"תוכנית רוטשילד-ויצמן למצוינות בהוראת המדעים"
במימונה של קרן קיסריה אדמונד בנימין דה רוטשילד

התפתחות מושג השטח ממלבן עד אינטגרל רימן

מגישה : שהירה אגבאריה

מנחה : דר' מריטה ברבש

מאי 2013

תוכן עניינים

מבוא

בחירתי לנושא עבודת הגמר הייתה מכיוון שנושא מדידת שטח הוא נושא שימושי ומתעסקים בו בחיי היום יום. ומתחילים ללמוד אותו כבר מכיתה ב׳. אומנם וקיימים כמה כללים ונוסחאות ידועות לחישוב שטח של כל מיני צורות אך בעבודתי זו נראה שמכיתה ב ועד אינטגרל רימן, ניתן להשתמש בארבע אקסיומות לחישוב שטח של צורות במישור, וזה מה שיפה בעבודה.

שיטות מדידה עמדו בבסיס המסחר והמדע לאורך כל ההיסטוריה האנושית. בלי שיטות מדידה לא ייתכן מסחר אנושי, ייצור או חקלאות, וגידול מזון אינו אפשרי. התפתחות שיטת מדידה היווה אחד הצדדים במעבר החברה האנושית מחברה מלקטת-צדה לחברה המלקטת את מזונה.

הצורות שנדון בהן: מצולעים שמורכבים מקווים ישרים או עקומות שניתן לבנות עליהן סכומי רימן. בנוסף, נראה חישוב שטח (שקשה לבנות להם אינטגרל רימן) ע״י שיטת קאוואליירי.

לגבי הצורות ההנדסיות (משולש, מלבן, מקבילית, מעוין , טרפזים), שבד״כ התלמידים נדרשים לחשב את השטח שלהם , והם צורות שפוגשים בחיי היום יום או צורות מורכבות יותר שאנחנו בונים מצורות בסיסיות כמו מלבנים ומשולשים.

העבודה תכלול את הפרקים הבאים:

פרק ראשון : הגדרת שטח , הגדרה אקסיומתית .

פרק שני : רקע היסטורי:

חלק א: השיטה המצרית

חלק ב: על ארכמידס שהיה הראשון שחישב שטח מתחת לפרבולה ולצורות שלא ישרות כמו מעגל , פרבולה.

פרק שלישי : מורכב משלושה חלקים:

חלק א: צורות ידועות ופשוטות ודרכים לחישוב שטחם ואיך מקבלים הנוסחאות שלהם + שיטות קלות לחישוב שטח של כל מצולע

חלק ב: נוסחאות של דטרמיננטה

חלק ג: שימוש במשפט פיק .

פרק רביעי: חישוב שטח ע״י סכומי רימן , ואינטגרל רימן

פרק חמישי : עקרון קאוואליירי , אינטגרצית קאוואליירי

פרק שישי : סיכום

פרק שביעי : : ביבליוגרפיה

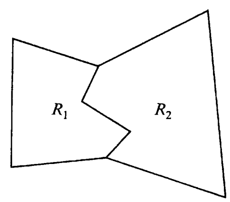
פרק ראשון : הגדרת שטח , הגדרה אקסיומטית

מושג השטח מוכר עוד מהעת העתיקה, אך הגדרתו אינה פשוטה. על שטחה של צורה גיאומטרית במישור ניתן להסתכל כעל תת קבוצה של המישור. כדי להגדיר שטח של צורה A במישור, נשתמש באקסיומות הבאות :

I. <u>הגדרת שטח באמצעות ארבעת הכללים למדידתו, והם[1]</u> (1) :

1. תהי α פונקציה מוגדרת מ- $\mathfrak{R}$ (קבוצת כל המצולעות) ל- $\mathbb{R}$ (קבוצת כל המספרים הממשיים).

   נסמן : $\alpha: \mathfrak{R} \to \mathbb{R}$. לכל מצולע R, $\alpha R > 0$
2. למת החפיפה (The Congruence Postulate) : לשני משולשים חופפים יש להם שטח זהה
3. למת האדיטיביות (Additivity Postulate) : אם שני מצולעים משתתפים רק בצלעות וקדקודים (או לא נחתכים בכלל) אזי שטח האיחוד שלהם שווה סכום השטחים.



   לפי האיור למעלה : $\alpha(R_1 \cup R_2) = \alpha R_1 + \alpha R_2$
4. לריבוע בעל צלע באורך a, אזי השטח שלו הוא a^2

II. <u>הגדרת שטח באמצעות ארבעת הכללים למדידתו, והם[2]</u> (2) :

1. לכל צורה גיאומטרית קיים מספר אי שלילי יחיד שמייצג השטח שלה.
2. לצורות חופפות שטחים שווים.
3. אם מחלקים צורה למספר חלקים (כלומר צורות שאין להן נקודה פנימית משותפת) , שטחה שווה לסכום שטחי כל החלקים.
4. שטח של מלבן הוא מכפלת האורך ברוחב שלו.

---

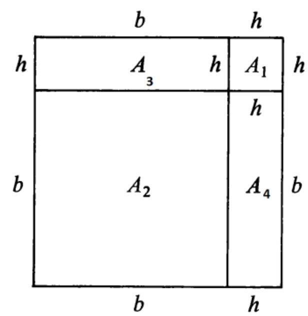
[1] מתוך הספר Elementary Geometry from an Advanced Standpoint

[2] לפי נוסח בית ספרי שמופיע בספר "גיאומטריה ועוד..." , מריטה ברבש ודבורה גורב

אפשר לראות בקלות ששתי ההגדרות הן זהות למעט האקסיומה האחרונה. נראה שאפשר לעבור מהאקסיומה 4 של הגדרה I לאקסיומה 4 של ההגדרה II :

<u>למה - נוסחת המלבן</u> : שטח של המלבן הוא מכפלת הרוחב באורך של המלבן.

הוכחה : נתון מלבן באורך *b* ורוחב *h*. נבנה ריבוע בעל צלע באורך *b+h* ונחלק אותו לשני ריבועים ושני מלבנים *(ראה איור 1)*



איור 1 נוסחת המלבן

לפי אקסיומה 4 : שטח של הריבוע הגדול הוא $(b+h)^2$, שטח של $A_1 = h^2\ ,\ A_2 = b^2$

לפי אקסיומה 2 : $A_3 = A_4$ (נסמנו ב- A)

לפי אקסיומה 3 : שטח של הריבוע הדגול שווה ל- $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

$(b+h)^2 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = h^2 + b^2 + 2A$

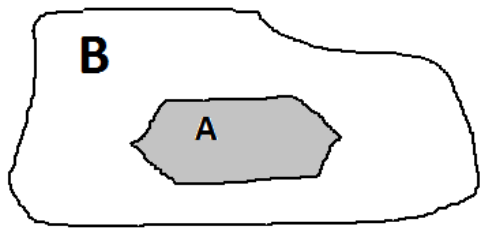
$b^2 + h^2 + 2bh = b^2 + h^2 + 2A$

$2bh = 2A \Longrightarrow A = bh$

משפט:

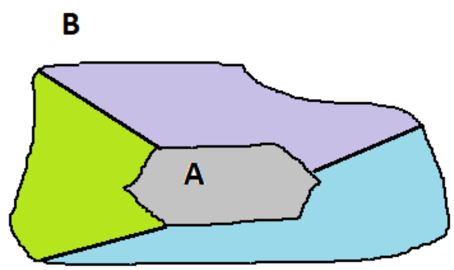
אם A ו- B שתי צורות כך שמתקיים A⊆B אז $S(A) \le S(B)$.

הוכחה : היות ו- A נמצאת בתחום הפנימי של B, נסמן את הטח של A ב- $S(A)$. ואת השטח של B ב- $S(B)$.
(ראה איור 2)



איור 2, צורות מוכלות

את B אפשר לחלק למספר חלקים שאחד מהמם הוא A והשאר נמצא בתחום של B שבו אין נקודות פנימיות של A . נסמן את סכום של השטחים של הצורות בין A ל- B ב- S. (ראה איור 3)

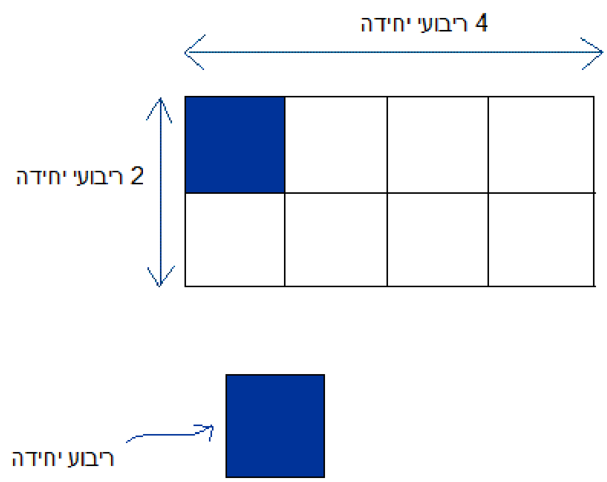


איור 3

לפי אקסיומה 3 עבור שטחים, $S(B) = S(A) + S \Longrightarrow S(B) \ge S(A)$ (דבר שה נכון לפי אקסיומה 1 והשוואת מספרים)

בספר לתלמיד של ביני גורן[3] מובאים בצורה מפורשת רק שנים מהכללים : השני והשלישי, שני הכללים האחרים קיימים בצורה סמויה, שהרי עבורם כללים אלה ברורים אינטואיטיבית.

אחת השיטות לחישוב שטח היא חלוקה לריבועי יחידה. ובשיטה זו משתמשים ברוב הספרים בבתי ספר יסודיים



ריבוע אחד מייצג את יחידת שטח אחת. במלבן יש 8 ריבועים, ולכן השטח למלבן זה 8 יחידות רבועות.
באופן כללי, כדי לקבל את השטח למלבן, פשוט השתמש בנוסחה הבאה :
שטח של מלבן = אורך × רוחב

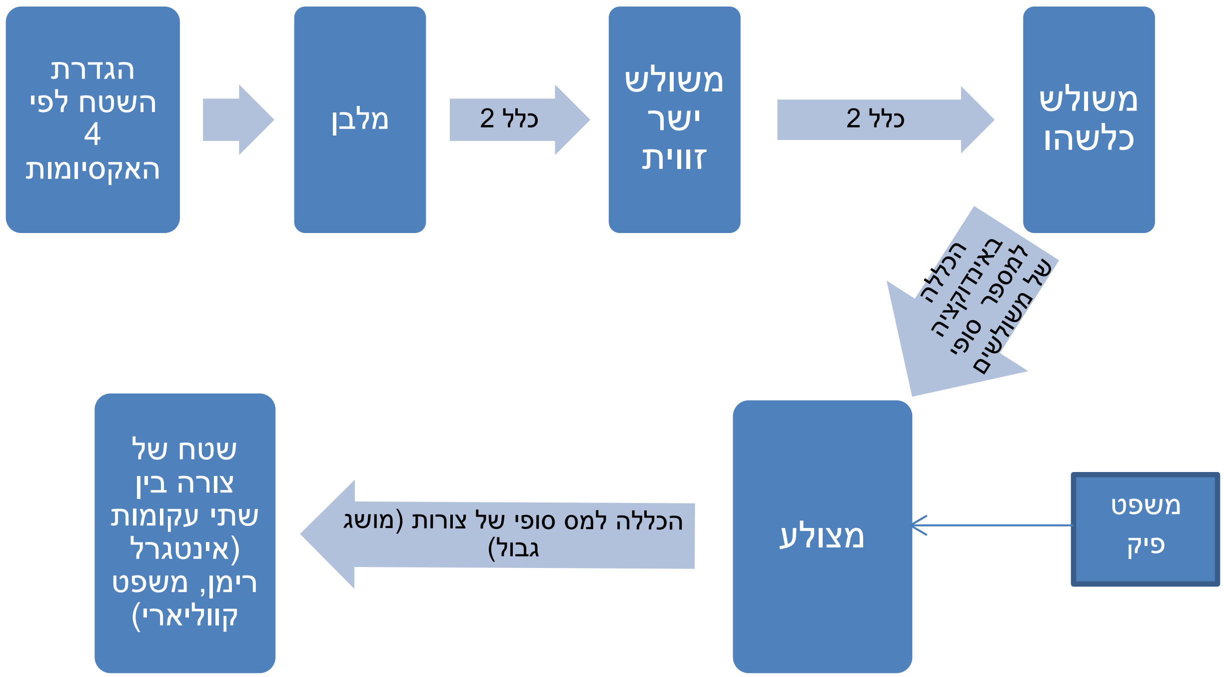
את שטח משולש ישר זווית ניתן למצוא ע״י חציית המלבן לאורך אחד מאלכסוניו. וכל משולש רגיל ניתן לחלק לשני משולשים ישרי זווית ולקבל את שטחו .

