בס"ד

קרן רוטשילד קיסריה

"תוכנית רוטשילד-ויצמן למצוינות בהוראת המדעים"
במימונה של קרן קיסריה אדמונד בנימין דה רוטשילד

חשיבה הסתברותית אצל מורים למתמטיקה

פרויקט גמר במתמטיקה

מגישה : יעל כהן

<u>מנחים :</u>

פרופ׳ יקר קנאי
עומר תמוז
ד״ר נורית זהבי

יג' אייר תשע"א
17-5-2011

תוכן העניינים

מבוא

הסתברות היא אחד התחומים היישומיים ביותר במתמטיקה, והיא מהווה אבן יסוד במקצועות רבים, ובהם כל המדעים וכן כלכלה, סוציולוגיה ופסיכולוגיה.
בנושא זה הנלמד בארץ במשך עשרות שנים מושם הדגש על בעיות שניתן לפותרם באמצעות אלגוריתם המבוסס על חוקים ונוסחאות, והבעיות בהסתברות אשר הופיעו בבחינות הבגרות בדקו לרוב ידע פרוצדוראלי בלבד אף ברמות של 4 ו- 5 יחידות לימוד.
השאלות בבחינות הבגרות בכללן דורשות לרוב חזרה ושינון ואינן מפתיעות בבעיות לא שגרתיות.
מערכת החינוך נחשבת למסורתית וסמכותית, בעיקר בכל הנוגע ללימודים על יסודיים המכוונים לבחינות הבגרות. דרוש מורה ייחודי כדי להוסיף תכנים לא שגרתיים בשיעורים הקיימים, בצבת אילוצי הזמן, ובמרוץ הנואש להגיע אל קו הסיום, קרי : בחינת הבגרות.
בשנת הלימודים תשס"ה הוכנסה לתוכנית הלימודים ברמות של 4-5 יחידות פרק לימוד חדש הנקרא : "חשיבה הסתברותית בחיי היום יום". הנושא "חשיבה הסתברותית" עוסק בעיקר בכשלים והטיות של החשיבה האנושית המנוגדים לחישוב ההסתברותי המדויק, ומחברי התוכנית האמינו כי בעזרת הוראת הנושא ניתן לשפר את איכות חשיבה ואת יכולת הניתוח של מידע.
משיחה שקיימתי עם השותפים לתוכנית הובהר כי מספר המורים אשר בחרו ללמד נושא זה היה קטן משמעותית, וחלק גדול מהמורים העדיף להתמקד בנושא האלטרנטיבי : "הסתברות קלאסית " העוסק בבעיות שגרתיות בהסתברות. בהתאם לכך מספר התלמידים בבחינות הבגרות אשר בחרו לענות על שאלות המטפלות בהטיות וכשלים הסתברותיים היה מצומצם מאוד.
נראה אם כן כי מטרותיהם של מפתחי התוכנית טרם הושגו, וייתכן כי העיכוב בהשגתן של מטרות אלו נובע בין השאר מחשיפה והכשרה בלתי מספיקה של מורים למתמטיקה לנושאים אלו.

ידוע כי אחת המטרות העיקריות של משרד החינוך ושל ההשכלה האוניברסיטאית היא לפתח חשיבה ביקורתית לגבי טענות והיסקים, לבחון באופן ביקורתי נתונים, מסקנות והמלצות אשר נתקלים בהם בחיי היום יום, כדי להיות צרכן נבון וביקורתי יותר למידע.
אחד הקורסים הנלמדים במוסדות להשכלה גבוהה הינו קורס בחשיבה הסתברותית. קורס זה עוסק בשיקולים סטטיסטיים הנוגעים לאיתור קשרים סיבתיים, להסקת מסקנות עלפי מדגמים, למשמעות של המושג הסתברות ולשיפוט אינטואיטיבי. התמקדות בהטיות וכשלים בלימוד נושא ההסתברות מסייע לחשוף חלק מהמגבלות האינטלקטואליות שלנו, ויכולות לכוון אותנו למיפוי אינטואיציות מוטעות וחיפוש אחר דרכים לשיפור איכות החשיבה שלנו.
קורס מסוג זה ניתן גם במחלקה להוראת המדעים של מכון ויצמן , והוא מועבר למורים למתמטיקה בתוכנית "רוטשילד " המכשירה מורים לקראת תואר מוסמך בהוראת המדעים .
אף אני כמורה למתמטיקה למדתי בתוכנית זו והשתתפתי בקורס בהסתברות בשנת הלימודים תשס"ט.
בעבודתי זו בחרתי לערוך מחקר הבוחן תפיסות בהסתברות אצל מורים למתמטיקה הלומדים בתוכנית זו מתוך מטרה לבדוק, ע"י השוואת התפיסות ההסתברותיות השונות, האם קיימות נקודות דמיון ושוני בין מורים אשר למדו את הקורס בהסתברות לבין מורים אשר טרם נחשפו לקורס זה וכן באיזו מידה.
שני המושגים בהם התמקדתי בעבודה זו הינם : הסתברות מותנית וחוק בייס.
בסיוע של שני המושגים הסתברותיים הנ"ל נעשה ניסיון לבחון כיצד מורים למתמטיקה נגשים לסוגיות שבהן ההתרשמות הראשונית היא לעתים שגויה והתשובה הנכונה אינה אינטואיטיבית.

הפרק הראשון של העבודה יכלול סקירה ספרותית בנושאים הקשורים להטיות בתחום ההסתברות. סקירה ספרותית זו בוחנת מחקרים שונים של החשיבה ההסתברותית הכוללת לרוב הטיות ואינטואיציות שגויות. הטיות אלו נובעים ממספר תפיסות מוטעות והיוריסטיות רבות אשר יפורטו בפרק זה.

בפרק השני יוצג התחום המתמטי אשר יכלול בין השאר סוגיות שהועלו בקורס סטטיסטיקה והסתברות ע"י - פרופ' צבי ארטשטיין, במסגרת תוכנית "רוטשילד ויצמן".
בתחום מתמטי זה התמקדתי בשני תחומים עיקריים : חוק בייס והסתברות מותנית.
חוק בייס כורך בתוכו את השיעור הבסיסי היכול לשנות הסתברויות בצורה משמעותית ומציע דרך נורמטיבית לאינטגרציה בין נתונים ישנים וחדשים.
בפרק זה הצגתי מספר בעיות בהסתברות מותנית הממחישות את הבלבול אשר עלול להיווצר בבואנו לפתור בעיות "נוגדי אינטואיציה" בהסתברות. אך בד חושף פרק זה את הגישה השכיחותנית המקלה על התפיסה ההסתברותית במצבים רבים ומביאה לחישוב בייסיני תקין.

בפרק השלישי יתואר מהלך בניית כלי המחקר-השאלונים והרציונאל העומד מאחוריהם,הממצאים והמסקנות.
אוכלוסיית המחקר כללה מורים למתמטיקה הלומדים לתואר שני בהוראת מתמטיקה בתוכנית "רוטשילד ויצמן". מן הספרות המחקרית נאספו בעיות הידועות כמובילות במחקר חשיבה הסתברותית ואינטואיציות שגויות וכולן נערכו מחדש, נוסחו בצורה שונה לגמרי והוצגו עבור המורים הנבדקים.

בפרק הרביעי יוצג סיכום הממצאים והדיון בהם.

נספח א'
על בסיס הממצאים שהתקבלו במחקר וניתוח התוצאות הנני מציעה מדריך למורה כנספח לעבודה זו. במדריך זה יוצגו הנחיות דידקטיות והמלצות להוראתן של דילמות לא שגרתיות בהסתברות.
בפרק זה אשר יוצג כאמור כנספח לעבודה זו נשתמש ב "חוק המספרים הגדולים " ובגישה השכיחותנית המוצגת בפרק 2. שימוש בכלים אלו מראה כי בשאלות הסתברותיות מסוג זה ניסוח מחדש של השאלה עם נתונים מספרים גבוהים הינו כלי יעיל אשר מחדד את השאלה ובמקרים רבים לא רק מסייע להגיע אל הפתרון הנכון אלא אף להבינו היטב.

נספח ב' יציג את 2 השאלונים עליהם התבסס המחקר.

פרק 2 וכן נספח א' יכולים לשמש כמדריך למורה המלמד הסתברות ברמות של 4 ו 5 יחידות לימוד.

פרק 1 : סקירת מאמרים על חשיבה הסתברותית

" הכל צפוי והרשות נתונה" (פרקי אבות ג' טו). אמרה זו בת ארבע מילים במסכת אבות מבטאת בתמציתיות את אחת השאלות הגדולות המטרידות את האדם בכל התרביות ובכל התקופות:
הראיה הדטרמיניסטית שהכול מוכרע מראש מול הראיה ההסתברותית המכירה בבחירה החופשית, ובתנאי אי הוודאות המאפיינים את חיינו.
גורמים של אי ודאות חודרים למדע כולו מתוך ההכרה כי קיימת בורות בעניין מספר המשתנים המשפיעים על הנתונים שבידנו, ומגוון השגיאות האופייניות לשימוש במשתנים אלו.

מחקרים רבים בהסתברות נערכו בשלושת העשורים האחרונים:
החל משנת 1970 החלו פסיכולוגים להתעניין בכשלים לוגיים ובחשיבה של-המין האנושי בבעיות הקשורות בתנאים של אי ודאות. המחקר המוצג ע"י חוקרים אלו סייע לזהות תפיסות מוטעות רבות וטעיות חשיבה נפוצות שנמצאו רלוונטיים גם למורים למתמטיקה המלמדים את הנושאים-סטטיסטיקה והסתברות (למשל , גארפילד 1988 , Ahlgren:שונסי 1992,גארפילד1995).
המחקרים על תפיסות מוטעות, אינטואיציה לקויה, וחשיבה שגויה על מושגים בסטטיסטיקה הושפעו במידה רבה ע"י החלוצים בתחום זה : כהנמן, Solvic וטברסקי, הם היו בין הראשונים אשר גילו באינספור מחקרים כי בני אדם ידועים בבחירות הלא אופטימאליות שהם מבצעים וסוטים בצורה שיטתית משיפוטים הסתברותיים.
הגדרתם של טברסקי וכהנמן למונח אינטואיציה הוא : שיפוט המגיע ללא חשיבה פורמאלית מובנית, וללא חשיבה אנליטית או חישובית.
האינטואיציות בחיי היום יום הם אלמנט נחוץ אשר בעזרתו אנו מצליחים להגיב בצורה יעילה ומהירה על גירויים חיצוניים שונים אך לא תמיד הם משקפות את האמת האובייקטיבית.

מחקרים שונים על חשיבה הסתברותית מציגים הטיות ואינטואיציות שגויות המובילים לתשובות שגויות. שיקולים אלו נובעים ממספר תפיסות מוטעות היוריסטיות רבות , כגון: מנגנון היציגות , זמינות , עיגון , כשל האחידות (סימטריה) , כשל המהמר, כשל הצירוף, כשל ציר הזמן, התעלמות מגודל המדגם ועוד. אולם בעבודה זו אתייחס לכשלים הרלוונטיים למושגים בהם אתמקד : הסתברות מותנית וחוק בייס.

<u>כשל ציר הזמן בהסתברות מותנית</u>

מספר מחקרים מדווחים כי קיים קושי אצל הנחקרים לחשב $P(A/B)$ כאשר אירוע B קרה לאחר אירוע A, ויש אף שטענו כי לא ניתן כלל לחשב את ההסתברות המותנית הזו (Falk ' 1989 , (Shaughnessy, . (1992).
לדוגמא: בכד 3 כדורים אדומים ו- 3 כחולים . מוציאים ללא החזרה שני כדורים בזה אחר זה.
מה ההסתברות שהכדור השני כחול אם ידוע שהראשון היה כחול?
ומאורע שני : מה ההסתברות שהכדור הראשון היה כחול אם נתון שהכדור השני היה כחול? יש אנשים המתקשים בחישוב ההסתברות של המאורע השני. Falk טוענת כי הקושי נובע מכך שקשה לתפוס תלות במאורע המתרחש מאוחר יותר. כשל זה הוא מסוג הכשלים הקשורים בהבנת המשמעות של מושג ההסתברות המותנית כגון הבלבול וחוסר ההבחנה בין המושגים $P(A/B)$ לבין $P(B/A)$.
אם הסתברות מותנית נראית לנו במבט ראשון ככלי שבו אנחנו מסיקים מידע לגבי ההשפעה של העבר על העתיד, נוסחת בייס מראה לנו שגם <u>ניתן להסיק מהעתיד על העבר.</u>

התעלמות מגודל המדגם

חוק המספרים הגדולים מבטיח שמדגמים גדולים יהיו דומים לאוכלוסיה, אבל קיימת נטייה אצל אנשים להאמין שגם מדגמים קטנים יהיו דומים לו. כתוצאה מכך הם נוטים לעתים לתת משקל יתר לנתונים המבוססים על מדגם קטן. לדוגמא במחקרם של Tversky & Kahneman (1974) נמצא כי הסיכוי ללידת 7 בנים ב 10 לידות נתפס כשווה לסיכוי ללידת 70 בנים ב 100 לידות, למרות שככל שהמדגם גדול יותר ההתקרבות ליחס שווה בין שני המינים גדול יותר.

מנגנון הייצוגיות

השימוש שמרבית האנשים עושים בדמיון או ביציגות להערכת הסתברות נקראת מנגנון היציגות.
אנשים נוטים להאמין כי מאורע יציג יותר הוא סביר יותר. לדוגמא אנשים נוטים לחשוב באופן שגוי כי בקרב המשפחות להן שישה ילדים הסיכוי לפגוש משפחה שסדר הולדתם של הילדים הינו : בת, בן, בן, בת, בן, בת, גבוה יותר מהסיכוי לפגוש משפחה שסדר הולדת הילדים הינו : בת, בת, בת, בן, בן , בן. הם סבורים שהמשפחה הראשונה יותר מייצגת את היחס של 1:1 בין בנים ובנות בתוך האוכלוסייה ובנוסף היא מייצגת טוב יותר את האקראיות של מין היילוד (Shaughnessy , 1997).

התעלמות מהשיעור הבסיסי

הסעיף הקודם מעלה כי מרבית האנשים נוטים לשפוט עלפי יציגות ותוך כדי כך מתעלמים מהשכיחות של אותה השערה באוכלוסיה המסוימת. בניסויים נמצא שנבדקים התייחסו לשיעור הבסיסי כאשר לא היו להם שום נתונים נוספים, אבל כאשר ניתן להם איזשהו תיאור שנראה להם מייצג, הם התעלמו משיעור הבסיסי (גם כאשר הנתון הנוסף לא היה רלוונטי).
באחד הניסויים של Tversky & Kahneman (1974) נמצא כי ע"י תיאורו של אדם ותכונותיו אנשים התאימו לו מקצוע אשר נראה להם מייצג את התיאור למרות שמקצוע זה נדיר בשוק, והסיכוי בהתאם נמוך מאוד.
הטיה זו מכונה : כשל השיעור הבסיסי ויש המכנים אותה –אי רגישות להסתברות אפריורית.
חוק בייס (אשר יוצג בפרק השלישי) קובע את האופן שבו אינפורמציה אודות שכיחות אפריורית צריכה להילקח בחשבון לצורך שיפוט הסתברות.

כשל הסימטריה

בחשיבה האנושית קיימת אינטואיציה חזקה לסימטריה בין אירועים שהסתברותם איננה ידועה.
הן תלמידים והן מורים מתמודדים במסגרת תוכנית הלימודים עם קובייה מאוזנת מטבע הוגן וסביבון מאוזן. בכל הדוגמאות הללו מניחים כי לכל האירועים האפשריים קיימים סיכויים שווים להתרחש.
הכללת יתר של הנחה זו מביאה את המתמודדים עם בעיות בהסתברות לייחס לאירועים הסתברות שווה גם כאשר היא איננה כזאת.
בעיית שלושת הדלתות הידועה בשם "פרדוקס מונטי הול " הינה דוגמא קלאסית לכשל זה.

<u>ניתוח שגוי של האינפורמציה הנתונה.</u>

חוקרים אחדים עמדו על מאפיין דומיננטי חשוב בפתרון בעיות בהסתברות והוא הניסוח והטרמינולוגיה של השאלה, אחד האלמנטים החשובים בפתרון בעיות מסוג זה הינו הניתוח המדויק של האינפורמציה הרלוונטית המוצגת לנשאל והקישור הנכון לעקרונות ההסתברותיים.
דוגמא להתייחסות בספרות לסוגיה זו אנו רואים במחקרם של (Tversky & Kahneman, 1981) , אשר הציגה דילמה שבה מתוך 600 איש הנמצאים בסכנה ניתן להציל מספר מסוים והשאר יספו.
התוצאות מראות כי תגובות האנשים היו שונות באופן בולט עבור ניסוחים שונים של אותה דילמה בדיוק.
בעיות יכולות להיות מנוסחות בצורה ישירה או עקיפה ולשנות אצל הקורא את הבנת הבעיה.

<u>חישוב הסתברותי מול חישוב שכיחותני</u>

במחקרים נמצאו ראיות לכך שאם מספקים לנחקר אינפורמציה באמצעות מדדים שכיחותיים (לדוגמא: 20 מתוך 100) ולא הסתברותיים (0.2) אז הבנת השאלה מתחדדת ואיכות התשובות עולה משמעותית.
Cosmides & Tooby (1996) הראו כי שימוש בקלט ופלט שכיחותי מביא לחישוב הסתברותי בייסיני תקין. בעוד שכאשר הוצגו נתונים הסתברותיים, 56% מהנבדקים שגו בכך שהתעלמו מהשיעור הבסיסי, מהחישוב הבייסיני. לעומת זאת התוצאות בתנאי השכיחותי היו הפוכות, 76% השיבו נכון ורק 4% שגו בהתעלמותם משיעור הבסיס.

<u>השפעת הגיל על היוריסטיקות</u>

במשך שנים החזיקו חוקרים רבים בהשערה כי האינטואיציה האנושית מתפתחת עם השנים ובגיל מסוים. החשיבה האינטואיטיבית לדבריו מתפתחת כתוצאה של גורמים סביבתיים שונים: חברה, ניסיון וידע הנרכשים עם השנים. אלמנט טבעי נוסף המשפיע אף הוא הינו המבנה השכלי המתפתח עם השנים.
מחקר של Fischbein & Schnarch (1997) נבדקה מדת ההשפעה של הגיל והלמידה על היוריסטיקות שאנשים נוקטים בשיפוטים סטטיסטיים, התוצאות שהתקבלו הינן מגוונות מאוד. בעוד שחלק מהאינטואיציות משתפרות עם הגיל ושכיחות השימוש בהן הולכת וקטנה כגון: "כשל המהמר" (לדוגמא: הנטייה לייחס הסתברות גבוהה יותר למטבע לפול על "עץ" אחרי רצף של "פלי"). בחלקן דווקא מתחזקות עם השנים, כגון: כשל הסימטריה ו - חוסר רגישות לגודל המדגם.

<u>השפעת ההוראה</u>

חוקרים שונים אשר ניסו לתקן כשלים והטיות בהסתברות באמצעות שיטות הוראה שונות זכו לרוב לשפר כשלים אלו במידה מועטה יחסית. חלק מהנבדקים אשר עברו תהליך למידה באמצעות גישות הוראה שונות המשיכו להחזיק בחלק ניכר מהמסקונספציות איתן הגיעו.
לדוגמא (Shaughnessy,. (1992 מצא כי קיימות תפיסות מוטעות אשר מאפיינות את השלב ההתחלתי בהתפתחות הראיה ההסתברותית אולם אנשים נוטים להתגבר בעקבות לימודיהם על תפיסות שגויות אלו.
בניסוי שערכו (Nisbett, R. E., Fong, G. T., Lehman, D. R., and Cheng, P. W. (1987
עלו הממצאים המוכיחים כי גם לאחר לימוד של נושאים בהסתברות ממשיכים אנשים לחזור על אותם כשלים והטיות אופייניות.
אף על פי שרבים מהניסיונות לתקן באמצעות למידה כשלים הסתברותיים ישנה הסכמה בקרב חוקרים רבים (לדוגמא : .Shaughnessy, J. M. (1992),, Garfield, J., & Ahlgren, A. (1988)
(Fischbein 1975 , Kahneman., Slovic,., and Tversky, . (1982). כי ההכרה של אותן מקורות המובילות אל תגובות אינטואיטיביות אלו ואחרות יכולה לסייע בתיקונם של שיקולים הסתברותיים שגויים.

