מכון ויצמן למדע
מדרשת פיינברג – המחלקה להוראת המדעים
יולי 2012

טנזורים ויישומיהם בהוראה

Tensors: Applications in Teaching

מנחה : פרופ' יקר קנאי
מגיש : בועז זילברמן
ת.ז : 04053446-3

תוכן עניינים

1. תקציר

במסגרת לימודי הפיזיקה בתיכון, התלמידים פוגשים בנוסחאות המתארות קשרים לינאריים בין גדלים, כגון "חוק הוק", המתאר קשר בין הכח שפועל על קפיץ לבין המתיחה שלו, או "חוק גאוס", המתאר קשר בין השטף החשמלי דרך מעטפת סגורה לבין המטען החשמלי הכלוא במעטפת. נוסחאות אלו מתאימות לרוב למקרים פשוטים. אם נבקש להכליל את הנוסחאות למקרים מורכבים יותר, כגון התאמת חוק הוק למודל רב-מימדי, הן תפסקנה לתאר קשר בין מספרים (פונקציה לינארית) ותתחלנה לתאר קשר בין מערכי מספרים כגון מטריצות (טרנספורמציה לינארית).

בפרט, הגודל המקשר בין מערכי המספרים בנוסחאות אלו לא יהיה מספר אלא סוג חדש של קבוע. זהו מערך מספרים (סקלר / וקטור / מטריצה וכדומה) אשר שומר על תכונותיו המהותיות תחת החלפת קואורדינטות. ישנם גדלים רבים בטבע בעלי תכונה זו. טמפרטורה היא סקלר כזה, אך תדירות איננה (ולראיה אפקט דופלר). העתק הוא וקטור כזה, אך וקטור המיקום (ביחס לראשית הצירים) איננו. האלסטיות היא מטריצה כזו, אך מטריצת סיבוב איננה.

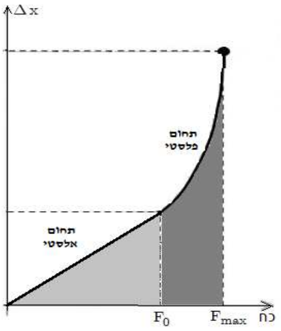
אנו נקרא לגודל כזה **'טנזור'** (בלטינית - גורם מתיחה). השם המקורי ניתן ע"י המילטון, כדי לתאר נורמה של קווטרניון. המשמעות המודרנית, אשר נכנסה לשימוש שוטף בסביבות 1900 ובעיקר לאחר פרסום תורת היחסות (1915), שונה למדי. במהלך המאה ה-20 נמצאו שימושים רבים לטנזורים- הן שימושים פיזיקליים (כמו הופעת טנזור העקמומיות של רימן בתורת היחסות הכללית, או טנזור קיטוב של גבישים) והן שימושים תיאורטיים (למשל האלגוריתם של Strassen לכפל מטריצות).

בדומה לאופן בו נהוג לייצג וקטורים במסגרת האלגברה הלינארית, גם בטנזורים נהוג להתבונן במספר ייצוגים שונים - אלגבריים וגיאומטריים. עבודה זו סוקרת תכונות ופעולות שונות שניתן לבצע על טנזורים בכל אחד מהייצוגים האלו. בנוסף, בעבודה מוצגות דרכים בהן ניתן להציג נושא זה לתלמידי תיכון ולמורים ולקשיים האפשריים אשר עשויים להתעורר.

2. מבוא

2.1 מוטיבציה

משקולת התלויה על קצה קפיץ גורמת לשינוי באורך הקפיץ. הקשר בין הכח F , אשר הקפיץ מפעיל על גוף המחובר לקצהו, לבין ההעתק Δx שעובר קצה הקפיץ, ניתן לתיאור בעזרת "חוק הוק". חוק זה מתאר יחס ישר בין שני הערכים על ידי הנוסחא $F = k\Delta x$, בה k הוא קבוע התלוי בתכונות הקפיץ, ובפרט ביכולתו האלסטית.



חוק הוק משקף מערכת בה הכח (המאמץ) גדל ככל שאורך הקפיץ (המְעָוֺת[1]) גדל (ראה תרשים משמאל). בתחום האלסטי $\left(F \le F_0\right)$ הכח גדל ביחס ישר (ובכיוון הפוך) להעתק של קצה הקפיץ ומשקף מתיחה וכיפוף של קשרים בין אטומים, ללא שבירה שלהם, עד לגבול האלסטי $F_0 = k\Delta x_0$. בתחום הפלסטי $\left(F_0 < F \le F_{\max}\right)$, הגדלה של הכח גורמת לנזק בלתי הפיך לחומר ולעלייה רבה בעִיבּוּר[1]. בקצה התחום הפלסטי ($F_{\max}$) הקפיץ ייקרע.

הכללה של קשר זה, לשם בניית מודל המאמצים בגוף תלת מימדי, דורשת ביצוע מספר שינויים בנוסחא.

ראשית, לא ניתן להסתפק בגודל אחד Δx כדי לתאר את השינוי במרחק בין שתי נקודות בגוף לפני ואחרי הפעלת העומס, אלא יש צורך להתייחס לשינויים במרחק בכל אחד מהצירים x, y, z (מעוות לינארי) וכן לשינויים הזוויתיים בין שני ישרים העוברים דרך אותה נקודה (מעוות גזירה[2]), שכן כל וקטור משנה את כיוונו. באופן זה השינוי בכל רכיב ניתן לתיאור בעזרת מטריצה בגודל 3×3 המסומנת ε - מטריצת רכיבי העיבור ε_{kl} .

שנית, בדומה לשינויים בתיאור המעוות, לא ניתן להסתפק בגודל אחד F כדי לתאר את הכח הפועל על כל נקודה של גוף תלת מימדי, אלא יש צורך להתייחס לשלושה סוגי מאמצים- הכוחות הפועלים במקביל לפני השטח (מאמצי לחיצה וגזירה) והכוחות הפועלים בניצב לפני השטח (מאמץ מתיחה). באופן זה מתקבלת מטריצה בגודל 3×3 המסומנת σ - מטריצת רכיבי המאמץ σ_{ij} (נמדד ביחידות לחץ, כגון פסקל / psi).

