

קורס
Algebra:
From Equations to Structures

המרצה:
ד"ר ג'וזי שמש

קובץ תרגילים

תשע"ב

תוכן עניינים:

3	1 תרגיל
4	2 תרגיל
5	3 תרגיל
6	4 תרגיל
7	5 תרגיל
8	6 תרגיל
9	7 תרגיל
10	8 תרגיל
11	9 תרגיל
12	10 תרגיל

Algebra: From Equations to Structures

Josephine Shamash
Spring 2012

תרגיל 1

1. א. אלו מבין הקבוצות הבאות הן תת-שדות של שדה המספרים המרוכבים
ב. אלו מבין הקבוצות הבאות הן תת-חוגים של שדה המספרים המרוכבים

$$\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$
$$\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, \quad \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

2. בידקו האם הקבוצה $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ היא שדה ו/או חוג ביחס לפעולות:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) (c, d) = (ac, bd)$$

3. בנו לוח חיבור וכפל עבור שדה בן 4 אברים. הראו שיתכן רק שדה אחד כזה. אין צורך לבדוק שמה שנתקבל הוא שדה!

4. אלו מבין הקבוצות הבאות הן תת-חבורות של החבורות הנתונות?

- א. $\{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ב- Z כחבורה חיבורית.
ב. קבוצת כל התמורות על 4 אברים המחליפות לכל היותר שני אברים בלבד ביניהם (קבוצת הטרנספוזיציות), בחבורת כל התמורות על 4 אברים (S_4) .
ג. קבוצת כל התמורות על 3 אברים המחליפות את מקומם של 0 או 3 האברים ביניהם, בחבורת כל התמורות על 3 אברים (S_3) .
ד. $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ בחבורה הכפלית Q^* .

5. אלו מבין הקבוצות הבאות הן תת-מרחבים של R^3 ?

- א. $\{(a, 2a, 3a) \mid a \in R\}$
ב. $\{(a, b, 1) \mid a, b \in R\}$
ג. $\{(a, b, c) \mid a, b, c \in R, a + b + c = 0\}$
ד. $\{(a, b, c) \mid a, b, c \in R, a + b + c = 5\}$
ה. $\{(a, b, a - 5b) \mid a, b \in R\}$

Algebra: From Equations to Structures

Josephine Shamash
Spring 2010

תרגיל 2

1. הראו שהקבוצה הבאה היא תת-חוג של שוג המטריצות מסדר 2 על 2 אך אינה אידיאל שמאלי או אידיאל ימני.

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in Q \right\}$$

2. א. הראו שכל אידיאל בחוג המספרים השלמים Z הוא מהצורה nZ עבור n מסויים ב- Z .

ב. הראו שכל אידיאל בחוג הפולינומים מעל הממשיים $R[x]$ הוא מהצורה $f(x)R[x]$ עבור $f(x)$ מסויים ב- $R[x]$.

3. א. הראו שסכום של אידיאלים בחוג הוא אידיאל.
ב. הראו שאידיאל הוא כל החוג אם ורק אם הוא מכיל את אבר היחידה.

4. א. הראו שבחוג המנה $R[x]/(x+3)(x-2)R[x]$ יש שני אברים שונים מאפס שמכפלתם שווה לאפס.
ב. הראו שחוג המנה $Z/5Z$ הוא שדה.

5. אלו מבין הפונקציות הבאות הן הומומורפיזמים של החבורה החיבורית של החוג, ואלו מביניהם הומומורפיזמים של חוגים? במקרה שכן – מהו הגרעין והתמונה של ההומומורפיזם?

א. $\varphi: Z \rightarrow Z \ni \varphi(n) = n + 1$

ב. $\varphi: Z \rightarrow Z \ni \varphi(n) = 3n$

ג. $\varphi: Z \rightarrow Z \ni \varphi(n) = -n$

ד. $\varphi: Q[x] \rightarrow Q[x] \ni \varphi(f(x)) = f(0)$

ה. $\varphi: Q[x] \rightarrow Q[x] \ni \varphi(f(x)) = (x^2 + 3)f(x)$

ו. $\varphi: Z[x] \rightarrow Z \ni \varphi\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^n a_k$

Algebra: From Equations to Structures

Josephine Shamash

Spring 2012

תרגיל 3

1. קבעו האם החוגים $Q[\sqrt{2}]$, $Q[\sqrt{3}]$ הם איזומורפיים.
2. הוכיחו שאם R הוא חוג קומוטטיבי ו- I הוא אידיאל ב- R אז:
 I הוא מכסימלי אם ורק אם R/I הוא שדה.
3. הוכיחו שמתקיים: $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.
4. הוכיחו שלא מתקיים: $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$.
5. הוכיחו כי בשדה, תוצאת המכפלה של שני אברים שונים מאפס תמיד שונה מאפס.

