"תוכנית רוטשילד-ויצמן למצוינות בהוראת המדעים"
במימונה של קרן קיסריה אדמונד בנימין דה רוטשילד

המשוואה המסוכנת ביותר

מגישה: רחל כהן

מנחה: פרופסור בועז נדלר

מועד הגשה: 20.10.2013

תוכן עניינים

1. תקציר

עבודה זו כוללת שלושה פרקים. היא עוסקת בסטטיסטיקה והסתברות, בקשר שביניהם, במשפטים מרכזיים מתורת הסטטיסטיקה וההסתברות ובשימוש הנעשה בהם על מנת לפתור בעיות מחיי היום יום.

בפרק הראשון נגדיר את המושגים סטטיסטיקה והסתברות, נביא מספר דוגמאות שימחישו במה עוסק כל תחום ומה הקשר בין שני התחומים. לאחר מכן נציג ארבעה משפטים בסדר הבא: *אי שוויון מרקוב, אי שוויון צ׳בישב, משוואת דה מואבר והחוק החלש של המספרים הגדולים.* המשפטים האלה קשורים האחד בשני והוכחה של חלק ממשפטים אלה מבוססת על נכונותם של האחרים. למשפטים אלה חשיבות יישומית רבה וניתן לפתור באמצעותם בעיות רבות ומגוונות. חשוב לציין ששני המשפטים הדנים בהסתברויות של מאורעות: *אי שוויון מרקוב ואי שוויון צ׳בישב* אינם מספקים ערך מספרי מדויק עבור הסיכוי להתרחשותו של מאורע נדון, אלא חסם להסתברות זו בלבד. נסיים פרק זה בהצגת משפט חשוב נוסף הידוע בשם *משפט הגבול המרכזי*. המשפט עוסק בקשר שבין התפלגות ממוצע של מספר רב של משתנים מקריים בלתי תלויים לבין התפלגות נורמלית. באופן מפתיע מסתבר שהקשר הזה מתקיים תמיד וללא תלות בהתפלגות המקורית של המשתנים, כל עוד הם בעלי תוחלת ושונות סופיים. גם המשפט הזה שימושי ביותר בפתרון בעיות מחיי היום יום מכיוון שבאמצעותו ניתן לחשב את ההסתברות של מאורעות שונים תוך שימוש בקירוב של התפלגות נורמלית.

בפרק השני נציג את המאמר: *המשוואה המסוכנת ביותר* שנכתב על ידי פרופסור הווארד ויינר. כותב המאמר מכתיר את *משוואת דה מואבר* שפותחה בשנת 1730 כמשוואה המסוכנת ביותר. הוא קובע כי אי ידיעת משוואה זו או התעלמות ממנה עלולות לגרום להסקת מסקנות שגויות וכתוצאה מכך להשלכות כבדות משקל בקנה מידה עצום. כראיה לכך הוא מציג מספר דוגמאות בהן הוא מתאר את התוצאות החמורות של הבורות ביחס למשפט. באחת הדוגמאות שהוא מביא מתואר כיצד במשך 600 שנה טרם גילוי המשפט, בגלל אי ידיעת הקשר המדויק שבין תכונות אופייניות של מדגם לבין אותן התכונות בקרב כלל האוכלוסיה, נגרם הפסד כספי עצום לאוצר הממלכה האנגלית. בדוגמה אחרת המחבר מציג מחקר השוואתי שנעשה לפני שנים אחדות בארצות הברית בתחום החינוך, שבו נמצאו הישגים חריגים בבתי ספר מסוימים. על מנת למצוא תשובה לשאלה מדוע תופעה חריגה זו התרחשה דווקא בבתי ספר אלה, פנו למומחים בתחום החינוך. פרופסור ויינר מתאר בהרחבה כיצד הבורות ביחס למשפט דה מואבר או בגלל אי הבנה של המשמעות שלו המומחים ניתחו את התוצאות באופן שגוי מבחינה סטטיסטית וכתוצאה מכך רשויות החינוך הסיקו מסקנות מוטעות שגרמו להשלכות כבדות משקל לגבי כל הנוגעים בדבר במערכת החינוך.

בפרק השלישי מובאים סיכום ומסקנות אישיות שלי מתהליך יצירת העבודה.

2. סטטיסטיקה והסתברות

2.1 הגדרות ודוגמאות

בספר *מבוא להסתברות וסטטיסטיקה* של אלונה רביב ותלמה לוויתן מובאות ההגדרות הבאות:

"**סטטיסטיקה** עוסקת באיסוף וארגון נתונים, בניתוחם תוך הבנת העובדות אותן הם מייצגים, וכן בהסקת מסקנות כלליות מהנתונים הקיימים. ארגון הנתונים והצגתם בלוחות ודיאגראמות וכן חישובי מדדים שונים מתוכם מהווים ענף אחד של הסטטיסטיקה, הנקרא *סטטיסטיקה תיאורית*. ענף אחר של הסטטיסטיקה, הנקרא *הסקה סטטיסטית* מטפל בהסקת מסקנות כלליות מתוך אוסף של נתונים המייצגים תופעה מסוימת".