שלישית, הקשר בין שתי המטריצות הנ"ל איננו נתון על ידי סקלר k , אלא הינו קשר מורכב יותר, התלוי בסוג החומר ובצורתו. קשר זה ניתן לתיאור בצורה הכללית $\sigma = K\varepsilon$, בה K היא טרנספורמציה לינארית המייצגת את האלסטיות בכל נקודה. בצורה הכללית של נוסחה זו, נוח להסתכל על K כעל **טנזור**[3] C_{ijkl} .

2.2 רקע

שדה סקלרי מאפשר לנו לתאר את הטמפרטורה בכל נקודה בחדר, או את הצפיפות של נוזל בכל נקודה במיכל. שדה וקטורי מאפשר לנו לתאר את הזרם החשמלי בכל נקודה ולנבא לאיזה כיוון ולאיזה מרחק ינוע חלקיק טעון שנמצא באותה נקודה. ככל שגדלה כמות המידע הנדרשת לתיאור הגודל הנמדד בכל נקודה, כך נדרש מודל מורכב יותר לארגון המידע ולביצוע מניפולציות עליו. כך למשל, תיאור של כמות המתח המופעל בכל נקודה של קורת תמיכה בבניין, או של מידת ההולכה החשמלית בכל נקודה בגוף, או של העקמומיות בכל נקודה בחפץ, מחייב שימוש במערך מספרים כגון מטריצות או מערכים רב-מימדיים אחרים.

טנזורים מספקים שפה אחידה לטיפול בכל המצבים המתוארים לעיל ומהווים כלי יעיל וחסכוני לפתרון בעיות פיזיקליות מגוונות, בפרט בתחומים כגון אלסטיות, זרימת נוזלים ותורת היחסות הכללית. החסכוניות מתבטאת

---

[1] מאמץ- Stress; מעוות/ עיבור- Strain
[2] גזירה - Shear
[3] טנזור Tensor- בלטינית: גורם מתיחה (Tendere= למתוח).

הן בסימונים הנהוגים עבור טנזורים מסדרים שונים והן במוסכמות כתיבה (כגון מוסכמות הסכימה של איינשטיין, כמפורט בפרק 'אלגברה טנזורית' להלן). תכונה נוספת של טנזורים, אינווריאנטיות תחת שינוי קואורדינטות, הופכת אותם לטבעיים מאד: חקר של תופעות טבע הופך להיות נוח יותר כאשר הגדלים אינם תלויים בבחירת מערכת הצירים. בפרט, תכונה זו הופכת את הטנזורים לשימושיים מאד בביצוע חישובים מורכבים, הן במימדים גבוהים והן במרחבים לא-אוקלידיים.

המונח 'טנזור' נטבע ב-1846 על ידי ויליאם רואן המילטון[4], אך במשמעות שונה מזו המקובלת כיום. המילטון הגדיר שני פולינומים $\sum_{i=0}^{n} b_i x^i = b_0 + \varpi(x)$, $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + \pi(x)$ כצמודים אם האיבר החופשי בשניהם שווה (כלומר $a_0 = b_0 = p$) וגם וקטורי המקדמים של הפולינומים נגדיים זה לזה (כלומר $\pi = -\varpi$). לאחר מכן, הוא הגדיר את *הטנזור המשותף* של הפולינומים הצמודים בתור $k = \sqrt{(p+\varpi)(p+\pi)} = \sqrt{p^2 - \varpi^2}$. זהו סקלר אי-שלילי $k \in \mathbb{R}$ המייצג גורם מתיחה/ כיווץ, אשר כיום מכונה **נורמה (אורך)** של קווטרניון $\underline{u} \in \mathbb{H}$.

החשבון הטנזורי במשמעותו המוכרת כיום נפוץ בסוף המאה ה-19, עם פרסום החיבור "שיטות ויישומים של חשבון דיפרנציאלי מוחלט" ע"י ריצ'י ולוי-צ'יויטרה[5]. שימוש נרחב יותר במושגים ובסימונים המודרניים החל לאחר שאלברט איינשטיין פרסם את תורת היחסות הכללית, ב-1915.

במהלך המאה ה-20, נמצאו יישומים רבים לחשבון הטנזורי. כך למשל, בתורת האלסטיות הכללית, הן המתיחה והן המאמץ הם העתקות לינאריות (ולא סקלרים. ראה סעיף 'מוטיבציה' לעיל); בתורת הקריסטלוגרפיה נהוג להעזר בטנזורים לשם תיאור הקיטוב של כל נקודה בגביש; הטנזור המטרי מאפשר הגדרת מטריקה ללא תלות במערכת צירים; טנזור העקמומיות של רימן מאפשר תיאור העקמומיות של יריעות רימניות באמצעות השוואה בין הטנזור המטרי על היריעה לבין טנזור מטרי במרחב אוקלידי.

גם במחקר התיאורטי נעשה שימוש בטנזורים. למשל, האלגוריתם של Strassen מאפשר לבצע כפל מטריצות באופן חסכוני יותר, ובכך להקטין את כוח המחשוב ואת זמן החישוב הנדרש להכפלת מטריצות גדולות, מסדר גודל של n^3 פעולות אל קרוב לסדר גודל של n^2 פעולות (כפי שדרוש בחיבור מטריצות). לאלגוריתם זה שימושים יישומיים, כגון בבניית מנועי חיפוש באינטרנט.

בדומה לאופן בו נהוג במסגרת האלגברה הלינארית לייצג וקטורים בגישה אלגברית ובגישה גיאומטרית, נהוג גם לטפל בטנזורים בגישות אלו. בגישה הגיאומטרית, טנזורים מסדר 2 מתוארים בעזרת שני וקטורים והזווית ביניהם (ראה סעיף 3.1 להלן). בגישה האלגברית הקלאסית, טנזורים מתוארים כמערך מספרים (כגון וקטור או מטריצה) אשר שומר על התכונות המהותיות שלו תחת החלפת קואורדינטות (ראה פרק 3 להלן). בגישה האלגברית המודרנית, מערך מספרים זה מוגדר מעל שדה $\mathbb{F}$ בעזרת מרחב וקטורי V מעל השדה ובעזרת V^*, המרחב הדואלי[6] ל- V (ראה סעיף 3.2 להלן).

