קרן רוטשילד קיסריה

מכון ויצמן למדע
WEIZMANN INSTITUTE OF SCIENCE

"תוכנית רוטשילד-ויצמן למצוינות בהוראת המדעים"
במימונה של קרן קיסריה אדמונד בנימין דה רוטשילד

יחס הצמידות
בחבורה הסימטרית

מגישה: טל שטרן

מנחה: פרופ' אמיתי רגב

תאריך הגשה: 30.4.2012

תוכן עניינים

מבוא..........3
פרק 1 - החבורה הסימטרית..........4
פרק 2 - תמורה זוגית / אי זוגית..........10
פרק 3 – מחלקות הצמידות של S_n..........15
פרק 4 - הצגה של תמורות..........20
פרק 5 - חבורת הקומוטטורים..........24
פרק 6 - מחלקות הצמידות של S_n ו- A_n..........25
פרק 7- חבורות אמביוולנטיות (ambivalent)...........31
ביבליוגרפיה..........35

מבוא

בחרתי לעסוק בעבודתי בחבורה הסימטרית. כשחשבתי באיזה נושא מתמטי ברצוני לעסוק בעבודת הגמר שלי היה לי ברור שיהיה זה מתחום האלגברה. תחום מתמטי זה קרוב יותר לליבי כיוון שהוא עוסק בחוקיות של המספרים ובתכונותיהם. למעשה הוא יותר קרוב ומוחשי לתלמידי התיכון.

בקורס אלגברה שלמדנו במסגרת תוכנית הלימודים במכון ויצמן לתואר שני נחשפתי לתורת החבורות ולחבורות הסופיות. גיליתי שאפשר ללמוד מתורת החבורות רבות על מספרים וחוקיותם. לאחר שהופניתי לפרופ' רגב הוא המליץ לי לעסוק בחבורה הסימטרית ואכן שמחתי להצעה. בחבורה הסימטרית יש הרבה צדדים שאפשר לחקור. נושא זה אף יכול להיות תחום להעשרה למורים ותלמידים כיוון שאינו מסובך מדי ואינו מצריך הרבה ידע ברמה מתקדמת הנלמד באוניברסיטה.

בעבודה אסקור את החבורה הסימטרית ותכונותיה, זוגיות של תמורות, הצגות שונות של תמורות, פעולת ההצמדה ומחלקות הצמידות ולבסוף בדקתי אילו חבורות זוגיות הן אמביוולנטיות.

עבודת המשך לעבודה זו יכולה לעסוק בדרכי הצגות שונות של הנושאים המובאים בעבודה לתלמידי התיכון ולמורים.

ברצוני להודות לפרופ' אמיתי רגב על הסבלנות והתמיכה לאורך כל הדרך.

פרק 1 - החבורה הסימטרית

תהי Ω - קבוצה סופית.

פונקציה חח"ע $\pi:\Omega\mapsto\Omega$ (ולכן על) נקראת תמורה (permutation).

אוסף התמורות $\pi:\Omega\mapsto\Omega$ של Ω מסומן ב- S_Ω.

כאשר $\Omega:=\{1, 2, . . . , n\}$ מסמנים $S_\Omega = S_n$.

כעת נגדיר את פעולת הכפל כהרכבה של שתי פונקציות, כלומר הרכבה של שתי תמורות ב Ω.

נסמן: $\pi\circ\rho=\pi\rho$ ונגדיר: $(\pi\rho)(\omega)=\pi(\rho(\omega))$

<u>טענה 1.1</u>: קבוצת כל התמורות על Ω - $S_\Omega := \{\pi|\pi:\Omega\mapsto\Omega,\omega\in\Omega\}$ היא חבורה.

הוכחה: כדי להראות שקבוצה היא חבורה יש להראות –

1) סגורה תחת פעולת הכפל
2) אסוציאטיביות
3) קיום איבר ניטראלי
4) קיום הופכיים

1) הוכחת סגירות: יהיו $\pi,\rho:\Omega\mapsto\Omega$ תמורות ב S_Ω (כלומר חח"ע). נרצה להראות כי גם $\pi\rho$ היא תמורה, כלומר חח"ע על הקבוצה Ω.

נניח כי $(\pi\rho)\omega_1=(\pi\rho)\omega_2$. יש להוכיח כי $\omega_1=\omega_2$.

$$(\pi\rho)(\omega_1)=(\pi\rho)(\omega_2)\xleftrightarrow{1}\pi(\rho(\omega_1))=\pi(\rho(\omega_2))\xleftrightarrow{2}\rho(\omega_1)=\rho(\omega_2)\xleftrightarrow{3}\omega_1=\omega_2$$

1 – לפי הגדרת פעולת ההרכבה.

2 – π חח"ע.

3 – ρ חח"ע.

2) הוכחת אסוציאטיביות: יהיו $\pi,\rho,\sigma:\Omega\mapsto\Omega$ תמורות ב S_Ω. נוכיח כי $\pi(\rho\sigma)=(\pi\rho)\sigma$.

תהי $\omega\in\Omega$.

$$(\pi(\rho\sigma))(\omega)=\pi((\rho\sigma)(\omega))=\pi(\rho(\sigma(\omega)))$$

וגם - $((\pi\rho)\sigma)(\omega)=(\pi\rho)(\sigma(\omega))=\pi(\rho(\sigma(\omega)))$ ולכן - $\pi(\rho\sigma)=(\pi\rho)\sigma$

3) הוכחת קיום איבר ניטרלי:

נגדיר את פונקצית הזהות – $\{\mathrm{I}:\Omega\mapsto\Omega,\mathrm{I}(\omega)=\omega\}$ ומתקיים כי לכל $\pi\in S_\Omega$:

$I\pi=\pi=\pi I$.

תהי $\omega\in\Omega$. $(I\pi)(\omega)=I(\pi(\omega))=\pi(\omega)=\pi(I(\omega))=(\pi I)(\omega)$

4) הוכחת קיום הופכיים: תהי $\pi\in S_\Omega$. יש למצוא $\rho\in S_\Omega$ כך שמתקיים: $\rho\pi=I=\pi\rho$.

כיוון ש π חח"ע וכן Ω - קבוצה סופית אזי π היא על. לכן אם $\omega_1\in\Omega$ ישנו $\omega_2\in\Omega$ יחיד כך ש: $\pi(\omega_2)=\omega_1$. נגדיר את ρ כך ש: $\rho(\omega_1)=\omega_2$ ויתקיים כי:

$$(\rho\pi)(\omega_2)=\rho(\pi(\omega_2))=\rho(\omega_1)=\omega_2=I(\omega_2)$$
$$(\pi\rho)(\omega_1)=\pi(\rho(\omega_1))=\pi(\omega_2)=\omega_1=I(\omega_1)$$

נוכיח כי ρ היא חח"ע: תהי $\rho(\omega_1)=\rho(\omega'_1)$ ונראה ש - $\omega_1=\omega'_1$. מההגדרה הקודמת נקבל כי - $\pi(\omega_2)=\omega_1$ ו - $\pi(\omega'_2)=\omega'_1$. הנחנו ש- $\omega_2=\omega'_2$, לכן - $\pi(\omega_2)=\pi(\omega'_2)$ כלומר $\omega_1=\omega'_1$.

■

<u>החבורה הסימטרית</u> S_n

$$S_n:=\{\pi|\pi:n\mapsto n,n\}$$

<u>כתיבה של תמורות ב- S_n :</u>

$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n)\end{pmatrix}$ כלומר $\pi:i\to\pi(i)$

לפעמים נסמן: $[\pi(1),....,\pi(n)]=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n)\end{pmatrix}$

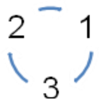
כתיבה של תמורה לפי מחזורים: $(a_1,a_2,....,a_n)$ כלומר: $a_1\to a_2\to\cdots\to a_n\to a_1$

שני <u>מחזורים זרים</u> אם כל איבר במחזור אחד אינו מופיע במחזור שני.

כל תמורה ניתנת לכתיבה כמכפלה של מחזורים זרים.

לדוגמא: $(1\quad 7)(2\quad 5\quad 3)(6\quad 4)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 7 & 5 & 2 & 6 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$

דוגמא לתמורות ב- S_3 :



$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=(1\quad 3\quad 2)=$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}=(2\quad 3)(1)=(2\quad 3)$$

תמורת הזהות תסומן: 1

<u>טענה 1.2</u>: לכל $n \geq 1$ $|Sn| = n!$

<u>הוכחה:</u>

נוכיח טענה זו באינדוקציה על n:

$$n = 1:\ |S_1| = 1! = 1$$

<u>הנחת האינדוקציה</u>: $|Sn| = n!$

<u>נוכיח כי</u>: $|S_{n+1}| = (n+1)!$

על כל תמורה ב S_n - $[a_1, a_2, ..., a_n]$ נספור בכמה מקומות נוכל להכניס את האיבר n+1.

דוגמא: $[a_1, n+1, a_2, ..., a_n]$. ברור שאפשר להכניס את האיבר הנוסף n+1 ב- n+1 מקומות בתמורה. באופן כזה ניצור את כל S_{n+1}.

לכן סה"כ אפשרויות לכל התמורות: n!(n+1) = (n+1)!. כלומר: $|S_{n+1}| = (n+1)!$

■

<u>דוגמא - החבורה S_3 :</u>

בכתיב מלא -

$$S_3 = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\}$$

בכתיב מחזורים –

$$S_3 = \{1,(1\quad 2),(1\quad 3),(2\quad 3),(1\quad 2\quad 3),(1\quad 3\quad 2)\}$$

$$|S_3| = 3! = 6$$

בכתיב מחזורים ניתן לכתוב תמורה בצורות שונות המתארות את אותה תמורה. למשל:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = (1\quad 3\quad 2) = (3\quad 2\quad 1) = (2\quad 1\quad 3)$$

כלומר בכל מחזור ניתן לבצע תמורה מעגלית.

כמו כן אפשר להחליף את הסדר במחזורים זרים. למשל: (1,7)(2,5,3)(6,4) = (5,3,2)(4,6)(7,1)

<u>תת חבורה הנוצרת ע"י איבר אחד:</u>

בכל חבורה סופית, איבר וקבוצת החזקות שלו היא חבורה חלקית.