Algebra: From Equations to Structures

Josephine Shamash

Spring 2010

תרגיל 4

1. מיצאו מספר טבעי x המקיים :

$$x \equiv 2 \pmod{5}$$

$$x \equiv 0 \pmod{11}$$

$$x \equiv 1 \pmod{7}$$

2. הראו שלא ניתן למצוא מספר טבעי x המקיים :

$$x \equiv 1 \pmod{6}$$

$$x \equiv 2 \pmod{6}$$

$$x \equiv 1 \pmod{15} \quad \text{ב.}$$

$$x \equiv 0 \pmod{15} \quad \text{א.}$$

$$x \equiv 3 \pmod{10}$$

$$x \equiv 4 \pmod{7}$$

3. האם ניתן למצוא מספר טבעי x המקיים :

$$x \equiv 4 \pmod{6}$$

$$x \equiv 5 \pmod{9}$$

$$x \equiv 2 \pmod{12} \quad \text{ב.}$$

$$x \equiv 2 \pmod{15} \quad \text{א.}$$

$$x \equiv 7 \pmod{25}$$

4. מיצאו את כל המספרים הטבעיים x המקיימים :

$$x \equiv 1 \pmod{10}$$

$$x \equiv 1 \pmod{3}$$

$$x \equiv 1 \pmod{7}$$

Algebra: From Equations to Structures

Josephine Shamash
Spring 2010

תרגיל 5

הגדרה:

תת-חבורה H של חבורה G נקראת נורמלית אם לכל אבר a ב- G קיים: $Ha = aH$

1. הראו שאם H תת-חבורה מאינדקס 2, כלומר, בעל 2 מחלקות שונות, אז היא נורמלית.
2. הראו שלכל n טבעי גדול מ-1, A_n היא תת-חבורה נורמלית של S_n .
3. א. רשמו את כל האברים של החבורה A_4 כמכפלות של מחזורים זרים.
ב. מיינו את כל התת-חבורות של A_4 ובידקו אלו מהן הן נורמליות.
4. רשמו את כל הסימטריות של ריבוע כתמורות על קדקדיו. מתקבלת תת-חבורה של S_4 שנקראת החבורה הדיהדרית. האם היא נורמלית ב- S_4 ?

$$5. \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2 \quad ad - bc \neq 0 \right\} \text{ תהי}$$

- א. הראו שזוהי חבורה.
- ב. כמה אברים יש בחבורה?
- ג. האם היא אבלית?

Algebra: From Equations to Structures

Josephine Shamash
Spring 2012

תרגיל 6

הגדרה:

שני אברים a ו- b בחבורה G נקראים **צמודים** אם קיים אבר x בחבורה כך ש: $b = x^{-1}ax$.
קבוצת האברים צמודים לאבר קובע נקראת **מחלקת הצמידות** שלו.

1. הראו שמחלקות צמידות הן זרות או שוות, ושהן מחלקות את כל אברי החבורה לקבוצות זרות לא ריקות.
2. **אוטומורפיזם** של מבנה אלגברי הוא הומומורפיזם **חח"ע** מהמבנה על עצמו.
א. הראו שאם x אבר בחבורה אז ההעתקה מהחבורה לעצמה: $a \mapsto x^{-1}ax$ הוא אוטומורפיזם של חבורות.
ב. הוכיחו שאם H תת-חבורה, $x^{-1}Hx$ היא גם תת-חבורה, וקיים $x^{-1}Hx \cong H$.
3. הראו שהתמורות (57)(134) ו-(35)(261), הן צמודות ב- S על-ידי הצמדה באבר: (46)(237).
באופן כללי זהו מקרה פרטי של הטענה הבאה:
שתי תמורות הן צמודות אם ורק אם יש להם אותו מבנה כמכפלה של מחזוריים זרים.
4. מיצאו את כל מחלקות הצמידות של S_4 ורשמו את אבריהן.
(היעזרו בטענה בשאלה הקודמת!)
5. הראו שהחבורות $SL(2, F_2)$ ו- $SL(2, F_3)$ אינן פשוטות.
(F_2 ו- F_3 הן השדות בני 2 ושלושה אברים בהתאמה).
6. הראו שכל תת-חבורה של חבורה ציקלית היא ציקלית.
7. א. הוכיחו שאם G חבורה מסדר n אז לכל $x \in G$: $x^n = 1$.
ב. הסיקו מכך שהסדר של x מחלק את n .