טרפז ניתן לחלוקה, לדוגמא[4], למלבן ומשולש. וכן בצורה זו נוכל לבנות את הנוסחאות לשטחים של מצולעים שונים המוכרים לנו. כל הדוגמאות האלה אנחנו נראה בהמשך עם ההוכחות שלהם .

---

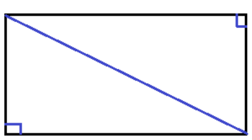
[3] מתמטיקה 4 יח"ל, בני גורן, פרק שמיני
[4] ניתן גם לחלק את הטרפז למלבן ושני משולשים או מקבילית ומשולש

III. דיאגרמה שמתארת את התפתחות מושג השטח[5]

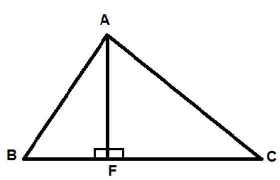


בעבודה שלי אני מראה איך 4 הכללים מאפשרים לחשב שטח של צורות ממצולעים ועד לחישוב שטח שמתחת לעקומות חלקות לפי סכומי רימן

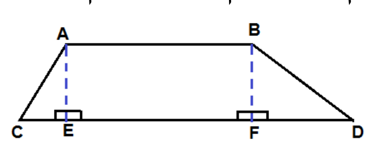
את שטח משולש ישר זווית ניתן ליצר ע״י חציית המלבן לאורך אחד מאלכסוניו.



כל משולש רגיל ניתן לחלק לשני משולשים ישרי זווית ולקבל את שטחו .



טרפז ניתן לחלוקה של מלבן ומשולש וכן בצורה זו נוכל לבנות את הנוסחאות לשטחים של מצולעים שונים המוכרים לנו.



[5] דיאגראמה היא בהסתמך על נוסח II של האקסיומות (אם מסתמכים על נוסח I של האקסיומות אז לא צריך להוסיף את המלבן בתור שלב)

מה קורה לגבי המעגל ?

כאן נצטרך את ההגדרה הבאה : קבוצה A תקרא מדידה אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימים שני מצולעים P_+ ו- P_- כך שמתקיים. $P_- \subset A \subset P_+$ ו- $0 \le S(P_+) - S(P_-) < \varepsilon$. העגל הוא צורה מדידה כי מצד אחד ניתן לחסום אותו בעזרת מצולע משוכלל בעל מספר צלעות כרצוננו נסמנו ב- P_+ , ומצד שני ניתן לחסום בו מצולע משוכלל בעל מספר צלעות כרצוננו נסמנו ב- P_-, לכן $0 \le S(P_+) - S(P_-) < \varepsilon$ מתקיים עבור כל $\varepsilon > 0$.

פרק שני

חלק א: שיטה לחישוב שטחי מרובעים במצרים העתיקה[6] : **(2)**

צורתם של השדות במצרים הייתה כשל מרובעים, וגובי המיסים של המלך נהגו לגבות מס על השדות בהתאם לשטחם.

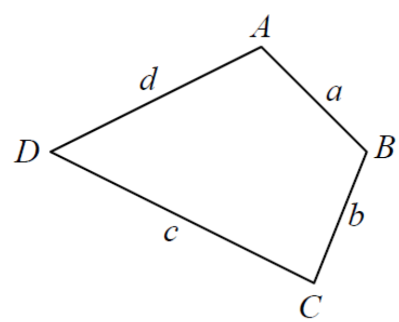
במצרים נמצאה כתובת קיר משנת 1800 לפנה״ס, ובה מידע לגבי השיטה בה נהגו לחשב את שטחי

השדות שצורתן מרובע. החישוב התבצע באופן הבא (בסימונים המקובלים בימינו):

נסמן את אורכי צלעותיו של המרובע ב - a, b, c, d.

a ו - c הם אורכי צלעות נגדיות, b ו- d הם אורכי צלעות נגדיות .

שטח השדה המרובע ABCD חושב לפי הנוסחה:

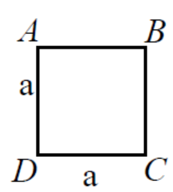


$$S = \frac{(a+c)*(b+d)}{4}$$

ניתן להוכיח כי הנוסחה המצרית לחישוב שטח של מרובע מביאה תמיד לתוצאה גדולה או שווה

לשטח המרובע

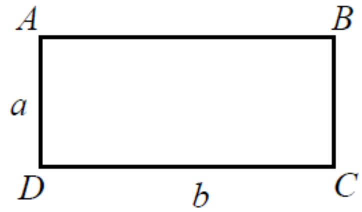
ריבוע



$$S_M = \frac{(a+a)\cdot(a+a)}{4} = \frac{2a\cdot 2a}{4} = a^2 \qquad S = a^2 \qquad \Rightarrow S = S_M$$

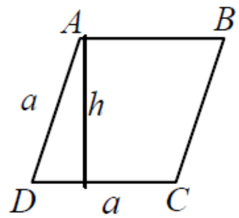
[6] אוריינות מתמטית, צורות במישור, חוברת לתלמיד ח', משרד החינוך

מלבן



$$S_M = \frac{(a+a)\cdot(b+b)}{4} = \frac{2a\cdot 2b}{4} = a\cdot b \qquad S = a\cdot b \qquad \Rightarrow S = S_M$$

מעוין

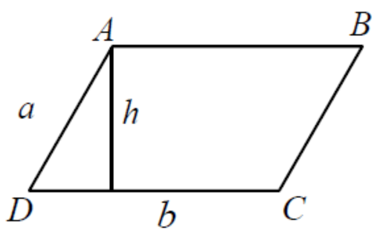


$$S_M = \frac{(a+a)\cdot(a+a)}{4} = \frac{2a\cdot 2a}{4} = a^2 \qquad S = a\cdot h$$

$, h < a$

ולכן $S < S_M$

מקבילית

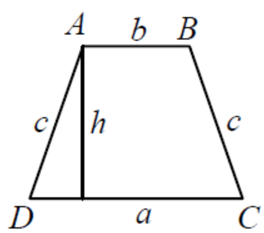


$$S_M = \frac{(a+a)\cdot(b+b)}{4} = \frac{2a\cdot 2b}{4} = a\cdot b \qquad S = b\cdot h$$

$, h < a$

ולכן $S < S_M$

טרפז שווה-שוקיים



$$S_M = \frac{(a+b)\cdot(c+c)}{4} = \frac{(a+b)\cdot 2c}{4} = \frac{(a+b)\cdot c}{2} \qquad S = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$$

ולכן $, h < c$

$S < S_M$

מתוך החישובים עולה כי קיימים מקרים בהם שטח המרובע המתקבל באמצעות הנוסחה המצרית שווה לשטח המתקבל באמצעות שימוש בנוסחאות המקובלות בימינו, וישנם מקרים בהם שטח המרובע המתקבל באמצעות הנוסחה המצרית גדול מהשטח המתקבל באמצעות שימוש בנוסחאות המקובלות בימינו.

לכן, יהיה נכון לאמור בכלליות, שבשל שיטת החישוב, גובי המסים אף פעם לא הפסידו כסף.

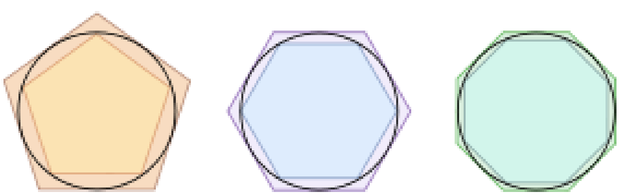
חלק ב: רקע היסטורי על ארכימדס[7] (3)

במתמטיקה, **שיטת המיצוי** היא שיטה להוכחת נוסחה לחישוב שטח של צורה כלשהי באמצעות חסימת סדרה של מצולעים בתוך הצורה, כך ששטח המצולעים בסדרה מתכנס לשטח הצורה - ההפרש בין שטח המצולע לשטח הצורה הולך וקטן ככל שאנו מתקדמים בסדרה. באופן דומה משמשת שיטה זו להוכחת נוסחה לחישוב נפח של גוף. שיטה זו, ששימשה בעת העתיקה, היא קודמתה של האינטגרציה, ואינה משמשת עוד לאחר פיתוחו של החשבון האינפיניטסימלי. טכניקת ההוכחה המשמשת במסגרת שיטת המיצוי היא הוכחה בדרך השלילה, ולכן שיטת המיצוי אינה משמשת לגילוי נוסחאות חדשות, אך מאפשרת הוכחה פורמלית לנוסחאות שהתגלו בדרך אחרת.

בספר השנים עשר של " יסודות, "ספרו של אוקלידס, נידונה שיטת המיצוי כדרך לחישוב נפחים. הספר כולל את הנוסחאות לנפח של פירמידה, של חרוט, של גליל ושל כדור.

הדגמה לשיטת המיצוי לחישוב שטח מעגל

ארכימדס, במאה השלישית לפנה״ס, העמיק את השימוש בשיטת המיצוי, והשתמש בה כדי לחשב, בהינתן רדיוס של מעגל את ההיקף של המעגל (ובעקבותיו את פאי, השווה ליחס בין היקף המעגל לקוטרו):



נחשב את היקפם של מצולע חוסם ומצולע חסום במעגל, ומכיוון שהיקף המעגל קטן מהיקף המצולע החוסם וגדול מהיקף המצולע החסום, אפשר לחשב אותו בכל רמת דיוק שנרצה, בעזרת הגדלת מספר צלעות המצולע. בשיטות המבוססות על העיקרון של שיטת המיצוי חישב ארכימדס שטחים ונפחים של מצולעים ופאונים.

תוצאות נוספות שהוכחו באמצעות שיטת המיצוי:

- השטח החסום על ידי קו ישר חותך במאונך לצירה פרבולה הוא 4/3 משטח המשולש שלו אותו בסיס וגובה.
- שטח האליפסה פרופורציונלי לשטח מלבן שצלעותיו שוות לציר הראשי והציר המשני של האליפסה.
- נפח כדור הוא 4 פעמים נפח החרוט שגובהו ורדיוס בסיסו שווים לרדיוס הכדור.
- נפח גליל שגובהו שווה לקוטרו הוא 3/2 מנפח כדור בעל אותו קוטר.
- השטח החסום על ידי קטע ישר וסיבוב אחד של ספירלה הוא 1/3 משטח העיגול שהרדיוס שלו שווה לאורך הקטע.

[7] ראה **ויקיפדיה** Method of exhaustion

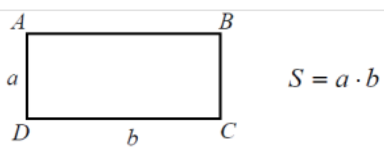
פרק שלישי : צורות ידועות ופשוטות ודרכים לחישוב שטחם ואיך מקבלים הנוסחאות שלהם

בגיאומטריה ישנן נוסחאות רבות הקשורות לחישובי שטחים :

- שטח מלבן שווה למכפלת אורכי שתי צלעות סמוכות : $S = a \cdot b$
- שטח טרפז שווה למכפלת חצי סכום הבסיסים בגובה הטרפז : $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$
- שטח משולש הוא חצי מכפלת בסיס המשולש בגובה : $\mathrm{S} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{a} \cdot \mathrm{h}$
- שטח עיגול שרדיוסו R הוא $\mathrm{S} = \pi \mathrm{R}^2$.