עבודה זו תתאר מאפיינים ופעולות על טנזורים משלוש נקודות מבט אלו.

---

[4] Hamilton, pp. 3-7

[5] Ricci & Levi-Civitra, 1900

[6] המרחב הדואלי הוא מרחב הפונקציונלים הלינאריים מעל V, כלומר אוסף כל ההעתקות הלינאריות שמקבלות וקטור $v \in V$ ומחזירות סקלר $a \in \mathbb{F}$ (לדוגמא, ב- $\mathbb{F}^n$, הטלה על הקואורדינטה ה- k משמרת חיבור ומשמרת כפל בסקלר, לכן היא פונקציונל לינארי).

3. אלגברה טנזורית

טנזור מתאר מערך מספרים (סקלר/ וקטור/ מטריצה וכדומה) אשר שומר על תכונותיו המהותיות (כגון גודלו) תחת החלפת קואורדינטות.

דוגמאות

טנזור מסדר 0 : סקלר - טמפרטורה היא טנזור מאחר שאינה תלויה במערכת צירים. תדירות איננה טנזור, ולראיה אפקט דופלר - אם נעים לעבר מקור קול, התדירות שלו מתגברת.

טנזור מסדר 1 : וקטור / פונקציונל - וקטור המיקום $\overrightarrow{OP}$ של נקודה P ביחס לראשית איננו טנזור, מאחר שאורכו תלוי במיקום הראשית. וקטור ההעתק בין שתי נקודות P_1, P_2 הוא טנזור: רכיביו אמנם תלויים במיקום הראשית, אך הנקודות P_1, P_2 קבועות ולכן גודל הוקטור קבוע ואינו תלוי במרחק מהראשית.

טנזור מסדר 2 : תבנית בי-לנארית/ העתקה לינארית/ בי-וקטור - טנזור האלסטיות, טנזור המאמצים, הטנזור המטרי וטנזור העקמומיות של רימן הם העתקות לינאריות הניתנות לתיאור בעזרת מטריצה בת m שורות, n עמודות (להלן A_m^n). גם תבנית בילינארית (כגון המכפלה הפנימית) נחשבת כטנזור מסדר 2.

מוסכמות הסכימה של אינשטיין מאפשרות פישוט של ביטויים וכתיבתם ללא סימן הסכימה Σ. העקרון העומד בבסיס המוסכמות הינו- אם אינדקס מופיע בביטוי מסוים יותר מפעם אחת (גם אם מדובר באינדקס עילי ותחתי לסירוגין, ראה פירוט בסעיפים $3.1-3.2$ להלן) אז מקובל להשמיט את סימן הסכימה על אותו אינדקס. בפרט, האינדקס נחשב לאינדקס קשור[7], אשר משמש רק לשם הסכימה וניתן להחליפו באות אחרת בלי לפגוע במשמעות של הביטוי. למשל, הביטוי $a_{ij}b^{jk}$ הוא ייצוג מקוצר של הסכום $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b^{jk}$ והוא שקול לביטוי $a_{im}b^{mk}$ אך לא לביטוי $a_{ik}b^{kk}$. ניתן להשתמש במוסכמות סכימה אלו גם כאשר סוכמים על יותר מאינדקס אחד- כך למשל, הביטוי $a_{ij}b_{jk}c_k$ הוא ייצוג מקוצר של הביטוי $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_k$.

על ידי שימוש במוסכמות הסכימה של איינשטיין, ניתן למשל לתאר באופן פשוט את השינוי ברכיביו של כל אחד מוקטורי הבסיס של מרחב וקטורי נתון. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ויהי $\left(e_1, e_2, ..., e_n\right)$ בסיס של המרחב V. נסמן T_m^n מטריצה המתארת העתקה לינארית של שינוי בסיס. כל אחד מ- m וקטורי השורה $u_1, u_2, ..., u_m$ ייוצג בבסיס החדש על ידי הכלל $\hat{u}_i = \sum_j T_i^{\,j} u_j = T_i^{\,j} u_j$. במילים אחרות, רכיבי וקטורים אלו ניתנים לחישוב ישירות באמצעות מטריצת שינוי הבסיס וגודלם גדל ביחס ישר לאורך וקטורי הבסיס, לכן הם נקראים וקטורים קו-וריאנטיים[8]. לעומת זאת, על מנת לחשב את השינוי בוקטורי העמודה יש לחשב ראשית את המטריצה ההפכית $\left(T^{-1}\right)_j^i$, ואז כל אחד מ- n וקטורי העמודה $v^1, v^2, ..., v^n$ ייוצג לפי הכלל $\hat{v}^i = \left(T^{-1}\right)_j^i v^j$. גודל וקטורים אלו גדל ביחס הפוך לאורך וקטורי הבסיס, לכן הם נקראים וקטורים קונטרה-וריאנטיים.

---

[7] אינדקס קשור – Dummy Index

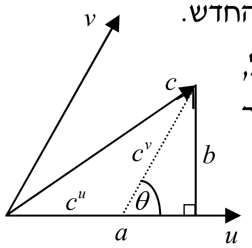
[8] קו-וריאנטי – Covariant; קונטרה-וריאנטי - Contravariant

3.1 טנזורים גיאומטריים ופיזיקליים

3.1.1 מטריקה במערכת צירים משופעת

בהנתן שני וקטורים בת״ל $u,v\in\mathbb{R}^2$ במערכת צירים קרטזית, נסמן $\measuredangle(u,v)=\theta$ ונתבונן בוקטור $c=(a,b)$.

הגדרה: הרכיבים הקונטרה-וריאנטיים של הוקטור c הם המקדמים של c בבסיס $\hat{u},\hat{v}$ (וקטורי יחידה).

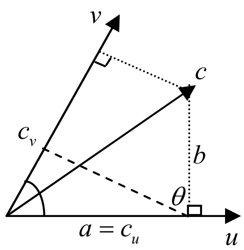


<u>הערה</u>: נסמן $c=c^u\hat{u}+c^v\hat{v}$. גודל המקדמים c^u,c^v גדל ביחס הפוך לאורך וקטורי הבסיס החדש.