מסקנות

מתוך סקירה ספרותית זו עולה כי קיימים אומנם מחקרים רבים הבוחנים את החשיבה האנושית בתנאים של חוסר וודאות תוך מיונם לסוגים שונים של כשלים והטיות. אולם רוב המחקרים שנעשו בחנו דווקא את תפיסת מושג ההסתברות אצל תלמידים ברמות השונות ומעטים הם המחקרים הבוחנים תפיסות אלו אצל מורים דווקא. Shaughnessy (1996) טוען כי על פי מחקריו חלק ניכר מהמורים מחזיק באותן שיפוטים הסתברותיים מוטעים הקיימים אצל התלמידים. ולטענתו, מהסיבה הזו הכנסתו של נושא ההסתברות בתוכנית הלימודים במתמטיקה מהווה אם כן בעיה.

כמו כן הסוגיה בדבר השיפור בשיפוטים אינטואיטיביים בעקבות למידה נבחנה במחקרים מעטים מאוד. במחקר של טרורן ((Truran, . (2001)) מציין הוא שעל אף וקיימת תמימות דעים בקרב אנשי החינוך המתמטי כי יש וניתן ללמד נושא חשוב זה, טרם נמצא מענה הולם לאמצעי הלמידה המתאימים להוראת נושא ההסתברות, וקיימות רק תשובות חלקיות כיצד ניתן למצוא פתרונות מעשיים לטיפול בסוגיית השיפוטים וההטיות המאפיינות כל כך את הנושא.

מטרתי בעבודה זו לחשוף בפני העוסקים בהוראת ההסתברות את אותן מקורות המובילים לשיקולים הסתברותיים שגויים ולנסות לתת כלים נוספים אשר יסייעו להוראתן של בעיות הנראות פרדוקסליות ופתרונן המתמטי לא שכנע גם את העוסקים בהוראת המתמטיקה.

בעבודתי זו הצגתי את התחום המתמטי אשר כולל בין השאר סוגיות שהועלו בתוכנית רוטשילד ויצמן במסגרת הקורס בסטטיסטיקה והסתברות ובסיועו של הקורס בניתי מספר כלים להוראתן של דילמות לא שגרתיות בהסתברות.

קורס זה חידד את ההבנה והמשמעות העמוקה של מושג ההסתברות והציג ללומד שיקולים מיתולוגיים וסטטיסטיים רבים לצד עקרונות פסיכולוגיים של שיפוט בתנאי אי ודאות, כגון: בדיקות מסוגים שונים, אמינותן ודיוקן מול אחוזי טעויות אפשריים . ההכרעה בסוגיות מעין אלו הינה סוגיה עדינה אשר ללא קריאה זהירה של הנתונים ושימוש מושכל בחוק בייס עלול להוביל למסקנות אינטואיטיביות שגויות.

אני מאמינה כי הוראת ההסתברות דורשת גישה ייחודית ומקורית ולמידת אלגוריתמית מתמטית אין בה די כדי לאפשר הבנה עמוקה, הפנמה ויישום של חוקים בבעיות משמעותיות בחיים. בכלים נכונים ובאמצעים מתאימים ניתן יהיה לשפר במידת מה את שיקול הדעת ואת האינטואיציות בהסתברות.

.

את תורת ההסתברות המודרנית המציאו שני מתמטיקאים צרפתים מפורסמים: בלייז פסקל (Pascal) ופייר דה-פרמה (de Fermat).
בשנת 1654 התכתבו שני המתמטיקאים המבריקים בנסותם לפתור את השאלה שהטרידה רבים ממהמרי אותה תקופה: אם זורקים שתי קוביות משחק בו-זמנית בתוך כמה זריקות תתקבל התוצאה פעמיים שש? היום שאלה זו נחשבת שאלה פשוטה מאוד, אולם בימיהם של פסקל ופרמה המחשבה המתמטית לא הייתה מפותחת דיה, ולכן הם פיתחו את תורת ההסתברות בנסותם לפתור את בעיית הקוביות ו"בעיות הימורים" אחרות.

החל משנת 1970 החלו פסיכולוגים להתעניין בכשלים לוגיים ובחשיבה של המין האנושי בבעיות הקשורות בתנאים של אי ודאות. המחקר המוצג ע"י חוקרים אלו סייע לזהות תפיסות מוטעות רבות וטעויות חשיבה נפוצות שנמצאו רלוונטיים גם למורים למתמטיקה המלמדים את הנושאים סטטיסטיקה והסתברות. (למשל, גארפילד 1988 , Ahlgren:שונסי 1992,גארפילד1995).

המחקרים על תפיסות מוטעות, אינטואיציה לקויה וחשיבה שגויה על מושגים בסטטיסטיקה הושפעו במידה רבה ע"י החלוצים בתחום זה : כהנמן , Solvic וטברסקי , הם היו בין הראשונים אשר גילו באינספור מחקרים כי בני אדם ידועים בבחירות הלא אופטימאליות שהם מבצעים וסוטים בצורה שיטתית משיפוטים הסתברותיים.

חוקרים רבים לאורך השנים ניסו לאפיין את החשיבה האנושית, כאשר מידת הרציונאליות של החשיבה האנושית הייתה במרכז המוקד של מחקרים רבים בתחום. יש אשר טענו כי החשיבה האנושית היא רציונאלית (Peterson & Beach 1967) במובן שהחשיבה האינטואיטיבית של האדם פועלת ע"פ עקרונות נורמטיביים כמו מתמטיקה, סטטיסטיקה והסתברות. אולם לגישה זו של חשיבה רציונאלית – נורמטיבית קמו מתנגדים רבים. Tversky & Kahneman (1974) הציעו את הגישה ההיוריסטית. לטענתם האדם אינו מסוגל לחשיבה רציונאלית ע"פ החוקים הנורמטיביים של המתמטיקה והלוגיקה בשל יכולת המנטאלית ויכולת עיבוד המידע מוגבלות. לכן, החשיבה האנושית מתבצעת ע"פ אוסף של ההיוריסטיקות – כללי אצבע, החשופים להטיות.

בסדרה גדולה של מחקרים הראו Tversky & Kahneman (1982) כיצד שימוש בהיוריסטיקות מוביל לחשיבה אשר איננה רציונאלית ואשר איננה מקיימת חוקים נורמטיביים רבים כדוגמת חישובי הסתברות, חוק המספרים הגדולים, וחוק בייס . כשלים והטיות אלו הינן בעייתיות בתחומים רבים וחשובים כגון :מהימנותם של : עדות ראיה , מכשירי בדיקה ומגוון של בדיקות רפואיות .

<u>אמינותה של עדות ראיה</u>

באחד הניסויים שערכו Tversky & Kahneman הציגו בפני הנחקרים את הנתונים הבאים :

בעיר פלונית פועלות שתי תחנות מוניות : מוניות ירוקות ומוניות כחולות.
20% מהמוניות בעיר הן ירוקות ו-80% כחולות .
בתאונת" פגע וברח "שהתרחשה בלילה הייתה מעורבת מונית .
עד ראייה שנכח במקום טען בתוקף כי ראה שהמונית היא ירוקה. במבחני ראייה שנערכו לעד הראייה כדי לבחון את כושר ההבחנה שלו בתנאי הראייה ששררו במקום התאונה, נמצא כי הוא מזהה נכון את צבע המונית ב -70% מהמקרים.

מידע זה סופק כולו לנחקרים שנשאלו : **מה ההסתברות שהמונית הפוגעת הייתה ירוקה?**
רובם קבע כי ההסתברות קרובה ל 70%.
ננסה להבין ממה נובעת שגיאה אופיינית זו.
נסמן ב- A מונית ירוקה ו A^C מונית כחולה ותהא B עדותו של עד הראיה שאמר כי המונית הפוגעת היא ירוקה.
לפי הנתון : $P(B/A)=0.7$ נראה לכאורה כי העדות דיי אמינה .
אולם נסתכל ב $P(A\,|\,B)$ זו ההסתברות שהמכונית אכן ירוקה כאשר ידוע שעד הראיה טען כי ראה מכונית ירוקה.
התוצאה של $P(A\,|\,B)$ מאוד משמעותית לקבלת החלטה אם עדותו של עד הראיה אכן מהימנה.
וחשוב להבין כי $P(A\,|\,B)\neq P(B\,|\,A)$.
חישוב ההסתברות המבוקשת במקרה זה ייעשה על פי נוסחת בייס:
נוסחה זו מאפשרת לנו לחשב הסתברות מותנית של מאורע מסוים כאשר יודעים דווקא את ההסתברות המותנית ההפוכה לו.
חוק בייס נוסח ע"י המתמטיקאי האנגלי תומאס בייס במאמרו :

"מאמר על פתרון בעיה בתורת הסיכויים"

$P(A/B)$ - הינה ההסתברות המותנה של מאורע A כאשר ידוע שהמאורע B התרחש.

לפיכך הנוסחה להסתברות מותנית הינה : $P(A\,|\,B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ **אם B אינו 0** ,

ובאותו האופן : $P(B\,|\,A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$$\Leftarrow P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)$$

$$\Leftarrow P(B\,|\,A)=\frac{P(A\,|\,B)\cdot P(B)}{P(A)}$$

נשתמש בחוק ההסתברות השלמה בכדי למצוא את $P(A)$ כאשר $P(A|B)$ ו $P(A\,|\,B^C)$ ידועים עבור מאורע B:

$$P(A)=P(A\,|\,B)\cdot P(B)+P(A\,|\,B^C)\cdot P(B^C)$$

וכך מתקבלת נוסחת בייס

$$P(B/A)=\frac{P(A\,|\,B)\cdot P(B)}{P(A\,|\,B)\cdot P(B)+P(A\,|\,B^C)\cdot P(B^C)}$$

אם הסתברות מותנית נראית לנו במבט ראשון ככלי שבו אנחנו מסיקים מידע לגבי ההשפעה של העבר על העתיד , נוסחת בייס מראה לנו שגם ניתן להסיק מהעתיד על העבר.

<u>הערה:</u>

הנוסח המלא של **נוסחת ההסתברות השלמה** אומר שאם $B_1, B_2,\ldots,B_n$ זרים זה לזה ואיחודם הוא Ω,

אז $P(A) = \sum P(A|B_i)P(B_i)$

<u>ולכן מתקבלת הנוסחה המורחבת של בייס:</u>

$$P\left\{B_k / A\right\} = \frac{P\left\{A / B_k\right\} \cdot P\left\{B_1\right\}}{\sum_i P\left\{A / B_i\right\} \cdot P\left\{B_i\right\}}$$

אולם אנו נתייחס כאן עבור מקרים ש: $n=2$ בלבד.

נחזור לשאלה שהוצגה במחקר:

החישוב אם כן נעשה באופן הבא:

A מונית ירוקה

A^C מונית כחולה

B עדותו של עד הראיה שאמר כי המונית הפוגעת היא ירוקה.

נציב בנוסחת בייס ונקבל:

$$P(A/B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid A^C) \cdot P(A^C)} = \frac{0.7 \cdot 0.2}{0.7 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.8} = \frac{0.14}{0.38} = 0.37$$

התוצאה על פי נוסחת בייס היא שההסתברות שהמונית הפוגעת תהיה ירוקה היא כ -0.37 ולא 0.7 כפי שסברו רוב הנשאלים אשר התבלבלו למעשה בין $P(A/B)$ לבין $P(B/A)$, כלומר למרות שהעד מהימן ולמרות שעל פי עדותו המונית הפוגעת היא ירוקה, סביר יותר שהיא כחולה.

מה הסיבה שקיבלנו תשובה מפתיעה זו אשר מלמדת אותנו כי עלינו לגלות זהירות כאשר אנו לוקחים בחשבון ראיות של עדי ראיה ?

הסיבה לכך היא כי השכיחות היחסית של מוניות ירוקות נמוכה ביחס למוניות הכחולות.

נשאלת אם כן השאלה מה היא יעילותה של עדות ראיה זו?

ראשית עלינו להבחין בכך שההסתברות כי המונית הפוגעת היא ירוקה ללא עדות כלשהי הינה 0.2 (השכיחות היחסית שלה). בעוד שעדותו של עד הראיה העלתה כעת את הסתברות ל 0.37 .

כמו כן ניתן לבדוק חישובית מה תהיה ההסתברות לו יצטרף עד נוסף לעדות זו ?

ההסתברות שהמונית הפוגעת היא ירוקה ושני העדים טוענים זאת הינה : $0.2 \bullet 07 \bullet 0.7 = 0.098$

ההסתברות שהמכונית הפוגעת היא כחולה ושני העדים טוענים שהיא ירוקה הינה: $0.8 \bullet 03 \bullet 0.3 = 0.072$.

לכן ההסתברות שהמכונית הפוגעת היא ירוקה אם ידוע כי שני העדים טוענים שהיא ירוקה הינה :

$\frac{0.098}{0.098 + 0.072} = 0.58$ שזו כבר הסתברות גבוהה יחסית , בהשוואה לעדות של עד בודד.

באותה דרך נוכל לראות כי עבור שלושה עדים ההסתברות מגיעה אף ל 76%.

תוצאות אלו זו מחזקות את הגישה היהודית לפיה : "על פי שני עדים או על פי שלושה עדים יקום דבר " (דברים י"ט ט"ו)

<u>כיצד ניתן לשפר את אמינותם של מכשירי בדיקה.</u>

כפי שראינו בסעיף הקודם קיימת בעייתיות בקבלת עדות של עד ראיה כאשר שכיחות ההשערה עליו הוא נותן את עדותו נמוך מאוד ביחס לאוכלוסיה כולה. במקביל לעדות ראיה גם תוצאותיהם של מגוון מכשירי בדיקה הינה בעייתית.
במאמרם של בועז סנג'רו ומרדכי הלברט על הסכנה שבהרשעה על סמך נשיפה בלבד טוענים הם כי למרות האמינות הגבוהה כביכול של בדיקות הנשיפה יש הכרח לחוקק חוק אשר מאפשר לבדוק במכשיר זה רק נהגים אשר נראה עליהם כי נהגו בשכרות ע"י מספר סימנים בולטים **<u>נוספים</u>** כגון: צורת נהיגתם הפרועה, ריח אלכוהול מפיהם, והתנהגות המעוררת חשד סביר לנהיגה בשכרות. רק לאחר סימנים מעוררי חשד אלו יאושר חוקית לבדוק אותם ע"י מכשיר הנשיפה ובאופן זה שכיחות הנוהגים בשכרות יהיה גבוה ביחס לאוכלוסיה החשודה הנבדקת . אם עד כה 1 מתוך 100 נהגים שנבדקים אכן נוהגים בשכרות, הפעם השכיחות תעלה לנהג אחד מתוך שניים. שכיחות הגבוהה פי 50 מהקודמת לה.

לצורך חיזוק הטענה נתייחס שוב לנוסחת בייס שלפנינו:

$$* P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

ובאותו אופן :

$$** P(B^C \mid A) = \frac{P(A \mid B^C) \cdot P(B^C)}{P(A)}$$

כאשר מחלקים את המשוואה הראשונה בשנייה מקבלים את " **היחס המעודכן** " (המסומן באות **R**)

$$R = \frac{P(A/B)}{P(A^C/B)} = \frac{P\left(B/A\right) \cdot P\left(A\right)}{P\left(B/A^C\right) \cdot P\left(A^C\right)}$$

$\frac{P\left(B/A\right)}{P\left(B/A^C\right)} =$ **היחס הדיאגנוסטי של A**

$\frac{P\left(A\right)}{P\left(A^C\right)} :=$ **השיעור הבסיסי של A**

$\Leftarrow$ (היחס הדיאגנוסטי של A) **X** (השיעור הבסיסי של A) = R

נפרש את המושגים :

<u>השיעור הבסיסי</u>

השיעור הבסיסי (השכיחות) מכונה גם <u>היחס האפריורי</u> והוא הערך המבטא את היחס בין ההסתברויות שאנו נותנים לאירוע כלשהו (ההשערה =A), לבין המשלים שלו (האלטרנטיבה $= A^C$) לפני שידוע איזשהו נתון חדש (B) לדוגמא: השיעור הבסיסי של מחלה כלשהי באוכלוסיה מסוימת .

יחס זה המכונה גם יחס הנראות והוא הערך המבטא את יכולת ההבחנה של נתון חדש שקיבלנו (B).
כלומר עד כמה הנתון מבחין בין ההשערה (A) לאלטרנטיבה (A^C) . לדוגמא עד כמה מכשיר כלשהו מבחין בין חולים לבריאים.

נשים לב כי ככל שהיחס הדיאגנוסטי גדול יותר מ -1(או לחילופין ככל שהוא קטן יותר מ- 1) המכשיר טוב יותר. ולהפך , ככל שהוא קרוב יותר ל -1 המכשיר פחות מבחין בין השערה לאלטרנטיבה.

מחברי המאמר המתנגדים לבדיקת הנשיפה ללא חשדות נוספים טוענים :

" ההבדל בין בדיקה ללא חשד לבדיקה בעקבות חשד סביר בא לידי ביטוי בערכי ההסתברות האמפירית בנוסחת בייס הקובעת כי:

Posterior Odds = Posterior Odds x Prior Odds

כלומר במונחים בייסיאנים נאמר כי כשקיים חשד מבוסס , ההסתברות הראשונית (Prior Odds) כי הנבדק שיכור – המבוססת על ראיות קבילות אחרות , שאינן בדיקות נשיפה (כגון נהיגה פרועה וסימנים נוספים,) היא גבוהה הרבה יותר ובהתאמה גם ההסתברות המשוקללת הסופית (Posterior Odds) המתקבלת מהכפלת ההסתברות הראשונית ביחס הדיאגנוסטי (Posterior Odds) של הראיה המדעית, היא גבוהה בהרבה ."

אנו רואים כי ככל שהשיעור הבסיסי של השערה מסוימת נמוך (אפילו כאשר מדובר בבדיקה עם רמת דיוק גבוהה הדיוק) הסיכוי שהמכשיר צדק באבחון תהיה נמוכה מאוד.

ניתן להבין עקרון זה בעזרת נוסחת בייס:

$$P(B/A)=\frac{P(A\mid B)\cdot P(B)}{P(A\mid B)\cdot P(B)+P(A\mid B^C)\cdot P\left(B^C\right)}$$

כעת נחלק את המונה ואת המכנה בביטוי : $P\left(A/B^C\right)\cdot P\left(B^C\right)$

ונקבל:

$$P(B/A)=\frac{\dfrac{P(A/B)\cdot P(B)}{P\left(A/B^C\right)\cdot P\left(B^C\right)}}{\dfrac{P(A/B)\cdot P(B)}{P\left(A/B^C\right)\cdot P\left(B^C\right)}+\dfrac{P\left(A/B^C\right)\cdot P\left(B^C\right)}{P\left(A/B^C\right)\cdot P\left(B^C\right)}}$$

נציב את היחס המעודכן **R**:

$$\frac{P(B/A)\cdot P(A)}{P(B/A^C)\cdot P(A^C)}$$

ונקבל כי : $P(B/A)=\frac{R}{R+1}$

אנו רואים כי ההסתברות המבוקשת $P(B/A)$ תגדל ככל שערכי R יגדלו.
במידה ומדובר במכשיר עם ערכי דיוק טובים נקבל כי ערכי R תלויים בשיעור הבסיסי של ההשערה.
עלינו אם כן לגלות מצד אחד זהירות בתלות שאנו מפתחים כלפי אבחונים אלו ואחרים במיוחד כאשר מדובר בהשערות ששיעורם הבסיסי באוכלוסיה נמוכים יחסית, אולם מצד שני כדאי שנזכור כי הערך $P(B/A)$ יהיה גבוה עבור בדיקה רפואית דווקא כאשר הנבדק מגיע לבדיקה עם היסטוריה רפואית רלוונטית ועם סימפטומים אשר מתקשרים לבדיקה המבוצעת.
במקרים כאלה הבדיקה הרפואית מקבלת תוקף מהימן יותר היות והשיעור הבסיסי של המחלה גדל ביחס לאוכלוסיה הנבדקת שהרי הנבדק הגיע עם מספר סיבות מוצדקות נוספות להיבדק ובכך צמצם את האוכלוסייה הנבדקת מאוכלוסיה רגילה אשר כמעט כולם בריאים לחלוטין לאוכלוסיה הסובלת מסימפטומים המצביעים על אפשרות גבוהה לקיומה של בעיה הרפואית.
כפי שהראינו בסעיף הקודם : אם מגדילים את שיעור הבסיס מקבלים תשובות מהימנות יותר ממכשירי בדיקה כאלו ואחרים.