איך מקבלים נוסחאות אלה מ- 4 האקסיומות

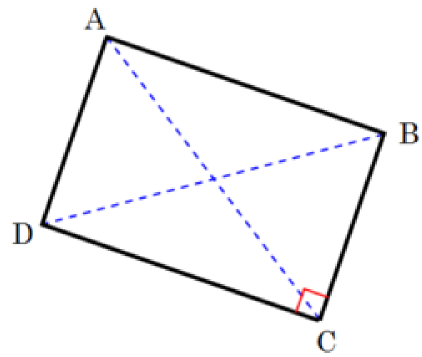
ישנן 2 אקסיומות חשובות בתורת השטחים שמהן אפשר לחשב את השטח של הצורות השונות...



1. אקסיומה שנייה : לצורות חופפות יש שטחים שווים
2. אקסיומה רביעית : שטח המלבן שווה למכפלת אורך המלבן ברוחבו

אני אראה איך נקבל נוסחאות שטח של מצולעים מכללים אלה

1. <u>שטח משולש ישר זווית:</u>



$\measuredangle D = \measuredangle B = 90°$, BC=AD , DC=AB

המשולש ABC חופף למשולש CDA (לפי צ.ז.צ) , ולכן השטח שלהם שווה (לפי אקסיומה ראשונה)

שטח המלבן שווה לסכום שטח שני המשולשים (שטח צורה שווה לסכום שטחי הצורות הנמצאות בה)

$S_{ABCD} = AB * AD$ (אקסיומה 2)

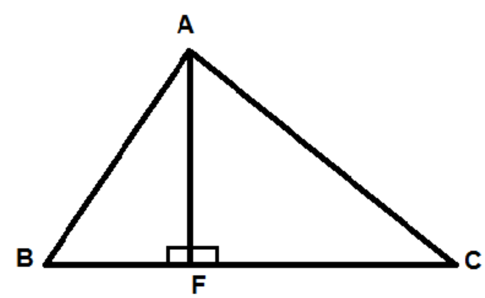
$S_{ABCD} = 2 * S_{ABD}$

$S_{ABD} = \frac{AB*AD}{2}$

כלומר שטח משולש ישר זווית שווה למחצית מכפלת הניצבים.

2. <u>שטח משולש רגיל:</u>

כפי שראינו למעלה שטח משולש ישר זווית שווה למחצית מכפלת הניצבים. ולכן נשתמש במשפט זה בהוכחת שטח משולש רגיל.



בה״כ נוריד גובה AF במשולש ABC

$S_{AFC} = \frac{AF*FC}{2}$ (שטח משולש ישר זווית שווה למחצית מכפלת הניצבים)

$S_{ABF} = \frac{AF*BF}{2}$ (כנ״ל)

$BF + FC = BC$ (אקסיומה 3)

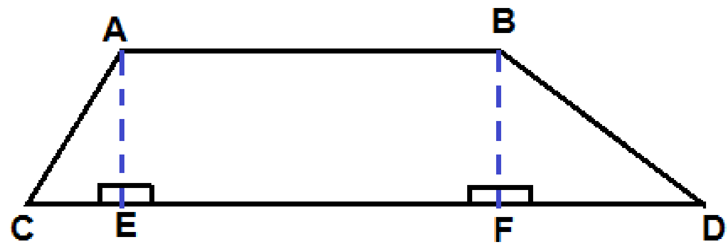
$S_{ABC} = S_{AFC} + S_{ABF}$ (אקסיומה 3)

$$S_{ABC} = \frac{AF*FC}{2} + \frac{AF*BF}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{AF}{2} * (BF + FC)$$

$$S_{ABC} = \frac{AF*BC}{2}$$

3. <u>שטח טרפז</u> :



טרפז הוא מרובע המורכב רק מזוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות. AB||DC

נוריד גבהים AE ו- BF, AE=BF

$S_{ABCD} = S_{ABEF} + S_{AEC} + S_{BFD}$ **(אקסיומה 3)**

$$CD = CE + EF + FD$$

$$S_{ABCD} = AB * BF + \frac{BF*FD}{2} + \frac{AE*CE}{2}$$

$$S_{ABCD} = AB * BF + \frac{BF*FD}{2} + \frac{BF*CE}{2} \qquad (AE=BF)$$

$$S_{ABCD} = BF(AB + \frac{FD}{2} + \frac{CE}{2})$$

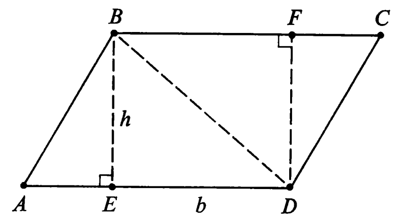
$$S_{ABCD} = BF(\frac{AB}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{FD}{2} + \frac{CE}{2})$$

$$S_{ABCD} = BF(\frac{AB}{2} + \frac{EF}{2} + \frac{FD}{2} + \frac{CE}{2}) \qquad (AB=EF)$$

$$S_{ABCD} = BF(\frac{AB}{2} + \frac{AB+FD+CE}{2})$$

$$S_{ABCD} = BF\frac{AB+CD}{2} \qquad (AB+FD+CE=CD)$$

4. <u>שטח מקבילית :</u>



מקבילית היא מרובע המורכב משני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות ושוות. נראה שהשטח של $ABCD$ הוא bh

בהינתן מקבילית $ABCD$, AD בסיס באורך b וגובה שלו BE באורך h :

לפי אקסיומה 3 : $ABCD = ABD + BDC$

לפי נוסחת משולש (כבר ראינו) : $ABD = \frac{1}{2}bh \;,\; BCD = \frac{1}{2}bh$

לפי תכונות המקבילית : $BC = b \;,\; DF = h$

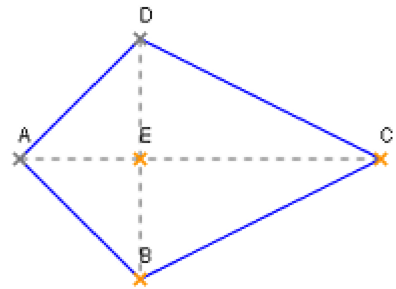
ואז נקבל ש : $ABCD = \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}bh = bh$

5. <u>שטח דלתון</u>:

דלתון הוא מרובע המורכב משני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף.

האלכסונים בדלתון מאונכים אחד לשני, האלכסון הראשי חוצה את המשני וחוצה את זוויות הראש של הדלתון.

נתבונן בהוכחה אחת של שטח דלתון, דבר זה יעבוד על כל מרובע שבו האלכסונים מאונכים זה לזה. פה נשתמש לאחר שגילנו מהו שטח משולש (מחצית מכפלת הצלע בגובה לה)



$S_{ABCD} = S_{ADC} + S_{ACB}$ (אקסיומה 3)

נשתמש בנוסחה של שטח משולש שכבר ראינו קודם:

$$\boldsymbol{S_{ADC} = \frac{DE * AC}{2}} \qquad \boldsymbol{S_{ABC} = \frac{BE * AC}{2}}$$

$$S_{ABCD} = \frac{DE \ * \ AC}{2} + \frac{BE \ * \ AC}{2} = \frac{AC}{2} * (DE + BE)$$

$$DE + BE = DB$$

$$S_{ABCD} = \frac{AC * DB}{2}$$

שטח מרובע שבו האלכסונים מאונכים אחד לשני יהיה שווה למחצית מכפלת האלכסונים

אז אפשר להגיד שנוסחה זו תעבוד גם על ריבוע, מעוין, דלתון ועל סתם מרובע שבו האלכסונים מאונכים זה לזה

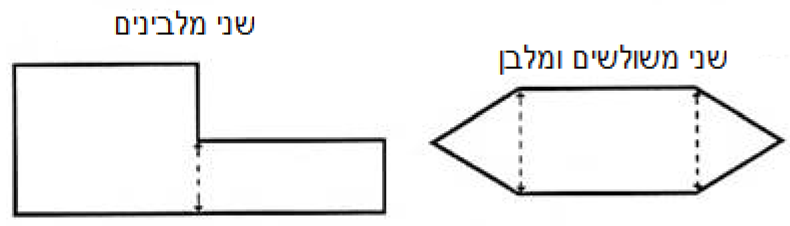
שיטות לחישוב שטח של צורה כללית במישור

הערה והכללה

בדרך כלל, לחישוב שטח של צורות שונות, נסתמך על חלוקתן לצורות שחישוב שטחיהן באמצעות

הנוסחאות כבר ידוע.

דוגמא :



בנוסף לנוסחאות שהוצגו עבור צורות פשוטות, ניתן לחשב שטח של צורה כללית באמצעות נוסחאות וכלים, פשוטים לשימוש ידני ומהיר, או מורכבים הדורשים מחשב.

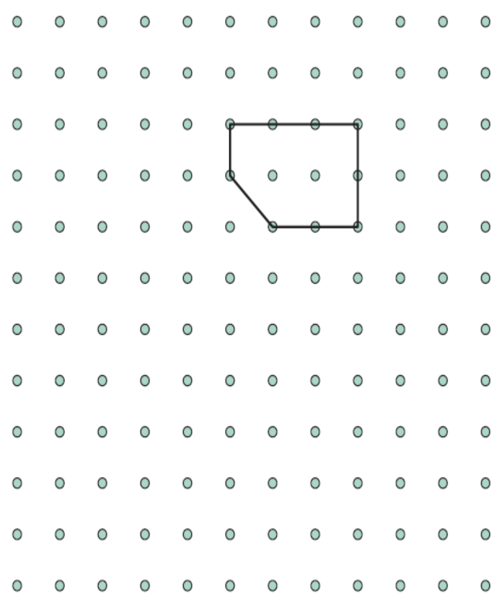
משפט פיק

כאן אציג את משפט פיק וההוכחה שלו, הקשר שלו עם ארבע האקסיומות ודוגמאות לחישוב שטחים של מצולעים לפי משפט זה

כאשר הצורה היא מצולע כלשהו שכל קדקודיו נמצאים על הרשת ניתן לחשב את השטח במדויק על פי משפט פיק. המשפט משתמש בריבוע יחידה ואקסיומה 4 בגרסה אחרת.

כאשר נתון סריג ריבועי אזי מצולע בסריג הוא מצולע אשר קדקודיו הם נקודות הסריג (ראה איור)

נגדיר יחידת אורך כמרחק בין שתי נקודות סריג סמוכות .