Algebra: From Equations to Structures

Josephine Shamash
Spring 2012

תרגיל 7

1. השתמשו במשפט סילו כדי להוכיח שלא קיימת חבורה פשוטה מסדר 30.
2. נניח כי p הוא מספר ראשוני.
 - א. הוכיחו שכל חבורה מסדר p^2 היא אבלית.
 - ב. הוכיחו שאם G חבורה מסדר p^2 אז $G \cong C_{p^2}$ או $G \cong C_p \times C_p$.
3. הוכיחו שאם הקרקטריסטיקה של שדה אינה אפס, אז היא מספר ראשוני.

תזכורת: הקרקטריסטיקה של שדה הוא המספר הטבעי n הקטן ביותר המקיים שאבר היחידה מחובר לעצמו n פעמיים שווה לאפס, אם קיים מספר טבעי כזה. במקרה שלא קיים, נאמר שהקרקטריסטיקה היא 0.
4. הראו שאם F תת-שדה של שדה K אז K הוא מרחב וקטורי מעל F .
5. אבר a נקרא אלגברי מעל שדה F אם הוא שורש של פולינום מעל השדה. הפולינום המינימלי של אבר אלגברי a מעל השדה F הוא הפולינום המתוקן (בעל מקדם עליון 1) בעל מעלה מינימלית מעל השדה שהוא מאפס.
 - א. נניח כי a אלגברי מעל שדה F , וכי $p(x)$ הוא פולינום מינימלי שלו מעל F .
 - א. הוכיחו כי $p(x)$ הוא אי-פריק.
 - ב. הוכיחו שאם $f(x)$ פולינום מעל F כך ש- a הוא שורש שלו, אז $p(x) \mid f(x)$ מעל F .

Algebra: From Equations to Structures

Josephine Shamash
Spring 2012

תרגיל 8

1. אם $F \subseteq K \subseteq L$ שדות ממימד סופי מעל F כמרחבים וקטוריים הוכיחו שמתקיים:
 $[L:F] = [L:K] \cdot [K:F]$.

הזרחה: הוכיחו שאם $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ בסיס ל- K מעל F , ו- β_1, \dots, β_k בסיס ל- L מעל K אז

$$\left\{ \alpha_i \beta_j \mid \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k \end{array} \right\}$$

- הוא בסיס ל- L מעל F .

2. עבור Q שדה המספרים הרציונליים, חשבו את:

- המימד של $Q(\sqrt[3]{2})$ מעל Q .
- המימד של $Q(\sqrt[4]{2}, i)$ מעל $Q(\sqrt[4]{2})$.
- המימד של $Q(\sqrt[4]{2}, i)$ מעל $Q(i)$.

3. הראו שהמספר הממשי $5 + \sqrt[3]{6 - \sqrt{2}}$ הוא אלגברי על-ידי מציאת פולינום מעל שדה המספרים הרציונליים המאפס אותו.

4. מיצאו את הפולינום המינימלי של האברים הבאים מעל שדה המספרים הרציונליים:

$$\sqrt{i}, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{2\pi i}{5}}, e^{\frac{2\pi i}{6}}, \sqrt{2} + \sqrt{3},$$

אפשר להיעזר במשפט הבא:

אם פולינום $f(x)$ מתוקן עם מקדמים שלמים, וקיים הפירוק לגורמים $f(x) = g(x)h(x)$ מעל הרציונליים, אז הפולינומים $g(x)$ ו- $h(x)$ הינם גם בעלי מקדמים שלמים.