הוכחה: סגירות ואסוציאטיביות – נובע מהחבורה הגדולה. איבר ניטראלי: $a^0 = 1$.

הופכי: סדרת החזקות $a^0 = 1, a, a^2, \ldots$ היא סופית לכן חייבת להיות בה חזרה כך ש: $a^r = a^{r+j}$

ומכאן נקבל $a^j = 1 \Rightarrow a^{-1} = a^{j-1}$.

.

תהי $\pi \in S_n$ המחזור: $\pi = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$

אזי קבוצת החזקות הינה החבורה: $\langle \pi \rangle = \{1, \pi, \pi^2, \pi^3, \ldots, \pi^{r-1}\}$ כאשר $\pi^r = 1$. $\pi^{r-1} = \pi^{-1}$
$|\langle \pi \rangle| = r$. אומרים גם שהסדר של π הוא r.

נשים לב שהתמורה ההופכית ל- π , כלומר π^{-1} , תיוצג ע"י המחזור:
$(i_1, i_2, \ldots, i_r)^{-1} = (i_r, i_{r-1}, \ldots, i_1)$.

ניתן לראות כי מתקיים: $\pi \circ \pi^{-1} = 1$: $(i_1, i_2, \ldots, i_r) \circ (i_r, i_{r-1}, \ldots, i_1) = 1$. כיוון שמתבצעות ההעתקות הבאות:

$$
\begin{aligned}
&i_1 \xrightarrow{\pi} i_2 \xrightarrow{\pi^{-1}} i_1 \\
&\ldots \\
&i_r \xrightarrow{\pi} i_1 \xrightarrow{\pi^{-1}} i_r
\end{aligned}
$$

מחזור באורך 2 נקרא <u>טרנספוזיציה.</u> למשל $(2 \quad 5) \in S_5$ היא טרנספוזיציה.

<u>טענה 1.3:</u>

כל מחזור באורך r ניתן לכתיבה כמכפלה של r-1 טרנספוזיציות בצורה הבאה:

$$(i_1, i_2, \ldots, i_r) = (i_1 \quad i_2)(i_2 \quad i_3) \cdots (i_{r-1} \quad i_r)$$

<u>הוכחה:</u>

ניתן לראות כי מתקיימות ההעתקות הבאות בצד ימין של המשוואה (זהות להעתקות בצד שמאל):

$$
\begin{aligned}
&i_r \to i_{r-1} \to i_{r-2} \to \cdots \to i_1 \\
&i_{r-1} \to i_r \\
&\ldots \\
&i_2 \to i_3 \\
&i_1 \to i_2
\end{aligned}
$$

■

<u>טענה 1.4:</u>

לכל $k<r$ הטרנספוזיציה $(k \quad r)$ היא מכפלה של טרנספוזיציות מהצורה $(i \quad i+1)$

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על ההפרש r-k.

אם $r-k=1$ אזי $(k \quad r)=(k \quad k+1)$ וסימנו.

הנחת האינדוקציה: הטרנספוזיציה $(k \quad j)$ היא מכפלה של טרנספוזיציות מהצורה $(i \quad i+1)$.

נוכיח כי גם $(j \quad k+1)$ היא מכפלה של טרנספוזיציות מהצורה $(i \quad i+1)$

ניתן לראות כי אפשר לכתוב את הטרנספוזיציה $(j \quad k+1)$ כך:
$(j \quad k+1)=(k \quad k+1)(j \quad k)(k \quad k+1)$. ובהסתמך על הנחת האינדוקציה כי הטרנספוזיציה $(j \quad k)$ היא מכפלה של טרנספוזיציות מהצורה $(i \quad i+1)$, סיימנו.

■

מכאן ניתן לראות כי S_n נוצרת ע"י הטרנספוזיציה $(k \quad k+1)$ לכל $1\le k<n$.

כלומר: $S_n=\langle(1 \quad 2),(2 \quad 3),(3 \quad 4),\dots,(n-1 \quad n)\rangle$

<u>טענה 1.5</u>:

הטרנספוזיציה $(r+1 \quad r+2)$ ניתנת לכתיבה בצורה הבאה:

$(r+1 \quad r+2)=(1\dots n)^r(1 \quad 2)(1\dots n)^{-r}$ לכל $0\le r\le n-2$.

<u>הוכחה</u>: מתקיימות ההעתקות הבאות -

לכל איבר a שאינו $r+1$ או $r+2$ אזי $a\longrightarrow a$

וכן מתקיימות ההעתקות הבאות:

$$r+1\longrightarrow 1\longrightarrow 2\longrightarrow r+2$$

$$r+2\longrightarrow 2\longrightarrow 1\longrightarrow r+1$$

■

מכאן ניתן לראות כי S_n נוצרת ע"י הטרנספוזיציה $(2 \quad 1)$ והמחזור $(1\dots n)$

כלומר: $S_n=\langle(1 \quad 2),(1\dots n)\rangle$

הערה: עבור $n\ge 3$ S_n אינה נוצרת ע"י איבר יחיד כיוון שאינה אבלית.

פרק 2 - תמורה זוגית / אי זוגית

<u>הגדרה:</u>

יהי $F[x_1,...,x_n]$ - אלגברה של פולינומים עם n משתנים מעל השדה F.

נגדיר פעולה חדשה- בהינתן $\sigma \in S_n$ ו - $f \in F[x_1,...,x_n]$:

$$\sigma f(x_1,...,x_n) = f(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(n)})$$

נשים לב כי מתקיים: $\sigma(-f) = -(\sigma f)$ ואסוציאטיביות - $\sigma(\pi f) = (\sigma\pi)f$

נניח כי $n \geq 2$

נגדיר: $\Delta_n = \Delta_n(x_1,...,x_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i - x_j)$

<u>דוגמא: עבור n=3</u> $\sigma = (1,3)$:

$$\Delta_3 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$$
$$\sigma\Delta_3 = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) = -\Delta_3$$

<u>משפט 2.1:</u>

לכל פרמוטציה $\sigma \in S_n$ מתקיים $\sigma\Delta_n = \pm\Delta_n$

<u>הוכחה:</u>

לפי הגדרה: $\sigma\Delta_n = \prod_{1\leq i\leq j\leq n}(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$. למעשה ל- $\sigma\Delta_n$ יש את אותם איברים כמו Δ_n. רק לעיתים הסימן יהיה + ולעיתים – וזאת כאשר הסדר יהיה הפוך. (ראה דוגמא). ■

מכאן נוכל להגדיר סימן של פרמוטציה:

הגדרה: $\mathrm{sgn}(\sigma) = \frac{\sigma\Delta_n}{\Delta_n} = \pm 1$.

<u>משפט 2.2:</u>

יהי $\pi \in S_n$. ניתן לכתוב את π כמכפלה של טרנספוזיציות $t_i = (i \quad i+1)$. כלומר $\pi = t_1 t_2 \cdots t_k$

אזי מתקיים: $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^k$.

<u>הוכחה:</u>

באינדוקציה על k

כאשר k=1: $\pi=\begin{pmatrix} i & i+1\end{pmatrix}$. נראה מה תמורה זו גורמת ל $\pi\Delta_n$.

יהי $a<b$. נסתכל מה קורה לאיבר $\left(x_a-x_b\right)$ במכפלה $\pi\Delta_n$: (נבדוק את כל האפשרויות)

1. כאשר $a=i,b=i+1$ נקבל ב $\pi\Delta_n$ את: $\left(x_b-x_a\right)=-\left(x_a-x_b\right)$. כלומר נוצר מינוס אחד.
2. כאשר $a,b\neq i,i+1$ אז אין שינוי ב $\pi\Delta_n$ ונשאר $\left(x_a-x_b\right)$.
3. כאשר $a=i$ או $a=i+1$ לכן $b>i+1>i$ נקבל ב $\pi\Delta_n$ את החילופים $\left(x_i-x_b\right)\to\left(x_{i+1}-x_b\right)$ או $\left(x_{i+1}-x_b\right)\to\left(x_i-x_b\right)$. ובכל מקרה אין שינוי של הסימן כי $\left(x_i-x_b\right)\left(x_{i+1}-x_b\right)$ עובר לעצמו.
4. כאשר $b=i$ או $b=i+1$ לכן $a<i<i+1$. נקבל ב $\pi\Delta_n$ את החילופים $\left(x_a-x_i\right)\to\left(x_a-x_{i+1}\right)$ או $\left(x_a-x_{i+1}\right)\to\left(x_a-x_i\right)$. ובכל מקרה אין שינוי של הסימן כי $\left(x_a-x_i\right)\left(x_a-x_{i+1}\right)$ עובר לעצמו.

ובסה"כ יש לנו ב $\pi\Delta_n$ מינוס אחד בלבד. לכן $-1=\left(-1\right)^1=\operatorname{sgn}\left(\pi\right)$.

נניח כי עבור k-1 טרנספוזיציות מתקיים: $\operatorname{sgn}\left(\pi\right)=\left(-1\right)^{k-1}$. ונוכיח עבור K:

$\pi\Delta_n=t_1t_2\cdots t_k\Delta_n=t_1\left(t_2\cdots t_k\Delta_n\right)=t_1\left(-1\right)^{k-1}\Delta_n=\left(-1\right)^k\Delta_n$. (השתמשנו באסוציאטיביות ובהנחת האינדוקציה ובמקרה ש k=1).

ולפי הגדרה נקבל כי: $\operatorname{sgn}\left(\pi\right)=\left(-1\right)^k$.■

אם k זוגי , $\operatorname{sgn}\left(\pi\right)=1$, וזוהי תמורה זוגית.

אם k אי זוגי , $\operatorname{sgn}\left(\pi\right)=-1$, וזוהי תמורה אי זוגית.

תוצאה של משפט זה ושל טענה 1.3 שהוכחנו למעלה היא: $\operatorname{sgn}\left(i_1,i_2,....,i_r\right)=\left(-1\right)^{r-1}$.

את $\pi\in S_n$ ניתן לרשום כמכפלת טרנספוזיציות בהרבה אופנים.