איור 3.1 - משפט פיק

משפט פיק (Pick) : השטח של מצולע בסריג נתון ע"י $\frac{1}{2}\boldsymbol{B}+\mathbf{I}-\mathbf{1}$

כאשר I הוא מספר נקודות הסריג בתוך המצולע (Interior) ,

ו- B הוא מספר נקודות הסריג על צלעות המצולע (Boundary)

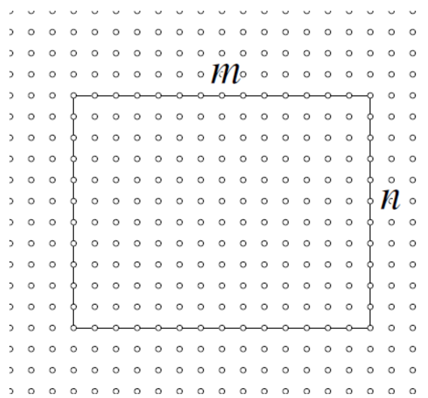
דוגמא באיור 3.1, I =2 , B = 9 ולכן השטח הוא $5\frac{1}{2} = 1 - 2 + 9 \cdot \frac{1}{2}$ (ביחידות שטח) , קל לאשר זאת מתוך השרטוט

הוכחת משפט פיק[8]

נוכיח את משפט פיק בשני שלבים : בשלב הראשון מוכיחים אותו עבור מלבן כלשהו ומשולש כלשהו, ובשלב השני נוכיח אותו עבור מצולע כלשהו

<u>הוכחת משפט פיק עבור מלבינים :</u>

לפני שנראה את ההוכחה עבור מלבן כללי, בוא נראה את ההוכחה עבור מלבן פשוט יותר : מלבן מיושר לשריג (ראה איור 3.2, למטה)



איור 3.2, משפט פיק עבור מלבן

שטח המלבן שבאיור 1 : 14*11 = 154 ➔ 14 x 11 (m=14 , n=11)

ולפי משפט פיק : I = 13 x 10 = 130 , B=50. ואז השטח הוא : $I + \frac{B}{2} - 1 = 130 + \frac{50}{2} - 1 = 154$

הראינו שמשפט פיק מתקיים עבור המלבן שבאיור 1. כעת, נראה נכונות המשפט עבור מלבן כלשהו m x n :

אורך המלבן הוא m ז״א ישנן m+1 נקודות בכל צלע של האורך (שים לב, זה כולל את נקודות הקצה). רוחב המלבן הוא n ז״א ישנן n+1 נקודות בכל צלע של הרוחב, נוריד 2 (נקודות הקצה אשר כבר חושבו בצלע של האורך) ז״א ישנן n-1 נקודות

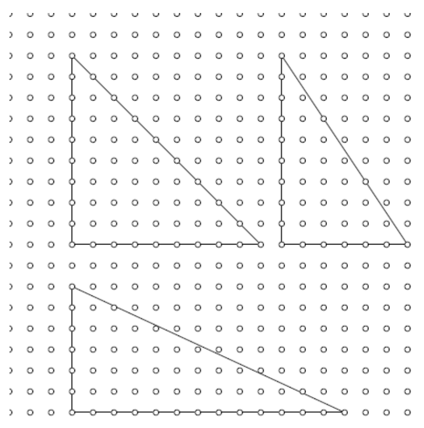
נקודות הפנימיות הן (m-1)*(n-1) (כל שורה מכילה m-1 נקודות פנימיות, ויש לנו n-1 שורות)

[8] מתוך משפט פיק ל- Tom Davis

$$I + \frac{B}{2} - 1 = (m-1)(n-1) + \frac{2(m+1) + 2(n-1)}{2} - 1$$
$$= mn - m - n + 1 + \frac{2m + 2n}{2} - 1 = mn - m - n + 1 + m + n - 1 = mn$$

<u>הוכחת משפט פיק עבור משולשים ישרי-זווית מיושרים לשריגים :</u>

הדרך הפשוטה להסתכל על משולשים אלה היא כאל מלבן (כמו בשלב הקודם) בתוספת של האלכסון. (ראה איור 3.3, למטה)



איור 3.3, משפט פיק עבור משולשים ישרי זווית

נתייחס למשולש ישר הזווית T עם שוקיים מיושרים לשריג באורך m (צלע אנכית), n (צלע אופקית). אנו יודעים שהשטח של משולש כזה הוא $\frac{mn}{2}$

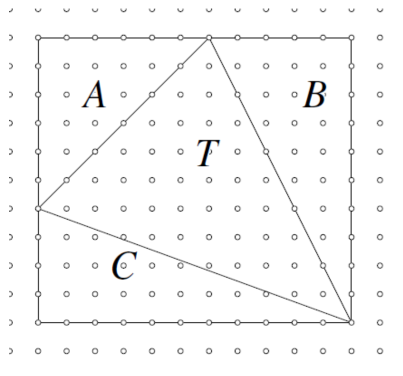
בוא נראה כעת את השטח של משולש כזה לפי משפט פיק :

קל לראות כמה נקודות נופלות על השוקיים : יש לנו m+1 נקודות על הצלע האנכית (זה כולל את נקודות הקצה) ויש לנו n נקודות על השוק האופקית (יש לנו נקודת קצה אחת, השנייה כבר חושבה עם הצלע האנכית). אך קשה לראות כמה נקודות נופלות על האלכסון (לפעמים אחת, לפעמים כמה ולפעמים אף אחת), אך נראה שזה לא כל כך משנה. נניח שישנן k נקודות על האלכסון (ללא נקודות החיתוך עם השוקיים)

נקודות הפנים : אם נשלים את המשולש למלבן, אז יש לנו (m-1)(n-1) נקודות פנימיות. נוריד את נקודות האלכסון k ונחלק בשתיים (כי משולש זה חצי מלבן) : $I = \frac{(m-1)(n-1)-k}{2}$

$$A(T)_{\text{פיק}} = I + \frac{B}{2} - 1 = \frac{(m-1)(n-1)-k}{2} + \frac{m+1+n+k}{2} - 1$$
$$= \frac{mn-m-n+1-k+m+1+n+k}{2} - 1 = \frac{mn+2}{2} - 1 = \frac{mn}{2}$$

<u>הוכחת משפט פיק עבור משולש כלשהו</u>



איור 3.4, משפט פיק עבור משולש כלשהו

ראיונו את הוכחת פיק עבור מלבן ומשולש ישר זווית. נראה כעת את ההוכחה עבור משולש כלשהו T(ראה איור 3.4). בשביל ההוכחה נצטרך עוד שלושה משולשים ישרי זווית A, B ו- C (ראה איור 3.4).

נניח שלמשולש A ישנן I_a נקודות פנימיות ו- B_a נקודות גבול. ולמשולש B ישנן I_b נקודות פנימיות ו- B_b נקודות גבול. וכו'. ונסמן את המלבן ב- R

למשולשים ישרי הזווית נקבל: $A(A) = I_a + \frac{B_a}{2} - 1$, $A(B) = I_b + \frac{B_b}{2} - 1$, $A(C) = I_c + \frac{B_c}{2} - 1$

ואת המלבן: $A(R) = I_r + \frac{B_r}{2} - 1$

צריך להראות ש: $A(T) = I_t + \frac{B_t}{2} - 1$

אנחנו יודעים ש (לפי אקסיומה: שטח של שלם שווה לשטח כל חלקיו) (משוואה #1)

$$A(R) = A(A) + A(B) + A(C) + A(T) ==> A(T) = A(R) - A(A) - A(B) - A(C)$$
$$= I_r - I_a - I_b - I_c + \frac{B_r - B_a - B_b - B_c}{2} + 2$$

נניח שהמלבן R הוא בגודל m x n , אז: $A(R) = mn\ ,\ B_r = 2m + 2n\ ,\ I_r = (m-1)(n-1)$
אם נספור את נקודות הגבול נקבל (משוואה #2):

$$B_a + B_b + B_c = B_r + B_t \Rightarrow B_r = B_a + B_b + B_c - B_t$$

הקדקודים חדי-הזווית של המשולשים המקיפים נספרו פעמיים בשני הצדדים של המשוואה. נחשב שוב את נקודות הפנים של המלבן ונקבל (משוואה #3):

$$I_r = I_a + I_b + I_c + I_t + (B_a + B_b + B_c - B_r) - 3$$

את *3-* במשוואה #3 כי הקדקודים של המשולשים נחשבו פעמיים. נציב את B_r שבמשוואה*#2* אל תוך משוואה*#3* ונקבל (משוואה *#4*): $I_r = I_a + I_b + I_c + I_t + B_t - 3$

כעת נציב את הערכים של B_r ו- I_r מהמשוואה#2 והמשוואה#4 אל תוך משוואה#1 ונקבל (אחרי צמצומים):

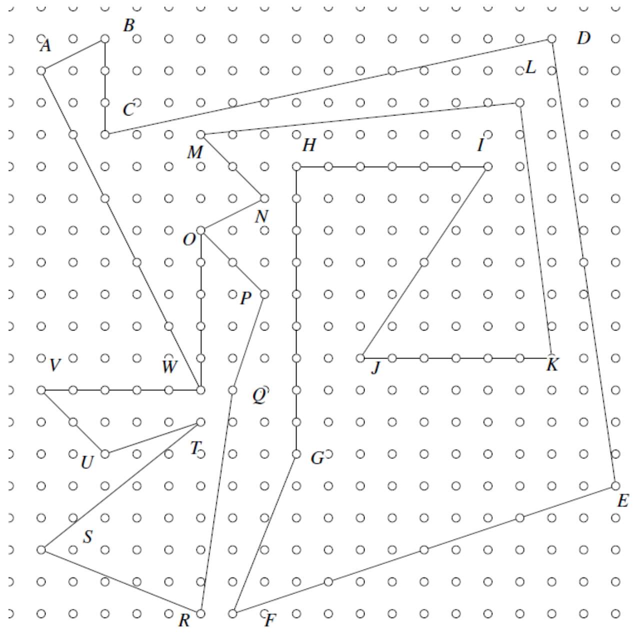
$$\begin{aligned} A(T) = I_r - I_a - I_b - I_c + \frac{B_r - B_a - B_b - B_c}{2} + 2 \\ = (I_a + I_b + I_c + I_t + B_r - 3) - I_a - I_b - I_c \\ + \frac{(B_a + B_b + B_c - B_t) - B_a - B_b - B_c}{2} + 2 = I_t + B_t - 3 - \frac{B_t}{t} + 2 \\ = I_t + \frac{B_t}{2} - 1 \end{aligned}$$

כפי שנדרש להוכיח.

<u>הוכחת משפט פיק עבור מצולע כלשהו</u>

נראה את הוכחת משפט פיק עבור מצולע כלשהו ע"י אינדוקציה. הוכחנו כבר את משפט פיק עבור משולש כלשהו במישור (בסיס האינדוקציה) ואז נניח שהמשפט נכון עבור מצולע בעל *k-1* צלעות ונוכיח אותו עבור מצולע בעל *k* צלעות

להמחיש את צעדי ההוכחה, נתבונן באיור 3.5,



איור 3.5 משפט פיק: המקרה הכללי

יש לנו מצולע בעל 23 צלעות: *ABC…W*. נראה שכל מצולע בעל יותר מ- 4 צלעות אפשר לצייר לו אלכסון פנימי (ישנן הרבה כאלה לפי האיור 3.5, אך נבחר את האלכסון *OW* בתור דוגמא – נוכיח את הלמה הזאת בהמשך). אלכסון זה יחלק את המצולע למצולעים יותר קטנים (מבחינת מספר צלעות), במקרה הספציפי שלנו, למצולע בעל 16 צלעות: *ABC…MNOW* ומצולע בעל 9 צלעות *OPQ…W*. ואז לפי האינדוקציה (בדוגמא שלנו *k=23*) אנו יודעים שמשפט פיק נכון עבור כל מצולע בעל עד 22 צלעות. ז"א משפט פיק נכון עבור שני המצולעים הקטנים.

מה שנשאר לנו להוכיח (בשביל להוכיח את נכונות משפט פיק עבור כל מצולע) זה: אם שני מצולעים מקיימים את משפט פיק אז החיבור שלהם גם הוא מקיים את משפט פיק.