<u>דוגמא</u>: וקטורי ההעתק, המהירות, התאוצה, הכח והתנע הם קונטרה-וריאנטיים. למשל, שינוי ביחידות המידה מקילומטרים למטרים מחייב שינוי ביחס הפוך של גודל וקטור המהירות (הכפלה ב- 1000) על מנת לשמר את משמעותו.

חישוב: $c^v=\dfrac{b}{\sin\theta}$, $c^u=a-\dfrac{b}{\tan\theta}$. בכתיב מטריצות נקבל: $\begin{pmatrix}c^u\\c^v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\dfrac{-1}{\tan\theta}\\0&\dfrac{1}{\sin\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

הגדרה: הרכיבים הקו-וריאנטים של הוקטור c הם ההיטל של c על כל אחד מוקטורי הבסיס החדש.



<u>הערה</u>: נסמן $c=c_u\hat{u}+c_v\hat{v}$. גודל מקדמים אלה גדל ביחס ישר לאורך וקטורי הבסיס החדש.

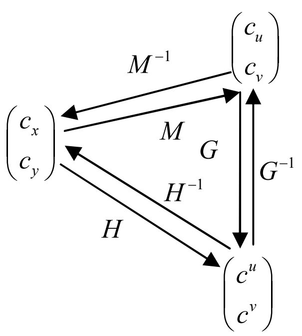
<u>דוגמא</u>: וקטור הגרדיינט ∇f של פונקציה f הוא קו-וריאנטי.

חישוב: $c_v=a\cos\theta+b\sin\theta$, $c_u=a$. בכתיב מטריצות נקבל: $\begin{pmatrix}c_u\\c_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\\cos\theta&\sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

<u>טענה</u>: אורך של וקטור במערכת הצירים החדשה ניתן לחישוב באמצעות הנוסחא: $L_c^2=c_uc^u+c_vc^v$

<u>הוכחה</u>: מתקיים $c_uc^u+c_vc^v=a\left(a-\dfrac{b}{\tan\theta}\right)+\left(a\cos\theta+b\sin\theta\right)\dfrac{b}{\sin\theta}=a^2-\dfrac{ab}{\tan\theta}+\dfrac{ab}{\tan\theta}+b^2=a^2+b^2$, כנדרש.

הגדרה: הטנזור המטרי G מגדיר את המטריקה[9] באופן הבא: $(ds)^2=g^{ij}dx_idx_j$, בה dx_i הוא הדיפרנציאל בכיוון הציר i ו- g_{ij} הם איברי המטריצה G היכולה לשמש כמטריצת מעבר משיעור קו-וריאנטי לקונטרה-וריאנטי.



<u>הסבר</u>: נסמן $G=HM^{-1}$, $M=\begin{pmatrix}1&0\\\cos\theta&\sin\theta\end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix}1&\dfrac{-1}{\tan\theta}\\0&\dfrac{1}{\sin\theta}\end{pmatrix}$ ונחשב:

$$G=HM^{-1}=\begin{pmatrix}1&\dfrac{-1}{\tan\theta}\\0&\dfrac{1}{\sin\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\dfrac{-1}{\tan\theta}&\dfrac{1}{\sin\theta}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sin^2\theta}\begin{pmatrix}1&-\cos\theta\\-\cos\theta&1\end{pmatrix}$$

מטריצה זו נבנתה כך שהיא משמרת מרחקים בעת החלפת קואורדינטות. כעת, כמתואר בתרשים לעיל, הפעלת G על קואורדינטות קו-וריאנטיות תניב $g^{ij}dx_i=dx^j$ ולכן $g^{ij}dx_idx_j=dx^jdx_j$. המכפלה הסקלרית מניבה $dx^jdx_j=dx^1dx_1+dx^2dx_2=(ds)^2$ ולכן סה״כ $(ds)^2=g^{ij}dx_idx_j$.

---

[9] מטריקה – Metric.

<u>דוגמא</u>: חישוב אורך של עקום ℓ במערכת צירים משופעת.

נתבונן בעקום כמייצג תנועה של חלקיק בזמן t ונייצג את מיקום החלקיק בעזרת הפרמטריזציה $\ell = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$. נסמן $\ell_0=$נקודת ההתחלה (זמן t_0), $\ell_n=$נקודת הסיום (זמן t_n) ונחלק את העקום ל- n מקטעים (ℓ_{i-1}, ℓ_i). בכל מקטע, נמתח מיתר $\vec{s}_i = \ell_i - \ell_{i-1}$ המחבר בין נקודות הקצה של המקטע. אורך כל המיתרים ניתן לחישוב בעזרת סכום ריבועי אורכי הוקטורים: $\ell_n^2 = \sum_{k=1}^{n}(\vec{s}_k \cdot \vec{s}_k)$. כאשר $n \to \infty$ נקבל $\vec{ds} = \frac{\vec{d\ell}}{dt}\mathrm{dt} = \vec{v}\mathrm{dt}$ ולכן $ds = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}\mathrm{dt}$. כעת, אורך העקום ניתן לחישוב בעזרת האינטגרל: $\ell_D = \int_0^D ds$. במערכת צירים אוקלידית נעזר בפרמטריזציה הנ"ל ונקבל את הנוסחא[10] $\ell_D = \int_{t_0}^{t}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$. במערכת צירים כללית u,v, נשים לב כי המטריקה משמרת מרחקים ולכן $\vec{v}\cdot\vec{v} = g^{ij}dudv$. נעזר במשתנה t ונקבל $g^{ij}dudv = g^{ij}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}dt^2$, לכן אורך העקום: $\ell_D = \int_0^D ds = \int_{t_0}^{t}\sqrt{g^{ij}\dot{u}\dot{v}}\,dt$

3.1.2 פעולות על טנזורים

<u>מכפלה טנזורית (Tensor Product)</u>

בהנתן שני וקטורים בת"ל $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, נסמן את הזווית ביניהם על ידי $\measuredangle(\vec{u},\vec{v}) = \theta$. מכפלה טנזורית שלהם היא אובייקט גיאומטרי שניתן להזזה במישור תוך שמירה על אורכי הוקטורים, כיוונם והזווית ביניהם. נסמן $\vec{T} = \vec{u}\vec{v}$.