<u>משפט 2.3:</u>

יהיו $\pi=t_1t_2\cdots t_r$ ו - $\pi=t_1t_2\cdots t_s$ שתי הצגות של π כמכפלת טרנספוזיציות, האחת באורך r והשניה באורך s. נוכיח ש- r זוגי אם ורק אם s זוגי.

<u>הוכחה:</u> מתקיים כי $\left(-1\right)^r=\left(-1\right)^s$ מכיוון שהמכפלות הנ"ל מייצגות את אותה פרמוטציה, ולכן גם $r\equiv s$ (מודולו 2) . ■

הקבוצה { 1, -1 } עם פעולת הכפל היא חבורה. (הוכחה: פעולת הכפל היא אסוציאטיבית, 1 הוא איבר ניטרלי, וכל איבר בקבוצה הוא הופכי של עצמו).

טענה 2.4:

ההעתקה $f:S_n\to\{1,-1\}$ המוגדרת ע"י $f(\pi)=\operatorname{sgn}(\pi)$ הינה הומומורפיזים.

הוכחה: נוכיח כי עבור כל $\pi,\sigma\in S_n$ מתקיים: $f(\pi\circ\sigma)=f(\pi)\cdot f(\sigma)$.

צד שמאל של המשוואה: $f(\pi\circ\sigma)=\operatorname{sgn}(\pi\circ\sigma)$ נחלק לשלוש אפשרויות:

1. אם שתי התמורות זוגיות אזי מכפלה של שתי התמורות תהיה זוגית (זוגי + זוגי = זוגי). $f(\pi\circ\sigma)=\operatorname{sgn}(\pi\circ\sigma)=1$
2. אם שתי התמורות אי זוגיות אזי מכפלה של שתי התמורות תהיה זוגית (אי זוגי + אי זוגי = זוגי). $f(\pi\circ\sigma)=\operatorname{sgn}(\pi\circ\sigma)=1$
3. אם אחת התמורות זוגית ואחת אי זוגית אזי מכפלה של שתי התמורות תהיה אי זוגית (זוגי + אי זוגי = אי זוגי). $f(\pi\circ\sigma)=\operatorname{sgn}(\pi\circ\sigma)=-1$

צד ימין של המשוואה: $f(\pi)\cdot f(\sigma)=\operatorname{sgn}(\pi)\cdot\operatorname{sgn}(\sigma)$ נחלק לשלוש אפשרויות:

1. אם שתי התמורות זוגיות $f(\pi)\cdot f(\sigma)=\operatorname{sgn}(\pi)\cdot\operatorname{sgn}(\sigma)=1\cdot1=1$
2. אם שתי התמורות אי זוגיות $f(\pi)\cdot f(\sigma)=\operatorname{sgn}(\pi)\cdot\operatorname{sgn}(\sigma)=-1\cdot-1=1$
3. אם אחת התמורות זוגית ואחת אי זוגית $f(\pi)\cdot f(\sigma)=\operatorname{sgn}(\pi)\cdot\operatorname{sgn}(\sigma)=1\cdot-1=-1$

■

לכל הומומורפיזים מוגדר גרעין ההומומורפיזים כך: $\ker f=\{\pi|\pi\in S_n,\ f(\pi)=1\}$

מההגדרה ניתן לראות שהגרעין של ההומומורפיזים שהגדרנו יהיה אוסף כל התמורות הזוגיות המסומן כך: $A_n:=\ker\operatorname{sgn}=\{\pi\}|\pi\in S_n,\operatorname{sgn}(\pi)=1\}$

טענה 2.5: $|A_n|=\dfrac{n!}{2}$

הוכחה: ניתן להסתכל על S_n כאיחוד של שתי קבוצות זרות - $S_n=A_n\cup\{(1\quad2)A_n\}$. ומכיוון שהאיחוד הוא זר נקבל כי - $|S_n|=n!=|A_n|+|\{(1\quad2)A_n\}|$. נשים לב כי - $|A_n|=|\{(1\quad2)A_n\}|$ (כי למעשה יצרנו את התמורות האי זוגיות מהתמורות הזוגיות ע"י הכפלה בטרנספוזיציה).

ומכאן הטענה נובעת. ■

דוגמא עבור החבורה S_3 :

$$A_3 = \{1, (1 \quad 2 \quad 3), (1 \quad 3 \quad 2)\}$$
$$|A_3| = \frac{3!}{2} = 3$$

<u>טענה 2.6</u>:

מחזור באורך אי זוגי מייצג תמורה זוגית. כלומר: אי זוגי $k \Leftrightarrow (i_1, i_2, ..., i_k) \in A_n$.

<u>הוכחה</u>: לפי טענה 1.3 כל מחזור באורך k ניתן לכתיבה כמכפלה של k-1 טרנספוזיציות . לכן אם k אי זוגי, מספר הטרנספוזיציות יהיה זוגי ולכן התמורה זוגית. ■

בדוגמא הקודמת:
$$(1 \quad 2 \quad 3) = (1 \quad 2)(2 \quad 3)$$
$$(1 \quad 3 \quad 2) = (2 \quad 3)(1 \quad 2)$$

<u>טענה 2.7</u>:

$\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{n-c(\pi)}$ כאשר $\pi \in S_n$, $c(\pi)$ - מספר המחזורים של π.

נשים לב כי $S_{n-1} \subset S_n$ כאשר עבור $\pi \in S_{n-1}$, $\pi(n) = n$ (ולכן גם $\pi \in S_n$).

נסמן: $c_{n-1}(\pi)$ - מספר המחזורים של π ב- S_{n-1} , $c_n(\pi)$ - מספר המחזורים של π ב- S_n.

ומכאן שעבור $\pi \in S_{n-1}$, $c_n(\pi) = c_{n-1}(\pi) + 1$

<u>הוכחת טענה 2.7</u>:

ההוכחה באינדוקציה על n.

<u>n = 1</u>: $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{1-1} = 1$.

<u>הנחת האינדוקציה - הטענה נכונה עבור n-1</u> :

$$\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{n-1-c_{n-1}(\pi)} \quad \text{עבור} \quad \pi \in S_{n-1}$$

<u>נוכיח כי - הטענה נכונה עבור n</u>:

$$\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{n-c_n(\pi)} \quad \text{עבור} \quad \pi \in S_n$$

<u>מקרה א'</u>: $\pi(n) = n$. (כלומר π מעביר את n לעצמו).

לכן: $\pi \in S_{n-1} \subset S_n$.

ניתן לכתוב את π כמכפלה של מחזורים: $\pi = d_1 d_2 .... d_r \in S_{n-1}$

מהנחת האינדוקציה נקבל:

$$\operatorname{sgn}(\pi)=(-1)^{n-1-c_{n-1}(\pi)}=(-1)^{n-(c_{n-1}(\pi)+1)}=(-1)^{n-c_n(\pi)}$$

<u>מקרה ב'</u>: $\pi(n)\neq n$.

לכן ישנו $j\neq n$ כך ש: $\pi(j)=n$.

ניתן לכתוב את π כמכפלה של מחזורים: $\pi=d_1d_2....d_r\cdot(a_1,....,a_k,j,n,b_1,....,b_l)$

מכאן נקבל כי: $c_n(\pi)=r+1$

נגדיר תמורה חדשה: $\sigma=\pi\cdot(j\quad n)=d_1d_2....d_r\cdot(a_1,....,a_k,j,b_1,....,b_l)(n)$

כלומר $\sigma(n)=n$, $\sigma\in S_{n-1}$.

מכאן נקבל כי: $c_{n-1}(\sigma)=r+1$

ולכן קיבלנו כי : $c_{n-1}(\sigma)=c_n(\pi)$

ראינו שהפונקציה sgn היא הומומורפיזים לכן:

$$\operatorname{sgn}(\sigma)=\operatorname{sgn}(\pi\circ(j\quad n))=\operatorname{sgn}(\pi)\cdot\operatorname{sgn}(j\quad n)=-\operatorname{sgn}(\pi)$$

לפי הנחת האינדוקציה נקבל:

$$\operatorname{sgn}(\sigma)=(-1)^{n-1-c_{n-1}(\sigma)}=(-1)^{n-1-c_n(\pi)}$$

בסה"כ נקבל: $\operatorname{sgn}(\pi)=-\operatorname{sgn}(\sigma)=-(-1)^{n-1-c_n(\pi)}=(-1)^{n-c_n(\pi)}$

■

פרק 3 – מחלקות הצמידות של S_n

פעולת הצמדה על תמורה מוגדרת כך: $\rho\pi\rho^{-1}$.

נראה כיצד משפיעה פעולה זו על מחזור $\left(a_1, a_2, ..., a_r\right)$.

טענה 3.1 :

$$\rho\left(a_1, a_2, ..., a_r\right)\rho^{-1} = \left(\rho(a_1), \rho(a_2), ..., \rho(a_r)\right)$$

הוכחה: יהי $\pi = \left(a_1, a_2, ..., a_r\right)$

$$\rho\pi\rho^{-1} = \left(..., i, \rho(i), ..., \pi(i), \rho(\pi(i)), ...\right)\left(a_1, ..., i, \pi(i), ..., a_r\right)\left(..., \rho(i), i, ...\right)$$

ניתן לראות את ההעתקות הבאות: $\rho(a_i) \to a_i \to a_{i+1} \to \rho(a_{i+1})$, כלומר ρ מופעל על π. ∎

כעת תהי $\sigma = \left(a_1, ..., a_r\right)\cdots\left(b_1, ..., b_s\right)$

נפעיל על תמורה זו את ההצמדה ב ρ ונקבל:

$$\rho\sigma\rho^{-1} = \rho\left(a_1, ..., a_r\right)\rho^{-1}\rho\left(d_1, ..., d_r\right)\rho^{-1}\cdots\rho\left(b_1, ..., b_r\right)\rho^{-1} = \left(\rho(a_1), ..., \rho(a_r)\right)\cdots\left(\rho(b_1), ..., \rho(b_s)\right)$$

כלומר לתמורה ולתמורה הצמודה לה אותו מבנה מחזורים.

הוכחנו משפט 3.2: אם $\pi = \rho\sigma\rho^{-1}$ אזי ל - π ול - σ אותו מבנה מחזורים.