<u>למה: אם שני מצולעים מקיימים את משפט פיק אז החיבור שלהם גם הוא מקיים את משפט פיק</u>

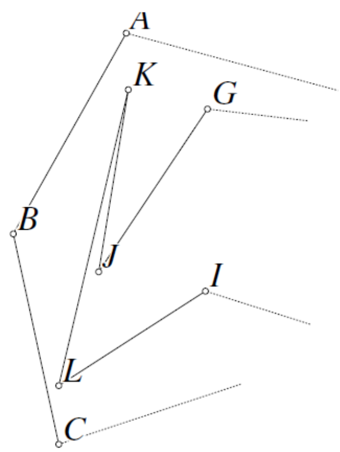
<u>הוכחה:</u> יהיו P_1 ו- P_2 תת-מצולעים של המצולע P. נסמן ב- I_z נקודות פנים עבור מצולע Z. ונסמן B_z את נקודות הגבול (על הצלעות) של מצולע Z. נניח גם שהאלכסון המשותף (שמחבר) בין P_1 ו- P_2 יש עליו m נקודות:

$$A(P) = A(P_1) + A(P_2) = \left(I_1 + \frac{B_1}{2} - 1\right) + \left(I_2 + \frac{B_2}{2} - 1\right)$$

מכיוון שכל נקודה פנימית ל- P_1 ו- P_2 היא גם פנימית ל- P, וגם $m-2$ הנקודות שעל האלכסון גם הן פנימיות ל- P אזי: $I = I_1 + I_2 + m - 2$ מאותה סיבה לגבי נקודות על הצלעות גורר ש- $B = B_1 + B_2 - 2(m-2) - 2$. ואז נקבל:

$$A(P) = I + \frac{B}{2} - 1 = (I_1 + I_2 + m - 2) + \frac{B_1 + B_2 - 2(m-2) - 2}{2} - 1$$
$$= I_1 + I_2 + (m-2) + \frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{2} - (m-2) - 1 - 1$$
$$= \left(I_1 + \frac{B_1}{2} - 1\right) + \left(I_2 + \frac{B_2}{2} - 1\right) = A(P_1) + A(P_2)$$

<u>למה : לכל מצולע פשוט יש אלכסון פנימי</u>



איור 3.6, אלכסון פנימי

הוכחה : נמצא זווית $\angle ABC$ כל שהפנים של המצולע הוא בצד הזווית שפחות מ- 180^{o}. ואז ישנם שני מקרים : או שהקטע AC נופל כולו בתוך המצולע - ואז סיימנו את ההוכחה בכך ש- AC הוא האלכסון המבוקש. או שחלק מהמצולע (לדוגמה, $GJKL$ שבאיור 3.6) נכנס ב- ΔABC.

מכיוון שישנו מספר סופי של קדקודים של המצולע הפנימי ל- ΔABC , לכל אחד מהקדקודים הללו, נבנה קו מאונך לקו חוצה הזווית $\angle ABC$. בבירור, הקו שמחבר את B לקדקוד עם המאונך הקרוב לנקודה B כולו יהיה בתוך המצולע. אחרת, הקו יחצה צלע אחרת של המצולע, ולאחד הקצוות של הצלע הזאת יהיה מאונך לחוצה הזווית קרוב יותר ל- B.

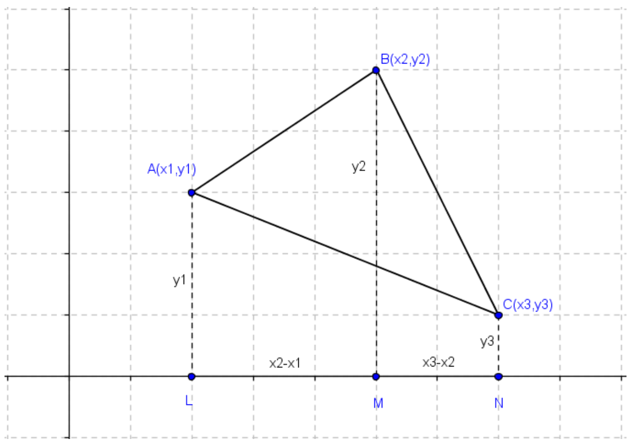
שים לב, אנו לא יכולים להשתמש בקדקוד הקרוב ל- B. באיור 3.6, J היא הנקודה הקרובה ל- B, אך ברור שהקטע JB חותך את הקטע KL

מציאת שטח של משולש ומצולע באמצעות קדקודיו

בשיטה זו נלמד לחשב שטח של משולש שקדקודיו נתונים ללא חישוב גבהים וזה בשימוש באקסיומה מספר 2 ו- 3

עקרון שיטה זו היא לחשב את שטח המשולש ע"י כך שנעביר מהקדקודים קטעים המאונכים לציר ה- x (ראה סרטוט באיור 3.7).

נחשב תחילה את שטחי הטרפזים ABML, BCNM ו- ACNL. כל אחד מהטרפזים הוא ישר זווית, לכן



איור 3.7, שטח משולש לפי קדקודיו

$$S_{ABML} = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1)$$

$$S_{BCNM} = \frac{y_2 + y_3}{2}(x_3 - x_2)$$

$$S_{ACNL} = \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1)$$

שטח המשולש המבוקש ABC הוא (לפי אקסיומה מספר 3) :

$$S_{ABC} = S_{ABML} + S_{BCNM} - S_{ACNL} = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) + \frac{y_2 + y_3}{2}(x_3 - x_2) - \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1)$$

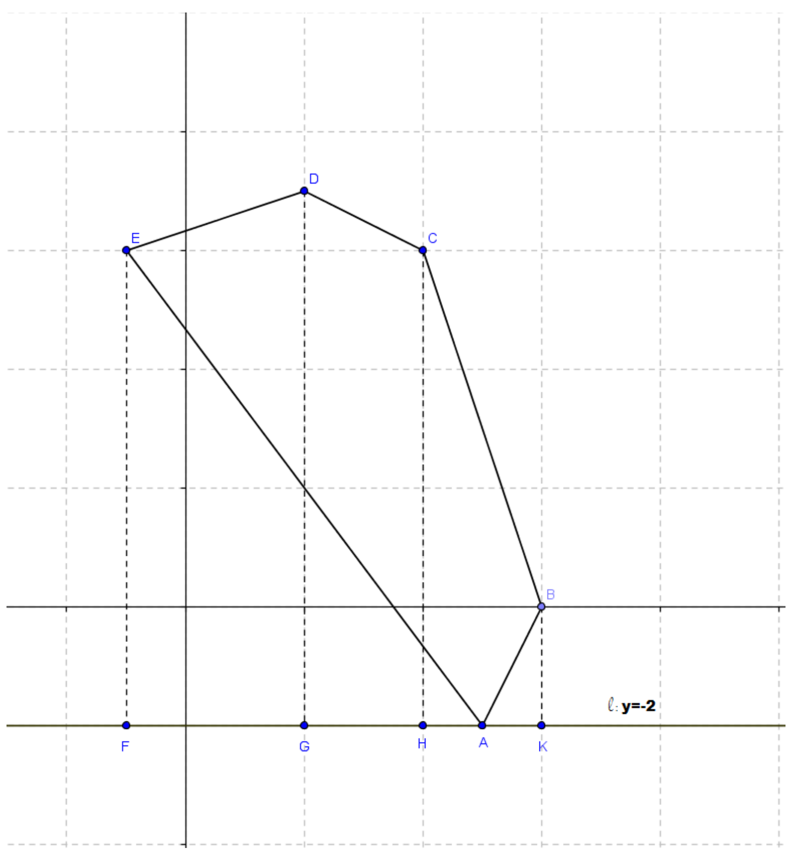
שטח מצולע

בדומה למקרה של משולש אפשר למצוא שטח של כל מצולע על פי קדקודיו, ע״י שימוש באקסיומות 2 ו- 3.
אם המצולע כולו מעל ציר ה- x , מספיק להעביר את האנכים מכל אחד מקדקודים כפי שעשינו בדוגמא של המשולש.

אם יש קדקוד מתחת לציר ה- x נבנה קו l המקביל לציר ה- x שעובר דרך הקדקוד ששיעור ה-y שלו הוא הקטן ביותר, ואז נוריד אליו את האנכים משאר הקדקודים (ראה איור 3.8).

יתר הפעולות יישארו זהות למקרה של המשולש. נדגים זאת בתרגיל הבא:

נתון מחומש שקדקודיו הם: $A(5,-2)$, $B(6,0)$, $C(4,6)$, $D(2,7)$, $E(-1,5)$ מצאו את שטחו



איור 3.8, שטח מצולע

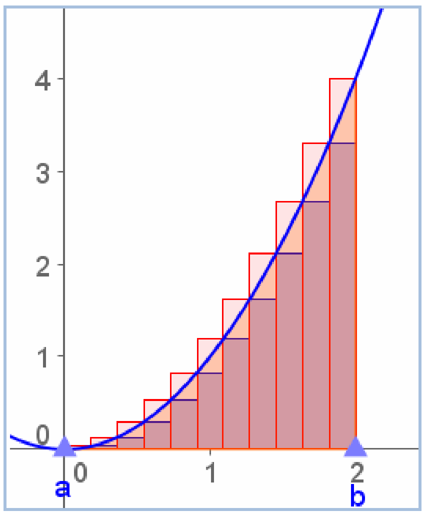
פרק רביעי : חישוב שטח של צורות עקומות ע"י סכומי רימן ואינטגרל רימן

עד עכשיו ידענו לחשב במדויק שטח של מצולע כשיש יחידת מדידה וכשמחשבים את השטח מקבלים מספר. אבל ישנן צורות שהן עקומות ולחישוב השטח שלהן אנחנו נחסום את הגרף של העקומה מלמעלה ומלמטה ע"י מלבנים (לפי אקסיומה). נשתמש במשפט הסנדוויץ' יחד עם אקסיומה 3, ומשפטי גבול של סדרה חסומה ומתכנסת, ולפי משפט שהראינו למעלה[9], נקבל:

שטח המתקבל מהמלבנים החוסמים > השטח המבוקש (השטח שמתחת לעקומה) > שטח המתקבל מהמלבנים החסומים

ואז לפי משפט הסנדוויץ' , כאשר הגבול של המלבנים החוסמים והחסומים שווים אז השטח של העקומה יהי שווה לגבול זה

האינטגרל של פונקציה שווה לשטח שבין הפונקציה לציר ה-x. אם ניתן לכתוב היקף של צורה סגורה באמצעות שתי פונקציות, אז שטח הצורה הוא הפרש האינטגרלים של הפונקציות.



איור 4.1, קירוב שטח לפי פונקציית מדרגה

כדי למצוא את השטח תחת הגרף של f בקטע [a , b] , מקרבים את הפונקציה ע"י פונקציית מדרגה. בוחרים חלוקה של הקטע [a , b] בעזרת הנקודות: $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$

ואז השטח תחת הגרף (ראה את האיור 4.2) מקורב ע"י:

$\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(t_{i+1} - t_i)$ (הסכומים לפי: אקסיומה 3. חישוב שטח המלבנים לפי אקסיומה 4)

רוחב: $(t_{i+1} - t_i)$, גובה: $f(t_i)$

שהוא סכום שטחי המלבנים שגובהם $f(t_i)$ ורוחבם $(t_{i+1} - t_i)$.
כלומר השטח תחת הגרף של פונקציית המדרגה שערכה $f(t_i)$ קבוע בקטע $[t_i, t_{i+1}]$.

סכום זה נקרא סכום רימן (Riemann sum).

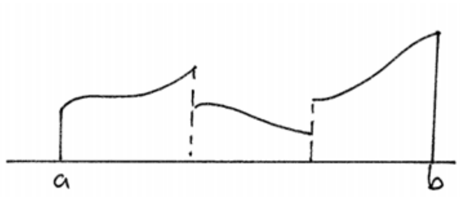
אם הסכום $\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(t_{i+1} - t_i)$ מתקרב לערך מסוים כשהחלוקה

$a = t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ נהיית עדינה יותר ויותר (כלומר כש- n גדל והרוחב המקסימלי $\max_{0\le i\le n-1} |t_{i+1} - t_i| \longrightarrow 0$) נאמר ש- f אינטגרבילית בקטע [a , b], והערך אליו מתקרבים נקרא ערך האינטגרל של f על [a , b] והוא מסומן $\int_a^b f$ או $\int_a^b f(t)d(t)$.