חישוב הסתברותי מול חישוב שכיחותני:

קיימות שתי קבוצות יריבות של סטטיסטיקאים הסתברותיים החלוקים ביניהם על עצם הגדרת ההסתברות : הגישה הסובייקטיבית והגישה השכיחותנית .

הגישה הסובייקטיבית:

הבייסינים (bayesians) מגדירים את הסתברות כרמת ביטחון סובייקטיבית לכך שמאורע מסוים יקרה. בהתאם להגדרה זו ניתן גם להתייחס להסתברות מאורע בודד. אם מפרשים הסתברות כמדד של דרגת אמונה , אזי אפשר להחיל את המושג הסתברות גם על מאורעות חד-פעמיים, כגון, הצלחה בניתוח, חפות נאשם ברצח ועוד. לפי גישה זו לאנשים שונים יכולות להיות הסתברויות סובייקטיביות שונות לאותו מאורע אם יש להם מידע שונה או תמונת עולם שונה. הגישה הסובייקטיבית רואה בהסתברות שפה לתיאור אי-ודאות של הפרט, וכמו כל שפה יש לה כללים לחישוב הסתברויות. אחד הכללים החשובים של גישה זו הינו חוק בייס אשר דורש שיהיו בידינו הן ההסתברות האפריורית (קודם הניסוי) והן ההסתברויות המותנות .

הגישה השכיחותנית.
השכיחותניים (frequentists) מגדירים את הסתברות כשכיחות היחסית בה קורה מאורע כלשהו.

גישה זאת מתייחסת לגבול השכיחות היחסית של אירוע מסוים, בתוך רצף של אירועים שיכולים לחזור על עצמם. ע"פ הגדרה זו ניתן להתייחס להסתברות רק ביחס לקבוצת יחס כלשהי ולא ניתן להתייחס להסתברות מאורע בודד.
במחקריהם התייחסו Tversky & Kahneman ובהמשך חוקרים נוספים כמו casscell (1978) להסתברות הביסיינית. אולם cosmides & Tooby (1996) טוענים שמערכת החשיבה האנושית התפתחה אבולוציונית דווקא לחישוב הסתברות במונחי שכיחות ושכיחות יחסית. הסתברות מאורע בודד היא חסרת משמעות בסביבה הטבעית. מהי משמעות סיכוי של 25% שמחר יהיה ציד ? או שיהיה ציד, או שלא. לעומת זאת לידע כי הלכתי לצוד 100 פעמים ומתוכן 25 פעמים מצאתי ציד, יש משמעות.

יש להבדיל בין האינטרפרטציה של ההסתברות הבייסינית, לבין החישוביות שלה. השימוש בשכיחות יחסית במקום הסתברות של מאורע בודד, איננה מונעת את השימוש בנוסחת בייס לשם חישוב הסתברויות בדיעבד. כך למשל השאלה "לכמה נשים אשר הבדיקה שלהם חיובית, באמת יהיה סרטן ?" יכולה להיות מחושבת ע"פ נוסחת בייס, למרות שנתוניה הם שכיחותיים בטבעם.
Cosmides & Tooby (1996) הראו כי שימוש בקלט ופלט שכיחותי מביא לחישוב הסתברותי בייסיני תקין. הם השתמשו במחקרם בבעיית הדיאגנוסטיקה הרפואית של casscell at al (1978).
casscell שאל את נבדקיו את השאלה הבאה : (המוצגת ע"י נתונים הסתברותיים)

לבדיקה אשר מגלה מחלה ששיעורה באוכלוסיה הוא 1/1000 יש false positive של 5%. מה הסיכוי שלאדם אשר תוצאת הבדיקה שלו חיובית יש באמת את המחלה ?

לשאלה זו היו שלוש תשובות שכיחות, שתיים שגויות (1+2) ואחת נכונה (3):

1. בהתעלמות משיעורי הבסיס (base rate neglect):	p= 0.95	(95%)
2. בהתייחסות לשיעורי הבסיס בלבד (base rate only):	p= 0.001	(1/1000)
3. התשובה הנכונה ע"פ בייס (Bayesian):	p= 0.02	(2%)

$$P(\text{חולה} / \text{חיובי}) = \frac{0.001 \bullet 1}{0.001 \bullet 1 + 0.999 \bullet 0.05} \cong 2\%$$

Casscell מצא כי הרוב המוחלט של האנשים שגו בכך שהראו התעלמות משיעורי הבסיס של המחלה באוכלוסיה, והתייחסו רק לדיוק הבדיקה.
cosmides & Tooby השוו את ביצועי הנבדקים כאשר נתוני השאלה והתשובה הוצגו במונחים הסתברותיים של מאורע בודד (כפי שעשה Casscell) לביצועיהם כאשר נתוני השאלה והתשובה המתבקשת מהם הוצגו במונחים שכיחותיים :

לאחד מכל אלף אמריקאים יש מחלה X . בדיקה מסוימת בודקת האם לאדם יש את המחלה. בכל פעם שאדם חולה הבדיקה יוצאת חיובית, אבל לעיתים התוצאה יוצאת חיובית גם כאשר האדם בריא, נתון כי מתוך כל 1000 אנשים בריאים ל 50 יוצאת תוצאה חיובית. הנה כי 1000 אמריקאים נבחרו רנדומאלית בהגרלה, ואין שום מידע רפואי עליהם.
לכמה אנשים בממוצע שקיבלו תוצאה חיובית בבדיקה אכן יש את המחלה ?

אחוזי ההצלחה בתנאי ההסתברותי היו דומים מאוד לתוצאות מחקרו של Casscell : 56% מהנבדקים שגו בכך שהתעלמו מהשיעור הבסיסי ורק 12% השיבו את התשובה הנכונה הנובעת מהחישוב הבייסיני. לעומת זאת התוצאות בתנאי השכיחותי היו הפוכות. 76% השיבו נכון ורק 4% שגו בהתעלמותם מהשיעור הבסיסי של המחלה.
במניפולציות נוספות אשר השוו את תנאי ההסתברות לשכיחות (הסבר למשמעות True positive והדגשת הדגימה המקרית) עלה שיעור המשיבים נכונה בתנאי ההסתברותי ל- 40%, False positive, אך לא התקרבו כלל לביצוע בתנאי השכיחותי.

תוצאות ניסוי זה מחזקות את הטענה כי בתנאים מסוימים החלטותיהם של בני האדם רציונאליות ועוקבות אחרי חישוביי הסתברות נורמטיביים כולל חוק בייס.

<u>תפיסת העצמים הנבדקים כמקור לטעויות.</u>

במהלך שנות השמונים, במסגרת המחקר הרב תחומי לחקר המוח גילו מספר חוקרים כמו שפרד (1984) ולזלי (1988) שהדרכים בהם בני אדם תופסים עצמים ואינטראקציות בין עצמים נשלטות על ידי מגוון עשיר של עקרונות אותם כינו "תיאוריות של גופים" (Theory of Bodies ובקיצור ToBy או תוג"י). תפקיד עיקרי של תוג"י הוא חלוקת (parsing) משטחים לייצוגים בדידים. Cosmides ,Brase ו Tooby(1998) מציעים שבאמצעות התייחסות לעקרונות אלו ניתן להסביר תופעות מתמיהות של שיפוטים בתנאי אי ודאות כמו סוג הבעיות אותן קל לפתור ואלו שאינם קלות לפתרון, על אף שהן שקולות מתמטית.
באחד המחקרים הבודק סוגיה זו הציגו Cosmides & Tooby את הבעיה הבאה:

בכובע יש שלושה קלפים: אחד אדום משני צידיו, שני לבן משני צידיו, ושלישי לבן מצד אחד ואדום מצד שני. מוציאים בעיניים עצומות קלף אחד וזורקים אותו לאוויר; כשפוקחים אותן, רואים שהוא נחת כך שצידו העליון אדום. מהי ההסתברות שזה הקלף אדום־אדום?

מתוצאות המחקר עולה כי 71% ענו שהסתברות זו שווה ל $\frac{1}{2}$, למרות שתשובה הנכונה היא : $\frac{2}{3}$

נשתמש בנוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

נסמןA: הקלף הנבחר הוא אדום -אדום , **B:** הקלף נפל על צד אדום.

Cosmides & Tooby טוענים ששיעורי השגיאה הגבוהים של אנשים נובעים מתפיסתם את הכרטיס כעצם שלם ולא את צדדי הכרטיס, בעוד שהתייחסות לצדדים הייתה מקלה מאוד על מציאת פתרון נכון.
גם ללא שימוש בנוסחת ההסתברות המותנית ניתן לראות כי לפנינו סך הכל 3 צדדים אדומים .
היות ובקלף אדום-אדום 2 צדדים אדומים לכן ההסתברות לאדום-אדום היא 2 מתוך 3 .
אולם מסתבר כי אצל רוב הנבדקים תשומת לב הולכת אל הקלף כאובייקט אחד ולא אל צדדיו לכן יש נטיה מובהקת לייחס סיכוי שווה לשני הקלפים.

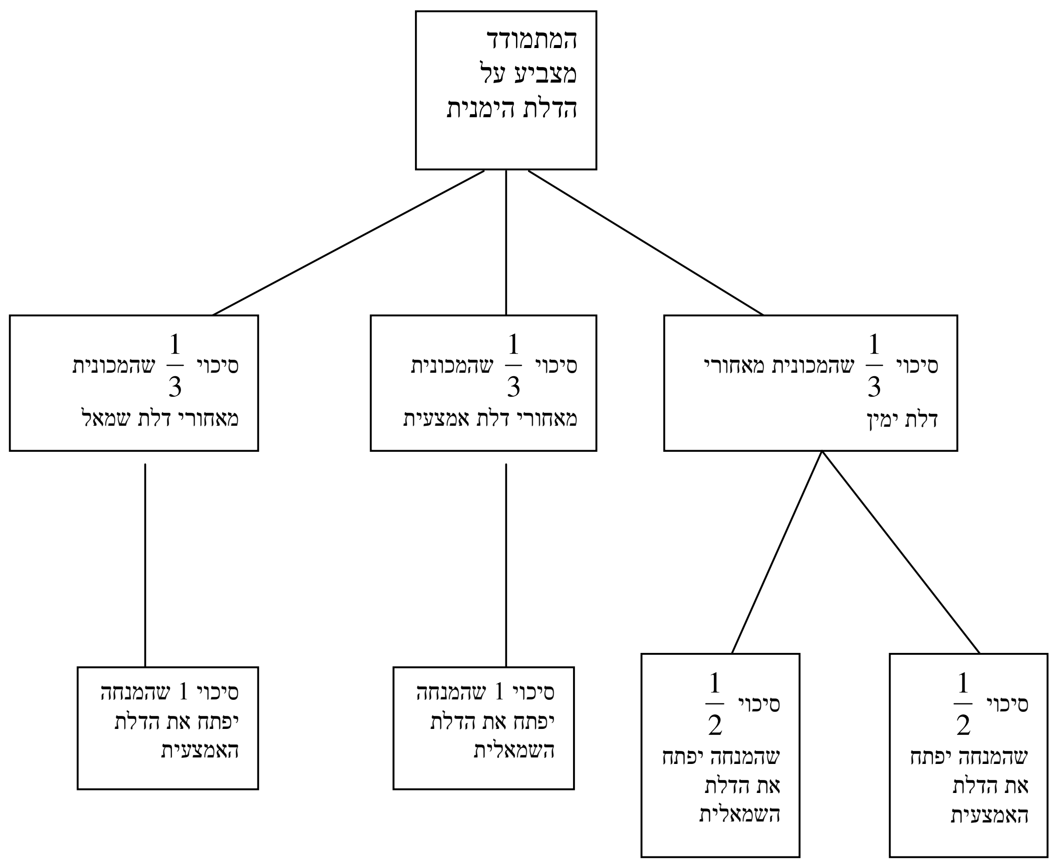
<u>כשל הסימטריה</u>

הטיה נוספת המאפיינת את החשיבה האנושית היא לייחס הסתברות שווה למצבים בהם הסיכויים אינם ידועים. בעיית " מונטי הול " המוכרת היא אחת הדוגמאות המובהקות לכך :

בשעשועון טלוויזיה יש 3 דלתות. מאחורי אחת מהן מכונית, ומאחורי השאר עזים. אנו צריכים לבחור(ע"י ניחוש) את הדלת עם המכונית.
לאחר שהצבענו על אחת הדלתות, המנחה (היודע מהי הדלת הנכונה) ניגש לאחת משתי הדלתות האחרות ופותח אותה, כשהוא מגלה מאחוריה עז. כעת אנו צריכים להחליט האם לדבוק בבחירה המקורית שלנו, או לשנות את ההחלטה ולהעדיף במקומה את הדלת האחרונה.

הרוב המכריע עונה כי אין הבדל בין שתי האפשריות לכן הסיכוי שהמכונית מאחורי אחת משתי הדלתות הסגורות היא כעת $\frac{1}{2}$, ובגלל הפשטות בהצגת הבעיה המשיבים גם כמעט בטוחים בצדקת תשובתם.

קופרמן (1998) הציג במספר הזדמנויות את ההסבר המתמטי לבעיה ע"י שימוש בנוסחאות והראה כי אם מחליפים את בחירת הדלת מגדילים את הסיכוי לזכות במכונית להסתברות של $\frac{2}{3}$, אולם הוא דווח כי תוצאה זו מתקבלת בדרך כלל בחוסר אמון של מורים ותלמידים ותגובתם האופיינית כמעט תמיד היא: "אנו רואים אך איננו מאמינים". נציג כאן פתרון על פי הגישה ההסתברותית (בפרק 4 נציע הסבר חלופי המקל על הבנת הפתרון).
נניח לצורך ההמחשה כי המתמודד מצביע על הדלת הימנית :



נסמן A המכונית מוצבת מאחורי דלת ימנית.
A^C המכונית מוצבת מאחורי הדלת האמצעית.
B המנחה פתח את דלת השמאלית.

$\Leftarrow$

$$P(A/\ B)=\frac{\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\bullet 1}=\frac{1}{3}$$

$\Leftarrow$ אם המתמודד ידבק בבחירתו המקורית הסיכוי שלו לזכות הינה $\frac{1}{3}$.

$\Leftarrow$ אם המתמודד יעדיף לשנות את החלטתו סיכויו לזכות יגדלו ל $\frac{2}{3}$,

שהרי :
$$P\left(A^C/\ B\right)=\frac{\frac{1}{3}\bullet 1}{\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\bullet 1}=\frac{2}{3}$$

בעיה זו ממחישה יותר מכל את הבלבול שיכול להיווצר בבואנו לפתור בעיות בהסתברות. לפיכך בעיית מונטי הול ידועה גם כ"פרדוקס נוגד אינטואיציה" (paradox veridical). מסתבר שדווקא התשובה הפחות אינטואיטיבית היא התשובה הנכונה.
הבעיה הזו עולה במחזוריות כל כמה שנים, וכל פעם כשהפתרון מוסבר יש אנשים שסבורים שההסבר מוטעה והם לא משתכנעים. בתחילת שנות ה 90 היו הרבה ממתמטיקאים וסטטיסטיקאים שטענו שהפתרון שגוי.
הבעיה הוצגה עוד קודם לכן, בשנת 1959, על ידי מרטין גארדנר, בטורו בירחון Scientific American. אצל גארדנר היא קרויה "בעיית שלושת האסירים", וניסוחה:

שלושה אסירים, א, ב, ג נידונו למוות. המושל בחר באופן אקראי אחד מהם והחליט להעניק לו חנינה ואת בחירתו גילה רק לסוהר. הסוהר מסרב לגלות ל א' מה גורלו הוא, אך מוכן לגלות שמבין שני האחרים, ב לא זכה בחנינה. מה ההסתברות שהזוכה בחנינה הוא א' ?

בנוסח זה של הבעיה יש מעט פחות עמימות אולם קל לראות ששתי הבעיות שקולות זו לזו.
גם שאלה זו ניתן לפתור ע"י אותו עיקרון שפתרנו את חידת מונטי הול ולקבל שהסיכוי ש א' יזכה בחנינה נשארת $\frac{1}{3}$.

ניתוח שגוי של האינפורמציה המוצגת

באחד הגיליונות של עתון על"ה , העלון למורי המתמטיקה בישראל , הוצגה הבעיה הבאה הממחישה את חשיבותו של ניתוח מדוייק של נתוני השאלה:

" ידוע כי ההסתברות להולדת בן שווה להסתברות להולדת בת . לחברתי שלושה ילדים. בכניסה לדירתה פגשתי את שתי בנותיה , מהי ההסתברות שהילד הנוסף שלה הוא בן ?"

הפתרון שהציע המחבר :

"תלמידים רבים משוכנעים שהתשובה הנכונה היא 0.5 וההסבר שלהם הוא מטעמי סימטריה , הסיכויים שהילד הנוסף יהיה בן או בת שווים זה לזה.

אולם התשובה הנכונה היא $\frac{3}{4}$ נימוק:

נסמן: A במשפחה בדיוק בן אחד

B במשפחה לפחות 2 בנות.

קיימים סה"כ 8 צירופים אפשריים להולדת 3 ילדים,

מתוכן ישנן 4 צירופים הכוללים לפחות 2 בנות, כלומר הסתברות של $\frac{4}{8}$

((1,0,0) (0,0,1) (0,1,0) (0,0,0))

וקיימים 3 צירופים עבור בן ושלוש בנות כלומר $P(A/B)=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{8}}=\frac{3}{4}$

לכן ע"י הצבה בהסתברות מותנית נקבל : $P(A/B)=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{8}}=\frac{3}{4}$ "

- - - - - - - - - - - - - -

מניסוח השאלה עולה באופן מפתיע כי התשובה הנכונה במקרה זה היא דווקא כן $\frac{1}{2}$ ונסביר בהמשך.

התשובה $\frac{3}{4}$ הייתה נכונה לו נוסחה השאלה כך:

נתון שההסתברות להולדת בן שווה ל 0.5. במשפחה מסוימת שלושה ילדים, **<u>ידוע</u>** כי לפחות שתי בנות שייכות למשפחה זו, מהי ההסתברות שהילד הנוסף יהיה בן ?

היות ובשאלה הופיע הנתון הקריטי " **בכניסה לדירתה פגשתי את שתי בנותיה** " יש צורך להכניס בחישוב גם את ההסתברות לפגוש שתי בנות מתוך המשפחה.
לכן הפתרון המתבקש במקרה זה יהיה:

מתוך 8 הצירופים האפשריים נביט בצירופים הרלוונטיים : ((0,0,0) (0,1,0) (0,0,1) (1,0,0))

לכל צירוף כזה יש הסתברות של $\frac{1}{8}$ להתרחש.

הסיכוי לפגוש 2 בנות עבור (0,0,0) הוא 1

הסיכוי לפגוש 2 בנות עבור (0,0,1) הוא: $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot$ וכנ"ל עבור 2 הצירופים הנותרים

לכן $P(A/B)=\frac{3\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

(הערה: הפתרון של מציג השאלה יכול להתקבל כנכון לו במשפחה זו הייתה קיימת סיטואציה מיוחדת: באופן קבוע 2 הבנות במשפחה (אם יש 2 כאלה) הן שעומדות בכניסה לבית כאשר מגיעים אורחים .

לו הסיטואציה הייתה כזו ההסתברות לבן נוסף אכן הייתה $\frac{3}{4}$ כפי שחושב.)

מתוך ניתוח שאלה זו אנו למדים עד כמה ניתוח מדויק של הנתונים המוצגים בשאלה הוא קריטי בפתרון בעיות בהסתברות. אנו רואים כי הצגת שאלה עם ניסוח מעט שונה הכולל בתוכו נתונים נוספים או השמטתן גוררת עימה תוצאות הסתברותיות שונות.

לסיכום

מתוך הצגת תחום מתמטי זה אנו למדים כי הגישה הבייסאנית הינה מורכבת ומכוונת אותנו לשימוש במספר נתונים. היא לוקחת בחשבון גם את יחס הבסיס בין ההשערה לאלטרנטיבה וגם את ההסתברות של הנתון תחת ההשערה ותחת האלטרנטיבה.

משפט בייס כורך בתוכו את השיעור הבסיסי אשר יכול לשנות הסתברויות בצורה משמעותית ומציע דרך נורמטיבית לאינטגרציה בין נתונים ישנים וחדשים.