משפט הפוך 3.3 : אם $\pi, \sigma \in S_n$ וכן: π, σ בעלי אותה חלוקה של מחזורים אזי: קיים $\rho \in S_n$ כך ש: $\pi = \rho\sigma\rho^{-1}$ (כלומר שתי התמורות π, σ צמודות)

הוכחה: יהי $\sigma = \left(a_1, ..., a_r\right)\cdots\left(b_1, ..., b_s\right)$. $\pi = \left(a'_1, ..., a'_r\right)\cdots\left(b'_1, ..., b'_s\right)$

נגדיר את ρ כך ש:
$$\begin{aligned}\rho(a_i) &= a'_i \\ \rho(b_j) &= b'_j\end{aligned}$$

לכן נקבל כי:

$$\rho\sigma\rho^{-1} = \left(\rho(a_1), \rho(a_2), ..., \rho(a_r)\right)\cdots\left(\rho(b_1), \rho(b_2), ..., \rho(b_r)\right) = \left(a'_1, ..., a'_r\right)\cdots\left(b'_1, ..., b'_s\right) = \pi$$

כתיבה של תמורה לפי חלוקה למחזורים:

נוכל לכתוב כל תמורה כמכפלה של מחזורים זרים באורכים שונים:

$$\sigma = \left(a_1, ..., a_r\right)\left(b_1, ..., b_s\right)\left(c_1, ..., c_t\right)....$$

מחזורים זרים מתחלפים לכן נסדר אותם כך שנוכל להניח כי $r \geq s \geq t \geq ...$

נסמן: $r=\alpha_1, s=\alpha_2, t=\alpha_3, ...$

כמובן מתקיים ש $\alpha_1+\alpha_2+\cdots=n$ וכן $\alpha_1\geq\alpha_2\geq\alpha_3\geq ...$

α נקראת חלוקה (partition) של n. סימון: α ├ n

$\alpha(\pi)$ - החלוקה המתאימה ל- π.

ממשפט 3.2 נובעת המסקנה הבאה:

<u>משפט 3.4</u>: מחלקות הצמידות של S_n מתאימות למעשה לחלוקה של n.

$C_\mu=\{\sigma\in S_n|\alpha(\sigma)=\mu\}$ כאשר μ ├ n

דוגמא:

מחלקות הצמידות של S_3:

$$
\begin{aligned}
C_{(1^3)} &= \{1\}\\
C_{(2,1)} &= \{(1,2),(1,3),(2,3)\}\\
C_{(3)} &= \{(1,2,3),(1,3,2)\}
\end{aligned}
$$

מחלקות הצמידות של S_4:

$$
\begin{aligned}
C_{(1^4)} &= \{1\}\\
C_{(2,1^2)} &= \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}\\
C_{(2,2)} &= \{(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}\\
C_{(3,1)} &= \{(1,2,3),(1,3,2),(1,2,4),(1,4,2),(1,3,4),(1,4,3),(2,3,4),(2,4,3)\}\\
C_{(4)} &= \{(1,2,3,4),(1,3,2,4),(1,2,4,3),(1,4,2,3),(1,3,4,2),(1,4,3,2)\}
\end{aligned}
$$

<u>מספר האיברים במחלקת צמידות של החבורה הסימטרית</u>

נזכיר הגדרות מתורת החבורות.

G – חבורה. H – תת חבורה של G. $g\in G$

הגדרה: מרכז (centralizer) של g ב- H: $Z_H(g)=\{x\in H|xg=gx\}$.

טענה: המרכז הוא תת חבורה של H.

כל קובץ המועלה לאתר נועד אך ורק לשימושם האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

הוכחה: 1. סגירות: יהי $a,b \in Z$ ולכן מקיימים $ag = ga, bg = gb$. נראה כי גם $ab \in Z$, כלומר שמקיים: $(ab)g = g(ab)$. מכיוון שכולם איברים בחבורה הגדולה הרי שמתקיימת אסוציאטיביות ולכן: $(ab)g = a(bg) = a(gb) = (ag)b = (ga)b = g(ab)$.

2. קיום הופכי: יהי $a \in Z$ ולכן $ag = ga$ נכפיל מימין ומשמאל באיבר a^{-1} נקבל כי $ga^{-1} = a^{-1}g$ ולכן $a^{-1} \in Z$.

$C_G(g)$ - מחלקת הצמידות של $g \in G$

<u>משפט 3.5</u>: כאשר G חבורה סופית אזי - $\left|C_G(g)\right| = \dfrac{|G|}{\left|Z_G(g)\right|}$

<u>הוכחה:</u>

$Z_G(g)$ היא תת חבורה ב- G לכן נוכל לכתוב את G כאיחוד זר של מחלקות שמאליות כך ש: $G = x_1Z_G(g) \cup \ldots \cup x_rZ_G(g)$ ומכאן נקבל כי האינדקס $\dfrac{|G|}{\left|Z_G(g)\right|} = r$.

נראה כי $C_G(g)$ מכיל r איברים שונים, למעשה נוכיח ש- $C_G(g) = \left\{x_jgx_j^{-1} \mid j = 1,\ldots,r\right\}$.

נניח כי $x_jgx_j^{-1} = x_igx_i^{-1}$. מכאן ע"י כפל משמאל ב- x_j^{-1} ומימין ב- x_i נקבל: $x_j^{-1}x_ig = gx_j^{-1}x_i$ ולכן נוכל לומר כי $x_j^{-1}x_i \in Z_G(g)$. מכאן נקבל כי $x_iZ_G(g) = x_jZ_G(g)$ ולכן i = j. לכן $C_G(g)$ מכילה לפחות r איברים.

להיפך, יהי $u \in C_G(g)$. נראה שישנו j , $1 \le j \le r$, כך ש- $u = x_jgx_j^{-1}$.

$u \in C_G(g)$ לכן נוכל לכתוב אותו כך: $u = xgx^{-1}$ עבור $x \in G$ כלשהו. מכיוון ש- G מתחלק למחלקות שמאליות של $Z_G(g)$ הרי שישנו j , כך ש- $x \in x_jZ_G(g)$ לכן נציב $x = x_jz$ $z \in Z_G(g)$, ונקבל כי $u = xgx^{-1} = x_jzgz^{-1}x_j^{-1} = x_jgx_j^{-1}$. ■

<u>כתיב חזקות של חלוקה.</u>

נתחיל בדוגמא: חלוקה $\lambda = (3,3,2,2,2,1,1,1,1,1)$ נרשום גם כך, בסדר הפוך $\lambda = (1,1,1,1,1,2,2,2,3,3)$, ובקיצור בכתיב חזקות: $\lambda = (1^5, 2^3, 3^2)$

ובאופן כללי: $\lambda = \left(1^{m_1}, 2^{m_2}, 3^{m_3}, \ldots, j^{m_j}, \ldots\right)$. המספר j מופיע m_j פעמים ב- λ.

הגדרה: נתונה חלוקה λ של n כאשר בכתיב חזקות: $\lambda = \left(1^{m_1(\lambda)}, 2^{m_2(\lambda)}, \ldots\right)$.

נגדיר את המספר הבא: $z_\lambda = \prod_{i\ge1} i^{m_i(\lambda)} \cdot m_i(\lambda)!$.

(*) נשים לב שכאשר בחלוקה λ החזקות הן קטנות או שוות ל-1, כלומר $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ וכל ה- λ_i שונים, אזי $z_\lambda = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_k$.

<u>משפט 3.6:</u>

תהי $\lambda = \left(1^{m_1(\lambda)}, 2^{m_2(\lambda)}, ...\right)$ חלוקה של n ויהי $C_\lambda \subseteq S_n$ מחלקת צמידות שמייצגת את התמורות לפי החלוקה λ. אזי: $|C_\lambda| = \frac{n!}{z_\lambda}$

<u>הוכחה:</u>

מחלקת הצמידות C_λ מייצגת את החלוקה $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$. כלומר את כל התמורות שאורך מחזוריהן לפי החלוקה הנ"ל. ניתן לכתוב את התמורות הנ"ל כך:

$$\sigma = \left(a_1, ..., a_{\lambda_1}\right)\left(a_{\lambda_1+1}, ..., a_{\lambda_1+\lambda_2}\right) \cdots \left(a_{n-\lambda_k+1}, ..., a_n\right)$$

כאשר המספרים כולם שייכים לקבוצה { 1 , . . . , n } . יש !n אפשרויות לסידור של n מספרים. לכן יש !n תמורות כאלו. (גודל הקבוצה S_n). אך כמובן שיש כאן תמורות שספרנו מספר פעמים כי ראינו שניתן לייצג תמורה במספר ייצוגים באותו אורך של מחזורים.

לדוגמא: (2 , 1 , 3) = (1 , 3 , 2) = (3 , 2 , 1) כולם מייצגים את אותו מחזור.

כלומר כל מחזור באורך i יכול להיכתב ב- i אפשרויות שונות המייצגות את אותו מחזור.

וכאשר יש מספר $m_i(\lambda)$ מחזורים שונים באורך i ($m_i(\lambda)$ - המספר אותו מייצגת החזקה) גם מחזורים אלה ניתנים לכתיבה בשינוי סדר, כלומר $m_i(\lambda)!$ אפשרויות שונות.

לדוגמא: שלושה מחזורים שונים באורך 1 המייצגות את תמורת הזהות ב - S_3 , יכולים להיכתב ב-

6 = !3 אפשרויות שונות: (1)(2)(3) , (2)(1)(3) , (3)(1)(2) , (1)(3)(2) , (3)(2)(1) , (2)(3)(1).

לכן בסה"כ מספר התמורות החוזרות על עצמן הוא למעשה המספר $z_\lambda = \prod_{i\ge1} i^{m_i(\lambda)} \cdot m_i(\lambda)!$.