[9] אם A ו- B שתי צורות כך שמתקיים A⊆B אז $S(A) \le S(B)$

הערות:

1. כל הפונקציות הרציפות הן אינטגרביליות לפי הגדרה זו.
2. כל הפונקציות הרציפות למקוטעין הן אינטגרביליות (הכוונה היא לפונקציות המוגדרות ע״י הגדרות נפרדות על תת-קטעים המושרים ע״י חלוקה כלשהי של [a , b], באופן בו הפונקציה רציפה בכל תת-קטע של החלוקה, ונקודות אי רציפות (״קפיצות״) עשויות להופיע בנקודות החלוקה בלבד)



איור 4.2, פונקציה רציפה למקוטעין

3. כדי לחשב נומרית את ערכם של אינטגרלים משתמשים בשיטה הדומה לסכום רימן, רק שבהינתן מספר בדיד של ערכי הפונקציה, ניתן לקבל הערכה טובה יותר של השטח ע״י קירוב לפונקציה שאינה פונקציית מדרגה (קבועה למקוטעין). קירוב לינארי למקוטעין נותן את החוק הטרפזי (Trapezoidal rule), קירוב ריבועי למקוטעין נותן את חוק סימפסון (Simpson's rule), ובאופן כללי ניתן לקרב למקוטעין ע״י פולינומים מדרגה גבוהה יותר

ניתן להגביל את הדיון לסכומי רימן בהם החלוקות הן של n תתי-קטעים שווי גודל:

$t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n}$ $\forall_i$. ואז סכום רימן הוא פשוט: $\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)$

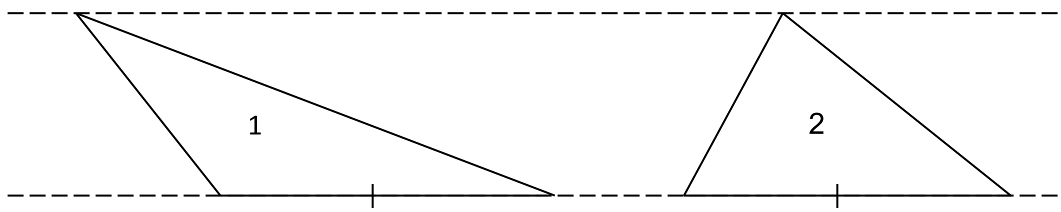
פרק חמישי : עקרון קאוואליירי (Cavalieri)

פרק זה הוא מעין הבנה וסיכום למאמר של קאוואליירי [10], הרעיון של המאמר הוא איך לחשב אינטגרל שמסובך היה לבנות עליו סכומי רימן.

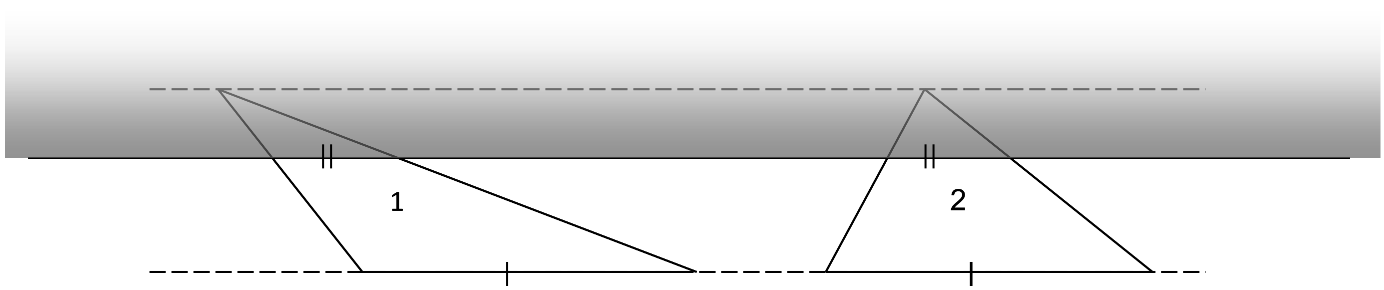
עקרון קאוואליירי לחישוב שטח

I. עובדות בסיסיות מהנדסת המישור:

א. לשני משולשים בעלי צלעות שוות וגבהים שווים לצלעות אלה, שטחים שווים:



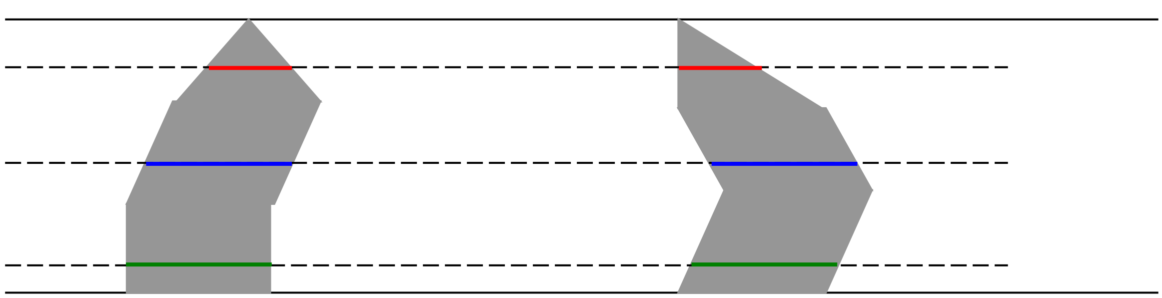
ב. לטרפזים בעלי בסיסים שווים בזוגות וגבהים שווים, שטחים שווים:



איור 5.1, עקרון קאוואליירי לחישוב שטח

<u>הכללה – העיקרון הראשון של קאוואליירי (הנדסת מישור):</u>

אם שתי צורות במישור מוגבלות בין אותו זוג של ישרים מקבילים, ועל כל ישר המקביל להם נוצרים בתוך כל אחת מהצורות קטעים שווים, אז שטחי שתי הצורות שווים ביניהם**:**



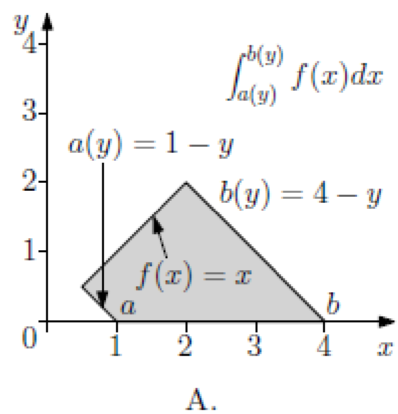
איור 5.2, העיקרון הראשון של קאוואליירי (הנדסת מישור)

[10] סיכום מתרגול בקורס גיאומטריה למורי תיכון, ע"י דר מריטה ברבש – שנה"ל 2011-2012

(4) Cavalieri Integration – אינטגרל קאוואליירי[11]

בהתחשב ברצועות אינטגרטיביות שאינן מלבניות, אנו יוצרים סכום קאוואליירי שיאפשר להפוך אותו לסכום רימן רגיל (של אזור זהה) ע״י שימוש בפונקציית טרנספורמציה h(x) או שאפשר להפוך אותו לסכום רימן-m ע״י שימוש בפונקציית טרנספורמציה הופכית g(x)

התוצאה העיקרית של אינטגרציית קאוואליירי ניתן להדגים באמצעות דוגמא פשוטה. לדוגמא, ניקח את האזור החסום ע״י ציר x והקווים של $b(y) = 4 - y$, $a(y) = 1 - y$, $f(x) = x$ (ראה את האיור 5.3)



איור 5.3

נשים לב שאי אפשר להביע את שטח הצורה הנ״ל ע״י אינטגרל רימן בודד. עם זאת אנו יכולים לחשב את

שטח של אזור זה על ידי שימוש באינטגרל קאוואליירי בודד:

$$Area = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x)d(x)$$

אשר קשורה לאינטגרל רימן ואינטגרל רימן-סטינליס כדלקמן:

$$\int_{a(y)}^{b(y)} f(x)\, d(x) = \int_{a}^{b} f \circ h(x)\, d(x) = \int_{a'}^{b'} f(x)\, dg(x)$$

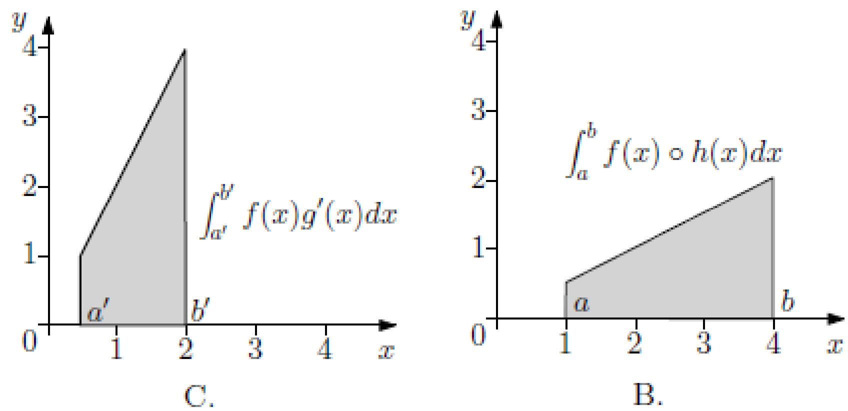
לפי הדוגמה שיש לנו, נקבל את התוצאה הבאה, מכיוון ש

$$h(x) = \frac{x}{2} \qquad g(x) = 2x$$

[11] מאמר של T. L. GROBLER, E. R. ACKERMANN, A. J. VAN ZYL, AND J. C. OLIVIER T. L. GROBLER, E. R. ACKERMANN, A. J. VAN ZYL, AND J. C. OLIVIER

$$\int_{1-y}^{4-y} x\ d(x) = \int_{1}^{4} \frac{x}{2}\ d(x) = \int_{0.5}^{2} x\ d2x = 3.75$$

אזורי טרנספורמציה $f \circ h(x)$ (לפי ניסוח רימן) $f(x) \cdot g'(x)$ (לפי ניסוח רימן-סטילטיס) מוצגים באיור 5.4, B ו- C בהתאמה:



איור 5.4

במאמר זה אנו נראה כיצד למצוא את פונקציית טרנספורמציה h(x) וההופכי שלה g(x). קודם כל ניתן סקירה קצרה של תאוריית האינטגרציה הקלסית (חלק 2). ולאחר מכן את הגזירה של אינטגרצית קאוואליירי (חלק 3). ולבסוף נציג מספר דוגמאות עובדות באופן מלא (חלק 4) אשר מדגימים בבירור כיצד ניתן ליישם האינטגרציה של קאוואליירי למגוון אזורים.

חלק 2 : תאוריית האינטגרציה הקלסית Classical Integration Theory

אחת הטכניקות הוותיקות ביותר למציאת השטח של אזור הוא שיטת המיצוי , מיוחסת לאנטיפון. שיטת המיצוי מוצאת שטח של אזור על ידי חריטה בתוכו רצף של מצולעים ששטח שלהם מתכנס לשטח של האזור כולו. למרות שתאוריית האינטגרציה הקלסית הינה תחום מבוסס היטב, עדיין יש תוצאות חדשות שהתווספו בעידן המודרני. לדוגמה, במאמר מעניין מאוד של Ruffa הייתה הכללה של שיטת המיצוי, שהובילה לנוסחת אינטגרציה אשר תקפה לכל פונקציות האינטגרציה רימן :

$$\int_{a}^{b} f(x)\ dx = (b-a) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^n - 1} (-1)^{m+1}\ 2^{-n}\ f(a + \frac{m(b-1)}{2^n})$$

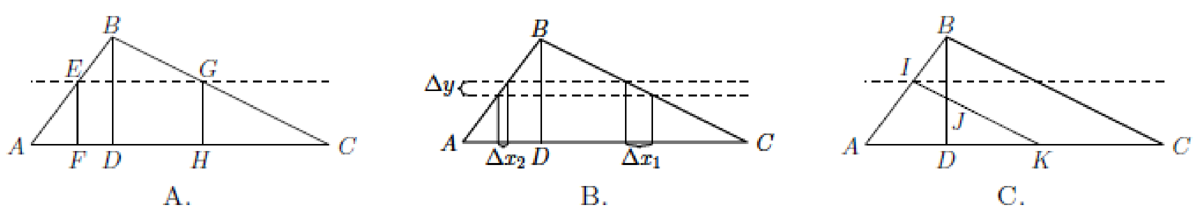
התאוריה הקלסית היא שונה מאוד משיטת המיצוי, ומיוחסת בעיקר לניוטון, לייבניץ ורימן. ניוטון

ולייבניץ גילו את המשפט Calculus באופן עצמאי ופיתחו את הסימון המתמטי לתאוריה האינטגרציה הקלסית. רימן פירמל את האנטגרציה הקלסית ע״י הגדרת המושג של גבולות ליסודות אשר יוסדו על ידי ניוטון ולייבניץ. עם זאת, האבא האמתי של תאוריית האינטגרציה הקלסית הוא כנראה Bonaventura קאוואליירי (1598 – 1647) .