הצגנו בנוסף מספר בעיות בהסתברות מותנית הממחישות את הבלבול אשר עלול להיווצר בבואנו לפתור בעיות "נוגדי אינטואיציה " בהסתברות, כאשר דווקא התשובה הפחות אינטואיטיבית היא התשובה הנכונה. ראינו כי הסיבות לתוצאות מפתיעות אלו נובעות בין השאר מכשלים כגון: התמקדות באובייקט ולא בצדדים שלו, כשל הסימטריה, וניתוח שגוי של נתוני השאלה .

יחד עם זאת נחשפנו לגישה השכיחותנית המקלה על התפיסה ההסתברותית במצבים רבים ומביאה לחישוב בייסיני תקין.

אוכלוסיית המחקר

אוכלוסיית המחקר כללה סטודנטים משנים א' , ב' ו ג' הלומדים תואר שני בהוראת מתמטיקה בתוכנית "רוטשילד ויצמן" של מכון ויצמן , המיועדת למורים מצטיינים במדעים ובמתמטיקה בעלי ניסיון בהוראה של 3 שנים לפחות בכיתות ז' עד יב'.
מספר הסטודנטים שהשתתפו במחקר משנה א ו ב' הינו 14 :להלן **"קבוצה א'**.
ומספר הסטודנטים משנה ג' הוא 5 : להלן **"קבוצה ב'.**

כלי המחקר:

מן הספרות המחקרית נאספו בעיות הידועות כמובילות במחקר חשיבה הסתברותית ואינטואיציות שגויות וכולן נערכו מחדש ונוסחו בצורה שונה לגמרי. בעיות אלו הוצגו קודם לבחינתן של אנשי סטטיסטיקה והסתברות והתקבלו הערותיהם לגבי קושי, ניסוח, מקוריות , והזמן הנדרש להשיב עליהם.
בעקבות הערותיהם עוצב הנוסח הסופי שלהם.

מהלך הפעילות

סטודנטים מקבוצה א' אשר טרם השתתפו בקורס בהסתברות קיבלו שאלון ראשון (זמן מוקצב לרבע שעה) ובו מקבץ של 5 שאלות סגורות בהם נדרש לסמן בטבלה האם ההסתברות הינה קטנה\שווה\גדולה מ $\frac{1}{2}$.

כמו כן את אותו שאלון קיבלו במקביל סטודנטים מקבוצה ב' אשר השתתפו בעבר בקורס בהסתברות במסגרת התוכנית של מכון ויצמן .

בשאלון זה (שאלון א') סברתי כי הנבדקים יענו מתוך אינטואיציה ו "תחושת בטן" שהרי הם לא חויבו להראות דרך פתרון, או לנמק את תשובתם, אך לא ניתן בוודאות לאמת או לשלול סברה זו.
בשאלון א' כמו בזה הבא אחריו שולבו גם שאלות בסיסיות בהסתברות מכמה סיבות:
א) לבחון האם קיים ידע כזה.
ב) לתת לנבחן תחושת ביטחון כי מדובר בשאלות "תמימות" כביכול .

לאחר שכל סטודנט סיים לענות על השאלון הראשון הוא נידרש להגיש את הדף עם הפתרונות ורק אז קיבל לידיו את השאלון השני , אשר בו הוצגו שאלות פתוחות הדורשות פתרון מדויק ונימוק מלא.

הרציונאל מאחורי חלוקת השאלונים לשני שלבים הבאים בזה אחרי זה הייתה למנוע מצב שבו סטודנט העונה על שאלון שני תוך כדי חישובים מלאים ושימוש בנוסחאות , יגלה כי טעה בחישוב האינטואיטיבי בשאלון הראשון בשאלה דומה, וימהר לתקן את טעותו.
לאחר המחקר התקיימו מספר ראיונות עם חלק מהנבדקים לצורך בירור והבנת תשובותיהם והלכי החשיבה אשר הובילו לתשובות אלו.

הקשר בין 2 השאלונים

בשאלון הראשון נתבקשו הפותרים להעריך בצורה גסה את ההסתברות להתרחשותם של אירועים שונים היות והסטודנטים לא נתבקשו לנמק את תשובתם וגם הוקצב להם זמן מוגבל של 15דקות, ההערכה שלהם התבססה על חישוב גס או על חישוב אינטואיטיבי.
רוב השאלות אשר הופיעו בשאלון א' זהות מבחינה רעיונית לשאלות המופיעות בשאלון ב'.

נפרט:

השאלה בשאלון א'.	השאלה המקבילה בשאלון ב'.
"הפרס השבועי" (מס' 2)	"בחירת היו"ר"(מס' 2)
"מכונת האמת"(מס' 4)	"בעיית השמיעה" (מס' 4)
"שלוש מדליות"(מס' 5)	"בעיית הקלפים" (מס' 3)

בשאלון ב' הופיעה שאלה נוספת "בעיית הגורים" אשר על פניו נראתה כמקבילה לשאלה ברמה הבסיסית של "הטלת המטבע "בשאלון הראשון, אולם הפתרון שלה מתבסס על הסתברות מותנית, ומטרתה לבדוק האם ישנה הבחנה של הנבדקים בין המושג $p\left(A/B\right)$ לבין $p(A \cap B)$.

הממצאים של שאלון א׳ , וניתוחם

<u>בשאלון הראשון השאלות ברמה הבסיסית הופיעו כשאלות שמספרן 1 ו 3</u>

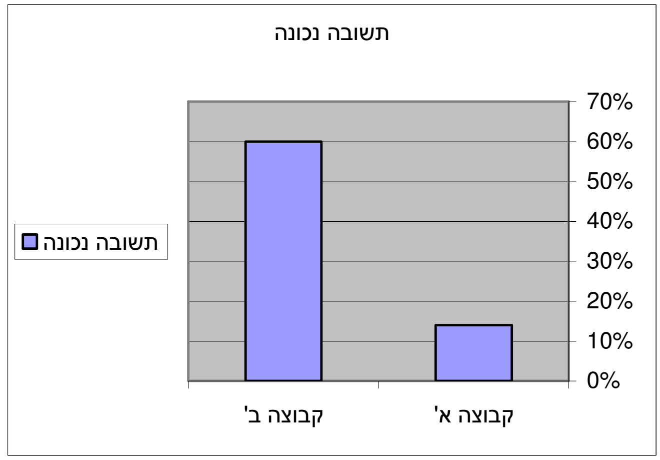
1) אמנון ותמר מתעצלים להדיח את הכלים של ארוחת הערב. הם החליטו כי מי שיפסיד בניסיון הראשון במשחק "אבן נייר ומספריים" ייקח על עצמו את פעולת ההדחה. במקרה של "תיקו" ישטפו את הכלים יחדיו.
מה הסיכוי שתמר תשטוף את הכלים לבדה? (**תשובה : "קטנה מ 0.5"**)
3) דני ויוסי משחקים במטבעות, דני קיבל 3 פעמים רצופות "עץ" בהטלת המטבע. יוסי התערב שבפעם הבאה המטבע תיפול על "פאלי".
מה ההסתברות שיוסי ינצח בהתערבות? (**תשובה : 0.5**)

על שתי שאלות ברמה הבסיסית אלו ענו כולם נכונה .

<u>שאלה מס' 2: : **הפרס השבועי**</u>

אימא של דוד ,ענת ודורון קיימה הגרלה על "הפרס השבועי" , בין 3 ילדיה.
ענת שאלה את אבא האם היא זכתה. אבא טען שאסור לו עדיין לספר מה עלה בגורלה היא , אך בכל אופן הוא מוכן לגלות לה שדוד לא זכה!
מה הסיכוי שענת זכתה? (**תשובה:קטן מ 0.5**)

להלן התפלגות התשובות הנכונות.



שאלה זו חוברה על פי העיקרון של "בעיית שלושת האסירים" (אשר הוצגה בפרק 2).
מטרתה לבחון כיצד מורים ניגשים להכריע בין שתי אפשריות שסיכוייהן אינן ברורים והאם הם נתפסים בכשל האחידות , הסימטריה.

ניתוח הממצאים

יש לציין כי 1 מתוך שני הפותרים נכונה בקבוצה א' , סימן ליד שאלה זו את צמד המילים : ***"מונטי – הול".***
מה שמראה כי סטודנט זה נחשף לפרדוקס זה בעבר ואף זיהה מקרים המעלים אצלו קונוטציה לאותו רעיון.

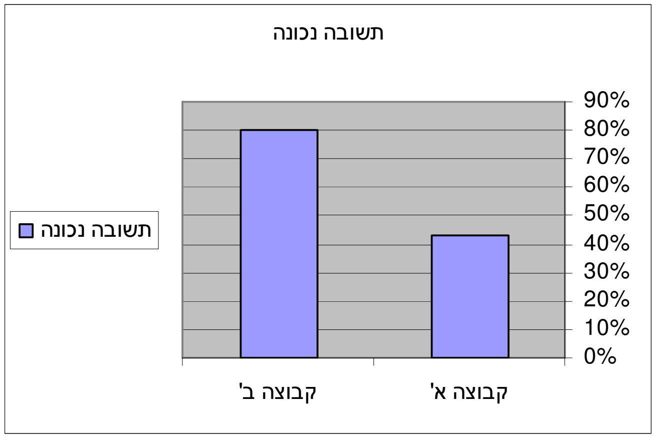
לעומתו הפותר השני טען בשיחה שקיימתי עימו: ***"הפתרון נישאר*** $\frac{1}{3}$ ***שהרי לכל אחד מהמועמדים היה אותו סיכוי לנצח והעובדה שדוד לא זכה לא מוסיף לענת סיכוי כי כבר ההגרלה התרחשה".***
בטענה זו למעשה יש התעלמות מהמשמעות המתמטית של מושג ההסתברות המותנית. ועולה מכך כי למרות שסימן תשובה נכונה הדרך שגויה.

בקבוצה ב' 3 סטודנטים מתוך 5 ענו נכון.
סטודנט אחד מתוך השלושה (נכנה אותו בשם ראובן) הינו סטודנט אשר הגיע עוד קודם הקורס בהסתברות עם הבנה עמוקה של הנושא ועם יכולת גבוהה בפתרון בעיות לא שגרתיות בהסתברות. כמו כן ראובן אף סייע במהלך הקורס לסטודנטים אשר התקשו לתפוס בעיות אשר נגדו את האינטואיציה שלהם, כך שלמעשה על כל שאלון זה ענה ראובן נכונה.
סטודנט נוסף אשר ענה נכון (נכנה אותו בשם שמעון) טען: ***"אני זוכר מהקורס שבמצבים דומים לאלו, כמו הבעיה של "מונטי הול" שהוצגה בקורס, ההסתברות לנצח נשארת כפי שהייתה לפני הגילוי החדש, ולמרות שלא השתכנעתי לגמרי בעובדה זו סימנתי בשאלון את התשובה אשר זכור לי כי הוא הפתרון המתבקש.***"
מה שמעיד שוב כי סימון תשובה נכונה בשאלון זה לא בהכרח נובע מהבנה נכונה.

<u>שאלה מס' 4: **מכונת אמת**</u>

המשטרה מפעילה מכונת אמת בחקירותיה. ידוע כי 95% מהנחקרים הם דוברי אמת.
המכונה טועה באבחון רק ב 10% מהמקרים (כלומר: "שקרן" יאובחן בטעות כדובר אמת רק ב 10% מהמקרים , ולהפך דובר אמת יאובחן בטעות כשקרן רק ב 10%).
המכונה קבעה שהנחקר רוברט משקר מה ההסתברות שרוברט אכן משקר? **(תשובה: קטנה מ 0.5)**

להלן התפלגות התשובות:



שאלה זו באה לבחון האם הנבדקים מייחסים חשיבות גבוהה יותר לדיוק של מכונת האמת או לשכיחות של דוברי האמת באוכלוסיה.

ניתוח הממצאים

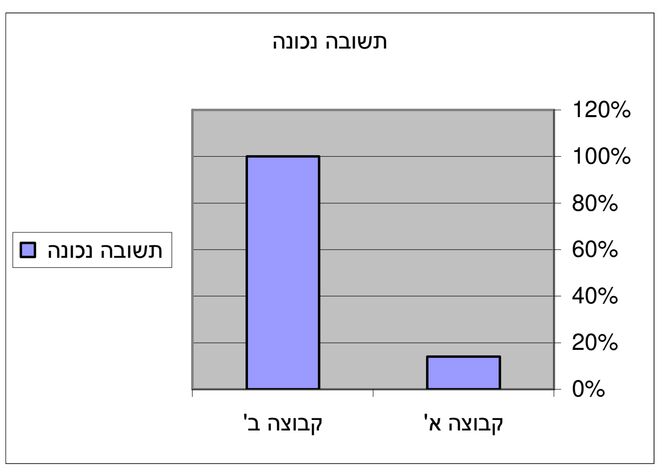
אחד הפותרים רשם ליד הפתרון את הדרך למרות שלא נתבקש: $0.05 * 0.9 = 0.45$

בפתרון זה אומנם הגיע לתשובה כי ההסתברות קטנה מחצי אולם הדרך איננה נכונה ואף חושפת חוסר הבחנה בין המשמעות של $p\left(A/B\right)$ לבין $p\left(A \cap B\right)$.

שאלה מס' 5: **שלוש מדליות**

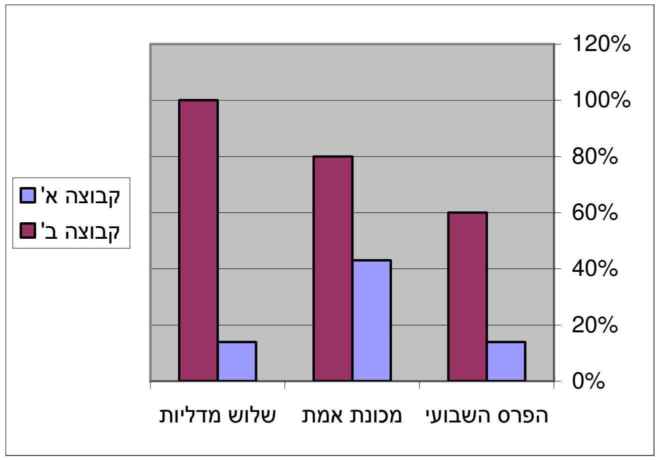
יוסי ושני חבריו עלו לשלב הגמר בתחרות ריצה. בתחרות זו ניתן לזכות:
מקום ראשון (מדלית זהב) מקום שני (מדליה משולבת, צד אחד זהב צד שני כסף) מקום שלישי (מדליית כסף). אימו של יוסי עמדה במרפסת כשלפתע זיהתה את בנה מתקרב לבית, היא הבחינה כי מדליה מוכספת מונחת על צווארו!
מה ההסתברות שיוסי הגיע למקום השני? **(תשובה: קטנה מ 0.5)**

להלן התפלגות התשובות



שאלה זו באה לבחון עד כמה הנחקרים נוטים להתמקד בעצם עצמו ולא בצדדים שלו אשר משפיעים על ההסתברות לקבלת התוצאות.
כל הסטודנטים מקבוצה ב' ענו נכונה על שאלה זו , למרות שלא ניתן לאמת האם הם הבינו את הפתרון.
בשאלון השני נוכל לראות שבשאלה דומה לזו התוצאות שונות לחלוטין , מה שמעלה סימן שאלה בקשר להבנת הרעיון ההסתברותי בשאלה זו.

<u>סיכום שאלון א'</u>



מתוך ניתוח הממצאים עולה כי השאלון הראשון חשף תפישות שגויות אצל רוב הנבדקים מקבוצה א' ואף אצל חלק גדול מהנבדקים מקבוצה ב'.
התפיסה האינטואיטיבית החזקה ביותר אשר אפיינה את שתי הקבוצות כאחד הינה כשל הסימטריה.
אולם בשאלה שדרשה יישום והבנה של חוק בייס ניתן לראות יתרון בולט לטובת הנבדקים המשתייכים לקבוצה ב' (80% ענו תשובה נכונה בעוד שרק 43% ענו נכון מהנבדקים המשתייכים לקבוצה א').

<u>הממצאים של שאלון ב׳ –וניתוחם</u>

בשאלון זה השאלה הראשונה הייתה כאמור שוב שאלה ברמה בסיסית:

<u>שאלה מס׳ 1</u>

1) שיר וגילה משחקות בקוביות,

אם שתי הקוביות נופלות על מספר זהה שיר מנצחת, אם מכפלת המספרים על שתי הקוביות שווה ל 6 גילה מנצחת, למי יש סיכוי גדול יותר לנצח? **נמק**

בשאלה זו שוב כולם ענו נכונה **(תשובה: הסיכוי של שיר לנצח גבוה יותר כי יש לה 6 אפשריות מתוך 36 , בהשוואה לגילה אשר לה רק 4 אפשריות מתוך 36)**

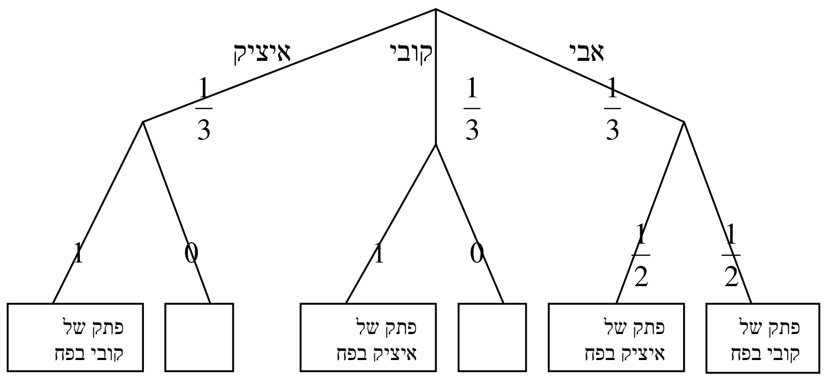
שאלה מס׳ 2 : בחירת היו״ר

אבי , איציק וקובי נבחרו למועצת התלמידים של בית הספר.
המנהל: "החלטתי לקיים הגרלה בין השלושה לבחירת היו"ר "
אבי: " אם אני לא עולה בהגרלה, אל תזרוק את הפתק עם שמי לפח זה עושה לי מזל רע בחיים".
המנהל: "אני מוכן לכבד את בקשתך אבי, את הפתק עם שם הזוכה אשמור אצלי , וגם את הפתק שלך אם תפסיד. כמו כן רק מחר אפרסם את שם היו"ר החדש ".

לאחר ההגרלה הסיט אבי את מבטו לפח ,ממנו ניתן היה לזהות רק את הפתק העליון, והבחין בשמו של קובי.
חייך אבי ושאל את עצמו : " מה הסיכוי שנבחרתי ליו"ר?"

מה תהיה תשובתך לאבי? **נמק !**

פתרון:



:

נסמן באות A : הפתק של קובי בפח
ובאות B אבי זכה ,

ונקבל $P(B/A) = \dfrac{\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\bullet 1}\cdot = \frac{1}{3}$

הערה:
שאלה זו שייכת למשפחה שלמה של דילמות שבהן אירועים בעלי הסתברויות שונות נתפסים כבעלי הסתברויות שוות ("כשל הסימטריה").
ראויה לציון העובדה שכמעט כל הבעיות בהסתברות אינטואיטיבית (כלומר כאלו המתבססות על עקרונות ואינן מצריכות כל חישובים) ניתן לסכמן בסופו של דבר ע"י השאלה : " למי משתי האפשריות שלפניך סיכוי גדול יותר"? ההבחנה בין ההסתברויות של שתי האפשריות מקפלת בתוכה הבנה פנימית של תורת ההסתברות , והוראה בעזרת הגישה השכיחותנית עשויה לשפר זאת.

להלן התפלגות התשובות

שאלה מס 1	סטודנטים שנה א+ב		סטודנטים שנה ג'	
	N	%	N	%
תשובה נכונה	3	21%	1	20%
תשובה שגויה	11	79%	4	80%
סה"כ	14	100%	5	100%

ניתוח הממצאים

נימוקים נכונים קבוצה א:

אותו סטודנט שציין את המילים "מונטי הול" בשאלון הקודם נימק את תשובתו כך:

1) "הסיכוי המקורי של אבי להפסיד היה $\frac{2}{3}$, לאחר שהתגלה לו כי קובי אינו זוכה , ההסתברות המקורית לא השתנתה עבורו ועדיין סביר יותר שהפסיד מראש לכן הסיכוי שאבי נבחר ליו"ר היה ונותר $\frac{1}{3}$ "

נימוק זה אומנם נכון אך אינו מתייחס לדקויות בנתוני השאלה אשר מובילות לפיתרון המפתיע.