ולכן יש לחלק את !n במספר התמורות החוזרות על עצמן וקיבלנו את מה שרצינו.■

<u>משפט 3.7:</u>

תהי $\sigma = c_1 \cdots c_k$ כתיבה לפי מחזורים של $\sigma \in S_n$ כאשר כל המחזורים זרים. λ_i - האורך של מחזור c_i, ונניח שכל האורכים λ_i שונים. תהי $L = \langle c_1 \cdots c_k \rangle$ תת חבורה ב- S_n הנוצרת ע"י $c_1, \ldots, c_k$. אזי מתקיים:

1. $|L| = \lambda_1 \cdots \lambda_k$
2. $$\left|C_{S_n}(\sigma)\right| = \frac{n!}{\lambda_1 \cdots \lambda_k}$$
3. $$L = Z_{S_n}(\sigma)$$

<u>הוכחה:</u>

1. סדר האיבר c_i הוא λ_i. (כי אורך של מחזור נותן לנו גם את סדר האיבר, כלומר את מספר הפעמים שנכפיל את המחזור בעצמו ונקבל את איבר היחידה). מכיוון שכל המחזורים c_i שונים, ניתן להחליף את הסדר. כל איבר $x \in L$ ניתן לכתיבה יחידה כך: $x = c_1^{a_1} \cdots c_k^{a_k}$ כאשר לכל $1 \le i \le k$, $1 \le a_i \le \lambda_i$. כלומר בתת חבורה L יש $\lambda_1 \cdots \lambda_k$ איברים.
2. תוצאה של הערה (*) ומשפט 3.6.
3. מכיוון שכל המחזורים c_i שונים, הם מתחלפים, ולכן $c_i\sigma = \sigma c_i$ עבור $1 \le i \le k$ ולכן $x \in Z_{S_n}(\sigma)$ ולכן $L \subseteq Z_{S_n}(\sigma)$. שוויון בין הקבוצות נקבל כתוצאה ממשפט 3.5 וסעיף 2 במשפט הנוכחי כלומר ששתי הקבוצות בעלות אותה עוצמה
$$|L| = \left|Z_{S_n}(\sigma)\right| = \lambda_1 \cdots \lambda_k$$

■

פרק 4 - הצגה של תמורות

ניתן להציג חלוקות שונות של n בעזרת דיאגרמת יונג - **Young diagram**

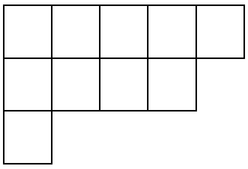
לדוגמא: בחבורה S_{10} –

מחלקת הצמידות של התמורה:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\8&1&9&2&3&5&4&7&6&10\end{pmatrix}=(1\quad 2\quad 4\quad 7\quad 8)(3\quad 5\quad 6\quad 9)(10)$$

נקבעת ע"י החלוקה: $\lambda(\sigma)=(5,4,1)$

וניתנת להצגה ע"י הדיאגרמה:



<u>הגדרה פורמאלית:</u>

דיאגרמת יונג המייצגת את החלוקה $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ היא המטריצה:
$[\lambda]=\{(i,j)|i\geq 1,1\leq j\leq \lambda_i\}$. נשים לב ש- i הוא אינדקס השורות, j הוא אינדקס העמודות בדיאגרמה.

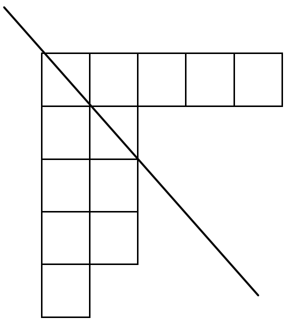
<u>החלוקה הצמודה:</u>

הדיאגרמה $[\lambda]$ מייצגת את החלוקה (λ_i). אזי הדיאגרמה $[\lambda']$ תייצג את החלוקה הצמודה (λ'_j) וניתן להגיע אליה ע"י סיבוב לאורך האלכסון הראשי של $[\lambda]$.

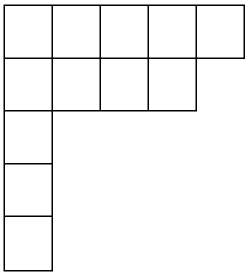
דוגמא: אם $\lambda=(5,2^3,1)$ אזי $\lambda'=(5,4,1^3)$.

נציג את הדיאגראמות -

$[\lambda]=$



$[\lambda']=$



כלומר העמודות הופכות להיות השורות.

בהגדרה פורמאלית: תהי חלוקה $\lambda=(\lambda_i)$. החלוקה הצמודה: $\lambda'=(\lambda'_1,\lambda'_2,\ldots)$ כאשר $\lambda'_j=\left|\{i|\lambda_i\geq j\}\right|$. אם λ = λ' אזי אומרים שהחלוקה λ צמודה לעצמה.

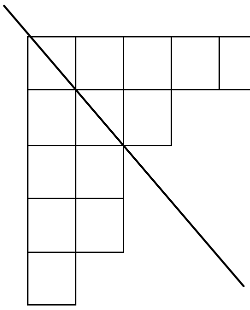
<u>סימון פורביניוס של חלוקה</u>

נשים לב שלכל דיאגרמה האלכסון הראשי עובר דרך מספר תיבות. נסמן מספר זה ב – k .

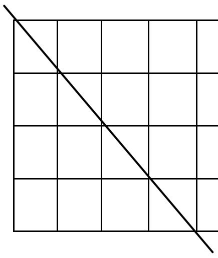
לדוגמא:

בחלוקה $\lambda = (5, 2^3, 1)$ (למעלה) אנו רואים שהאלכסון הראשי חותך שתי תיבות, כלומר $k = 2$.

גם בחלוקה $\lambda = (5, 3, 2^2, 1)$ אנו רואים שהאלכסון הראשי חותך שתי תיבות, כלומר $k = 2$.



בחלוקה $\lambda = (7^2, 5^2)$ אנו רואים שהאלכסון הראשי חותך ארבע תיבות, כלומר $k = 4$.



המספר k יהיה בגודל המטריצה הריבועית המקסימלית שנכנסת בדיאגרמת יונג.

בחלוקה$\lambda = (5, 3, 2^2, 1)$ סימון פורביניוס יהיה: $(4,1|4,2)$

בחלוקה$\lambda = (7^2, 5^2)$ סימון פורביניוס יהיה: $(6,5,2,1|3,2,1,0)$

בהגדרה כללית: נסמן $\begin{matrix} \alpha_i = \lambda_i - i \\ \beta_i = \lambda'_i - i \end{matrix}$ כאשר $1 \le i \le k$.

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_k \ge 0$$
$$\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_k \ge 0$$

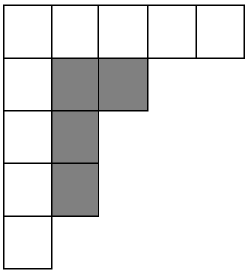
סימון פורביניוס של λ יהיה: $\lambda = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k | \beta_1, \ldots, \beta_k)$

ושל 'λ יהיה $\lambda' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k | \beta_1, \ldots, \beta_k)' = (\beta_1, \ldots, \beta_k | \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$

נגדיר פונקציה: $h(\lambda)=h((\alpha_1,...,\alpha_k|\beta_1,...,\beta_k))=(\alpha_1+\beta_1+1,...,\alpha_k+\beta_k+1)$

דוגמא: בחלוקה $\lambda=(5,3,2^2,1)$ $h(5,3,2^2,1)=h((4,2|4,1))=(9,4)$.

פונקצית h (hooks) - נותנת לנו את האורכים של ה'ווים' בדיאגרמת יונג. בדוגמא הקודמת יש לנו וו אחד באורך 9 (צבע לבן) ווו אחד באורך 4 (צבע אפור).



הגדרות:

$P(n)$ - קבוצת כל החלוקות השונות של n

$SP(n)\subset P(n)$ - קבוצת החלוקות של n בעלות חלקים אי זוגיים בלבד וללא חזרות.

דוגמא: $P(4)=(4),(3,1),(2,2),(2,1,1),(1,1,1,1)$, $SP(4)=(3,1)$

$P_{sym}(n)=\{\lambda\vdash n \mid \lambda=\lambda'\}$ – החלוקות של n שצמודות לעצמן.

פונקצית h מוגדרת כמו בפרק הקודם:

$h:P(n)\to P(n)$ $h(\lambda)=h((\alpha_1,...,\alpha_k|\beta_1,...,\beta_k))=(\alpha_1+\beta_1+1,...,\alpha_k+\beta_k+1)$

נשים לב שאם $\lambda\in P_{sym}(n)$ נוכל לכתוב את λ בסימון פורביניוס כך: $\lambda=(a_1,...,a_k \mid a_1,...,a_k)$

וכאשר נשנה את תחום הפונקציה h ל $P_{sym}(n)$ ישתנה גם הטווח בהתאם: $h:P_{sym}(n)\to SP(n)$

ונקבל: $h(\lambda)=h((a_1,...,a_k|a_1,...,a_k))=(2a_1+1,...,2a_k+1)$ וזוהי פונקציה חח"ע ועל.

מכיוון שפונקצית h חח"ע ועל הרי ש: $|P_{sym}(n)|=|SP(n)|$.

נחזור לדוגמא עבור n = 4 :

$SP(4)=(3,1)$.

$P(4)\setminus SP(4)=(4),(2,2),(2,1,1),(1,1,1,1)$. נשים לב שהיא מכילה מספר זוגי של חלוקות ובדיוק חצי מחלוקות אלו הן בעלות מס' מחזורים $l(\lambda)$ זוגי.

<u>טענה 6.1</u>: העוצמה של הקבוצה $\left|P(n)\setminus SP(n)\right|$ תהיה תמיד זוגית.

<u>הוכחה</u>: בעזרת פונקצית h חח"ע הראינו כי $\left|SP(n)\right| = \left|P_{sym}(n)\right|$. לכן נוכל לומר כי מתקיים גם:
$\left|P(n)\setminus SP(n)\right| = \left|P(n)\setminus P_{sym}(n)\right|$.

אך הקבוצה - $P(n)\setminus P_{sym}(n)$ בנויה על זוגות של חלוקות { λ' , λ } , (כי אחרת היה מתקיים λ= λ'
ולא היה שייך לקבוצה). ומכאן $\left|P(n)\setminus P_{sym}(n)\right|$ זוגי ולכן גם $\left|P(n)\setminus SP(n)\right|$ זוגי. ■

פרק 5 - חבורת הקומוטטורים

<u>הגדרה</u>: קומטטור בחבורה S_n הוא איבר מהצורה $\pi\sigma\pi^{-1}\sigma^{-1}$. S'_n היא החבורה הנוצרת ע"י כל הקומוטטורים ב S_n.