"**תורת ההסתברות** מייחסת למאורעות אי ודאיים ערך מספרי המביע את "מידת הסבירות" לכך שהמאורע אכן יתרחש. התורה מספקת שיטות לחישוב ההסתברויות של התוצאות האפשריות והמאורעות השונים העשויים להתרחש".

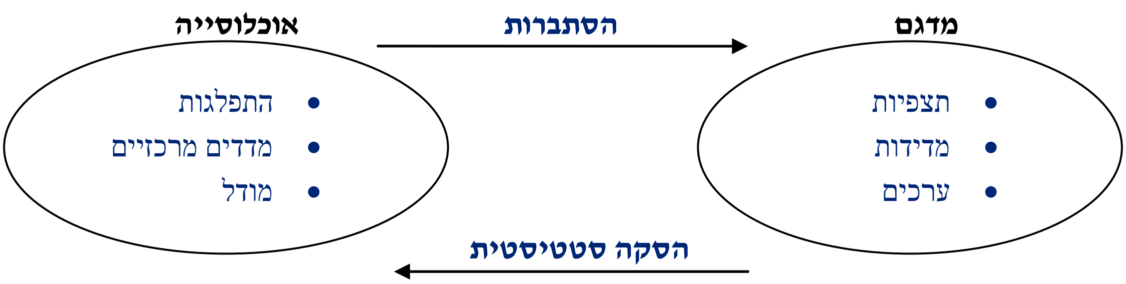
על מנת להמחיש את המושג *סטטיסטיקה תיאורית* נתבונן בדוגמה הבאה:

קבוצה בת 30 תלמידים בסוף כיתה יב' ניגשה לבחינה במתמטיקה. בהנחה שיש בידינו את רשימת הציונים, נוכל לחשב את הממוצע שלהם ואת סטיית התקן, ולענות על שאלות מעניינות כגון: מה הפער בין ממוצע הציונים בכיתה בהשוואה לממוצע הארצי, האם פיזור הציונים של התלמידים נמוך או גבוה יותר בהשוואה לפיזור הציונים של כלל התלמידים בארץ, האם ציוני התלמידים בכיתה מתפלגים בקרוב נורמלית.

הדוגמה הבאה תמחיש את המושג *הסקה סטטיסטית*.

חוקרים מתחום הרפואה מעוניינים לבדוק את יעילותה של תרופה חדשה נגד מחלה מסוימת. מכיוון שלא סביר לתת את התרופה לכלל אוכלוסיית החולים, התרופה ניתנת למדגם של n חולים. נערכות מדידות מתאימות ומתקבלות מסקנות לגבי יעילותה של התרופה במדגם הנתון. בשלב הבא החוקרים רוצים לדעת מהי מידת ההתאמה בין התוצאות שהתקבלו במדגם לבין התוצאות שתתקבלנה עבור כלל אוכלוסיית החולים. במילים אחרות, באיזו רמת סבירות ניתן לאמר שהתוצאות שהתקבלו במדגם משקפות את התוצאות שתתקבלנה אם כלל אוכלוסיית החולים תקבל את התרופה.

את הקשר שבין הסקה סטטיסטית והסתברות ניתן לראות בתרשים הבא:



קובץ זה נועד אך ורק לשימושם האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

אם ידועים פרמטרים של משתנה מקרי כגון ממוצע או סטיית תקן, או אם בנוסף לכך ידועה גם ההתפלגות של המשתנה המקרי, אז על ידי שימוש *בתורת ההסתברות* ניתן לענות על שאלות שנוגעות לסיכוי שמאורע כזה או אחר יתרחש.

בעיות מסוג זה נקראות forward problems.

אם בידנו תוצאות המדידות של n משתנים מקריים מתוך אוכלוסייה גדולה, אז על ידי חישובים *בתורת הסטטיסטיקה* נוכל לחשב את המדדים המרכזיים שלהם ועל סמך התוצאות האלה ניתן יהיה להעריך את המדדים המרכזיים של כלל המשתנים.

בעיות מסוג זה נקראות inverse problems.

על מנת להמחיש את הקשר שבין סטטיסטיקה והסתברות נתבונן בדוגמה הבאה:

נתון כי משתנה X מייצג גובה של ילדה בגיל 12 בארץ, וידוע שבקירוב X מתפלג נורמלית עם ממוצע 120 ס״מ ושונות 9 ס״מ. על סמך משפטים מתורת ההסתברות ניתן לענות על השאלה הבאה: בבחירה אקראית של ילדה בת 12, מה הסיכוי שנבחרה ילדה שגובהה מעל 140 ס״מ?

