבינארית היא $\langle 10^{2k+1} \rangle$. מהלך מהסוג הראשון מוביל למספר זוגי, כלומר למצב השייך ל- N' . נסתכל אם כן על מהלך מהסוג השני: $\langle \dots 10^{2k+1} \rangle \rightarrow \frac{\langle \dots 10^{2k+1} \rangle + 1}{2} = \frac{\langle \dots 10^{2k} 10 \rangle}{2} = \langle \dots 10^{2k} \rangle$. לפי הגדרת הקבוצות, המצב אליו מגיעים שייך ל- P' . כלומר, מכל $x \in N'$ קיים מהלך המוביל לאיזשהו $y \in P'$.

(טענה 14)



ה. הכללה של הגירסה הרגילה (K-MARK)

התנסינו, אם כן, בארבע גירסאות שונות של המשחק MARK, וראינו מהן האסטרטגיות המנצחות עבור כל אחת מהגירסאות. כעת ניגש לחלק האחרון של העבודה, ובו ננסה למצוא אסטרטגיה עבור גירסא כללית של המשחק.

הגדרה:

משחק K-MARK הינו משחק קומבינטורי בלתי-חלוק לשני שחקנים. במשחק ניצבת בפני השחקנים ערימה בת n אסימונים, וכל שחקן, בתורו, נדרש לבחור באחד מבין שני סוגי המהלכים האפשריים:

מהלך מסוג ראשון – גריעת מספר כלשהו בין 1 ל $k-1$ של אסימונים מהערימה.

מהלך מסוג שני – גריעת אסימונים מהערימה, כך שיוותרו בה $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ אסימונים.

המפסיד הוא השחקן שבתורו אינו יכול לבצע מהלך (הערימה ריקה מאסימונים).

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

ניתן לראות כי הגירסה הרגילה, אותה הצגנו בתחילת העבודה, הינה מקרה פרטי של זו בה $k=2$.
 עוסקים כעת, כאשר $k=2$.

נראה, לדוגמה טבלה עבור $k=3$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	0	1	2	4	5	7	8	9	10
b_n	0	3	6	12	15	21	24	27	30

נשים לב כי שתי הסדרות מקיימות:

- $\forall n \geq 0, a_n = \max\{a_i, b_i : 0 \leq i < n\}$.
- $\forall n \geq 0, b_n = ka_n$.

טענה 15: תהיינה $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} b_n$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n$ שתי הסדרות הינן סדרות משלימות, כלומר:

- $A \cap B = \emptyset$.
- $A \cup B = \mathbb{N}_{\geq 0}$.

הוכחה: (הוכחת טענה 2 בתוקף, פרט לטענה $a_n = \frac{b_n}{2} < b_n \leq b_m$, אותה יש להחליף ב-

$$a_n = \frac{b_n}{k} < b_n \leq b_m$$

טענה 16: $N = A$, $P = B$.

כלומר:

- לכל n , כל מהלך מ- b_n עובר ל- a_i כלשהו ($i \in \mathbb{N}_{>0}$).
- לכל n , מ- a_n קיים מהלך העובר ל- b_i כלשהו ($0 \leq i < n$).

הוכחה:

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

1. לכל n , $b_n = ka_n$ (נתון 2), כלומר $b_n \pmod k = 0$. לפיכך, מהלך מהסוג הראשון יוביל למס' אסימונים שאינו כפולה של k ($x \pmod k \neq 0$), כלומר בהכרח למספר שאינו ב- B , ולפי טענה 15 מספר זה שייך ל- A , כלומר זהו a_i כלשהו ($i \in \mathbb{N}_{>0}$). מהלך מהסוג השני הינו, לפי נתון 2,

$$b_n \rightarrow \left\lfloor \frac{b_n}{k} \right\rfloor = \frac{b_n}{k} = a_n \quad (1) \quad \blacksquare \quad (i \in \mathbb{N}_{>0})$$

2. עבור $x \in A$, נרצה להראות כי לפחות אחד מהמהלכים העוקבים לו שייך ל- B .

טענת עזר: אם $y = kx$, אזי מתקיים אחד מהשנים: או $x \in B$ וגם $y \in A$, או

(ב) $y \in B$ וגם $x \in A$.