<u>תכונות</u>: א. לא קומוטטיבי למכפלה סקלרית בוקטור שלישי $\vec{w}$, ולכן בפרט $\vec{u}\vec{v} - \vec{v}\vec{u} \neq 0$

ב. טנזור היחידה הוא $\vec{I} = \hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{j}$.

<u>צמצום (Contraction) טנזורים</u>

פעולה המורידה את דרגת הטנזור ומספקת מידע על תכונה נקודתית שלו.

<u>דוגמא</u>: יהי $f(x_1,x_2,x_3)$ שדה וקטורי המוגדר מעל גוף V ונניח כי f רציפה וגזירה חלקית ב- V. בפרט, נניח כי f מתארת את כמות המטענים העוברים ביחידת זמן דרך יחידת שטח המאונכת לוקטור $f(x,y,z)$. מטריצת היעקוביאן $J_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x_j}\hat{x}_i$ מתארת את כל הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה f, ובפרט כל שורה i בה היא הגרדיינט של f לפי המשתנה x_i. אם J היא מטריצה ריבועית אז ניתן לחשב את העקבה שלה. בנוסף, אם נסתכל על J כטנזור J_i^j, חישוב עקבת המטריצה מהווה צמצום של הטנזור ותוצאתו היא: $\mathrm{div}f = \sum\frac{\partial f}{\partial x_i}\hat{x}_i$.

סקלר זה נקרא הדיברגנץ[11] של השדה הוקטורי f ומסומן $\nabla\bullet f$.

<u>הרמת / הורדת אינדקס</u>

מעבר בין קואורדינטות קונטרה-וריאנטיות לקו-וריאנטיות אפשרי על ידי כפל בטנזור המטרי g_{ij}. פעולה זו נקראת גם 'הורדת אינדקס' מכתב עילי לתחתי. המעבר ההפוך אפשרי על ידי כפל בטנזור הקונטרה-וריאנטי g^{ij}.

---

[10] בנוסחא זו, המוכרת מלימודי החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי, הסימון $\dot{x}$ מייצג נגזרת לפי משתנה הזמן, דהיינו $\dot{x} \equiv x'(t)$.

[11] הדיברגנץ (Divergence) מספק מידע לגבי צפיפות המטענים של המקור בסביבה קטנה של כל נקודה בכל יחידת זמן באמצעות השטף של השדה הנוצר על ידי המטענים האלו. משמעות אינטואיטיבית: הוא מתאר את המידה שבה השדה f "מותח", כלומר עד כמה יש הבדל בעוצמת הכח בין שתי נקודות סמוכות.

3.2 טנזורים אלגבריים

3.2.1 מרחבים ומרחבים דואליים

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ויהי V^* המרחב הדואלי[12] ל- V.

<u>הגדרה</u>: העתקה מולטי-לינארית $T:\underbrace{V^*\times V^*\times ...V^*}_{n}\times\underbrace{V\times V\times ...V}_{m}\to\mathbb{R}$ תקרא טנזור (מעורב) מסדר $m+n$ ובפרט $\binom{n}{m}$. נסמן $T^{k_1k_2...k_m}_{i_1i_2...i_n}$ $\left(i_j\in\{1,2,...,n_j\},k_j\in\{1,2,...,m_j\}\right)$. טנזור זה יכיל $\prod_{j=1}^{n}n_j\prod_{j=1}^{m}m_j$ ערכים.

<u>דוגמאות</u>:

א. דטרמיננטה של מטריצה 3×3 היא פונקציונל לינארי $|\bullet|:V^3\to\mathbb{R}$ המהווה טנזור מסדר 3, ובפרט $\binom{0}{3}$.

ב. דיאדה (מטריצה) $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 7 & 4 & 6\end{pmatrix}$ היא טנזור מעורב T^i_j $\left(i\in\{1,2\},j\in\{1,2,3\}\right)$ מסדר 2, ובפרט $\binom{1}{1}$.

ג. כל טנזור מסדר $\binom{1}{0}$ הוא וקטור קונטרה-וריאנטי. כל טנזור מסדר $\binom{0}{1}$ הוא וקטור קו-וריאנטי (דואלי).

3.2.2 פעולות על טנזורים

<u>מכפלה טנזורית (Tensor Product)</u>

יהיו שני טנזורים S,T, ונסמן T^b_a מסדר $a+b=m$, S^d_c מסדר $c+d=n$. **מכפלה טנזורית** שלהם היא הטנזור $\left(\vec{T}\vec{S}\right)^{b+d}_{a+c}=T\otimes S$ (קרי: T טנזור S) מסדר $m+n$. טנזור זה נתון על ידי הכלל:

$T\otimes S\left(v_1,v_2,...,v_{m+n}\right)=T\left(v_1,v_2,...,v_m\right)S\left(v_{m+1},v_{m+2},...,v_{m+n}\right)$, כלומר כל רכיב בטנזור T נכפל בכל רכיב ב- S.

דוגמאות:

1. יהיו $\vec{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k},\vec{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ טנזורים מסדר 1 (ובפרט $\binom{1}{0}$) ב-$\mathbb{R}^3$. **המכפלה הטנזורית** שלהם היא טנזור מסדר 2 (ובפרט $\binom{1}{1}$): $\vec{u}\vec{v}=ax\mathbf{ii}+ay\mathbf{ij}+az\mathbf{ik}+bx\mathbf{ji}+...+cz\mathbf{kk}$, כלומר: $T=\begin{pmatrix}ax & ay & az\\ bx & by & bz\\ cx & cy & cz\end{pmatrix}$

2. יהיו $S=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. המכפלה הטנזורית שלהם היא: $T\otimes S=\begin{pmatrix}1\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} & 2\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\\ 0\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0 & 6\\ 2 & 1 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

<u>הערות</u>:

א. פעולה זו אינה קומוטטיבית, כלומר ככלל מתקיים $T\otimes S\neq S\otimes T$.