נימוקים נכונים קבוצה ב'

סטודנט קבוצה ב' (ראובן) נימק את הפתרון הנכון ע"י שימוש בדיאגראמת עץ (בדומה לפתרון שהצעתי)

דוגמאות לנימוקים שגויים – קבוצה א'

1) "לדעתי הסיכוי הוא $\frac{1}{3}$ מכיוון שאבי ראה את הפתק של קובי אחרי שנבחר כבר הזוכה , לכן אין לכך השפעה על הסיכוי של אבי להיבחר."

תשובה אופיינית זו מזכירה נימוק קודם שציינתי ובנימוק מסוג זה אנו רואים הזנחה של מושג ההסתברות המותנית ואי מתן חשיבות לנתונים חדשים המצמצמים לנו את מרחב המדגם .

2) "הסיכוי הוא $\frac{1}{2}$ כי קיימות 2 אפשריות: או שהמנהל צרק את הפתק של קובי וגם את הפתק של איציק ואז אבי הוא הזוכה , או שהוא צרק את הפתק של קובי ושמר את הפתק של איציק ואבי ואז איציק הוא הזוכה."

פה הסטודנט מייחס משקל שווה לשתי האפשריות למרות שלאפשרות ב' משקל הגדול פי 2 מאפשרות א'

תשובה דומה שהתקבלה

" אני מחפש את ההסתברות שאבי מנצח כשידוע שקובי הפסיד
נסתכל על הטבלה הבאה (אין הבדל בין העמודות ולכן הסדר פה לא משנה):

מנצח	מפסיד	מפסיד
אבי	איציק	קובי
איציק	אבי	קובי
~~קובי~~	~~איציק~~	~~אבי~~

רק שתי האפשריות הראשונות רלוונטיות ואת האחרונה מחקתי, לכן הסיכוי שאבי ינצח הוא $\frac{1}{2}$."

פותר השאלה מציין רק סיכויי ניצחון והפסד מבלי לציין הסתברות לכל אירוע כאשר פתק עליון נראה בפח.

דוגמאות לנימוקים שגויים –קבוצה ב'.

בעוד ש 3 סטודנטים של שנה זו השאירו את השאלה ללא מענה, ענה סטודנט קבוצה ב'(נכנה אותו השם יהודה) :

"אם ידוע שקובי לא נבחר הסיכויים של איציק ואבי להיבחר הם שווים, לכן הסיכוי שאבי נבחר הוא 50%."

תשובה זו של יהודה הייתה כנה ואמיתית למרות שידע כי היא לא תתקבל כנכונה. הוא טען בראיון עימו את הדברים הבאים:

"למרות שטיפלנו בקורס בסוגיה של "מונטי הול" לא התחברתי לפתרון שלה, ואינני משוכנע כי זהו הפתרון האמיתי, מבחינתי ברגע שאופציה אחת מתוך 3 כבר איננה רלוונטית אז כרגע מתחיל אירוע חדש לגמרי ולכן הסיכוי מבחינתי עולה כעת ל $\frac{1}{2}$."

בראיון שקיימתי כשבוע לאחר הפעילות אמר לי אחד הסטודנטים :

" ההסבר המתמטי שנתת לפתרון השאלה כ"כ מצא חן בעיני שכבר למחרת הצגתי לתלמידי את השאלה הזו והראיתי להם את פתרונה "

מעניין ששאלה דומה לזו ("מונטי הול") הוצגה בעבר בקורס אך דרך הפתרון כנראה לא סיפק סטודנט זה.

סיכום

שאלה זו חשפה אצל שתי הקבוצות כאחד את התפיסה השגויה כי כאשר נשארו שתי אפשריות שסיכוייהן אינן ברורות ההסתברות להתרחשותן שווה. תפיסה זו נשארה יציבה גם אצל הסטודנטים אשר למדו בעבר קורס בהסתברות אשר טיפל רבות בסוגיות. אולם נראה כי משתתפי הקורס לא יצאו משוכנעים והחשיבה האינטואיטיבית הקודמת נשארה ללא שינוי.

שאלה מס' 3 : בעיית הקלפים

לפניך 3 קלפים:

7	**4**	**10**

לקלף אחד מתוך השלושה יש מספר זוגי משני צידי הקלף, לקלף אחר יש מספר אי זוגי משני צדדיו ולקלף הנוסף מספר זוגי מצד אחד ואי זוגי מצדו השני.
בחדר חשוך מערבבים את הקלפים, בוחרים באקראי קלף אחד מתוך השלושה, מניחים על השולחן ומדליקים את האור. התקבל קלף ועליו מופיע המספר זוגי .

מה ההסתברות שגם מצידו השני של הקלף מופיע מספר זוגי? **נמק!**

הערה:
על שאלה זו ניתן לומר כי הנתון : "קלף עם שני צדדים זוגיים" הוא למעשה נתון שאינו רלוונטי וגורם להטיה. לו הייתה הבעיה מוצגת רק ע"י 2 קלפים ההצלחה הייתה גדולה יותר.

להלן התפלגות התשובות

שאלה מס 1	סטודנטים שנה א+ב		סטודנטים שנה ג'	
	N	%	N	%
תשובה נכונה	3	21%	2	40%
תשובה שגויה	11	79%	3	60%
סה"כ	14	100%	5	100%

ניתוח הממצאים

נימוקים נכונים קבוצה א'

"ישנם 3 מקרים מתוך שישה בהם יש צד זוגי בשניים מתוך השלוש גם בצד השני מופיע מספר זוגי . לכן , ההסתברות המבוקשת היא $\frac{2}{3}$"

מעניין כי סטודנט זה צייר דיאגראמת עץ אך לא הצליח להשתמש בו כך שלבסוף הסתפק בניסוח המילולי בלבד.

נימוקים נכונים קבוצה ב'

הנימוקים זהים לנימוק מס 1 , כאן אין כלל שימוש בדיאגראמת עץ כמו כן שימוש בנוסחת ההסתברות המותנית.
מעניין לציין כי בשאלה זו הסטודנט יהודה לא הצהיר הפעם כי עתה קיימים רק שתי אפשריות ולכן ההסתברות היא 50% , למרות שגם כאן ניתן היה ליפול בתפיסה זו כפי ששגו סטודנטים אשר נימוקיהם יוצגו בהמשך .

דוגמאות לנימוקים שגויים – קבוצה א'

1) נסמן:
A: *שני צדדים זוגי*
B: *צד אחד זוגי*

$$p\left(A/B\right)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

מעניין כי דווקא כאן הסטודנט בחר דווקא להשתמש בצדק בנוסחה הרלוונטית אך הוא לא שם ליבו לכך שיש לקחת בחישוב (במכנה) גם את ההסתברות שהקלף המעורב ייפול על הצד הזוגי.

2) *"ההסתברות היא $\frac{1}{2}$, הסבר: ידוע שהקלף הוא לא אי זוגי משני צדדיו לכן נישארו רק 2 אפשריות לפיכך הסיכוי הוא 1:2 "*

נימוק זה הינו השכיח ביותר מבין כל הנימוקים שהתקבלו, העונים לשאלה זו אומנם צודקים כי לפנינו נשארו שתי אפשריות יחידות אולם אין הם לוקחים בחשבון כי לקלף ששני צדדיו זוגיים יש סיכוי גדול פי 2 לפול על צד זוגי בהשוואה לקלף מעורב.
למעשה אנו רואים מצב שבו פותר השאלה מסתכל על כל קלף כאובייקט אחד מבלי יכולת להתייחס בנפרד לכל אחד מצדדיו של האובייקט, ולטפל בכל צד בנפרד.

תשובה דומה שהתקבלה:
"יש שני קלפים אפשריים שהניחו על השולחן:

צד א'	צד ב'
זוגי	זוגי
זוגי	אי זוגי

לכן "זוגי – זוגי זו אפשרות 1 מתוך 2 "

פתרון זה שייך שוב לאותו סטודנט שנימק עד כה את פתרונותיו באמצעות טבלה .
וגם כאן ההמחשה של הטבלה הוליכה אותו שולל מבלי להתייחס לנתון הרלוונטי "הקלף נפל על צד זוגי" למעשה הנימוק הנ"ל זהה בתפיסה לנימוק מס' 2 .

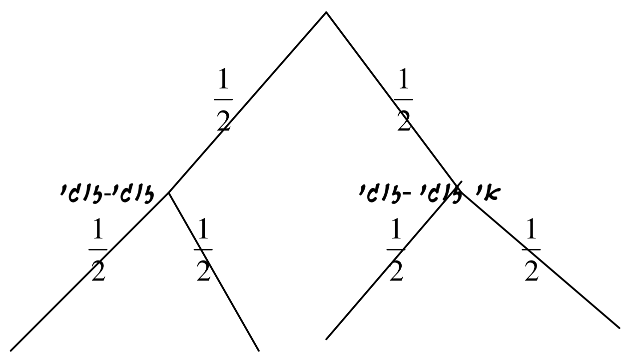
דוגמאות לנימוקים שגויים – שנה ג'

1) *הסיכוי הוא $\frac{1}{4}$,*
נימוק:
נסמן א' = אי זוגי
ז' : זוגי
הצירופים האפשריים: (א,א) , (א,ז) , (ז, א) , (ז , ז)
היות ואנו מעוניינים בצירוף (ז , ז) , לכן הסיכוי הוא 1:4

סטודנט זה (שמעון) בנוסף למשגים שעשו חבריו הוא אף לקח את כל 4 האפשריות עבור מרחב המדגם .

2) פתרון של הסטודנט ראובן:

הפתרון הוא $\frac{1}{2}$ נימוק:



$$P(\text{צד אחד זוגי\שני צדדים זוגי}) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

ראובן בנה עץ המדגים בתחילה את הסיכוי שנבחר אחד משני הקלפים הרלוונטיים אך תשובתו הייתה נכונה לו סימן על הענפים היוצאים מ"זוגי-זוגי" את ההסתברויות 0 ו 1 ולא את ההסתברות $\frac{1}{2}$.

<u>סיכום</u>

אומנם שאלה זו קלה יותר ביחס לשאלה המעורפלת של "בחירת היו"ר " ונראה כי מי שפתר נכון את השאלה הנוכחית הסביר בפשטות את פתרונו ע"י היתרון בספר הצדדים הזוגיים ביחס לאי זוגיים. אולם למרות זאת לא ניתן לראות שיפור בסך כל בתוצאות שהתקבלו אצל שתי הקבוצות כאחד.
גם בבעיה מסוג זה קיימת אצל הנבדקים התחושה החזקה כי היות ונשארו 2 אפשריות לשתיהן משקל שווה מבחינה הסתברותית .

<u>שאלה מס' 4 : בעיית השמיעה</u>

משרד הבריאות ממליץ לערוך בדיקות שמיעה שגרתיות לכל תינוק שנולד , בטענה כי לאחד מכל כאלף תינוקות קיימת בעיית שמיעה כלשהי.
משרד הבריאות מדווח כי הבדיקה שהוא מבצע מדויקת תמיד במקרים בהם לתינוק אכן קיימת בעיית שמיעה .

רק באחוז אחד מהמקרים שלתינוק אין בעיית שמיעה היא מתריעה בטעות שיש לו.

למשפחת לוי נולד במזל טוב תינוק !
הם ביצעו את בדיקת השמיעה לתינוקם וקיבלו כי התוצאה חיובית .
מה הסיכוי כי לתינוקם בעיית שמיעה? **נמק!**

להלן התפלגות התשובות

שאלה מס 1	סטודנטים שנה א+ב		סטודנטים שנה ג'	
	N	%	N	%
תשובה נכונה	5	36%	3	60%
תשובה שגויה	9	64%	2	40%
סה"כ	14	100%	5	100%

ניתוח הממצאים

נימוקים נכונים קבוצה א'

1) השיעור הבסיסי באוכלוסיה: אחד מאלף , בכל המקרים האלו תתקבל תוצאה חיובית.

בנוסף , באחוז אחד מהשאר תתקבל תוצאה חיובית , כלומר ב $0.01 \bullet 999 = 9.99$

סה"כ ההסתברות לתשובה חיובית היא: $\frac{10.99}{1000}$

ההסתברות המותנית היא: $\frac{1}{11} \approx \frac{1}{10.99} = \frac{0.001}{0.01099}$ **=** $\frac{\text{בעיית – שמיעה}}{\text{תוצאה – חיובית}}$

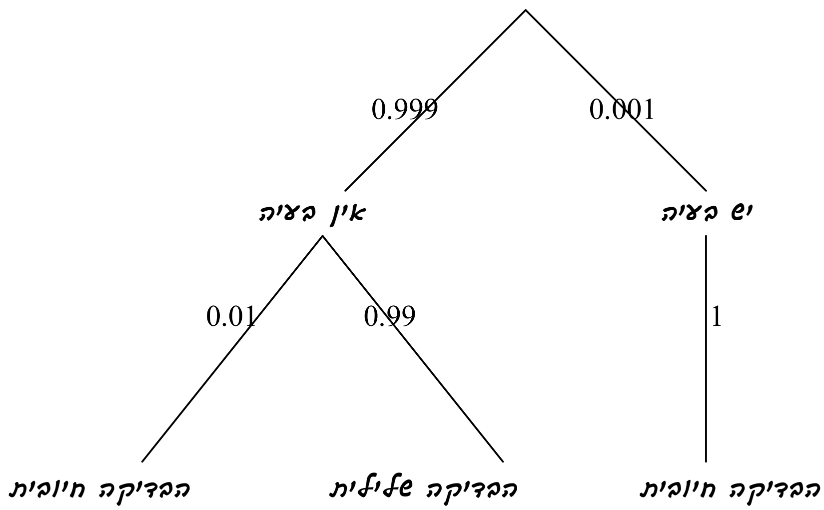
הסיכוי שלתינוק יש בעיית שמיעה היא בערך: $\frac{1}{11}$

2) נתבונן בטבלה הבאה:

	בבדיקה שומע	בבדיקה לא שומע	
שומע		$\frac{999}{100000}$	$\frac{999}{1000}$
לא שומע		$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$
			1

לכן ההסתברות המותנית נקבל: $\frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{1000}+\frac{999}{100000}} = 0.09099 \approx 0.091$

3) הפתרון הוא:



$$\frac{0.001}{0.001+0.00999}=\frac{0.001}{0.01099}=0.09099=\frac{1}{10.99}$$

<u>נימוקים נכונים קבוצה ב'</u>

2 סטודנטים נימקו את תשובתם ע"י עץ באופן זהה לנימוק מס' 3 וסטודנט אחד נימק מילולית באופן זהה לנימוק מס' 1.

<u>דוגמאות לנימוקים שגויים – קבוצה א'</u>

1) הילד נבדק והתשובה חיובית , ידוע כי 1% שהבדיקה טועה
$\Leftarrow$ 99% שלילד יש בעיית שמיעה

תשובה זו מאפיינת את רוב הנבדקים אשר טענו כי קיים סיכוי של 0.99 שיש לתינוק בעיית שמיעה אחרי תשובה חיובית של הבדיקה. בתשובתם זו הם מייחסים חשיבות רק לאחוז הגבוהה של דיוק הבדיקה.

<u>תשובה דומה שהתקבלה:</u>

הסיכוי שלתינוק אין בעיית שמיעה ואותר כחיובי הוא $\frac{1}{100}$

הסיכוי שלתינוק יש בעיית שמיעה ואותר כחיובי הוא 1

הסיכוי לבעיית שמיעה הוא $\frac{1}{1000}$ <u>אולם נתון זה איננו רלוונטי!!!</u>

לכן התשובה היא:

$$1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$$

אם עד כה קיבלנו את ההסתברות הנ"ל (בנימוק מס' 1)הפעם פותר השאלה דאג לציין במפורש כי הוא במכוון מתעלם מהשיעור הבסיסי של המחלה היות ולטענתו נתון זה לא מוסיף ולא גורע לחישוב ההסתברות

(2

	בבדיקה שומע	בבדיקה לא שומע	
שומע	X	$\frac{999}{10000}$	$\frac{999}{100000}+x$
לא שומע	$\frac{1}{1000}-x$	0.98901	
		$\frac{999}{1000}$	**1**

$$P=\frac{X}{\frac{999}{100000}+X}$$

"כאילו חסר בשאלה זו נתונים או שלא הבנתי"...

על פניו נראה שהפותר אכן לא הבין את הנתון הרלוונטי: "משרד הבריאות מדווח כי הבדיקה שהוא מבצע **מדויקת תמיד במקרים בהם לתינוק אכן קיימת בעיית שמיעה**".
בעיה בהבנת הנקרא הביאה אותו להשתמש בנעלם x אשר למעשה ידוע לנו.

2) *נסמן:*
A: *יש בעיית שמיעה*
B: *אובחן שיש לו בעיה*

$$p(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{1+0.01}=0.99$$

ראשית הפותר לא שם את ליבו לעובדה כי במכנה קיבל הסתברות גבוהה מ 1
שנית הפותר ערבב בין שכיחות להסתברות
לו התכוון להשתמש ב 1 לצורך תיאור שכיחות המחלה מתוך 1000 ילדים ,הרי במקום לרשום 0.01 היה צריך לציין כי קיימים 9.99 ילדים המאובחנים כחולים
ולהפך
לו רצה לציין את שכיחות המחלה ע"י הסתברות הרי שהיה עליו לרשום במקום המספר 1
את השבר 0.001
הערבוב בין המושגים הוביל אותו לטעות למרות שהשימוש בנוסחה היה בכיוון הנכון.

3) *הסיכוי שלתינוק בעיית שמיעה היא :* $\frac{1}{1000}$ *ואין זה משנה מה היו תוצאות הבדיקה*

זו תשובה אשר למעשה מתעלמת ממושג ההסתברות המותנה
הפותר לא מייחס חשיבות לכל הנתונים מסביב אשר עשויים לצמצם את מרחב הדגימה , ומתייחס רק לשיעור הבסיסי של המחלה

4) *הסיכוי כי לתינוק בעיית שמיעה היא:*

$$p = \frac{1}{1000} \bullet \frac{1}{100}$$

הפותר ניסה להכפיל שתי הסתברויות $p(A \cap B)$: גם התינוק חולה וגם המכשיר התריע בטעות שהוא חולה

ברור כי לא רק השימוש בהכפלה הוא שגוי אלא גם הצבת ההסתברות הלא רלוונטית במכפלה

<u>דוגמאות לנימוקים שגויים –קבוצה ב'.</u>

1) *ניקח לדוגמא אוכלוסיה של 10000 ילדים, 10 מתוכם בעיית שמיעה, 9990 מתוכם אין בעיית שמיעה.*

99.9 מאובחנים בטעות כחולים

לכן נחבר 99.9+10 שהם סה"כ המאובחנים כחולים

לכן הסיכוי שלתינוק בעיית שמיעה היא:

$$\frac{99.9+10}{1000} = \frac{109.9}{10000} = 0.01099 = 1.099\%$$

אומנם סטודנט זה גילה הבנה בניתוח הנתונים ואף ניסה לבנות מודל מתאים לבעיה אך לא השתמש נכון במושג ההסתברות. במקום לחלק את מס' החולים במספר המאובחנים הוא חילק את מס' המאובחנים כחולים באוכלוסיית הנבדקים .

<u>סיכום</u>

אומנם בשאלון הראשון מרבית הנבדקים מקבוצה א' שגו בתשובתם בשאלה אשר דרשה יישום של חוק בייס אולם למרות שצפיתי כי בשאלון השני אראה שיפור בתשובות הנכונות משום שכאמור השאלון השני דרש להראות דרך מנומקת המלווה בחישובים מתאימים וחישוב כזה איננו קשה כאשר נדרש להשתמש נכון בנוסחה המתאימה. למרות צפי זה מסתבר כי בשאלה זו מרבית הנבדקים לא ניתחו נכון את הנתונים המוצגים בשאלה, התעלמו מנתונים רלוונטיים וחלקם התעלמו מהשיעור הבסיסי של המחלה וייחסו חשיבות רק לדיוק של הבדיקה.

מניתוח הממצאים עולה כי הנבדקים המשתייכים לקבוצה ב' הראו הבנה של הנתונים המופיעים השאלה, נגשו נכון לשאלה ונראה כי החשיפה לדילמות מעין אלו בקורס סייעה להבנה של חוק בייס ושימושיו.