תכונה של פונקצית sgn: $\text{sgn}(\pi)=\text{sgn}(\pi^{-1})$. התכונה מתקיימת מכיוון שלשתי תמורות הפכיות יש אותו מבנה מחזורים ולכן לפי טענה 1.8 הsgn שלהם זהה.

מתכונה זו נקבל שכל הקומטטורים ב S_n הם איברים זוגיים כלומר נמצאים בחבורה A_n.

כלומר, אם S'_n היא חבורת הקומטטורים של S_n אזי: $S'_n \subseteq A_n$.

נרצה להראות גם כי $S'_n \supseteq A_n$. (ומכאן נקבל את זהות הקבוצות).

נוכיח כי כל תמורה זוגית היא מכפלה של איברים מהצורה $\pi\sigma\pi^{-1}\sigma^{-1}$, כלומר קומוטטורים.

נסתכל על מחזור באורך אי זוגי (ולכן מייצג תמורה זוגית) : (2i+1 , ... , 2 , 1).

ניתן לכתוב מחזור זה כמכפלה של שני המחזורים הבאים:

(2i+1 , ... , i+2 , i+1) (i+1 , ... , 2 , 1) = (2i+1 , ... , 2 , 1) (מכפלה של שני מחזורים באותו אורך i+1)

נסמן את המחזור - (i+1 , ... , 2 , 1) = π. מכאן נקבל כי (i+1 , i , ... , 2 , 1) =π^{-1}

(2i+1 , ... , i+2 , i+1) = $\sigma\pi^{-1}\sigma^{-1}$ כאשר $\sigma=\begin{pmatrix} i+1 & i & . & . & 1 & \ldots \\ i+1 & i+2 & . & . & 2i+1 & \ldots \end{pmatrix}$

מכאן נובע ש $\pi\sigma\pi^{-1}\sigma^{-1}$ = (2i+1 , ... , 2 , 1)

זהו המקרה של מחזור כללי באורך אי זוגי.

כמו כן לכל $i \le j$:

(2i+2j , ... , 2i+1 , 2i) (2i+1 , 2i , ... , 2 , 1) = (2i+2j , ... , 2i+1) (2i , ... , 2 , 1)

למשל: (8 , 7 , 6 , 5 , 4) (5 , 4 , 3 , 2 , 1) = (8 , 7 , 6 , 5) (4 , 3 , 2 , 1)

כלומר, אי זוגי + אי זוגי = זוגי + זוגי = זוגי

ניתן לראות שהזהות נכונה כי מתבצעות ההעתקות הבאות בצד ימין:

$$1 \to 2 \to \cdots \to 2i$$
$$2i+1 \to 2i+2 \to \cdots \to 2i+2j-1$$
$$2i+2j \to 2i+1$$

בזאת הראינו כי כל תמורה זוגית היא קומטטור ב S_n לכן $S'_n \supseteq A_n$

מכאן נגיע למסקנה <u>שחבורת הקומטטורים של S_n היא A_n – חבורת התמורות הזוגיות.</u>

פרק 6 - מחלקות הצמידות של S_nו- A_n

כעת נתייחס למחלקות הצמידות $C_\lambda \subseteq S_n$.

אם $\sigma \in C_\lambda$ וכן $\operatorname{sgn}(\sigma)=1$ אזי כל התמורות במחלקה זו יהיו עם אותו סימן, כלומר זוגיות, ולכן $C_\lambda \subseteq A_n$. אם לא, כלומר $\operatorname{sgn}(\sigma)=-1$, אזי $C_\lambda \subseteq S_n \setminus A_n$.

סימונים: $\lambda(\pi)$ - חלוקה λ לפי אורך המחזורים של התמורה π.

$C(\pi)$ - מספר המחזורים השונים בתמורה π. (ראה טענה 2.7)

$l(\lambda)$ - בחלוקה λ, מספר הקורדינטות השונות מאפס.

מתקיים כי - $C(\pi)=l(\lambda)$.

כמו כן לפי טענה 2.7 $\operatorname{sgn}(\pi)=(-1)^{n-l(\lambda)}$. לכן כאשר $n-l(\lambda)$ הוא זוגי אזי $C_\lambda \subseteq A_n$ וכאשר $n-l(\lambda)$ הוא אי זוגי אזי $C_\lambda \subseteq S_n \setminus A_n$.

נרצה לבדוק איך ומתי מחלקת הצמידות C_λ(ביחס ל- S_n) מתפרקת למחלקות צמידות ביחס ל- A_n.

נחזור שוב לדוגמא עבור n = 4 :

עבור n זוגי $n-l(\lambda)$ - יהיה זוגי כאשר $l(\lambda)$ זוגי. לכן $C_{(3,1)}, C_{(2,2)}, C_{(1,1,1,1)} \subset A_4$, וכן $C_{(4)}, C_{(2,1,1)} \subset S_4 \setminus A_4$

נסתכל על רשימת האיברים ב A_4:

$$A_4 = \left\{ \begin{array}{l} 1, \\ (1\ \ 2)(3\ \ 4),(1\ \ 3)(2\ \ 4),(1\ \ 4)(2\ \ 3), \\ (1\ \ 2\ \ 3),(1\ \ 4\ \ 2),(1\ \ 3\ \ 4),(2\ \ 4\ \ 3), \\ (1\ \ 3\ \ 2),(1\ \ 2\ \ 4),(1\ \ 4\ \ 3),(2\ \ 3\ \ 4) \end{array} \right\}$$

נשים לב כי האיברים בשורה השנייה הם הפכיים של עצמם.

כמו כן כל איבר בשורה הרביעית הוא הופכי לאיבר שמעליו בשורה השלישית.

נבדוק כיצד מחלקות הצמידות של S_4 מתפרקות למחלקות צמידות של A_4:

1. $C_{(1^4)}=\{1\}$. (איבר היחידה צמוד לעצמו ע"י כל איבר $\sigma I \sigma^{-1}=I$)

2. $C_{(2,2)}=\{(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}$

מכיוון שניתן לראות כי:

$$(1,2,3)(1,2)(3,4)(1,3,2)=(1,4)(2,3)$$
$$(1,3,2)(1,2)(3,4)(1,2,3)=(1,3)(2,4)$$

כלומר $C_{(2,2)}$ היא גם מחלקת צמידות של A_4.

נסתכל על מחלקת הצמידות ב- S_4 : $C_{(3,1)}$

$$C_{(3,1)}=\{(1,2,3),(1,3,2),(1,2,4),(1,4,2),(1,3,4),(1,4,3),(2,3,4),(2,4,3)\}$$

ניתן לפצל מחלקת צמידות זו לשתי מחלקות צמידות ב A_4 ע"י הצמדה באיברים ממחלקה $C_{(2,2)}$:

$$(1,2)(3,4)(1,2,3)(1,2)(3,4)=(1,4,2) \qquad (1,2)(3,4)(1,3,2)(1,2)(3,4)=(1,2,4)$$
$$(1,3)(2,4)(1,2,3)(1,3)(2,4)=(1,3,4) \qquad (1,3)(2,4)(1,3,2)(1,3)(2,4)=(1,4,3)$$
$$(1,4)(2,3)(1,2,3)(1,4)(2,3)=(2,4,3) \qquad (1,4)(2,3)(1,3,2)(1,4)(2,3)=(2,3,4)$$

<u>טענה 6.1</u>:

לכל $\rho\in A_4$, $\rho(1\quad 2\quad 3)\rho^{-1}\neq(1\quad 3\quad 2)$.

<u>הוכחה</u>: נניח שישנה $\rho\in A_4$ כך ש: $(1\quad 3\quad 2)=\rho(1\quad 2\quad 3)\rho^{-1}=(\rho(1)\quad\rho(2)\quad\rho(3))$.

לכן $\rho(4)=4 \Leftarrow \rho\in S_3 \Leftarrow \rho\in A_3$. אבל $A_3=\{1,(1\quad 2\quad 3),(1\quad 3\quad 2)\}$ וכולם מתחלפים עם $(1\quad 2\quad 3)$ (ראינו קודם), לכן: $\rho(1\quad 2\quad 3)\rho^{-1}=\rho\rho^{-1}(1\quad 2\quad 3)=(1\quad 2\quad 3)\neq(1\quad 3\quad 2)$, סתירה.

נסמן:

1. $C^{(+)}_{(3,1)}=\{(1,2,3),(1,4,2),(1,3,4),(2,4,3)\}$
2. $C^{(-)}_{(3,1)}=\{(1,3,2),(1,2,4),(1,4,3),(2,3,4)\}$

כך ש: $C_{(3,1)}=C^{(+)}_{(3,1)}\cup C^{(-)}_{(3,1)}$.

קיבלנו שמחלקת הצמידות $C_{(3,1)}$ של S_4 מתפרקת לשתי מחלקות צמידות של A_4 , $C_{(3,1)}=C^{(+)}_{(3,1)}\cup C^{(-)}_{(3,1)}$. יתר על כן $(1,2,3)$ נמצאת שייכת ל - $C^{(+)}_{(3,1)}$, $(1,2,3)^{-1}=(1,3,2)$ שייכת ל - $C^{(-)}_{(3,1)}$. בפרט $(1,2,3)$ אינה צמודה ב A_4 ל $(1,2,3)^{-1}$

ובסה"כ קיבלנו 4 מחלקות צמידות ב A_4 : $C_{(1^4)}$, $C_{(2,2)}$, $C^{(-)}_{(3,1)}$, $C^{(+)}_{(3,1)}$

<u>משפט 6.2</u>:

יהי $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k)$ חלוקה של n עם $n-l(\lambda)$ זוגי.

1. אם כל המספרים λ_i הם אי זוגיים ושונים אזי C_λ מתפצל לשתי מחלקות צמידות ב- A_n בגודל שווה: $C_\lambda=C_\lambda^{(+)}\cup C_\lambda^{(-)}$ כך ש: $C_\lambda^{(-)}=\eta C_\lambda^{(+)}\eta^{-1}$, $\eta\in S_n\setminus A_n$. ולכן גם: $\left|C_\lambda^{(+)}\right|=\left|C_\lambda^{(-)}\right|=\frac{|C_\lambda|}{2}$.
2. אחרת, C_λ הוא מחלקת צמידות יחידה ב- A_n.