ב. המכפלה הטנזורית המתוארת בדוגמא 2 לעיל נקראת גם **מכפלת קרונקר**.[13]

ג. קיימים סוגים רבים של מכפלות טנזוריות, עבור מרחבים וקטוריים, מטריצות, אלגברות ועוד. המשמעות של הפעולה שונה בכל הקשר, אך תמיד מדובר בפעולה בילינארית מוכללת.

[12] ראה הערה 6 בעמוד 4 לעיל.

[13] מכפלת קרונקר - Kronecker Product

צמצום טנזורים (Tensor Contraction)

יהיו $\vec{A}_1, \vec{A}_2, ..., \vec{A}_n$ וקטורים ויהי $\overleftrightarrow{T}^b_a = \vec{A}_1\vec{A}_2...\vec{A}_n$ טנזור מדרגה $2 \le n$. **צמצום** של טנזור הוא טנזור S^{b-1}_{a-1} מדרגה $n-2$ המתקבל על ידי מכפלה פנימית של שני וקטורים $\vec{A}_i \cdot \vec{A}_j$, או באופן שקול- על ידי סכימה על ערכיו של וקטור קונטרה-וריאנטי ועל ערכיו של וקטור קו-וריאנטי.

דוגמאות:

1. צמצום של כל טנזור T^1_1 (טנזור מעורב מסדר 2), כגון הטנזור $\vec{u}\vec{v} = ax\mathbf{ii} + ay\mathbf{ij} + az\mathbf{ik} + bx\mathbf{ji} + ... + cz\mathbf{kk}$, המתואר בדוגמא 1 בסעיף הקודם, הוא טנזור מסדר 0 (סקלר) T^0_0. בפרט, זוהי העקבה של המטריצה T, הניתנת לחישוב על ידי המכפלה הסקלרית $\vec{u} \cdot \vec{v} = ax + by + cz$.

2. בדינמיקת נוזלים נהוג להשתמש בטנזור כח-מהירות $\vec{F}\vec{V}$. הצמצום של טנזור זה הוא סקלר $\dot{E} = \vec{F} \cdot \vec{V}$ המבטא את קצב האנרגיה המשתחררת (כמות אנרגיה בכל יחידת זמן).

<u>הערות</u>:

א. ביצוע המכפלה הסקלרית שקול לצימוד של וקטור $v \in V$ עם קו-וקטור $v^* \in V^*$ (וקטור דואלי).

ב. צמצום טנזורים אינו אסוציאטיבי. בהנתן הטנזור $\overleftrightarrow{T}^b_a = \vec{A}_1\vec{A}_2\vec{A}_3$, נסמן $\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 = \alpha, \quad \vec{A}_2 \cdot \vec{A}_3 = \beta$ סקלרים. מתקיים $\left(\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2\right)\vec{A}_3 = \alpha\vec{A}_3 \ne \beta\vec{A}_1 = \vec{A}_1\left(\vec{A}_2 \cdot \vec{A}_3\right)$.

ג. אם הטנזור הוא מהצורה $\binom{n}{0}$ או מהצורה $\binom{0}{m}$ אז לא קיימת אפשרות לצמצם אותו, למעט במקרה בו מוגדרת מטריקה על המרחב הוקטורי V. ראה הסבר בסעיף הבא.

הרמת / הורדת אינדקס

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. אם V הוא מרחב מכפלה פנימית[14] אז ניתן להמיר טנזור T^b_a מסדר $a+b=m$ לטנזור T^{b+1}_{a-1} או לטנזור T^{b-1}_{a+1}. ההמרה נעשית באמצעות מכפלה טנזורית עם הטנזור המטרי המתאים- טנזור קו-וריאנטי להורדת אינדקס: $g_{ij}T^j = T_i$, או קונטרה-וריאנטי לשם העלאת אינדקס: $g^{ij}T_j = T^i$. באופן זה, ניתן למשל להוריד אינדקס מטנזור מסדר $\binom{n}{0}$ לטנזור מסדר $\binom{n-1}{1}$, ואז לצמצם אותו לטנזור מסדר $\binom{n-2}{0}$.

טרנספורמציה של רכיבי הטנזור

יהי B בסיס של מרחב וקטורי V ויהי D בסיס אחר עבור המרחב. ההעתקה T המתארת את וקטורי הבסיס הישן $B = \left\{e^1, ..., e^n\right\}$ באמצעות וקטורי הבסיס החדש $D = \left\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\right\}$ נקראת העתקה קונטרה-וריאנטית ובה לכל $w \in V$ מתקיים $w = a^i\varepsilon_i$. ההעתקה ההפוכה נקראת העתקה קו-וריאנטית ובה לכל $w \in V$ מתקיים $w = b_ie^i$. באופן כזה, טנזור ישמור על תכונותיו תחת העתקה קונטרה-וריאנטית.

---

[14] מרחב מכפלה פנימית: מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{F} \in \left\{\mathbb{C}, \mathbb{R}\right\}$ בו מוגדרת פונקציה $f: V \times V \to \mathbb{F}$ המקיימת את תכונותיה של מכפלה פנימית (אי שלילית, חיבוריות והומוגניות ברכיב הראשון, הרמיטיות/ סימטריות). במרחב כזה ניתן להכליל הגדרות של מרחקים וזוויות.

4. יישומים בהוראה

4.1 מערך שיעור לדוגמא - רמה תיכונית

מוטיבציה - שאלה מבחינת בגרות

חיברו קפיץ לתקרה ותלו עליו מספר הולך וגדל של משקולות. משקל כל אחת 6 ניוטון. בטבלה הבאה מתואר אורך הקפיץ כתלות במספר המשקולות התלויות עליו :

א. שרטט גרף אורך קפיץ כתלות במספר המשקולות.