הוכחה (טענת עזר): (ב) ברור מנתון 2. נסתכל על $x \in B$. אם $y = kx \in B$, אז קיים מהלך

מהסוג השני $x \in B \rightarrow y = kx \in B$ בסתירה לסעיף 1 של טענה זו. \blacksquare (טענת עזר)

אם a_n הינו כפולה של k ($a_n \pmod k = 0$), אזי קיים מהלך מהסוג השני $a_n \rightarrow \frac{a_n}{k}$, ולפי טענת

העזר $\frac{a_n}{k} \in B$. אם a_n אינו כפולה של k ($a_n \pmod k \neq 0$), נוכל לייצגו ע"י $a_n = tk + r$ ($t \in \mathbb{N}_{\geq 0}$),

, $r \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. אזי מהלך מהסוג הראשון מאפשר בין השאר הסרת r אסימונים

$$a_n = tk + r \rightarrow \left\lfloor \frac{a_n}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{tk + r}{k} \right\rfloor = \frac{tk}{k} = t$$

לפי טענת העזר, אם $x=t$ ו $y=tk$, אזי אחד מבין $\{x, y\}$ שייך ל- B . \blacksquare (2)

(טענה 16) \blacksquare

מסתבר שהאסטרטגיה שמצאנו עבור הגירסה הרגילה של המשחק (2-MARK), טובה לכל k , כאשר ההבדל הוא שעבור K-MARK הצגת המספרים נעשית בבסיס ספירה k . לדוגמה, נציג את סדרות המצבים עבור $k=3$, כאשר הן מוצגות בבסיס 3:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	0	1	2	11	12	21	22	100	101
b_n	0	10	20	110	120	210	220	1000	1010

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

נשים לב כי כמו בגירסה הרגילה, b_n הוא הזזה שמאלית של a_n .

ולפני שנמשיך לטענה הבאה, נרצה להרחיב את הגדרת המספרים הזדוניים (vile) והאויליים (dopey), כך שהגדרתם תהיה תקפה עבור כל בסיס ספירה k , ולא רק עבור בסיס 2.

הגדרה: מספר יקרא **זדוני (vile)**, אם הצגתו בבסיס k $x = x_{n-1}x_{n-2}\dots x_1x_0 = \sum_{i=0}^{n-1} x_i k^i$ מסתיימת

במספר זוגי של אפסים (כולל אפס אפסים), כלומר היא מהצורה $\langle \dots 10^{2m} \rangle$ עבור $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

אחרת, המספר יקרא **אוילי* (dopey)**. במקרה זה הצגתו הבינארית מסתיימת במספר אי-זוגי

של אפסים, כלומר הוא מהצורה $\langle \dots 10^{2m+1} \rangle$ עבור $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

טענה 17: עבור K-MARK, קבוצת המצבים ה"מנצחים" הינה $N = \{x : R_k(x) \text{ is vile}\}$

וקבוצת המצבים ה"מפסידים" הינה $P = \{x : R_k(x) \text{ is dopey}\}$.

הוכחה:

נגדיר את שתי הקבוצות הבאות: $(k, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \begin{cases} N' = \{x : R_k(x) \text{ vile}\} \\ P' = \{x : R_k(x) \text{ dopey}\} \end{cases}$

נשים לב כי שתי הקבוצות זרות, ונרצה להראות כי $N' = N$ ו- $P' = P$. זאת נעשה ע"י כך שנראה לכל מצב השייך ל- P' , כל המצבים העוקבים שלו שייכים ל- N' , וכי לכל מצב השייך ל- N' , ישנו מצב עוקב השייך ל- P' .