בתת הפרק הבא נציג מספר בעיות שגרתיות מחיי היום יום. המשותף לכל הבעיות הוא שעל מנת לפתור אותן יש לעשות שימוש במשפטים מתורת הסטטיסטיקה וההסתברות.

2.2 בעיות מחיי היום יום

(1) במרכול מסוים מוכרים בממוצע 100 שקיות חלב ביום.

א. האם ניתן לחסום את ההסתברות שביום מסוים יהיה ביקוש של 150 שקיות חלב לפחות, אם כן, מהו אותו חסם?

ב. בנוסף, נתון כי סטיית התקן של מספר שקיות החלב שהמרכול מוכר ביום אחד היא 16. כיצד מידע נוסף זה מאפשר לתת חסם מדויק יותר?

ג. בנוסף לנתונים הקודמים נתון כי התפלגות מספר שקיות החלב שהמרכול מוכר ביום אחד היא בקירוב נורמלית. מה ההסתברות למכור לפחות 150 שקיות חלב ביום?

(2) במשחק מזל מטילים 7 פעמים קובייה הוגנת (הסיכוי לקבלת כל מספר בין 1 ל 6 הוא $\frac{1}{6}$).

אם הסכום המתקבל הוא בין 20 ל 28 (כולל) המשתתף מקבל 15 ₪, אחרת הוא משלם 20 ₪. מהי תוחלת הרווח במשחק אחד?

(3) משרד הביטחון פרסם מכרז לאספקת ברגים. על פי הדרישות, הברגים צריכים להיות באורך של 3.5 ס״מ עם סטיית תקן מקסימאלית של 0.2 ס״מ. על מנת להעריך האם המפעל עומד בתנאי המכרז, דוגמים 100 ברגים ומודדים אותם. (נניח כי המדידה מדויקת). בבדיקה שנערכה נמצא כי ממוצע אורך הברגים במדגם הוא: 3.7 ס״מ וסטיית התקן היא: 0.18 ס״מ. כיצד אפשר להעריך את הממוצע של אורך הברגים המיוצרים במפעל על סמך המדגם?

(4) אגודת הסטודנטים באוניברסיטת תל-אביב רצתה להעריך את פרופורציית התלמידים, p שהם שבעי רצון מרמת האוכל בקפיטריות האוניברסיטה.

א. אם אגודת הסטודנטים תערוך את הבדיקה על מדגם של 100 תלמידים, מה ההסתברות שהסטייה בין פרופורציית התלמידים המרוצים מהמזון בקפיטריות במדגם לבין הפרופורציה המתאימה באוכלוסיה כולה לא תעלה על 0.1?

ב. מהו גודל המדגם המינימאלי הדרוש כדי שבהסתברות של 0.95 לפחות, פרופורציית התלמידים המרוצים במדגם לא תסטה ביותר מ- 10% מהפרופורציה המתאימה באוכלוסייה?

כאמור,כדי לפתור את הבעיות יש לעשות שימוש במשפטים מתורת ההסתברות. בתת הפרק הבא יוצגו שני סוגי משפטים. הסוג הראשון מעריך את הסיכוי להתרחשותם של מאורעות הקשורים במשתנה מקרי X. הסוג השני דן בסדרה של משתנים מקריים ובקשר שבין המדדים המרכזיים של הסדרה לבין הגדלים המקבילים באוכלוסיה עצמה.

2.3 משפטים בתורת ההסתברות

לפני שנציג את המשפטים נגדיר שלושה מושגים מרכזיים בסטטיסטיקה.

<u>הגדרה</u>

יהי X משתנה מקרי בדיד. **התוחלת** של X תסומן כך : $\mathbf{EX}$ או $\boldsymbol{\mu}$ והיא ניתנת על ידי הנוסחה : $\mathbf{EX} = \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{x} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{X} = \mathbf{x})$ כאשר הסכום עובר על כל הערכים האפשריים של המשתנה X.

יהי X משתנה מקרי רציף. אם $\boldsymbol{f(x)}$ היא פונקצית הצפיפות של X אז התוחלת של X מוגדרת על ידי הנוסחה : $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{EX} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x \cdot f(x) dx}$

<u>הגדרה</u>

השונות של משתנה מקרי X מסומנת כך : $\boldsymbol{Var(X)}$ או $\boldsymbol{\sigma^2}$ והיא ניתנת על ידי הנוסחה: $\boldsymbol{Var(X) = E(X - \mu)^2}$.