על מנת להוכיח את המשפט נעזר בשתי למות.

<u>למה 6.3:</u>

תהי G חבורה סופית עם שתי תתי חבורות $H,K\subseteq G$ אזי - $\frac{|G|}{|K|}\le\frac{|H|}{|H\cap K|}$.

<u>הוכחה</u>: נראה כי הקוסטים של $H\cap K$ ב- H מוכלים בקוסטים של K ב- G.

יהיו $h_1(H\cap K),\dots,h_r(H\cap K)$ ונוכיח כי גם $h_1K,\dots,h_rK$ שונים.

אבל אם - $h_iK=h_jK$ אז $h_j=h_ik_{ij}$ כך ש- $k_{ij}\in H\cap K$ ולכן $h_i(H\cap K)=h_j(H\cap K)$ סתירה.■

<u>משפט עזר 6.4:</u>

תהי S חבורה סופית עם תת חבורה $A\subseteq S$ מאינדקס 2, אזי - A נורמלית.

<u>הוכחה:</u> $A\subseteq S$ תת חבורה מאינדקס 2 ולכן מחלקת את S לשתי מחלקות שונות: A ו - sA, כאשר $s\in S\setminus A$ ולכן $sA=S\setminus A$. אבל מחלקה ימנית As לא יכולה להיות שווה ל- A ולכן $sA=As$, כלומר נורמלית. ■

<u>למה 6.5:</u>

תהי S חבורה סופית עם תת חבורה $A\subseteq S$ מאינדקס 2 ולכן נורמלית. יהי $x\in A$ ויהי $C_S(x)$ מחלקת הצמידות של x ב- S. לכן $C_S(x)\subseteq A$. יהי $C_A(x)$ - מחלקת הצמידות ב- A. מכאן יכולות להיות שתי אפשרויות: $C_S(x)=C_A(x)$, או $C_S(x)$ מתפצלת לכמה מחלקות צמידות ב- A. יהי $Z_S(x)$ - המרכז של x ב- S.

1. $C_S(x)$ מתפצלת אם ורק אם $Z_S(x)=Z_A(x)$.
2. במקרה של פיצול, $C_S(x)=C_A(x)\cup\left[g(C_A(x))g^{-1}\right]$, לכל $g\in S\setminus A$.

<u>הוכחה:</u>

1. נציב בלמה 6.3: $H = Z_S(x) \quad G = S ,\ K = A$., לפי הגדרה מתקיים:
$Z_A(x) = Z_S(x) \cap A$. ומכיוון ש- A תת חבורה מאינדקס 2 נקבל $\frac{|S|}{|A|} = 2$. ומכאן לפי
למה 6.3 נקבל $P := \frac{|Z_S(x)|}{|Z_A(x)|} \le \frac{|S|}{|A|} = 2$. כמובן שהמספר P הוא טבעי לכן P יכול להיות 1 או 2.

<u>P = 1</u>: נקבל כי $P := \frac{|Z_S(x)|}{|Z_A(x)|} = 1$ ולכן $Z_A(x) = Z_S(x)$. כעת נשתמש במשפט 3.5

$$|C_A(x)| = \frac{|A|}{|Z_A(x)|} = \frac{|A|}{|Z_S(x)|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|S|}{|Z_S(x)|} = \frac{1}{2} \cdot |C_S(x)|.$$

כלומר קיבלנו את המקרה ש- $C_S(x)$ מתפצל לשתי מחלקות צמידות ב- A.

<u>P = 2</u>: כעת נקבל כי $2|Z_A(x)| = |Z_S(x)|$. שוב נשתמש במשפט 3.5

$$|C_A(x)| = \frac{|A|}{|Z_A(x)|} = \frac{2|A|}{|Z_S(x)|} = \frac{|S|}{|Z_S(x)|} = |C_S(x)|.$$

לכן $C_S(x) = C_A(x)$ וקיבלנו את המקרה ש- $C_S(x)$ אינו מתפצל.

2. תהי $C \subseteq A$ מחלקת צמידות ב- A ויהי $y \in S \setminus A$. אם $C = yCy^{-1}$ אז C מחלקת צמידות גם של S, כי ניתן לכתוב את S כך: $S = A \cup yA$.
מדובר בסעיף זה על מקרה של פיצול לכן לפי הוכחת סעיף 1, P = 1 וראינו כי $C_S(x) \ne C_A(x)$, כלומר $C_A(x)$ אינה מחלקת שקילות גם של S. לכן $C_A(x)$ ו- $y(C_A(x))y^{-1}$ אלו שתי מחלקות צמידות שונות וזרות.
מכיוון שלפי סעיף 1 עבור P = 1 קיבלנו כי $2|C_A(x)| = |C_S(x)|$ הרי ש- $C_S(x) = C_A(x) \cup [y(C_A(x))y^{-1}]$. ■

אם נציב $S = S_n ,\ A = A_n$ בלמה 6.5 נקבל את המסקנה הבאה:

<u>מסקנה 6.6</u>:

תהי $\sigma \in A_n$ עם $Z_{S_n}(\sigma)$ - המרכז ב- S_n, והחלוקה המתאימה $\lambda = \lambda(\sigma)$.
$C_\lambda = C_{S_n}(\sigma)$ מתפצלת אם ורק אם $Z_{S_n}(\sigma)$ אינו מכיל אף איבר אי זוגי. (כלומר $Z_{S_n}(\sigma) = Z_{A_n}(\sigma)$) לפי סעיף 1 בלמה 6.5. במקרה זה, $C_\lambda = C_\lambda^{(+)} \cup C_\lambda^{(-)}$ כך ש:
$C_\lambda^{(-)} = \eta C_\lambda^{(+)} \eta^{-1} ,\ \eta \in S_n \setminus A_n$. ולכן גם: $\left|C_\lambda^{(+)}\right| = \left|C_\lambda^{(-)}\right| = \frac{|C_\lambda|}{2}$.

למעשה מסקנה זו זהה כמעט למשפט 6.2 שרצינו להוכיח.

נותר לנו להוכיח כי בתנאים אלו מתקיימת גם הטענה הבאה:

<u>טענה 6.7:</u>

$Z_{S_n}(\sigma)$ אינו מכיל אף איבר אי זוגי, אם ורק אם כל המספרים λ_i שונים ואי זוגיים. כלומר כאשר $C_{S_n}(\sigma)$ מתפצלת.

<u>הוכחה</u>: במסקנה הקודמת הראנו כי $C_\lambda = C_{S_n}(\sigma)$ מתפצל אם ורק אם $Z_{S_n}(\sigma)$ אינו מכיל אף איבר אי זוגי. כלומר $Z_{S_n}(\sigma) = Z_{A_n}(\sigma)$. אך אם $Z_{S_n}(\sigma)$ מכיל איבר אי זוגי אזי אנו במקרה ש-$\left|Z_{S_n}(\sigma)\right| = 2\left|Z_{A_n}(\sigma)\right|$.

נוכיח כעת את שני הכיוונים של הטענה

א. נניח ש $Z_{S_n}(\sigma)$ אינו מכיל אף איבר אי זוגי ונראה שכל המספרים λ_i שונים ואי זוגיים. זה שקול להוכיח שאם קיים i כך ש λ_i זוגי או $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ אי זוגי, אזי $Z_{S_n}(\sigma)$ מכיל איבר אי זוגי.
נזכיר כי λ_i אילו האורכים של המחזורים השונים היוצרים את התמורה σ.
נניח שמספר כלשהו λ_i זוגי. לכן נוכל לכתוב את σ כמכפלה $\sigma = \pi\rho$ כך ש ρ הוא מחזור באורך λ_i זוגי ו π הוא מכפלה של שאר המחזורים. נשים לב ש-ρ באורך זוגי לכן מייצג תמורה אי זוגית. מכיוון שאלו מחזורים זרים אזי אין משמעות לסדר הכתיבה של המחזורים, לכן $\rho\pi = \pi\rho$ וגם $\sigma\rho = \rho\sigma$ ולכן $\rho \in Z_{S_n}(\sigma)$, כלומר $Z_{S_n}(\sigma)$ מכיל איבר אי זוגי.
כעת נניח ש- $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ מספר אי זוגי. נסמן $\lambda_i = r$ לכן נוכל לכתוב את σ כמכפלה של מחזורים $\sigma = \pi(a_1,...,a_r)(b_1,...,b_r)$ כאשר π היא מכפלת שאר המחזורים ב- σ, לכן π מתחלף עם $(a_1,...,a_r),(b_1,...,b_r)$. נגדיר את $\rho = (a_1,b_1)\cdots(a_r,b_r)$ לכן לפי משפט 3.2 נוכל לכתוב $\rho\sigma\rho^{-1} = \sigma \Leftarrow \rho\sigma = \sigma\rho$ ומכאן ש $\rho \in Z_{S_n}(\sigma)$. ρ הוא אי זוגי כיוון ש- r הוא אי זוגי (מספר הטרנספוזיציות אי זוגי אזי התמורה אי זוגית).

ב. נניח כי כל המספרים λ_i שונים ואי זוגיים ונוכיח כי $Z_{S_n}(\sigma)$ אינו מכיל אף איבר אי זוגי. תהי $\sigma = c_1 \cdots c_k$ כאשר $c_1,...,c_k$ מחזורים זרים כך ש λ_i - האורך של המחזור c_i. לפי הנחות המשפט λ_i שונים כלומר המחזורים באורכים שונים לכן לפי משפט 3.7 $Z_{S_n}(\sigma)$ נוצר ע"י $c_1 \cdots c_k$ שהם פרמוטציות זוגיות ולכן כל האיברים ב $Z_{S_n}(\sigma)$ הם זוגיים. ■

מסקנה 6.6 ומשפט 6.7 למעשה משלימים לנו את משפט 6.2 במלואו.

סוף הוכחת משפט 6.2. ■

פרק 7- חבורות אמביוולנטיות (ambivalent).

<u>הגדרה</u>: חבורה בה כל איבר צמוד להופכי שלו נקראת חבורה אמביוולנטית.