אם x מספר אוילי, אזי $x \in P'$. מהלך מהסוג הראשון

$$x = \langle \dots 10^{2m+1} \rangle \rightarrow x - \{1, 2, \dots, k-1\} = \langle \dots 10^{2m+1} \rangle - \{1, 2, \dots, k-1\} = \langle \dots \{1, 2, \dots, k-1\}^{2m+1} \rangle$$

מוביל למספר שהסיפא שלו אינה 0, כלומר למספר זדוני השייך ל- N' . מספר אוילי מסתיים

לפחות ב-0 אחד, כך שבהכרח הוא כפולה של k , לפיכך מהלך מהסוג השני

$$x = \langle \dots 10^{2m+1} \rangle \rightarrow \left\lfloor \frac{\langle \dots 10^{2m+1} \rangle}{k} \right\rfloor = \frac{\langle \dots 10^{2m+1} \rangle}{k} = \langle \dots 10^{2m} \rangle$$

N' . מכאן שכל העוקבים של x שייכים ל- N' .

אם x מספר זדוני, אזי $x \in N'$. נבדיל בין כמה מקרים:

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

$$1. \quad x = \langle \dots 10^{2m} \rangle \rightarrow \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\langle \dots 10^{2m} \rangle}{k} \right\rfloor = \langle \dots 10^{2m-1} \rangle$$

מוביל למספר אוילי השייך ל- P' .

2. x לא מסתיים ב-0 וגם ספרה קודמת אינה אפס, כלומר הסיפא של x היא

$\langle \dots \rangle_{>1} < \{1, 2, \dots, k-1\}^t$. במקרה זה קיים מהלך מהסוג הראשון המפחית מהערימה את מספר האסימונים המופיע בספרה הימנית ביותר $\{1, 2, \dots, k-1\}$, מה שיוביל למצב בו הסיפא היא $\langle \dots \rangle_{>1} < \{1, 2, \dots, k-1\}^{t-1} 0$. זהו כמובן מספר אוילי השייך ל- P' .

3. x לא מסתיים ב-0 ולפני הספרה האחרונה יש מספר זוגי של אפסים, כלומר הסיפא של x הינה

$\langle \dots \rangle_{>0} < 0^{2s} \{1, 2, \dots, k-1\}$. כמו במקרה הקודם, גם כאן קיים מהלך מהסוג הראשון המפחית מהערימה את מספר האסימונים המופיע בספרה הימנית ביותר $\{1, 2, \dots, k-1\}$, מה שיוביל למצב בו הסיפא היא $\langle \dots \rangle_{>0} < 0^{2s+1}$. זהו כמובן מספר אוילי השייך ל- P' .

4. x לא מסתיים ב-0 ולפני הספרה האחרונה יש מספר אי-זוגי של אפסים, כלומר הסיפא של x

הינה $\langle \dots \rangle_{\geq 0} < 0^{2s+1} \{1, 2, \dots, k-1\}$. כאן מהלך מהסוג השני

$$x = \langle \dots 0^{2s+1} \{1, 2, \dots, k-1\} \rangle \rightarrow \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\langle \dots 0^{2s+1} \{1, 2, \dots, k-1\} \rangle}{k} \right\rfloor = \langle \dots 0^{2s+1} \rangle$$

אוילי השייך ל- P' .

(טענה 17)



הכללת המשחק MARK, נותנת לנו את האפשרות לזהות מאפיינים כלליים נוספים. אחד מהם נחשף באופן בולט בעת הכנת טבלאות המצבים המנצחים והמפסידים עבור k גבוה. קל לראות כי הסדרה $\{b_n\}$ גדלה מהר יותר מהסדרה $\{a_n\}$, כך שלמרות ששתי הסדרות אינסופיות, ניתן לומר כי יש הרבה יותר מצבים מנצחים ממפסידים, כך שאם נבחר מספר באקראי, ההסתברות כי המספר הנבחר יהיה מצב מנצח היא גבוהה מאד. כמובן שכדי לברר אם המצב המנצח ובכדי למצוא את המהלך הנכון עדין נזדקק להשתמש בכלל מפורש (במקרה זה – זדוני או אוילי), אבל טוב לדעת כי יש סיכוי גבוה שגורלנו בידינו. אגב, המסקנה הזו טובה לרוב המשחקים מסוג זה.

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

סיכום ומסקנות

מה למדתי?

ובכן - שיחקנו, ניצחנו (והפסדנו), טענו והוכחנו, שינינו, שוב שיחקנו, ניצחנו, טענו והוכחנו, ושוב, ושוב. אך מה בעצם למדנו?