קאוואליירי המציא שיטות לחישוב שטח באמצעות הלא-מתחלקים (indivisibles). בשיטת ה-indivisibles, אזור מחולק לאינסוף indivisibles, כל אחד נחשב לקו חד מימדי ומלבן דק אינפיניטסימלי דו ממדי. ואז השטח של אזור הינו סכום של כל ה- indivisibles באזור. עם זאת, הייתה ביקורת קשה על השיטה של **קאוואליירי** בשל ״פרדוקס ה- indivisibles ״ (נסביר את זה עוד מעט).

פרדוקס ה- indivisibles **(5)**

ניקח לדוגמא משולש לא שווה צלעות , ΔABC (ראה איור 5.5, A) , על ידי הטלת הגובה לבסיס המשולש, ΔABC , יחולק לשני משולשים לא שווה שטח. אם גם המשולש השמאלי ΔABD וגם הימני ΔBDC מחולקים ל- indivisibles אז אנו יכולים לראות בקלות שכל indivisible (לדוגמא EF) במשולש השמאלי מתאים ל- indivisibles שווה (לדוגמא GH) במשולש הימני. זה יגרור ששני המשולשים חייב להיות להם שטח שווה!



איור 5.5 , פרדוקס ה- indivisibles

כמובן שטענה זו היא שגויה בעליל. כדי לראות את זה, אנחנו יכולים לחקור אותה באופן הדוק יותר מנקודת מבט של המדידה, כפי שמוצג באיור B. ציור רצועה ברוחב Δy תוך המשולש ולחשב את התמונה מראש של רצועה זו מייצרת שני טווחים על ציר x עם רוחב לא שווה.

כאשר $\Delta y \longrightarrow 0$, נוצרים שני indivisibles: EF ו GH. עם זאת, לא משנה כמה קטן Δy , אורכי שני הטווחים Δx_1 -ו Δx_2 לעולם לא יהיו שווים. במילים אחרות, השטח ש- EF -ו GH תורמים לשטח הכולל של המשולש חייב להיות שונה.

ישנה דרך פשוטה עוד יותר להפריך את הפרדוקס לעיל: במקום להשתמש ב- indivisibles המקבילים לציר ה-Y, אנו נשתמש ב- indivisibles המקבילים ל- BC, (כפי שמוצג באיור C ,5.5). ואז, ברור שכל זוג המקביל ל- indivisibles IJ ב- ΔABD ו- JK ב- ΔBDC יש להם אורכים שונים כמעט בכל נקודה. לכן השטחים של ΔABD ו- ΔBDC בהכרח שונים.

השיטה של התייחסות ל- indivisibles (או אינפיניטיסימלים), שאינם מקבילים לציר ה-Y מהווה את הבסיס של אינטגרציית קאוואליירי , שבה נשתמש ברצועות אינטגרציה שאינם מלבניים.

חלק 3: האינטגרציה של קאוואליירי

אנו מציגים שיטה של אינטגרציה שאנו מתייחסים אליו האינטגרציה של קאוואליירי. שבה ההבדל העיקרי מאינטגרציית רימן רגילה הוא שבה ניתן להשתמש ברצועות אינטגרציה יותר כלליות. במובן מסוים אינטגרל קאוואליירי יכול גם להיראות כהכללה של אינטגרל רימן, שבנוסחה של קאוואליירי בונים צורות מרובעות כלשהן, לעומת האינטגרלי של רימן הרגיל רצועות האינטגרציה הם מלבניים. זה לא אומר שאינטגרל קאוואליירי מרחיב את פונקציות אינטגרביליות-רימן. למעשה, פונקציות אינטגרביליות-קויליארי הן שקולות לפונקציות אינטגרביליות-רימן. עם זאת, אינטגרל קאוואליירי מאפשר לנו לבטא את תחומי אזורים מסוימים כאינטגרלים יחידים עבורו היינו צריכים לכתוב הרבה מאינטגרלי רימן.

<u>הקדמות והגדרות</u>

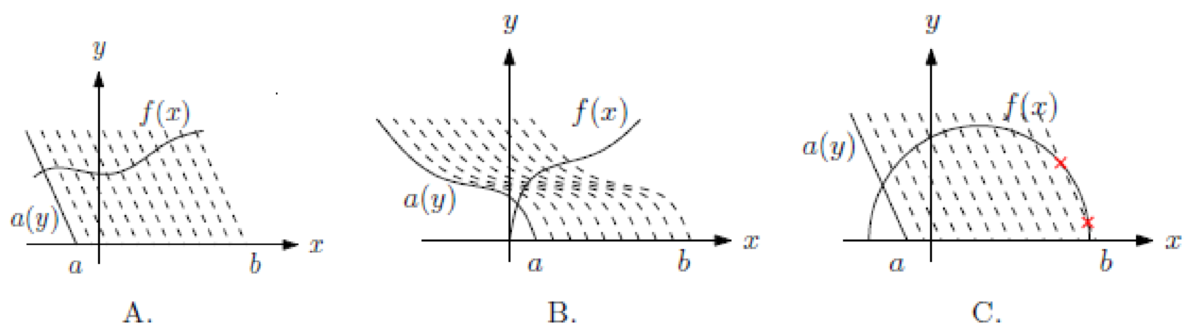
על מנת לפתח (ולהציג באופן ברור) את תאוריה אינטגרציית קאוואליירי, חייבים להציג כמה ההגדרות קודם. כמו כן, אנחנו נתרכז ב- $\Re^2$ עם קואורדינטות הצירים x ו- y.

<u>הגדרה 1: פונקציית הזזה</u>

פונקציה רציפה a(y) נקראת פונקצית הזזה ביחס לפונקציה רציפה $f(x)$ בתחום [a , b] אם

$$\{\, a \circ f(x) + z = x \,\} \quad \text{לכל} \quad a(0) = a \;\; and \;\; z \in (b - a)$$

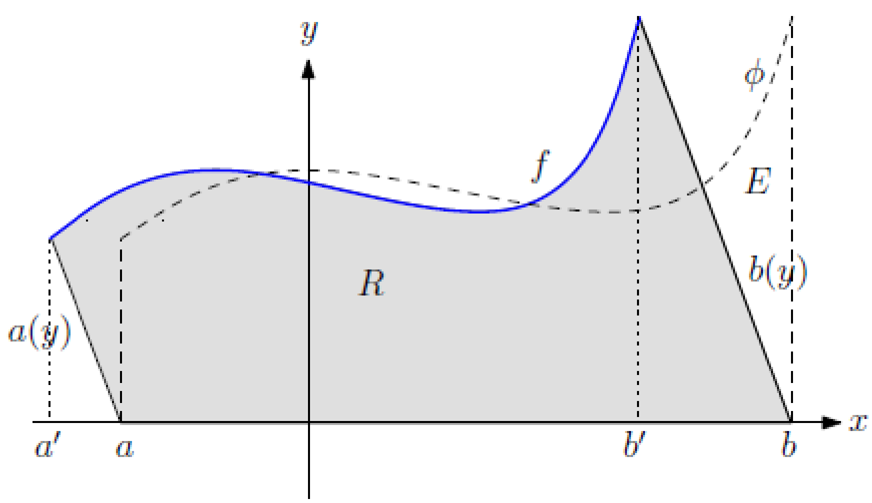
ההגדרה לעיל אומרת שכל פונקציה רציפה $\mathbf{a(y)}$ אשר חותכת פונקציית רציפה $\boldsymbol{f(x)}$ בדיוק פעם אחת עבור הזזה שרירותי על ציר ה- x בתוך הטווח [a , b] נקראת פונקציית מעבר. שתי דוגמאות לפונקציות מעבר אשר מוצגות באיורים A, B ,5.6 . ואיור C ,5.6 מציג דוגמה לפונקציה לינארית $\mathbf{a(y)}$ שאינה פונקציית הזזה ביחס ל- $\boldsymbol{f(x)}$



איור 5.6, דוגמאות לפונקציות מעבר ולא-מעבר

<u>הגדרה 2 : מרחב קאוואליירי R</u>

יהי R מרחב כלשהו ב- $\Re^2$ חסום ע״י פונקציה חיובית $\boldsymbol{f(x)}$ (רציפה בתחום [a', b']) , ציר ה– x וגבולות הפונקציות a(y) ו- b(y) , כאשר a(y) היא פונקציית מעבר. $b(y) := a(y) + (b-a)$. כמו כן, יש לנו a' ו- b' שהם ערכי-x היחידים עבורם a(y) ו- b(y) חותכים את $\boldsymbol{f(x)}$, בהתאמה ; ו- $a(0) = 0$, $b(0) = 0$. אז R נקרא מרחב קאוואליירי חסום ע"י $b(y)$, $a(y)$, $f(x)$ וציר ה-x .



איור 5.7 , מרחב קאוואליירי

R אזור קאוואליירי עם גבולות אינטגרציה a(y) ו- b(y) , ואזור שווה E עם גבולות אינטגרציה $x = a$, $x = b$.

אינטיגרל קאוואליירי יכול להיות קשור לאינטיגרל-רימן-רגיל באמצעות שינוי טרנספורמציה מסוימת h, שנפרט בהמשך. זה עשוי להיות שימושי שנחשוב על טרנספורמציה זו (לפחות באופן אינטואיטיבי) כאל טרנספורמציה שכל אזור קאוואליירי R בתוך אזור שקול E עם אותו שטח (ראה איור 5.7), אבל עם גבולות אינטגרציה $x = a$, $x = b$. כלומר, השטח של האזור השקול E, אפשר לבטאו במונחים של אינטגרל חסום רגיל $\int_a^b \phi(x)d(x)$

<u>הגדרה 3: פונקציית טרנספורמציה h</u>

תהיה a(y) פונקציית מעבר. h מיפוי $h : [a,b] \to [a',b']$ אשר ממפה $x_i^1 \in [a\,,b]$ ל- $x_i^2 \in [\,a',b']$, מוגדרת באופן הבא:

$$h(x_i^1) \coloneqq \{\,x_i^2 \in [a',b'] :\ a(f \circ x_i^2) + [\,x_i^1 - a] = x_i^2\,, a = a(0)\}$$

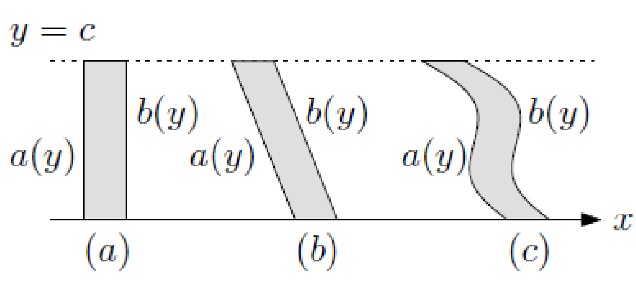
נתייחס לפונקציה h בתור פונקציית הטרנספורמציה (נוכיח ש- h באמת היא פונקציה בלמה הבא)

<u>למה 4: המיפוי $\boldsymbol{h : [a,b] \to [a',b']}$ הוא פונקציה</u>

<u>הוכחה:</u> היות h פונקציה נובע ישירות מההגדרה 1 , אנו יודעים ש- $a \circ f(x_i^2) + [\,x_i^1 - a] = x_i^2$ צריך להיות יחיד לכל $(b-a) \in [\,x_i^1 - a]$. ז"א, h ממפה כל נקודה $x_i^1 \in [a\,,b]$ לנקודה אחת בדיוק $x_i^2 \in [a',b']$

חלק 4: דוגמאות לאינטגרציית קאוואליירי

דוגמא 1 : דוגמא לשלושה מקטעים אינטגרבילים באיור 5.8. כאשר המקטע a מתאים למקטע אינטגרל רימן



איור 5.8, דוגמה לשלושה מקטעים אינטגרבילים

לפי עקרון קאוואליירי, ניתן לראות שחישוב שטח כל מקטע הוא פשוט.