S_n - היא חבורה אמביוולנטית. הסבר: ראינו שכל שני איברים שיש להם את אותו מבנה מחזורי הם צמודים. ואיבר וההופכי שלו הם בעלי אותו מבנה מחזורים ולכן צמודים ב- S_n.

A_0 - היא הקבוצה הריקה ולכן אמביוולנטית.

$A_1 = \{1\}$ - מכילה את איבר היחידה בלבד ולכן וודאי אמביוולנטית.

$A_2 = \{1\}$ - מכילה את איבר היחידה בלבד ולכן וודאי אמביוולנטית.

A_3 – היא חבורה אבלית ולכן הצמדה למעשה אינה עושה שום דבר. $\rho\sigma\rho^{-1} = \rho\rho^{-1}\sigma = \sigma$.

<u>לכן כל איבר צמוד לעצמו ולא יכול להיות צמוד להופכי שלו. מכאן שאינה אמביוולנטית.</u>

<u>ננסה לענות על השאלה עבור איזה ערך של n A_n אמביוולנטית ?</u>

בהינתן מחזור $(1,2,...,2m+1)$ באורך $2m+1$ אי זוגי, נייצר ממנו את המכפלה של m טרנספוזיציות $(2,2m+1)(3,2m)(4,2m-1)\cdots(m+1,m+2)$.

דוגמא: למחזור $(1,2,...,7)$ נייצר את $(2,7)(3,6)(4,5)$.

<u>טענה 7.1:</u>

בהינתן מחזור $\pi = (i_1,i_2,...,i_r)$ באורך r אי זוגי, נייצר ממנו מכפלה של טרנספוזיציות $\xi = (i_2,i_r)(i_3,i_{r-1})\cdots$. כיוון ש ξ מכפלה של טרנספוזיציות זרות אזי $\xi = \xi^{-1}$).

מתקיים: $\xi\pi\xi^{-1} = \xi\pi\xi = \pi^{-1}$

<u>הוכחה:</u>

$\pi^{-1} = (i_1,i_2,...,i_r)^{-1} = (i_1,i_r,i_{r-1},...,i_3;i_2)$, לכן אנו צריכים ש- ξ תבצע את ההעתקות הבאות: $\xi: i_1 \to i_1, i_2 \to i_r, i_3 \to i_{r-1},...$. ואלו למעשה בדיוק הטרנספוזיציות שמרכיבות את ξ.

■

נרחיב את הטענה עבור תמורה המורכבת ממספר מחזורים באורך אי זוגי:

תהי $\pi = (i_1,i_2,...,i_r)\cdots(j_1,j_2,...,j_s)$ מכפלה של מחזורים באורך אי זוגי. ניצור את $\xi = ((i_2,i_r)(i_3,i_{r-1})\cdots)\cdots((j_2,j_s)(j_3,j_{s-1})\cdots)$, אזי $\xi\pi\xi^{-1} = \pi^{-1}$.

$\xi = \xi_\pi$ נקרא המצמיד הסטנדרטי של π.

<u>הערות:</u>

1. כאשר $\pi=(1,2,...,2m+1)$ אז ξ הוא מכפלה של m טרנספוזיציות.
ξ הוא אי זוגי אם ורק אם m הוא אי זוגי (ראו משפט 2.2),
כלומר $2m+1=4k+3\equiv 3(\bmod 4)$.
כעת $\pi=(i_1,i_2,...,i_r)\cdots(j_1,j_2,...,j_s)$ מכפלה של מחזורים זרים באורכים אי זוגיים עם מצמיד סטנדרטי ξ. אזי ξ היא תמורה זוגית אם ורק אם מספר המחזורים בתמורה π שאורכם שקול ל- 3 (מודלו 4) , הוא זוגי.
2. אם ξ הוא זוגי עבור כל איבר במחלקה שמתפצלת, אזי - A_n אמביוולנטית.

ניישם את משפט 6.2 עבור A_n. כאשר $n\in\{0,1,2,5,6,10,14\}$ אזי מחלקות הצמידות שמתפצלות מתאימות לחלוקות:

(5)├ 5 , (5,1)├ 6 , (7,3)├ 10 , (9,1)├ 10 , (13,1)├ 14 , (11,3)├ 14 , (9,5)├ 14

בכל החלוקות הגורמים אי זוגיים ושונים.

כמו כן מספר הגורמים בחלוקה ששקולים ל- 3 (מודלו 4) הוא זוגי (0 או 2) כפי שניתן לראות בטבלה הבאה:

(9,5)	(11,3)	(13,1)	(9,1)	(7,3)	(5,1)	(5)	λ - החלוקה
0	2	0	0	2	0	0	$\#(\lambda_i\equiv 3(\bmod 4))$

מכאן נסיק כי החבורות הבאות הן אמביוולנטיות - $\{A_n \mid n\in\{0,1,2,5,6,10,14\}\}$

במשפט 7.3 נוכיח שאלו החבורות האמביוולנטיות היחידות.

נשים לב כי עבור כל $\pi\in A_n$, אם $C_{S_n}(\pi)$ איננה מתפצלת אזי A_n אמביוולנטית. הראינו בלמה 6.5 שכאשר $C_{S_n}(\pi)$ מתפצלת אזי $Z_{S_n}(\pi)=Z_{A_n}(\pi)$. לכן נותר לבדוק את המחלקות המתפצלות.

<u>למה 7.2:</u>

יהי $\pi\in A_n$ עם המצמיד הסטנדרטי $\xi=\xi_\pi$. $C_{S_n}(\pi)$ מתפצלת. אם ξ הוא אי זוגי אז מחלקת הצמידות $C_{S_n}(\pi)$ איננה אמביוולנטית ולכן גם A_n אינה אמביוולנטית.

<u>הוכחה:</u>

נניח בשלילה כי A_n אמביוולנטית, כלומר, קיים $\sigma\in A_n$ כך ש - $\sigma\pi\sigma^{-1}=\pi^{-1}$. מכיוון שמתקיים $\xi\pi\xi^{-1}=\pi^{-1}$ נקבל $\pi=\sigma^{-1}\pi^{-1}\sigma=\sigma^{-1}\xi\pi\xi^{-1}\sigma=(\sigma^{-1}\xi)\pi(\sigma^{-1}\xi)^{-1}$ ולכן $\sigma^{-1}\xi\in Z_{S_n}(\pi)$.

אבל $\sigma^{-1}\xi \in S_n \setminus A_n$ (מכיוון ש- $\sigma \in A_n$ אך ξ הוא אי זוגי), לכן $\sigma^{-1}\xi \notin Z_{A_n}(\pi)$ וקיבלנו כי $Z_{S_n}(\pi) \neq Z_{A_n}(\pi)$ בסתירה לכך ש $C_{S_n}(\pi)$ מתפצלת (ראה טענה 6.7)

■

הוכחנו משפט:

נתון n , נניח שקיימת חלוקה $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ המקיימת:

1. כל המספרים λ_i הם אי זוגיים ושונים זה מזה.
2. מספר ה- λ_i המקיים $\lambda_i \equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$ הוא אי זוגי.

אזי A_n אינה אמביוולנטית.

<u>משפט 7.3:</u>

יהי $T = \{0,1,2,5,6,10,14\}$. עבור כל $n \notin T$, A_n אינה אמביוולנטית.

כלומר החבורות הזוגיות <u>היחידות</u> שאמביוולנטיות הן $\{A_n \mid n \in \{0,1,2,5,6,10,14\}\}$.

<u>הוכחה:</u>

נראה שכאשר $n \notin T$ אזי קיימת חלוקה n ├ α עם גורמים אי זוגיים זרים, אך מספר הגורמים בחלוקה α_i כך ש - $\alpha_i \equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$, הוא <u>אי זוגי</u>.

נבטא את n לפי מודלו 4 כאחת מהאפשרויות הבאות:
$\mathrm{n} = 4\mathrm{k}$, $\mathrm{n} = 4\mathrm{k}+1$, $\mathrm{n} = 4\mathrm{k}+2$, $\mathrm{n} = 4\mathrm{k}+3$.

<u>$\mathrm{n} = 4\mathrm{k}$</u>:

עבור $k = 0$ נקבל כי $n = 0 \in T$.

לכן נבדוק עבור $k \geq 1$. ניקח את החלוקה הבאה: $\alpha = (4k-1,1)$. אכן $4k-1,1$ שונים ואי זוגיים אך $4k-1 \equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$, $1 \neq 3(\mathrm{mod}\, 4)$. כלומר מספר אי זוגי של גורמים ששקולים ל- 3 מודלו 4.

<u>$\mathrm{n} = 4\mathrm{k}+1$</u>:

עבור $k = 0$ נקבל כי $n = 1 \in T$. עבור $k = 1$ נקבל כי $n = 5 \in T$.

לכן נבדוק עבור $k \geq 2$. ניקח את החלוקה הבאה: $\alpha = (4k-3,3,1)$. אכן $4k-3,3,1$ שונים ואי זוגיים אולם רק $3 \equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$ ושאר הגורמים אינם. כלומר מספר אי זוגי של גורמים ששקולים ל- 3 מודלו 4.

<u>$\mathrm{n} = 4\mathrm{k}+2$</u>:

עבור $k=0$ נקבל כי $n=2\in T$. עבור $k=1$ נקבל כי $n=6\in T$. עבור $k=2$ נקבל כי $n=10\in T$. עבור $k=3$ נקבל כי $n=14\in T$.

לכן נבדוק עבור $k\geq 4$. ניקח את החלוקה הבאה: $\alpha=(4(k-1)-3,5,3,1)$. אמנם כל הגורמים שונים ואי זוגיים אך רק $3\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ ושאר הגורמים אינם. כלומר מספר אי זוגי של גורמים ששקולים ל- 3 מודלו 4.

<u>$n=4k+3$</u>:

עבור $k\geq 0$. ניקח את החלוקה הבאה: $\alpha=(4k+3)$. גורם אחד בלבד שקול ל- 3 מודלו 4. כלומר מספר אי זוגי של גורמים ששקולים ל- 3 מודלו 4.

■

ביבליוגרפיה

G. James and A. Kerber (1981), The Representation Theory of the Symmetric Group. Encyclopedia of Mathematics, vol. 16