Algebra: From Equations to Structures

Josephine Shamash
Spring 2012

תרגיל 9

1. הוכיחו שהחבורה S_n אינה פתירה עבור $n \geq 5$. אפשר להסתמך ללא הוכחה על העובדה שהחבורה A_n פשוטה עבור $n \geq 5$.
2. מיצאו את חבורות Galois של הפולינומים הבאים (כלומר, מיצאו אותן עד כדי איזומורפיזם) עבור הפולינומים הבאים:
א. מעל $x^4 - 4$ שדה הרציונליים.
ב. מעל $x^4 - 4$ מעל $Q(i)$.
ג. מעל $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ שדה הרציונליים.
ד. מעל $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ מעל $Q(i)$.
רמז: תחילה הוכיחו ששדה הפיצול במקרה זה הוא השדה $Q(\sqrt[20]{1})$, וחשבו את מימדו מעל Q .
3. פרקו את הפולינומים הבאים לגורמים אי-פריקים מעל השדות הנתונים:
א. מעל $x^4 + 9$ מעל $Q(\sqrt{3})$.
ב. מעל $x^4 - 9$ מעל $Q(\sqrt{3})$.
ג. מעל $x^4 + 9$ מעל $Q(i\sqrt{3})$.
ד. מעל $x^4 + x^2 + 1$ מעל $Q(i\sqrt{3})$.
4. בידקו אלו מההעתקות הבאות ניתן להרחיב לאוטומווריזמים של השדות הנתונים. בכל מקרה נתונות רק התמונות של האברים היוצרים את שדה ההרחבה:
א. ההעקתה $\omega \mapsto -\omega$ של השדה $Q(\omega)$ (כאשר ω הוא שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 3).
ב. ההעקתה $x \mapsto x + 1$ של השדה $Q(x)$ (אבר טרסנצנדנטי מעל Q).
ג. ההעקתה $\sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}$ של השדה $Q(\sqrt{3})$.
ד. ההעקתה $\begin{cases} \sqrt{3} \mapsto \sqrt{-3} \\ \sqrt{-3} \mapsto \sqrt{3} \end{cases}$ של השדה $Q(\sqrt{3}, \sqrt{-3})$.
ה. ההעקתה $\begin{cases} \sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3} \\ \sqrt{-3} \mapsto -\sqrt{-3} \end{cases}$ של השדה $Q(\sqrt{3}, \sqrt{-3})$.

Algebra: From Equations to Structures

Josephine Shamash

Spring 2012

תרגיל 10

1. הראו שהפולינום $x^4 + 1$ הוא פריק מעל כל שדה סופי.
רמזים: תבדילו בין המקרים של קרקטריסטיקה 2 וקרקטריסטיקה אי-זוגית. למקרה האי-זוגי, שימו לב שאם מספר האברים בשדה הוא q , אז למקרה שלא קיים ש- $8|q-1$, אז $8|q^2-1$ ויש להסתכל בשדה ההרחבה $GF(q^2)$.
2. חשבו את כל הפולינומים האי-פריקים ממעלה 4 מעל $GF(2)$. יש לנמק מדוע הרשימה היא מלאה ומדוע הפולינומים אכן אי-פריקים.
3. א. הראו שקיים אבר α ב- $GF(8)$ שהוא שורש של הפולינום $x^3 + x + 1$ מעל $GF(2)$, והראו שהוא יוצר את החבורה הכפלית של השדה.
ב. בנו טבלת חיבור לשדה זה כשהאברים מסומנים:
 $0, 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6$
ג. איזו חזקה של α שווה ל- $\alpha^2 + 1$?
ד. האם $GF(4)$ הוא תת-שדה של $GF(8)$? הוכיחו או הפריכו!
4. נסמן $E = GF(25)$.
א. הראו שקיים אבר $\varepsilon \in E$ המקיים $\varepsilon^2 = 3$.
ב. הראו ש- $\varepsilon, 1$ הוא בסיס עבור E מעל השדה $GF(5)$, אך ε אינו יוצר את החבורה הכפלית E^* .
ג. הראו ש- $1 + \varepsilon$ הוא יוצר של החבורה הכפלית E^* .
רמז: חשבו את $(1 + \varepsilon)^{12}$, $(1 + \varepsilon)^8$.
ד. מיצאו את הפולינום המינימלי של $1 + \varepsilon$ מעל $GF(5)$.