ב. שרטט גרף התארכות הקפיץ כתלות בכוח הפועל עליו

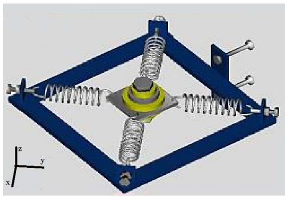
מספר המשקולות	אורך הקפיץ במטרים
0	0.7
1	0.74
2	0.78
3	0.82
4	0.86

חוק הוק - הכללה

כידוע, ניתן לתאר את הקשר בין הכח F אשר הקפיץ מפעיל על גוף המחובר לקצהו לבין Δx - שיעור התארכותו (או התכווצותו) בעזרת "חוק הוק", אשר מתאר יחס ישר בין שני הערכים על ידי הנוסחא $F = k\Delta x$. קשר זה תלוי בתכונות של הקפיץ, ובפרט ביכולת האלסטית שלו, המסומנת k. על פי קשר זה ניתן להסיק כי ככל שנפעיל כוח גדול יותר כך הקפיץ יתארך, עד לנקודה בה הוא ייקרע.

במילים אחרות, נראה כי גוף הנתון במאמץ משנה את אורכו כפונקציה של כמות הכח הפועל ושל תכונות החומר מהן עשוי הגוף. אם נרצה להכליל קשר זה כדי לתאר מודל מאמצים תלת-מימדי (או במימדים גבוהים יותר), נצטרך לבצע מספר שינויים טבעיים בנוסחא.

דוגמא



בבניינים ובכלי רכב נעשה שימוש במערכת לריכוך תנודות על מנת לייצב את המבנה. באיור משמאל מתוארת מערכת ייצוב המורכבת ממשקולת בת 500 ניוטון ומשישה קפיצים המחוברים אליה (בתמונה מוצגים רק ארבעה מתוך ששת הקפיצים, ללא הקפיצים בכיוון הציר z). במצב של שיווי משקל, הקפיצים מאונכים זה לזה. נסמן: $\vec{F} =$ כח (קטן) הפועל על המשקולת, $\vec{d}$ ההעתק שהמשקולת עברה. ברור כי אם $\vec{F}$ פועל באחד מכיווני הצירים, גם ההעתק יהיה באותו כיוון. נניח כעת כי הכח $\vec{F}$ פועל בכיוון $(2,3,5)$. מה השינוי שיעבור כל אחד מהקפיצים? כיצד תשתנה תשובתך אם הקפיצים עשויים מחומרים שונים?

הסבר

ראשית, לא ניתן להסתפק בגודל אחד Δx כדי לתאר את השינוי במרחק בין נקודות בגוף לפני ואחרי הפעלת העומס, אלא יש צורך להתייחס לשינויים במרחק בכל אחד מהצירים x, y, z (מעוות לינארי) וכן לשינויים הזוויתיים בין שני ישרים העוברים דרך אותה נקודה (מעוות גזירה[15]), שכן כל וקטור משנה את כיוונו. באופן זה נוכל לתאר את השינוי בכל רכיב באמצעות מטריצה בגודל 3×3 המסומנת ε - מטריצת רכיבי העיבור ε_{kl}.

שנית, בדומה, לא ניתן להסתפק בגודל אחד F כדי לתאר את הכח הפועל על כל נקודה של גוף תלת מימדי, אלא נצטרך להתייחס לשלושה סוגי מאמצים- הכוחות הפועלים במקביל לפני השטח (מאמצי לחיצה וגזירה) והכוחות הפועלים בניצב לפני השטח (מאמץ מתיחה). באופן זה מתקבלת מטריצה בגודל 3×3 המסומנת σ - מטריצת רכיבי המאמץ σ_{ij} (נמדד ביחידות לחץ, כגון פסקל / psi).

[15] גזירה - Shear

שלישית, הקשר בין שתי המטריצות σ, ε איננו נתון על ידי סקלר k, אלא הינו קשר מורכב יותר, התלוי בסוג החומר ובצורתו. קשר זה ניתן לתיאור בצורה הכללית $\sigma = K\varepsilon$, בה K היא טרנספורמציה לינארית המייצגת את האלסטיות בכל נקודה.

טנזורים

הגדלים $\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}$ הם דוגמאות לטנזורים - ביטויים המשמשים להכללה של קשרים בין גדלים מתמטיים/ פיזיקליים. טנזור עשוי להיות מספר, וקטור, מטריצה או מערך מורכב יותר, אשר שומר על תכונות מסוימות גם בעת שינוי של מערכת הייחוס. לדוגמא - טמפרטורה היא טנזור, אך תדירות אינה טנזור (ולראיה- אפקט דופלר). השימוש בטנזורים נעשה נפוץ יותר לאחר פרסום תורת היחסות הכללית, וכיום מופיע בתחומים מגוונים, למשל אלקטרומגנטיות, קריסטלוגרפיה, דינמיקת נוזלים ואלסטיות.

בפרט, במסגרת תורת האלסטיות (תורת העיוותים/ דפורמציות) מתואר הקשר בין טנזור המאמץ σ לטנזור העיבור ε באמצעות טנזור האלסטיות C. טנזור זה הוא מדרגה 4, כלומר ניתן לתיאור באמצעות מערך מספרים 4– מימדי. כל רכיב בטנזור המאמצים ניתן לחישוב ע"י $\sigma_{ij} = \sum_k \sum_l C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$, או בקיצור $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$.

4.2. המלצות ליישומים בהוראה

תכנית הלימודים לחטיבה העליונה בפיזיקה ובמתמטיקה מתמקדת בעיקר בבעיות הנוגעות לגופים מישוריים. הן במסגרת המכניקה הקלאסית, הן באופטיקה הגיאומטרית והן בגיאומטריה האנליטית, נדירים המקרים בהם התלמידים נחשפים ליישומים של העקרונות הנלמדים במערכות מורכבות יותר. היוצאים מן הכלל מופיעים במסגרת לימודי הטריגונומטריה במרחב ובלימודי המבוא לאלגברה לינארית (וקטורים).