<u>שאלה מס' 5 : בעיית הגורים</u>

5) ידוע כי ההסתברות להולדת ולד ממין זכר שווה להסתברות ללידת ולד ממין נקבה.
הכלבה של גלית המליטה 3 גורים.

דנה: "כמה נקבות המליטה הכלבה שלכם?"
גלית: "נחשי".
דנה: "הממ...נקבה אחת לפחות".
גלית: "נכון!"
דנה: "בעצם אני מנחשת שעוד נקבה!"
גלית: "את צודקת!! עכשיו נשאר לך רק לנחש את מינו של הגור השלישי"

שאלה:
מה הסיכוי שהגור הנוסף הינו ממין זכר? **נמק!**

להלן התפלגות התשובות

שאלה מס 1	סטודנטים שנה א+ב		סטודנטים שנה ג'	
	N	%	N	%
תשובה נכונה	1	7%	3	60%
תשובה שגויה	13	93%	2	40%
סה"כ	14	100%	5	100%

ניתוח הממצאים

נימוקים נכונים קבוצה א'.

(התקבלה כאמור רק תשובה נכונה אחת)

1) *מספר הצירופים האפשריים הם: 8*

הסיכוי ל 2 נקבות לפחות הוא $\frac{4}{8}$

הסיכוי ל 2 נקבות וזכר אחד הוא: $\frac{3}{8}$

לכן

$$P\left(\text{זכר}-\text{נוסף}\Big/ 2-\text{נקבות}\right)=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{8}}=\frac{3}{4}$$

נימוקים נכונים קבוצה ב'

כל הסטודנטים אשר נימקו נכונה נימקו באותה דרך.

דוגמאות לנימוקים שגויים –קבוצה א'.

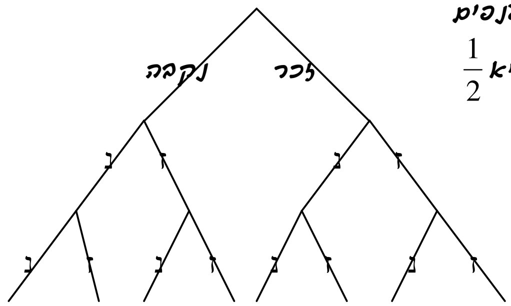
1) *המאורעות בלתי תלויים, לכן העובדה שהיו שתי המלטות של נקבה אינה משפיעה על הסיכוי שהייתה גם המלטה נוספת של זכר, לכן הסיכוי הוא קבוע ושווה ל* $\frac{1}{2}$.

תשובה דומה שהתקבלה.

שאלה זו היא כמו בהטלת מטבע אשר הופיע בשאלון הקודם וגם כאן הסיכוי הוא $\frac{1}{2}$ כי אין קשר בין גור אחד לשני.

פותר השאלה לא מבחין בין אירוע שקרה (בשאלה הנוכחית) לבין אירוע שעתיד לקרות (בשאלה על "הטלת מטבע" שאלון א').

2) *נתבונן בעץ שלפנינו,*
לכל אחד מהענפים
ההסתברות היא $\frac{1}{2}$



קיימים סה"כ 8 צירופים,

ומתוכם 3 צירופים של 2 בנות ו 1 בן אחד $\Leftarrow$ ההסתברות $\frac{3}{8}$

$$\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

כאן יש חוסר הבחנה בין המשמעות של $p\left(A/B\right)$ לבין $p(A\cap B)$.

דוגמאות לנימוקים שגויים –קבוצה ב'.

1) הסיכוי הוא 50%.
נימוק: העובדה שנולדה קודם נקבה לא משפיעה על הסיכויים ללידת זכר או נקבה בלידה הבאה.

כאן ישנה בעיה בהבנת הנקרא, והפותר חשב כי הדיון בשאלה הוא על סדר הלידות .

סיכום

שאלה זו בדקה הבנה של מושג ההסתברות המותנית וניתוח נכון של הנתונים המוצגים בשאלה.
התשובות שהתקבלו אצל קבוצה ב' חשפו נתח נכבד מהשגיאות המאפיינות את הבלבול הקיים אצל מרבית האוכלוסייה סביב מושג ההסתברות המותנית. יחד עם זאת נראה ששאלה זו כמו קודמתה חשפה את התחומים בהן נמצא יתרון של הנבדקים מקבוצה ב' אשר השתתפו בעבר בקורס בהסתברות לעומת אלו שטרם למדו את הקורס .

שגיאות אופייניות-שאלון ב'

14 סטודנטים ענו על 4 שאלות (פרט לשאלה מס' 1) לכן N=56 שאלות בקבוצת הסטודנטים של שנים א+ב (קבוצה א').

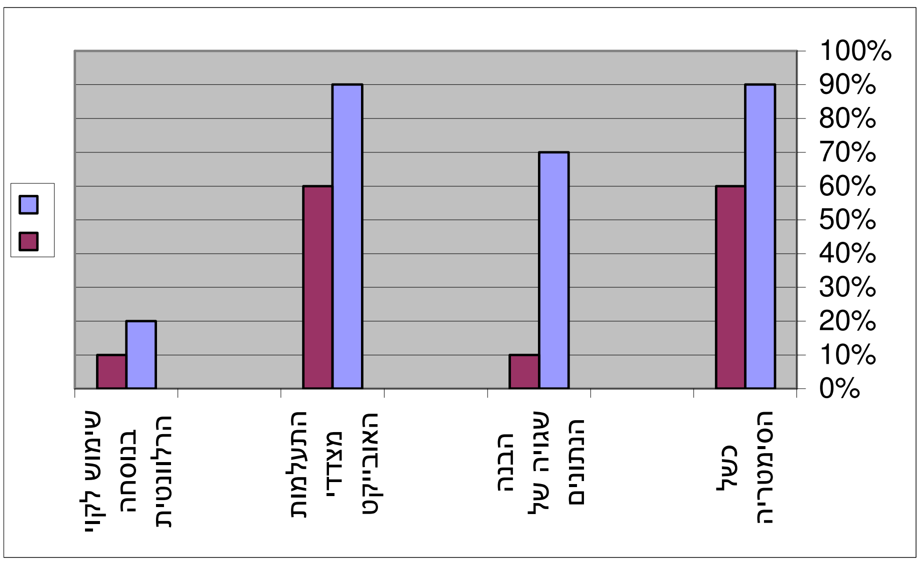
N=20 שאלות בקבוצת הסטודנטים של שנה ג'.
הערה : לעיתים קיים פתרון הכולל בתוכו יותר מתפיסה שגויה אחת.

נבחין בין שתי חלוקות עיקריות: שגיאות המשותפות לשתי הקבוצות כאחד, ושגיאות המאפיינות רק את קבוצה א'. מתוך הממצאים עולה כי לא קיימות שגיאות המאפיינות רק את קבוצה ב'.

להלן השגיאות אשר אפיינו את שתי הקבוצות כאחד אך במינונים שונים:

- כשל הסימטריה
- הבנה שגויה של הנתונים המוצגים בשאלה
- התמקדות באובייקט והתעלמות מצדדיו
- שימוש לא נכון בנוסחאות הרלוונטיות.

להלן התפלגות השגיאות אצל שתי הקבוצות: (עמודה ימנית: קבוצה א', עמודה שמאלית: קבוצה ב')

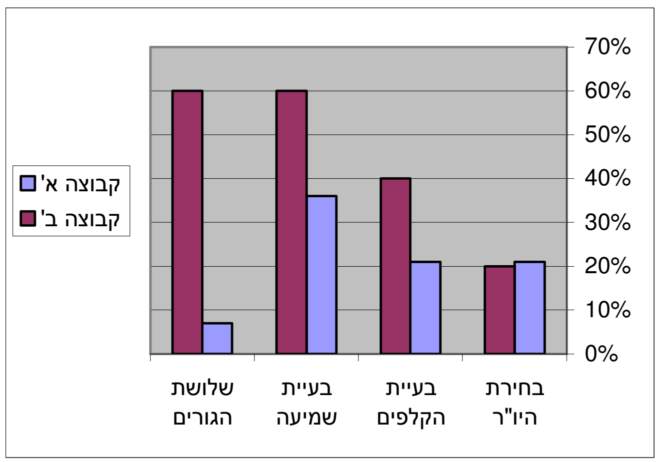


לעומתן השגיאות אשר ייחדו את הקבוצה הראשונה בלבד:

השגיאה	קבוצה א'
1) חוסר הבחנה בין המשמעות של $p\left(A \cap B\right)$ לבין $p\left(A/B\right)$	$\frac{44}{56}=$ **79%**
2) התייחסות לשיעור הבסיסי בלבד	מאפיין רק את השאלה על "בעיית השמיעה" $\frac{2}{14}=$ **14%**
3) התעלמות מהשיעור הבסיסי והתחשבות באחוז הדיוק הגבוה של הבדיקה	מאפיין רק את השאלה על "בעיית השמיעה"

	$\frac{5}{14}$ = **36%**
4)חוסר הבחנה בין הסתברות עבור מקרה שקרה לבין הסתברות עבור מקרה העתיד לקרות : "כשל ציר הזמן"	מאפיין רק את השאלה על המלטת הגורים $\frac{5}{14}$ = **36%**
5) התעלמות מהעובדה שמדובר בהסתברות מותנית ולא הסתברות רגילה	$\frac{40}{56}$ =**71%**
6) התעלמות מנתונים רלוונטיים	$\frac{13}{56}$ = **23%**
7) התעלמות <u>מכוונת</u> מנתוני השאלה בטענה שהם לא רלוונטיים	מאפיין רק את השאלה על "בעיית השמיעה" ובחירת היו"ר: $\frac{5}{28}$ =**18%**

<u>סיכום שאלון ב'</u>



מתוך ניתוח כללי של התשובות העולות בשאלון זה נראה כי בשאלות הבודקות יישום והבנה של שני מושגים בהסתברות: חוק בייס והסתברות מותנית (שגרתית) ישנה עדיפות לתשובות נכונות אצל הסטודנטים אשר למדו בעבר את הקורס אשר טיפל בסוגיות אלו. אולם בשאלות לא שגרתיות ("בחירת הי"ר " ו" בעיית הקלפים") נכשלו אף חברי קבוצה ב' הנחשבים למומחים ובעלי ניסיון בתחום.
"בחירת היו"ר היא שאלה הזהה בעקרון לבעיית שלושת האסירים או לגרסה השנייה שלה: "מונטי הול".
בשאלה זו נמצא אפילו שוויון בין שתי הקבוצות ואין שום ישום של עקרונות אשר נלמדו בעבר בקורס בהסתברות.

פרק 4: סיכום דיון ומסקנות:

למידת עקרונות ההסתברות הוא תהליך שאין לו סוף. ברוב פרקי המתמטיקה, לאחר שתלמידים ומורים מגיעים לשליטה מלאה בביצוע, הם אמורים לפתור כל בעיה מבלי להיתקל בהפתעות. בתחום ההסתברות ניתן להעלות אינסוף וריאציות ודוגמאות המתייחסות לכללים הבסיסיים. כפי שראינו מניתוח הממצאים הקושי שחוזר ועומד בפני מורים רבים, וגם הבקיאים בתחום , הוא לתרגם את הבעיה העכשווית לעיקרון המתאים.
בעבודה זו השוויתי בין אוכלוסיית מורים למתמטיקה, אשר טרם למדו קורס בחשיבה הסתברותית במסגרת תוכנית "רוטשילד ויצמן " ללימודי תואר שני, לבין אוכלוסיית מורים למתמטיקה אשר כן למדו קורס זה ונחשבים לבקיאים בתחום.
בעבודה זו התמקדתי בשני המושגים :"הסתברות מותנית" ו-" חוק בייס" ובדקתי האם המורים למתמטיקה בשתי הקבוצות מבינים לעומק מושגים הסתברותיים אלו או שהם ממשיכים להחזיק בתפיסות אינטואיטיביות מוטעות .

מתוך ניתוח הממצאים עולה כי שני השאלונים במחקר זה חשפו תפישות שגויות אצל רוב הנבדקים מקבוצה א' ואף אצל חלק גדול מהנבדקים מקבוצה ב'.
התפיסה האינטואיטיבית החזקה ביותר אשר אפיינה את שתי הקבוצות כאחד הינה כשל הסימטריה.
תפיסות שגויות נוספות אשר אפיינו את שתי הקבוצות כאחד אך במינונים שונים הינם: ניתוח שגוי של האינפורמציה המוצגת בשאלה ושימוש שגוי בנוסחאות הרלוונטיות.

אולם בשאלות אשר דרשו יישום והבנה של חוק בייס ניתן לראות כי אחוז הנבדקים בקבוצה ב' אשר ענה נכונה בבעיות אלו כפול ביחס לאחוז הנבדקים בקבוצה א'.
בפתרונות אשר הוצגו ע"י חלק מהסטודנטים המשתייכים לקבוצה א' נראה בבירור כי קיימת חוסר הבנה של משמעות מושג ההסתברות המותנית ושימוש לא נכון בנוסחת בייס. חלק גדול מהנבדקים הראה התעלמות מהשיעור הבסיסי של האירוע או לחילופין התחשבות באחוז הדיוק הגבוה של הבדיקה אשר הוצגה בשאלה. בעוד שאצל הסטודנטים המשתייכים לקבוצה ב' לא נחשפו שגיאות מעין אלו.

מניתוח הממצאים עולה אם כן כי בעוד שקיים יתרון קל לקבוצה ב' בתפיסתם של מושגים בהסתברות מותנית הרי שבהבנת השימוש בחוק בייס הפער לטובת קבוצה ב' אשר למד את הקורס בהסתברות גדול באופן משמעותי.

הקורס בסטטיסטיקה והסתברות אשר נתן בתוכנית "רוטשילד ויצמן" לווה ע"י ספרם של עמוס טברסקי ו-ורדה ליברמן : "חשיבה ביקורתית". ספר זה מציג לקורא שיקולים מתודולוגיים וסטטיסטיים רבים לצד עקרונות פסיכולוגיים של שיפוט בתנאי אי ודאות. מחברי הספר מטפלים רבות בסוגיות של בדיקות רפואיות, אמינותן ודיוקן של בדיקות מסוגים שונים מול אחוזי טעויות אפשריים.
ההכרעה האם האדם חולה או מה הסיכוי שנאשם חף מפשע הינה סוגיה עדינה אשר ללא קריאה זהירה של הנתונים ושימוש מושכל בחוק בייס עלול להוביל אותנו למסקנות אינטואיטיביות שגויות.
נראה כי הסטודנטים אשר למדו את הקורס וקראו את מחקריו של טברסקי וכהנמן השכילו לטפל בסוגיות מעין אלו בכלים המתאימים העומדים לרשותם .
לעומת יישומו של חוק בייס ניתן לראות בבירור כי בשאלות הלא שגרתיות שהוצגו במחקר: "הפרס השבועי" ו "בחירת היו"ר ", נטו רוב הנשאלים להשתמש באינטואיציה שגויה ונראה שההתנסות עם בעיות מסוג זה בקורס לא סייע להם. נראה כי בעיות מסוג זה הינן מורכבות מכדי לצפות שידע אינטואיטיבי או אפילו ידע שנלמד ותורגל יסייע בהתגברות על ההטיה האינטואיטיבית.

יש לציין כי גם כאשר הוצגו במהלך הקורס סוגיות מעין אלו הסטודנטים נטו לקבל את פתרונם באופן ספקני, ונשארו עם התפיסה החזקה כי אם לאור הנתונים החדשים קיימות כעת 2 אפשריות , ההסתברות היא 0.5 לכל מאורע.

הבעיה הקלאסית מסוג זה : "פרדוקס מונטי הול" אשר הוצגה בקורס לא הניבה שינוי מהותי בתפיסתם של רוב משתתפי הקורס (פרט לראובן אשר הוזכר בניתוח ממצאי המחקר, ואשר הגיע מראש לקורס ללא תפיסה שגויה זו) .

רוב המשתתפים סרבו להשתכנע ואף הביאו דוגמאות ונימוקים סותרים לפתרון המוצע. עולה מתוך ממצאי מחקר זה כי רובם אף המשיכו בתחושת הספק שלהם עד היום. (בפרט הצגתי את הטיעון של יהודה בניתוח ממצאי המחקר אשר טען כי מבחינתו הממצא החדש שמאחורי אחת הדלתות לא מסתתר הפרס מעביר אותו לאירוע חדש אשר הסתברות לנצח כעת היא 0.5).

בראיון שקיימתי עם אחד מהנבדקים המשתייך לקבוצה א' טען בפני את הדברים הבאים:

"יש הרבה מאוד דברים לא הגיוניים בהסתברות, במיוחד השאלה עם שלוש הדלתות והפתרון המוזר שלה. אני לא מקבל את הפתרון הזה ולדעתי כל ההסתברות הזו היא רק נוסחאות וזה לא באמת כך בחיים. במציאות האמיתית הסיכוי בשאלת הדלתות בוודאי עולה לחצי ורק בנוסחות ההסתברותיות הוא נשאר שליש...

נסי לשכנע אותי בלי נוסחאות למה ההסתברות לא משתנה?"...

למעשה המשפט האחרון של מרואיין זה, הביא אותי לבחון את האפשרות לכתיבת מדריך למורה המלווה בהסברים משכנעים יותר לסוג זה של בעיות.

אנו רואים כי קיימות תפיסות ואינטואיציות שגויות קשות לשינוי אצל בני האדם בכלל, אצל מורים למתמטיקה בפרט, ואף אצל כאלו אשר רכשו ידע בתחום. ממצא זה תואם את מחקריהם של Garfield & Ahlgren, (1988) אשר הגיעו למסקנה כי הסקות הסתברותיות מוטעות הן נפוצות, יציבות, דומות בכל שכבות הגיל וקשות לשינוי.

נקודה נוספת הראויה לדיון מעלה כי בעוד שבשאלת הקלפים 80% מקבוצה ב' שגו בטענתם שהסיכוי שמצידו השני של הקלף מספר זוגי הוא 0.5 , הרוב המכריע של קבוצה ב' (כולל יהודה) לא נפלו בתפיסה שגויה זו, ונזהרו להבחין בין מספר הצדדים בעלי מספר זוגי.

אומנם שאלה זו קלה יותר לתפיסה מאשר פרדוקס "מונטי הול" (ובגרסה שלי : "הפרס השבועי" ובחירת היו"ר "), אך הפתרון הזהיר שאפיין את רוב חברי הקבוצה נובע כאן אולי מהניסיון שרכשו בניתוח מצבים ובשיפוט זהיר .

מאפיין זה של ניתוח מצבים ובחינה זהירה של סיטואציות שונות בא לידי ביטוי גם בשאלה האחרונה של שאלון ב': מתוצאות המחקר עולה כי בעוד שרק סטודנט אחד(7%) בקבוצה א' הבין היטב וענה נכונה על "בעיית הגורים" הרי ש 60% מהסטודנטים של קבוצה ב' פתרו אותה כיאות.

ניתוח הטעויות העולות מתשובותיהם מגלה בעיה בהבנת הסיטואציה המתוארת בשאלה, אשר איננה שייכת דווקא לטיב החשיבה ההסתברותית של הנחקרים.

ידוע כי אחד הגורמים הדומיננטיים ביכולת לפתור בעיות בהסתברות הוא עצם ניסוח השאלה.

מכיוון שברבות מהשאלות בהסתברות יש תיאור של סיטואציה מהחיים, ועל הנחקר לפענח את האינפורמציה הרלוונטית ולקשר אותה לעקרונות הסתברותיים, הרי שאופן ניסוח השאלה מהווה גורם חשוב במחקר.

דוגמא נוספת הממחישה עקרון זה הינה "בעיית הקלפים". מניתוח הממצאים של שתי הקבוצות עולה כי מיעוט מהנשאלים מיקדו נכון את הבעיה בצדדים של הקלפים ולא בקלפים עצמם.

ראינו בדוגמא זו כי ע"י ניסוח מגמתי, עודף אינפורמציה וצורת הצגה ניתן להכשיל בקלות יחסית נשאלים, שבאופן עקרוני יודעים את מנגנוני הבעיה, ולו הצגנו בפניהם בפשטות רק את 2 הקלפים הרלוונטיים הסבירות שהיו טועים הייתה נמוכה הרבה יותר.

שגיאה אופיינית זו של הבנה שגויה של הסיטואציה המוצגת בשאלה באה לידי ביטוי ב 71% מתשובותיהם של חברי קבוצה א' בהשוואה ל 10% מחברי קבוצה ב'.