העבודה העניקה לי הזדמנות ראשונה להתחקות אחר סוד עבודת החקר המתמטית, או לפחות לטעום ממנו. למדתי מה רב המרחק בין "רעיון" לבין מימושו, למדתי על הקשיים בכתיבת הוכחות – מהניסוח המדוייק של הטענה ועד כתיבה אלגנטית ונקיה משגיאות של ההוכחה עצמה.

מהבחינה המתמטית גרידא, נתקלתי לראשונה במסגרת אקדמית בתחום של משחקים קומבינטוריים. ההיכרות הזו כללה, מלבד המשחק הספציפי בו עסקתי, מפגש עם ייצוגים שונים למשחקים (למשל- מהלכי מלכה בשחמט לייצוג מהלכים במשחק וויטהוף על שתי ערימות אסימונים), עם שברים משולבים ושיטות ספירה מיוחדות (שוב – לפתרון וויטהוף), עם ייצוג מערכות מספרים שלמות (Surreal Numbers) ע"י מצבים של משחקים ועוד ועוד.

המלצות להמשך מחקר?

אחת המעלות העיקריות במשחקים מתמטיים, ולא רק מתמטיים, הוא האפשרות לבצע שינויים קלים בחוקי המשחק, וכך להשיג אפשרויות חקר חדשות. כמובן שבעקבות הגירסאות שהוצגו בעבודה זו, הכיוון המיידני בו ניתן להמשיך ולחקור הוא משחקי-סכום עבור גירסאות הערך העליון, משחקי הפסד והגירסה המוכללת. אפשר גם לחשוב על ייצוגים שונים עבור הגירסאות השונות. בתחום ההסתברות, אפשר לחקור את ההסתברות לבחירת מצב מנצח, אם המצב נבחר באקראי.

איך זה יסייע לי בהוראה?

כמובן שאפשר פשוט לשחק את המשחק הזה, ומשחקים קומבינטוריים אחרים, עם תלמידים בכל הגילאים ובכל הרמות. מעבר לכך, ניתן לחקור עם התלמידים את המשחקים, ולנסות להגיע לאסטרטגיות מנצחות, לפחות עבור מצבים בהם מספר האסימונים קטן. כמו כן, העבודה הרבה שעשיתי עם בסיסי ספירה שונים, עשויה בהחלט לסייע לי להעביר את הנושא בכיתה, תוך הדגשת הפן המעשי של בסיסי הספירה השונים.

מטרות שמשחקים מסוג זה עשויים לסייע להשגתן – היופי שבתיאוריה המתמטית וכיווני המחקר הרבים שהיא מאפשרת, ניתוח מצבים שונים ומציאת חוקיות וניסוח כללים, החשיבות במציאת נוסחה מפורשת תחת הסתפקות בנוסחת-נסיגה (יעילות!), וברמות הגבוהות יותר – הוכחות ע"י אינדוקציה, וכתיבת הוכחות באופן כללי.

קובץ זה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

העבודה בהנחייתו של פרופ' פרנקל היתה חוויה בפני עצמה, חוויה שהעשירה אותי ברמה המתמטית וברמה האישית. אני רוצה להודות לו על הסבלנות שגילה לנוכח סירובי להבין, על ההתעקשות על הפרטים הכי קטנים, על הטקסטים הכאילו-לא-קשורים שהוסיפו נקודות מבט ודרכי הסתכלות על העבודה שעשיתי, על הסיפורים ההדדיים ועל החיוך הרחב. תודה, אביעזרי!

מקורות

1. Berlekamp, E.; Conway, J. H.; Guy, R. (1982). *Winning Ways for your Mathematical Plays*, vols. 1 and 2, Academic Press, New York.
2. Ferguson, T.S. (2008). *Game Theory – Part I: Impartial Combinatorial Games*.
<http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/academic/class/15859-f01/www/notes/intro.pdf>
3. Fraenkel, A (2010). The vile, dopey, evil and odious game players . To appear in *Discrete Math.*, special volume in honor of the 80th birthday of Gert Sabidussi.
4. Fraenkel, A (1982), How to beat your Wythoff game's opponent on three fronts, *Amer. Math. Monthly* 89, p. 353-361