הוראת נושאים שאינם בתכנית הלימודים דורשת תמריץ ניכר מצד המורה ונכונות רבה מצד התלמידים. תמריץ כזה עשוי למשל להיות פתיחת אשנב בפני התלמידים לשימושים מודרניים ומעשיים בעקרונות שלמדו- כגון יישומים של הסתברות במנועי חיפוש, של טריגונומטריה בחישוב כוחות הפועלים על מכונית מרוץ ושל אלגברה לינארית ברובוטיקה. מובן כי לא כל כיתת לימוד תפגין נכונות מספקת להתרכז בנושאים ש"לא יופיעו בבחינה". עם זאת, לעתים שאלה של תלמיד בודד עשויה להצית דיון כיתתי ולאפשר למורה לכוון את הדיון לנקודות רלוונטיות לחומר הלימוד. הדוגמאות המופיעות לעיל בגוף עבודה זו עשויות לשמש את המורה במטרה לפתח מיומנות אצל התלמיד, לצד תובנה לגבי הנושא.

היקף השימוש בטנזורים בתחומים שונים בפיזיקה ובהנדסה המודרנית מחייב לדעתי היכרות בסיסית עם המושגים הקשורים לכך. היכרות זו היא חיונית עבור מורים לפיזיקה, אשר נדרשים להתמודד עם שאלות של תלמידים לגבי הכללות אפשריות של עקרונות כגון חוק הוק או השראה אלקטרומגנטית. אין זה תפקידו של המורה לבנות מערכי שיעור הבונים בצורה מסודרת את עקרונות השימוש בטנזורים, אך הוא בהחלט יכול לחשוף בפני התלמידים לכיוונים חדשים ולעורר סקרנות מדעית.

אין ספק שהבנה מעמיקה של טנזורים דורשת רמת הפשטה גבוהה וכן שליטה טובה באלגברה לינארית ברמה שאינה קיימת אצל מרבית התלמידים בתיכון. לכן, ההסברים שיוצגו לתלמידים יהיו חייבים להיות פשטניים במקצת ולפנות לרמת הבנה נמוכה יותר. בפרט, מורה שיהיה מעוניין להציג בפני תלמידיו הכללות בטנזורים של עקרונות פיזיקליים בסיסיים, יכול להזניח עניינים כגון הסכמי סכימה, פעולות בטנזורים או סימונים מיוחדים ולהתמקד במשמעות השונה של כל סימן בין נוסחאות בסיסיות (כגון $F = k\Delta x$) לנוסחאות המוכללות (כגון $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$). באופן זה, מידת ההשקעה שתדרש מהמורה תהיה נמוכה יחסית, בעוד התרומה

השולית להשכלת התלמידים ולהגברת הנכונות שלהם להמשיך ללימודים אקדמיים ולפיתוח המדע עשויה להיות גבוהה מאד.

ניתן למנות מספר קשיים אפשריים בהעברת מערכי שיעור בנושא טנזורים לתלמידים בחטיבה העליונה. ראשית, העדר החשיפה של תלמידי תיכון לבעיות הדורשות ראייה מרחבית (דהיינו, חשיבה תלת מימדית) ולאלגברה לינארית ברמה גבוהה יותר מרמת המבוא, עשוי להקשות עליהם להתמודד עם הנוסחאות המוכללות. פתרון אפשרי לכך הינו בניית מערך שיעור המתמקד בתכונות טנזורים דו-מימדיים (ראה סעיף 3.1.1 לעיל). מערך שיעור מסוג זה יאפשר לתלמידים להתנסות בעבודה עם טנזורים ויספק להם היכרות ראשונית עם מושגים רלוונטיים, דוגמת וקטור קונטרה-וריאנטי או אינווריאנטיות.

קושי נוסף עשוי לנבוע מכך שאלגברה לינארית נחשבת בעיני סטודנטים רבים לאחד המקצועות הקשים במתמטיקה, בין היתר בשל העובדה שקורסי המבוא באלגברה לינארית כוללים מושגים מופשטים יותר לעומת קורסי המבוא המקבילים באנליזה, דוגמת תת-מרחב, שדה או בסיס (Carlson, 1993; Wawro et al., 2011).

קושי שלישי עשוי לנבוע מהעובדה שלמרות קווי הדמיון בין הגדרת וקטור בשני אופנים (גיאומטרי ואלגברי) לבין הגדרת טנזורים בשלושה אופנים (גיאומטרי, אלגברי קלאסי ואלגברי מודרני), הבנת ההגדרות של מושגים בתחום הטנזורים דורשת מאמץ רב יותר לעומת המאמץ הנדרש להבנת המושגים באלגברה לינארית העוסקים בוקטורים. לדוגמא, ההגדרה הגיאומטרית של וקטור ניתנת להצגה בדרך הסתכלותית כקטע מכוון, בעוד שההגדרה הגיאומטרית של טנזור דורשת צירוף של שני וקטורים והזווית ביניהם ולכן קשה בהרבה. גם ההגדרה האלגברית המודרנית של טנזורים עשויה להיות קשה למרבית התלמידים, מאחר שהיא עושה שימוש במושג של מרחבים דואליים וקו-וקטורים. ייתכן שההגדרה האלגברית הקלאסית של טנזור כמערך מספרים רב-מימדי תהיה נקודת פתיחה טובה יותר להצגת הנושא לתלמידים מתחילים.

ביבליוגרפיה

Carlson, D. (1993). Teaching Linear Algebra: Must the fog always roll in?. *The College Mathematical Journal*, vol. 24, Issue 1, pp. 29-40.

Feynman, R.P. (1963). *Tensors*. Feynman Lectures on Physics, vol.2, ch. 31.

Hamilton, W.R. (1855). *On Some Extensions of Quaternions*. The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science (4^{th} Series), vol. ix, pp. 46-51.

Kühnel, W. (2006). *Differential Geometry: Curves - Surfaces - Manifolds (2^{nd} Ed.).* American Mathematical Society (AMS).

Lass, H. (1950). *Vector and Tensor Analysis*. McGraw-Hill Book Company, inc.

Lawden, D.F. (1982). *An Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology* (*3^{rd} Ed.*). John Wiley & Sons Ltd.

Ricci, M.M.G., & Levi-Civita, T. (1900). Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. *Mathematische Annalen*, Vol. 54, Nr. 1-2, pp. 125-201. Translated by Hermann, R. (1975).

Wawro, M., Sweeney, G.F., & Rabin, J.M. (2011). Subspace in Linear Algebra: Investigating students' concept images and interactions with the formal definition. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 78, no. 1, pp. 1-19.