ניתוח ניסוחים הקשורים בהסתברות והסתכלות ביקורתית וזהירה על ממצאים ונתונים סטטיסטיים והסתברותיים הובילה את המורים שהשתתפו בקורס להנחה כי בפתרון בעיות בהסתברות יש חשיבות מכרעת לניסוח הבעיה. ובתחום זה נמצא יתרון בולט של קבוצה ב' על קבוצה א'.

השילוב בין יישום של עקרונות מסוימים הנלמדים בהסתברות לבין התעלמות מעקרונות אחרים הנוגדים את האינטואיציה החזקה מתיישבים מצד אחד עם מחקריהם של טברסקי וכהנמן (1982) וכן שונסי (1992) אשר הגיעו למסקנה כי הסקה סטטיסטית והסתברותית לא בהכרח מתיישבת עם המודלים הפורמאליים של ההסתברות התיאורטית.
לעומת חוקרים אחרים אשר הראו במחקריהם כי אנשים כן מיישמים עקרונות סטטיסטיים והסתברותיים שלמדו בעבר ופותרים בצורה אפקטיבית בעיות שדרשו מהם (Nisbett, Krantz, Jepson & Fong, 1982).

יש לציין כי אחד האמצעים היעילים שסייע בקורס להוראתם של מושגים בהסתברות הינו השימוש בסימולציות באמצעות המחשב אשר העשיר והעמיק את הלימוד. המחשב חולל לנגד עינינו הדמיות של אירועים שונים, אשר חזר עליהם במהירות מאות ואלפי פעמים. אמצעי זה הצליח להציג לנו פתרונות מהחיים שעד כה מצאו פתרונות רק באמצעות נוסחאות. אחד מהמושגים החשובים שנלמדו בקורס והמחשתם יושם ע"י השימוש במחשב הינו "חוק המספרים הגדולים", אשר מהווה אבן יסוד בהוראת ההסתברות.
העיקרון היסודי שבתורת ההסתברות הינו שעל אף שאין לדעת את התוצאות של כל מאורע בנפרד, אף שההסתברות שלו ידועה, הרי שאם המאורע חוזר על עצמו פעמים רבות, התוצאה הסופית תלך ותתקרב להסתברות הנתונה, הסטייה היחסית מהממוצע תלך ותפחת ככל שהמדגם גדול יותר. זהו למעשה עקרון המספרים הגדולים ורגישות לגודל המדגם. היישום של עקרון זה מסייע לעיתים קרובות בפתרון בעיות, כי אף אם לא תמיד יודעים באיזה אלגוריתם מתאים יש להשתמש הרי שתמיד ניתן לתרגם את הבעיה למאות אירועים שחוזרים על עצמם וכך לקבל הסתכלות רחבה על הבעיה ויכולת לקרב אותנו לפתרון ההסתברותי הנכון, וזה אף היה הרציונאל שלי בכתיבת המדריך לפתרון בעיות לא שגרתיות בהסתברות.

מצאנו כי גם מורים למתמטיקה בעלי כושר גבוה בפתרון בעיות מתמטיות, עשויים להתקשות בבניית דרך מתאימה לפתרון הבעיה הספציפית, בהבנת הטיעונים הלא פורמאליים, ובבחירת הנוסחה הנכונה למצב החיים המתואר בשאלה .

במחקר זה קיבלתי הוכחה לכך כי הוראת ההסתברות דורשת גישה מקורית וייחודית. בעיות שונות בהסתברות מתאפיינות בכך שהן משלבות ידע של נוסחאות וחוקים מתמטיים עם היכולת ליישם אותם במצבי חיים.
המסקנות העולות מתוצאות המחקר הם כי גם מורים למתמטיקה בעלי ניסיון בפתרון בעיות במתמטיקה המכירים את הנוסחאות הנכונות ויודעים להשתמש בהם היטב, ניגשים לפתרון בעיות בהסתברות עם ההטיות והכשלים המאופיינים לתחום זה. כשלים אלו גורמים אף למורים מומחים שנחשפו לקורס בחשיבה הסתברותית לחזור ולהיכשל בחלק מהבעיות הגורמות להטיה (Tversky & Kahneman, 1974). בניתוח הממצאים שהתקבלו גילינו כי קיימים מגוון של קשיים בפתרון בעיות בהסתברות והם: תרגום הבעיה העכשווית לעקרון המתאים, בניית נרטיב המאפיין את הבעיה הספציפית, הבנת הטיעונים הלא פורמאליים ובחירת הנוסחה הנכונה למצב החיים המתואר בשאלה.
תחום ההסתברות מתאפיין בכך שכל אחד מאיתנו נתקל יום יום במצבים הדורשים הפעלת שיקולים הסתברותיים. מבדיקת השיקולים ההסתברותיים שהפעילו הנבדקים במחקר עולה כי בהבנת עקרונות הסתברותיים מעורבת האינטואיציה שלנו באופן דומיננטי ואף אצל המומחים בתחום.
הוראת ההסתברות אם כן דורשת אמצעיים ייחודיים ומקוריים, למידת הסתברות באופן אלגוריתמי מתמטי אין בה די כדי לאפשר הבנה עמוקה, הפנמה ויישום של חוקים בבעיות משמעותיות בחיים. בכלים נכונים ובאמצעים מתאימים ניתן יהיה לשפר במידת מה את שיקול הדעת ואת האינטואיציות בהסתברות.

.

בנספח א' הוספתי המלצות לעבודה עם בעיות לא שגרתיות בהסתברות עבור מורים המלמדים מתמטיקה ברמות של 4 ו 5 יחידות

ביבליוגרפיה

א. קופרמן (1998), " הסתברות מותנית כמקור לפרדוקסים ותוצאות מפתיעות" על"ה 22.

ט . קוטינסקי (2005) פרקטיקה של הוראת ההסתברות : ניתוח השוואתי של הוראת הסתברות בכיתות ברמות לימוד שונות.
עבודת גמר לשם קבלת תואר דוקטור לפילוסופיה. רחובות : מכון ויצמן.

י. סגל (2006) תהליכי חשיבה אצל תלמידי תיכון.
עבודת גמר לשם קבלת תואר דוקטור לפילוסופיה . תל אביב: אוניברסיטת בר- אילן.

ליברמן , ו. וטברסקי , ע.(1996), חשיבה ביקורתית . תל אביב: האוניברסיטה הפתוחה.

ד"ר בועז סנג'רו וד"ר מרדכי הלברט: "הסכנה שבהרשעה על סמך נשיפה".
ספרו של דויד וינר - על משפט פלילי ואתיקה, 2009

Casscells, W.,Schoenberger, A. & Graboys, T.B. (1978). Interpretation by physicians of clinical laboratory results. New England Journal of Medicine,299, 999-1001.

Cosmides, L. & Tooby, J. (1996). Are humans good intuitive statisticians after all?: Rethinking some conclusions of the literature on judgment under uncertainty. Cognition, 58, 1-73.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of Probabilistic Thinking in Children.* Reidel: The Netherlands.

Fischbein, E. & Schnarch, D.: 1997, The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 96-105.

Fong, G. T., Krantz, D. H., and Nisbett, R. E. (1986), "The Effects of Statistical Training on Thinking About Everyday Problems," *Cognitive Psychology,* 18, 253-292

Fischbein, E. & Schnarch, D.: 1997, The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 96-105

Garfield, J., & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning probability and statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*, 44-63.

Garfield, J., and Ahlgren, A. (1988), "Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics:
Implications for Research," *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 44-63

Garfield, J. B. (1995), "How Students Learn Statistics," *International Statistical Review,* 63, 25-34.

Gigerenzer, G. (1996), "On Narrow Norms and Vague Heuristics: A Reply to Kahneman and Tversky," *Psychological Review,* 103(3), 592-596

Gigerenzer, G., & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. Psychological Review, 102, 684-704

Kahneman, D., Slovic, P., and Tversky, A. (1982). *Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases,*
Cambridge: Cambridge University Press.

Peterson, C. R., & Beach, L. R. (1967) Man as an intuitive statistician. Psychological Bulletin 68: 29-46.

Shepard, R. N. (1984). Ecological constraints on internal representation: Resonant kinematics of perceiving, imagining, thinking, and dreaming. Psychological Review, 91, 417--447.

Leslie, A. (1988). The necessity of illusion: Perception and thought in infancy. In L. Weiskrantz (Ed.), Thought without language (pp. 185-210). Oxford, United Kingdom: Clarendon Press.

Nisbett, R. E., Fong, G. T., Lehman, D. R., and Cheng, P. W. (1987), "Teaching Reasoning," *Science,*
238, 625-631.

Nisbett, R. E., Krantz, D. H., Jepson, C., & Fong, G. T. (1982). Improving inductive inference.
In D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (Eds.), Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. New York: Cambridge University Press.

Shaughnessy, J. M. (1992), "Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions," in
Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, ed. D. Grouws, New York: McMillan,
pp. 465-494.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: heuristics and biases. Science, 185, 1124-1131.

Truran, J. M. (2001). The teaching and Learning of Probability, with Special Reference to South Australian Schools from 1959-1994. Dissertation, University of Adelaide.

.

בעיות לא שגרתיות בהסתברות

מדריך למורה

מבוא

הסתברות היא ענף מתמטי אשר במסגרתו ניתן להציג לתלמידים בעיות ופרדוקסים הקוראים תגר על השכל הישר. בפרדוקסים נתקלים התלמידים בניגודים וסתירות, דבר המעורר הפתעה והתבוננות וכתוצאה מכך גם מחשבה יצירתית. שאלות שכאלו רובן בהתחלה קשות לפיתרון אך מהוות עניין ושעשוע למרבית מהתלמידים.
בסיטואציות רבות אנו נדרשים לבחור בין 2 אפשריות שסיכוייהן אינן ברורים. פעמים נראה כי בשתיהן חסרה אינפורמציה ואנו אמורים להחליט במצב של אי–וודאות, במרבית ממקרים אלו האינטואיציה שלנו אומרת לנו כי שתי ההסתברויות שוות, ולא כן הדבר .
על בסיס זה נולדו כמה חידות ופרדוקסים מרתקים, היכולים לשמש כלי דידקטי ממעלה ראשונה.
העיקרון הנרכש בחידות אלו הוא, שההסתברות הפשוטה לבחור באחד מתוך n אפשריות היא $\frac{1}{n}$ אם ורק אם לכל n האפשריות ההסתברות שווה. הנחה טריוויאלית זו אם אינה נבדקת ומאומתת עלולה להביא לפתרונות שגויים ולהוליך שולל גם בעלי ניסיון בתחום.
בשאלות רבות ומגוונות שבהן אין לנו דרך סלולה או נוסחה ידועה לפתרון עומד לפנינו כלי יעיל מאוד לפתרון בעיות אלו : ניסוחה מחדש של השאלה עם נתונים מספריים <u>גבוהים</u> במיוחד אשר מחדד את השאלה ובמקרים רבים לא רק מסייע להגיע אל הפתרון הנכון אלא אף להבין אותו היטב.
יש לציין כי עבור דילמות לא שגרתיות בהסתברות נעדיף לרוב להשתמש בהדמיה ויזואלית או מחשבתית להבנת הבעיה ופתרונה.
מחקרים בתחומי דעת שונים מצאו כי המחשה ויזואלית מגדילה את ההבנה הקונספטואלית ומהווים אמצעי יעיל בהוראת המדעים המאפשרים להציג מושגים ותהליכים מופשטים ומורכבים שקשה להבינם בעורה פשוטה וברורה.
נציג אם כן מספר בעיות לא שגרתיות בהסתברות וננסה להציע אלטרנטיבות חדשות להבנת פתרונן.

<u>בחירת יושב ראש למועצת התלמידים</u>

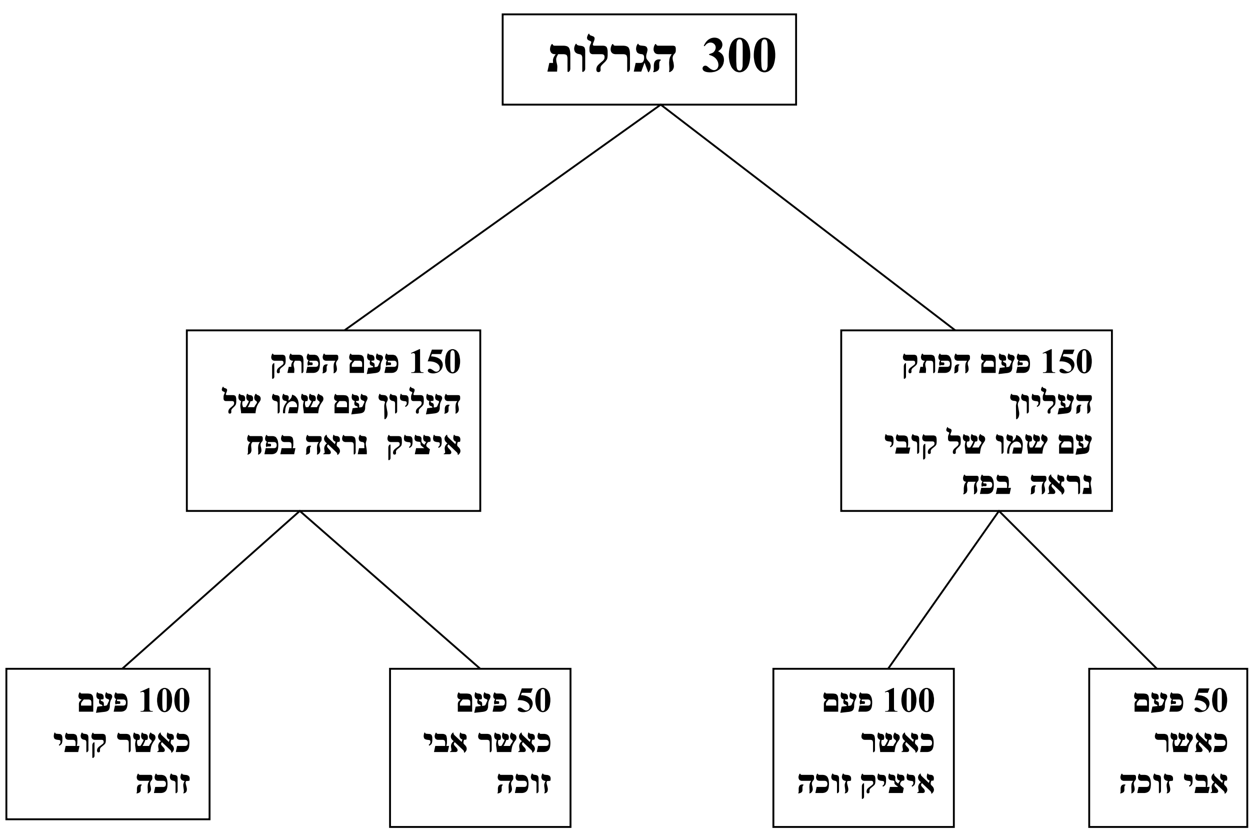
אבי , איציק וקובי נבחרו למועצת התלמידים של בית הספר.
<u>המנהל:</u> **"החלטתי לקיים הגרלה בין השלושה לבחירת היו"ר ".**
<u>אבי:</u> **" אם אני לא עולה בהגרלה, אל תזרוק את הפתק עם שמי לפח זה עושה לי מזל רע בחיים".**
<u>המנהל:</u> **"אני מוכן לכבד את בקשתך אבי, את הפתק עם שם הזוכה אשמור אצלי, וגם את הפתק שלך אם תפסיד. כמו כן רק מחר אפרסם את שם היו"ר החדש ".**

לאחר ההגרלה הסיט אבי מבטו לפח ,ממנו ניתן לזהות רק את הפתק העליון, והבחין בשמו של קובי. חייך אבי ושאל את עצמו : " מה הסיכוי שנבחרתי ליו"ר?"

מה תהיה תשובתך לאבי?

<u>פתרון :</u>

מרבית הנשאלים משיבים כי הפתרון לשאלה זו היא 0.5.
בשאלה זו כמו בשאלות הבאות אחריו ניתן לערוך מעין ניסוי, לתכנן הדמיה, לבנות מודל מתאים ולחקור מה עתיד לקרוא עבור מספר גדול של ניסיונות .
נדגים עיקרון זה:
נניח כי אנו מקיימים הגרלה מעין זו 300 פעם, לכל אחד מהמועמים יש סיכוי לעלות בהגרלה 100 פעם בממוצע, היות והפתק של אבי לעולם לא יהיה בפח הרי שבמחצית מהפעמים נראה את הפתק עם שמו של קובי בפח ובמחצית מהפעמים נראה את הפתק עם שמו של איציק בפח.
נתבונן בדיאגרמה הבאה המתארת את מרחב האפשריות:



לכן מספר הפעמים שאבי זוכה מתוך סך הפעמים שהפתק של קובי נראה בפח הוא: $\frac{50}{150}$ כלומר : $\frac{1}{3}$.

<u>שלושת הקלפים</u>

לפניך 3 קלפים:

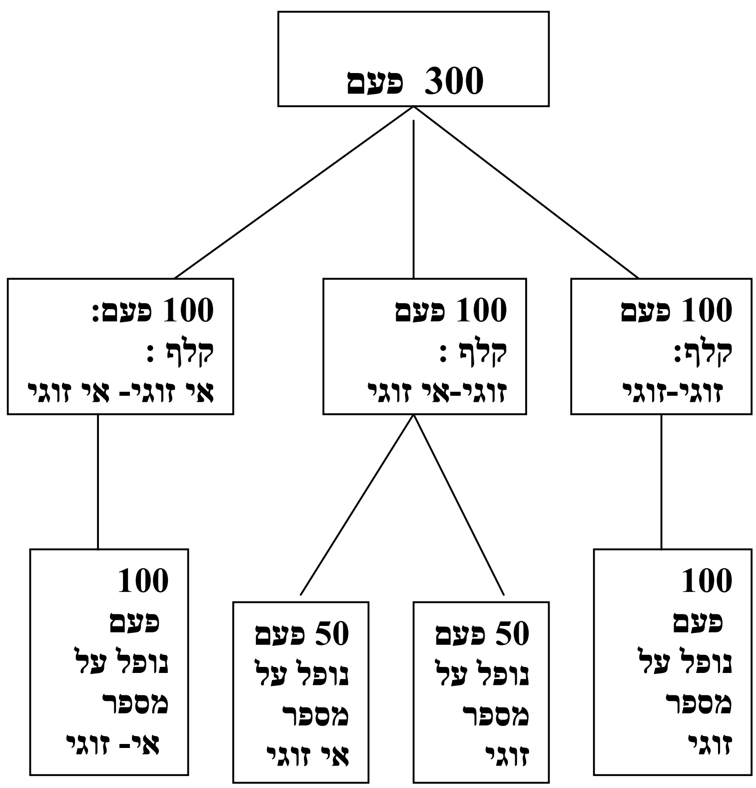
7	4	10

לקלף אחד מתוך השלושה יש מספר זוגי משני צידי הקלף, לקלף אחר יש מספר אי זוגי משני צדדיו, ולקלף הנוסף מספר זוגי מצד אחד ואי זוגי מצדו השני.
בחדר חשוך מערבבים את הקלפים, בוחרים באקראי קלף אחד מתוך השלושה, מניחים על השולחן ומדליקים את האור. התקבל קלף ועליו מופיע המספר זוגי .

מה ההסתברות שגם מצידו השני של הקלף מופיע מספר זוגי?

<u>**פתרון**</u>:
התשובה האופיינית גם בשאלה זו היא: או שהמספר מצידו השני זוגי או שהוא אי זוגי ולכן ההסתברות היא 0.5.
אף כאן מומלץ לבנות הדמיה המתארת את האירוע , לבניית ההדמיה יש חשיבות רבה. מעבר להבנה הקוגניטיבית של הבעיה, היא מקרבת את התלמיד לדפוס העבודה של איש מדע ומחקר אשר עורך ניסויים רבים בכדי לחקור את מה שעתיד להתרחש.

נניח שוב כי אנו מבצעים פעולה זו 300 פעם, נתבונן בדיאגראמה הבאה המתארת את האפשריות העומדות לרשותנו:



ידוע כי הקלף נפל על צידו הזוגי.
לפי התרשים שלפנינו הקלף יכול לפול 150 פעם על צד זוגי ,
מתוכם 100 פעם האירוע התרחש מתוך הקלף " זוגי זוגי ".
לכן ההסתברות היא $\frac{100}{150}$ כלומר: $\frac{2}{3}$.

תשובה: הסיכוי שהקלף הוא: "זוגי-זוגי" הינו $\frac{2}{3}$.