למה (עקרון קאוואליירי לקטעים אינטגרביליים) : שטח של קטע אינטגרבילי שווה ל : $A = (b-a)c$

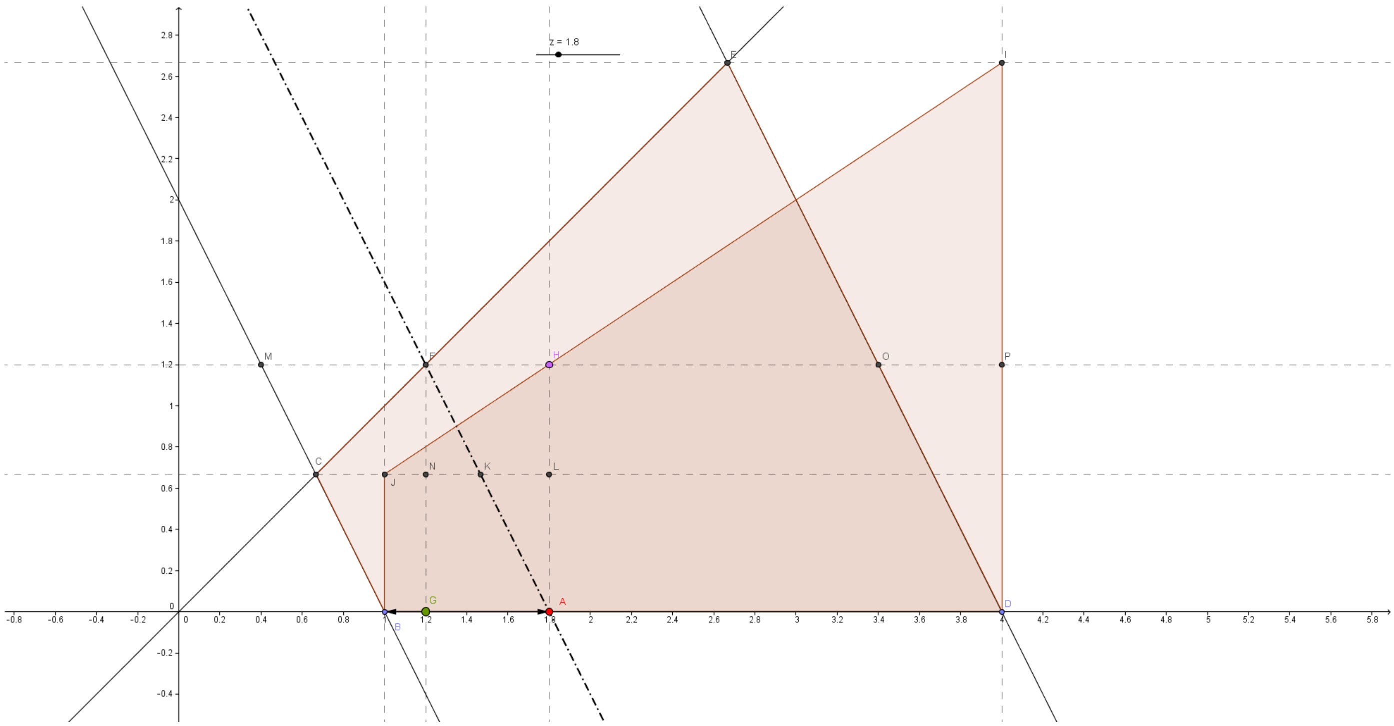
הוכחה: ניתן לקבוע את שטח של קטע האינטגרציה ע״י חישוב השטח שבין העקומות $b(y), a(y)$ עם האינטגרל:

$$A = \int_0^c b(y) - a(y)d(y) = \int_0^c (b-a)d(y) = (b-a)y\Big|_0^c = (b-a)c$$

דוגמא 2

לפי עקרון קאוואליירי כדי להחליט ששני שטחים שווים, אנחנו מעבירים קווים ישרים, אם אורך **כל** הקווים שווים בשתי הצורות אז שטח של שתי הצורות שוות.

הדוגמא הזו מראה באמת שעל כל ישר המקביל להם נוצרים בתוך כל אחת מהצורות **קטעים שווים**



$S_{\Delta CFK} = S_{\Delta JHL}$:

(*) BCKA מקבילית, נותן ש : CK = AB

(**) JLAB מלבן, נותן ש : JL = AB

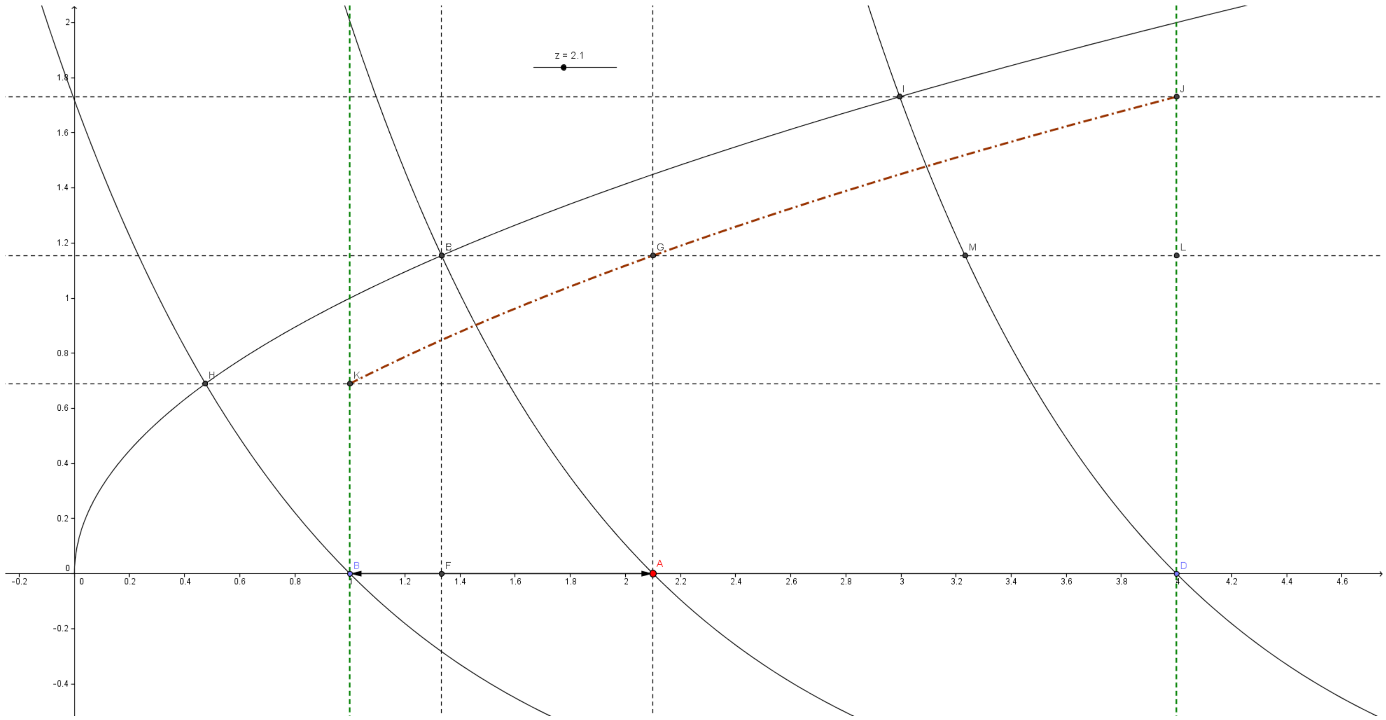
(***) מ- (*) ו- (**) נקבל : CK = JL (הבסיסים שווים)

הגבהים של שני המשולשים חסומים ע״י שני המקבילים : MP ו- GL לכן הגבהים שווים

לאורך כל ההזזות של הקו FA, אנו רואים שעדיין מתקיים ש : $S_{\Delta CFK} = S_{\Delta JHL}$

ואז לפי עקרון קאוואליירי שטח של הצורה BJID שווה לשטח הצורה BCED. וחישוב השטח של BJID הוא קל יותר לחישוב, ובו משתמשים באקסיומות 2 ו- 4.

דוגמא 3



פרק שישי: סיכום

בהוראת מושג השטח שהוא נושא עיקרי וחשוב במתמטיקה, הרבה פעמים נותנים הגדרות לא מדויקות, והדרך הנכונה ללמד מושג זה היא בהסתמך על ארבע אקסיומות.

בבית ספר לא קוראים להם אקסיומות אלא כללים. למעשה, מכיתה ב׳ שבה מלמדים פעם ראשונה שטח של מלבן עם צלעות שלמות ועד לשטח מתחת לעקומה רציפה מסתמך אך ורק על ארבע האקסיומות בנוסף למשפטים באריתמטיקה ואנליזה.

כל השיטות האחרות שהראיתי בעבודה קשורות בצורה זו או אחרת לארבע האקסיומות, למשל, משפט פיק מסתמך על פירוק המצולע לריבועים וחצאי ריבועים בצורות שונות. שיטת קוואליארי גם היא עובדת לפי ארבע האקסיומות, והיא למעשה סכומים אינפיניטסימליים.

מתמטיקה היא תחום מעניין ויפה אך לא כל האנשים רואים דבר זה בקלות , ונראה שאחת מהמטרות לכל השיטות השונות היא קירוב הנושא לעם ומציאת דרכים ושיטות קלות, מה שמעניין הוא שרוב השיטות לחישוב השטח קלות וכוללות הוכחות ויזואליות

לאחר עבודתי, הדברים התבררו יותר ונהיו יותר פשוטים, כי כל מה שאנחנו צריכים לחישוב שטח זה רק ארבע האקסיומות. דבר זה יכול לעזור לנו כמורים ולתלמידים בלימוד הנושא של שטח (פחות כללים).

ולפני הסוף אני רוצה להודות לאחראים על התוכנית, למנחה שלי בעבודה דר. מריטה ברבש שהנחתה והדריכה אותי והפגינה הרבה סבלנות כלפי ולדימה בתנקוב שעזר לי הרבה בתוכנת הגיאוגברה ובניית היישומים ולבעלי ומשפחתי שתמכו בי הרבה .

ביבליוגרפיה

1. **Moise, Edwin.** Elementary Geometry from an Advanced Standpoint 3rd Edition. s.l. : Addison-Wesley Publishing Company, 1990, pp. 184-211.

2. **מריטה ברבש, ודבורה גורב.** *גיאומטריה ועוד.* ללא מקום : רכס פרוייקטים חינוכיים בע"ם, 2006. כרך 2.

3. **משרד, החינוך.** מיסוי במצרים העתיקה. [מקוון] http://meyda.education.gov.il/files/Tochniyot_Limudim/Math/Hatab/Oryanut/Tzurot/Misuy.pdf.

4. **Wikipedia.** Method of exhaustion. *Wikipedia.* [Online] July 19, 2010. http://en.wikipedia.org/wiki/Method_of_exhaustion.

5. **T. L. GROBLERy, E. R. ACKERMANN, A. J. VAN ZYL, AND J. C. OLIVIER.** *CAVALIERI INTEGRATION.* 1991.

6. **Andersen, K.** *Cavalieri's Method of Indivisibles.* s.l. : Arch. Hist. Exact Sci., 1985. pp. 291-367. Vol. 31.

7. **גורן, בני.** מתמטיקה 4 יחידות לחמוד חלק ב-1. ללא מקום : בני גורן, עמ' 286-295.

8. **Davis, Tom.** Pick's Theorem. *Mathematical Circles Topics.* [Online] October 2003. http://www.geometer.org/mathcircles/pick.pdf.

נספחים

1. קובץ גיאוגיברה שמתאר את דוגמא 2 cavalieri1.ggb
2. קובץ גיאוגיברה שמתאר את דוגמא 3 cavalieri2.ggb
3. קובץ גיאוגיברה שמתאר את קירוב שטח לפי פונקציית מדרגה integral_riman.ggb