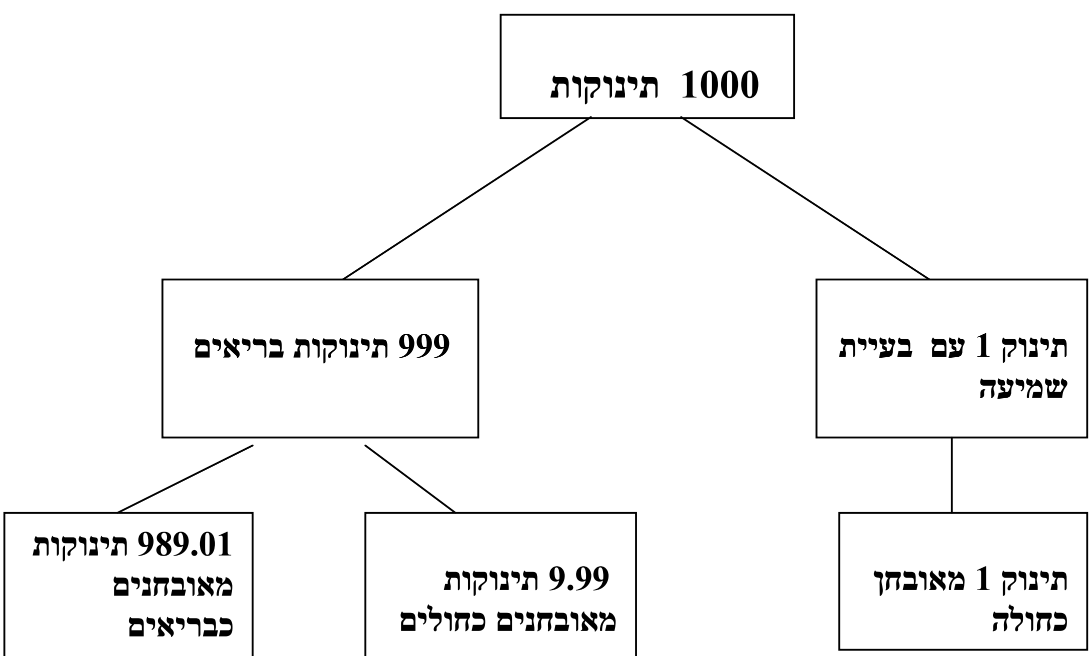
הערה:
ניתן לדון עם התלמידים על העובדה כי שאלה זו זהה למעשה לשאלה המוכרת עם כדים וכדורים:
נתונים 3 כדים, בכד א' שני כדורים לבנים בכד ב' שני כדורים אדומים ובכד ג' כדור אחד אדום ואחד לבן.
מוציאים באקראי כדור ורואים כי צבעו אדום.מה ההסתברות שהכדור הוצא מהכד שבו 2 כדורים אדומים?
באותה מידה שהתלמיד מתייחס לכדורים שבכד, כך יש להתייחס לקלפים. כל קלף הוא כד והצדדים שבו הם הכדורים.

בדיקת שמיעה

משרד הבריאות ממליץ לערוך בדיקות שמיעה שגרתיות לכל תינוק שנולד , בטענה כי לאחד מכל כאלף תינוקות קיימת בעיית שמיעה כלשהי.
משרד הבריאות מדווח כי הבדיקה שהוא מבצע מדויקת תמיד במקרים בהם לתינוק אכן קיימת בעיית שמיעה .
רק באחוז אחד מהמקרים שלתינוק אין בעיית שמיעה היא מתריעה בטעות שיש לו.
למשפחת לוי נולד במזל טוב תינוק. הם ביצעו את בדיקת השמיעה לתינוקם וקיבלו כי התוצאה חיובית .
מה הסיכוי כי לתינוקם בעיית שמיעה?

<u>פתרון:</u>
בשאלות מעין אלו הגישה השכיחותנית יעילה במיוחד ונוחה מאוד.

נניח כי נבדקים 1000 תינוקות:



סה"כ קבלנו 10.99 תינוקות המאובחנים כחולים בעוד שרק תינוק אחד חולה באמת לכן ההסתברות היא
$\frac{1}{10.99} \approx 9.1\%$.

פרדוקס מונטי הול:

בשעשועון טלוויזיה יש 3 דלתות. מאחורי אחת מהן מכונית, ומאחורי השאר עזים. אנו צריכים לבחור(ע"י ניחוש) את הדלת עם המכונית.
לאחר שהצבענו על אחת הדלתות, המנחה, היודע מהי הדלת הנכונה, ניגש לאחת משתי הדלתות האחרות ופותח אותה, כשהוא מגלה מאחוריה עז. כעת אנו צריכים להחליט האם לדבוק בבחירה המקורית שלנו, או לשנות את ההחלטה ולהעדיף במקומה את הדלת האחרונה.

פתרון
בשאלה זו כמו בקודמיו מומלץ לתלמיד לתרגם בעיה מילולית זו ולתכנן הדמיה מתאימה.
תהליך התרגום מבעיה מילולית לסימולציה דורש אומנם אימון ותרגול אך מכיוון שרוב השאלות בהסתברות אינטואיטיבית מסתמכות על עקרונות פשוטים , עם הכשרה מתאימה ניתן לאמץ שיטה זו כדרך להתמודדות עם בעיות בהסתברות.

בשלב א' : רצוי לתת לתלמיד להיעזר בסימולציה של המחשב ולרשום את מספר הפעמים שהוא מפסיד לעומת מספר הפעמים שזוכה. ההתנסות ממחישה ומסייעת להבנת המהלכים.

הדמיית מחשב לפרדוקס 3 הדלתות

שלב ב': להשתמש בגישה השכיחותנית והפעם אף ללא צורך בתרשימים כלשהם.
ניתן בפשטות לבצע הדמיה מחשבתית מעין זו:

נניח שאנו מבצעים ניסוי זה 300 פעם , כלומר 300 פעם אנו בוחרים למשל דלת ימין
100 פעם בממוצע המכונית תוצג מאחורי דלת ימין , 100 פעם בממוצע מאחורי דלת אמצעית , ו 100 פעם בממוצע מאחורי דלת שמאלית.

לו נשארנו בכל 300 הפעמים בבחירה של דלת ימין הרי שנזכה 100 פעם, דהיינו סיכוי של $\frac{1}{3}$.

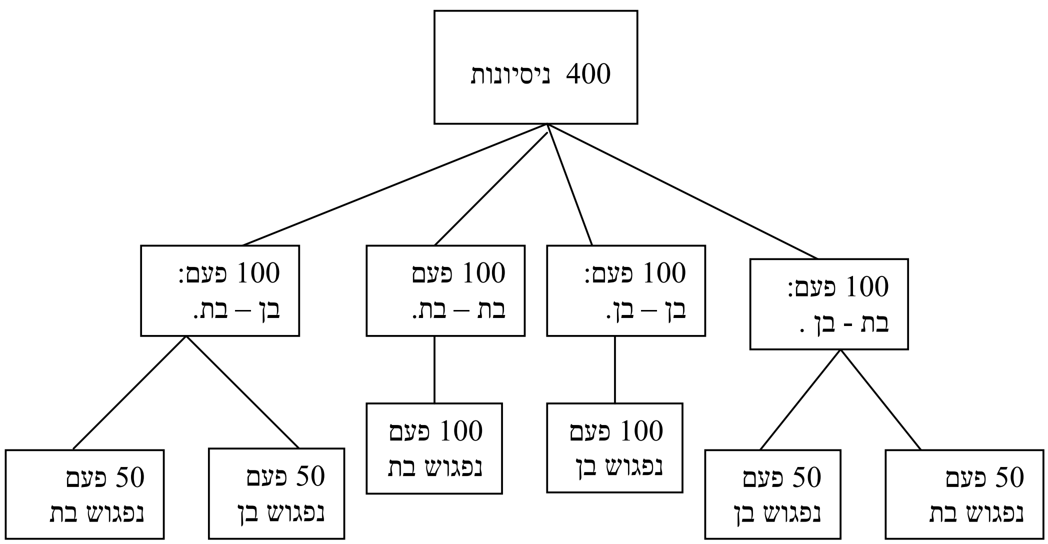
נבדוק מה קורה כאשר תמיד נחליף את בחירתנו.
100 פעמים שהמכונית מוצבת מאחורי דלת ימין אנו מפסידים , כי החלטנו לשנות את בחירתנו
100 פעמים שהמכונית מאחורי דלת אמצעית נרוויח משום שדלת שמאל נפתחת ע"י המנחה ואנו עוברים לדלת האמצעית.
100 פעם שהמכונית מוצבת מאחורי הדלת השמאלית ארוויח שכן במקרה זה דלת אמצעית נפתחת ואנו עוברים לשמאלית.

יוצא ש 200 פעם מתוך 300 אנו מרוויחים. דהיינו סיכוי של $\frac{2}{3}$ לזכות במכונית במידה ואנו מחליטים לשנות את בחירתנו .

הבנים של משפחת ישראלי.

למשפחת ישראלי 2 ילדים, יום אחד פגשנו את אדון ישראלי עם ילד אשר הציג אותו כבנו. מה ההסתברות כי למשפחה זו יש עוד בן?

פתרון:
שאלה זו עלולה להכשיל אף מומחים בעלי ניסיון בתחום ההסתברות.
מצד אחד התשובה הפשטנית של רוב הנשאלים היא 0.5 . כדי שאדון ישראלי יהיה אב לשני בנים צריכה להיות הולדת בן בלידה נוספת וההסתברות לכך היא 0.5 .
מצד שני , המבינים בהסתברות מותנית יטענו כי כיוון שפגשנו בן הרי שהאפשרות לשתי בנות ירד מהפרק ונותרו רק 3 אפשריות:
(בן , בן) , (בן , בת) , (בת , בן) , לפיכך ההסתברות שלאדון ישראלי 2 בנים בהינתן שיש לו בן אחד הינה $\frac{1}{3}$.
אולם מסתבר כי דווקא התשובה הראשונה 0.5 היא הנכונה.
שאלה זו זהה לעקרון של 3 הקלפים.
היות ופגשנו בן , הסיכוי כי הוא שייך למשפחה עם 2 בנים הוא כפול מהסיכוי שהוא שייך למשפחה מסוג: (בן , בת) (וכפול מהסיכוי שהוא שייך משפחה מסוג (בת , בן))
גם שאלה זו כמו בשאלה עם הקלפים רואים עקרון זהה לשאלות מסוג כדים וכדורים : כאשר ידוע כי הכדור שהוצא צבעו אדום , ההסתברות שהוא הוצא מכד ובו 2 כדורים אדומים גבוהה פי 2 מהסיכוי שהוצא מכד ובו רק כדור אחד אדום והשני צבעו אחר.
נחקור שוב סוגיה זו בעזרת הדמיה מתאימה:



לכן הסיכוי כי למשפחת לוי 2 בנים אם ידוע כי פגשנו בן היא: $\frac{100}{50+100+50}=\frac{1}{2}$

גרסה מעניינת ל "בעיית שלושת האסירים".

שלושה אסירים, א, ב, ג נידונו למוות. המושל בחר באופן אקראי אחד מהם והחליט להעניק לו חנינה ואת בחירתו גילה רק לסוהר. הסוהר מסרב לגלות ל א' מה עלה בגורלו הוא.
חשב א' לעצמו: אם אשאל את הסוהר מי לא זכה בחנינה והסוהר יענה לי כי ב' לא זכה אז מרגע זה עולה הסיכוי שלי לחצי.
אבל אם לא, אם הסוהר יענה לי דווקא כי ג' לא זכה לחנינה , גם במקרה זה הסיכוי שלי עולה לחצי.
אם כך אז בשביל מה לשאול?! בכל מקרה הסיכוי שלי עולה לחצי....
חשב א' שוב לעצמו ושאל:
איך ייתכן שרק מהמחשבות שלי הצלחתי להגדיל את הסיכוי שלי ?!

גרסה משעשעת זו של החידה הידועה המכונה "בעיית שלושת האסירים" רומזת למעשה על הפתרון לחידה זו: הסיכוי של א' לחנינה נשאר שליש גם אם הסוהר יגלה לו על אחד האסירים שלא זכה בחנינה .

אם נחזור ל 300 ניסויים שהזכרנו השאלות הקודמות נקבל כי-
מתוך 100 פעמים ש א' זוכה לחנינה : 50 פעם יזכירו את שמו של ב' ו-
50 פעם יזכירו את שמו של א'.
ב- 100 פעמים ש ב' זוכה בחנינה יזכירו את שמו של ג'.
ב 100 פעמים ש ג' זוכה בחנינה יזכירו את שמו של ב'.
כעת,
נניח כי הסוהר גילה לאסיר א: "ב' לא זכה בחנינה!"
לפיכך הסיכוי ש א' זוכה מתוך כל הפעמים שהזכירו את ב' הוא: $\frac{50}{150}$ כלומר $\frac{1}{3}$

לסיכום

הצגנו בפרק זה מספר בעיות בהסתברות אשר חלקן משתייכות למשפחה שלמה של דילמות שבהם אירועים בעלי הסתברויות שונות נתפסים, גם אצל מומחים בתחום, כבעלי הסתברויות שוות.
הטענה בפרק זה היא כי כאשר אנו מציגים לתלמיד בעיות מילוליות בהסתברות עלינו ללמדו לזהות את המידע הרלוונטי ולנסח אותו בצורה מובנת ופשוטה.
תרגום בעיות מילוליות להדמיה המתאימה דורש כאמור תרגול מתאים אך מסתבר כי לשאלות בהסתברות אינטואיטיבית קיימים דווקא עקרונות ברורים ופשוטים להבנה .
כמו כן במהלך הפתרון המלווה בהדמיה מתאימה, כאשר אנו נפגשים עם כשלים אינטואיטיביים של תלמידים יש לנו אפשרות לחזור שוב לסימולציה שבנינו וע"י כך לשרש את אותן תפיסות שגויות.

נספח ב': השאלונים

סטטיסטיקה והסתברות – חלק א׳ **שאלון מס׳:**

לפניך מספר שאלות בהסתברות

עליך לסמן בכל שאלה (מבלי לנמק) האם ההסתברות היא קטנה מ $\frac{1}{2}$ שווה ל $\frac{1}{2}$

או

גדולה מ $\frac{1}{2}$

אין צורך להראות דרך כלשהי.

השאלה	ההסתברות קטנה מ $\frac{1}{2}$	ההסתברות שווה ל $\frac{1}{2}$	ההסתברות גדולה מ $\frac{1}{2}$
1) אמנון ותמר מתעצלים להדיח את הכלים של ארוחת הערב. הם החליטו כי מי שיפסיד בניסיון הראשון במשחק "אבן נייר ומספריים" ייקח על עצמו את פעולת ההדחה. (במקרה של "תיקו" ישטפו את הכלים יחדיו.) מה הסיכוי שתמר תשטוף את הכלים לבדה?			
2) אימא של דוד ענת ודורון קיימה הגרלה על "הפרס השבועי" , בין 3 ילדיה. ענת שאלה את אבא האם היא זכתה. אבא טען שאסור לו עדיין לספר מה עלה בגורלה היא, אך בכל אופן הוא מוכן לגלות לה שדוד לא זכה. מה הסיכוי שענת זכתה?			
3) דני ויוסי משחקים במטבעות, דני קיבל 3 פעמים רצופות "עץ" בהטלת המטבע. יוסי התערב שבפעם הבאה המטבע תיפול על "פאלי". מה ההסתברות שיוסי ינצח בהתערבות?			
4) המשטרה מפעילה מכונת אמת בחקירותיה. ידוע כי 95% מהנחקרים הם דוברי אמת. המכונה טועה באבחון רק ב 10% מהמקרים (כלומר: "שקרן" יאובחן בטעות כדובר אמת רק ב 10% מהמקרים ולהפך, דובר אמת יאובחן בטעות כשקרן רק ב 10%). המכונה קבעה שהנחקר רוברט משקר. מה ההסתברות שרוברט אכן משקר?			
5)יוסי ושני חבריו עלו לשלב הגמר בתחרות ריצה. בתחרות זו ניתן לזכות : מקום ראשון (מדלית זהב). מקום שני(מדליה משולבת , צד אחד זהב צד שני כסף). מקום שלישי (מדליית כסף). אימו של יוסי עמדה במרפסת כשלפתע זיהתה את בנה מתקרב לבית, היא הבחינה כי מדליה מוכספת מונחת על צווארו. מה ההסתברות שיוסי הגיע למקום השני?			

סטטיסטיקה והסתברות – *חלק ב׳*

שאלון מס׳:

<u>ענה על השאלות הבאות :</u>

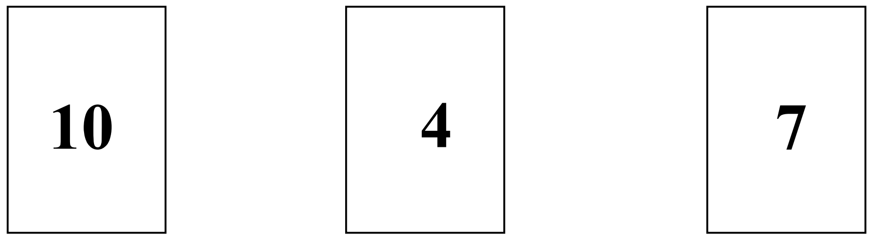
1) שיר וגילה משחקות בקוביות, אם שתי הקוביות נופלות על מספר זהה שיר מנצחת .
אם מכפלת המספרים על שתי הקוביות יהיה שווה ל 6 גילה מנצחת.
למי יש סיכוי גדול יותר לנצח? **נמק**

2) אבי איציק וקובי נבחרו למועצת התלמידים של בית הספר.
המנהל: "החלטתי לקיים הגרלה בין השלושה לבחירת היו"ר ".
אבי: " אם אני לא עולה בהגרלה , אל תזרוק את הפתק עם שמי לפח זה עושה לי מזל רע בחיים".
המנהל: "אני מוכן לכבד את בקשתך אבי, את הפתק עם שם הזוכה אשמור אצלי וגם את הפתק שלך במידה ותפסיד, כמו כן רק מחר אפרסם את שם היו"ר החדש ".

לאחר ההגרלה הסיט אבי את מבטו לפח, ממנו ניתן היה לזהות רק את הפתק העליון, והבחין בשמו של קובי.
חייך אבי ושאל את עצמו: " מה הסיכוי שנבחרתי ליו"ר?"

מה תהיה תשובתך לאבי? **נמק !**

3) לפניך 3 קלפים: (הציור להמחשה בלבד)



לקלף אחד מתוך השלושה יש מספר זוגי משני צידי הקלף. לקלף אחר יש מספר אי זוגי משני צדדיו. ולקלף הנוסף מספר זוגי מצד אחד ואי זוגי מצדו השני. בחדר חשוך בוחרים באקראי קלף אחד מתוך השלושה , מניחים על השולחן ומדליקים את האור. התקבל קלף ועליו מופיע המספר זוגי !!

מה ההסתברות שגם מצידו השני של הקלף מופיע מספר זוגי? **נמק!**

4) משרד הבריאות ממליץ לערוך בדיקות שמיעה שגרתיות לכל תינוק שנולד בטענה כי לאחד מכל כאלף תינוקות קיימת בעיית שמיעה כלשהי.
משרד הבריאות מדווח כי הבדיקה שהוא מבצע מדויקת תמיד במקרים בהם לתינוק אכן קיימת בעיית שמיעה . רק באחוז אחד מהמקרים שלתינוק אין בעיית שמיעה היא מתריעה בטעות שיש לו.
למשפחת לוי נולד במזל טוב תינוק . הם ביצעו את בדיקת השמיעה לתינוקם וקיבלו כי התוצאה חיובית .
מה הסיכוי שלתינוק בעיית שמיעה? **נמק!**

5) ידוע כי ההסתברות להולדת ולד ממין זכר שווה להסתברות ללידת ולד ממין נקבה.
הכלבה של גלית המליטה 3 גורים

דנה: "כמה נקבות המליטה הכלבה שלכם?"
גלית: "נחשי!"
דנה: "הממ...נקבה אחת לפחות".
גלית: "נכון!"
דנה: "בעצם אני מנחשת שעוד נקבה!"
גלית: "את צודקת!! עכשיו נשאר לך רק לנחש את מינו של הגור השלישי".

שאלה:
מה הסיכוי שהגור השלישי הינו ממין זכר? **נמק!**

תודה רבה על שיתוף הפעולה

יעל כהן