<u>הגדרה</u>

סטיית התקן של משתנה מקרי X מסומנת כך : $\boldsymbol{S(X)}$ או $\boldsymbol{\sigma}$ והיא ניתנת על ידי הנוסחה : $\boldsymbol{S(X) = \sqrt{Var(X)}}$.

בשני המשפטים הבאים : אי שוויון מרקוב ואי שוויון צ'בישב התפלגות המשתנה המקרי אינה ידועה. באי שוויון מרקוב ידועה רק התוחלת של המשתנה המקרי, באי שוויון צ'בישב ידועה גם השונות של המשתנה המקרי. המשותף לשני המשפטים, שבשניהם לא מתקבל מספר מדויק עבור ההסתברות להתרחשותו של מאורע נדון, אלא חסם להסתברות זו בלבד.

<u>אי שוויון מרקוב</u>

יהי X משתנה **אי שלילי**. אזי לכל מספר $t > 0$ מתקיים : $\mathbf{P}(\boldsymbol{X \geq t}) \leq \boldsymbol{\frac{EX}{t}}$

<u>הוכחה</u>

נגדיר משתנה חדש X^* באופן הבא: $X^* = 0$ אם $0 \le X < t$

$X^* = t$ אם $X \ge t$

מההגדרה ברור כי $X \ge X^*$ לכל ערך של X $\Leftarrow$ $EX \ge EX^*$

$$EX^* = 0 \cdot P(X^* = 0) + t \cdot P(X^* = t) = t \cdot P(X \ge t)$$

$$\Leftarrow \quad t \cdot P(X \ge t) \le EX$$

$$\Leftarrow \quad P(X \ge t) \le \frac{EX}{t}$$

■

<u>אי שוויון צ׳בישב</u>

יהי X משתנה כלשהו בעל תוחלת μ ושונות σ^2 סופיים. אזי לכל מספר $t > 0$ מתקיים:

$$\mathbf{P}(|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}| \ge \boldsymbol{t}) \le \frac{\boldsymbol{Var}(\boldsymbol{X})}{\boldsymbol{t}^2} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^2}{\boldsymbol{t}^2}$$

<u>הוכחה</u>

על פי הנתון X הוא משתנה כלשהו. נתבונן במשתנה האי שלילי $|X - \mu|$ ונבדוק מהי ההסתברות של המאורע: $|X - \mu| \ge t$ עבור $t > 0$.

המאורע $|X - \mu| \ge t$ שקול למאורע $(X - \mu)^2 \ge t^2$.

נגדיר משתנה **אי שלילי** חדש $Y = (X - \mu)^2$. נמצא את התוחלת של Y.

$$EY = E(X - \mu)^2 = Var(X) = \sigma^2$$

על פי אי שוויון מרקוב: $P(Y \ge t^2) \le \frac{EY}{t^2} = \frac{\sigma^2}{t^2}$

ולכן: $P(|X - \mu| \ge t) = P(\,(X - \mu)^2 \ge t^2\,) \le \frac{\sigma^2}{t^2}$.

■

המשפט הבא עוסק בסדרה של n משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות שנלקחו מאוכלוסיה כלשהי. הוא דן בקשר שביו התוחלת והשונות של ממוצע אמפירי של הסדרה לבין התוחלת והשונות של האוכלוסיה עצמה.

<u>משוואת דה מואבר</u>

תהיינה $X_1, X_2 \ldots \ldots X_n$ n תצפיות בלתי תלויות מתוך התפלגות בעלת תוחלת μ ושונות σ^2 סופיים.

נגדיר את ממוצע התצפיות כך : $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

אזי: $\mathbf{E(\bar{X}_n) = \mu}$, $\boldsymbol{Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}}$ (בניסוח אחר : $\mathbf{S(\bar{X}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$)

על מנת להוכיח את המשפט נשתמש בתכונות הבאות :

לכל שני משתנים מקריים X ו Y מתקיים : $E(X+Y) = EX + EY$

$E(bX) = bEX$

$Var(bX) = b^2 VarX$

ולכל שני משתנים **בלתי תלויים** X ו Y מתקיים : $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

<u>הוכחה</u>

$$E\bar{X}_n = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$Var(\bar{X}_n) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{n\cdot\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

■

המשפט הבא דן בהתנהגות הגבולית של ממוצע של סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים.

<u>החוק החלש של המספרים הגדולים</u>

נתונה סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות ... $X_1, X_2 \ldots \ldots X_n$ בעלי תוחלת μ ושונות σ^2 סופיים. אזי לכל מספר $t > 0$ מתקיים :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq t) = 0}$$

<u>הוכחה</u>

על פי אי שוויון צ׳בישב ידוע כי : $P(|X-\mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$

ועל פי משפט דה מואבר הוכחנו כי אם μ ו σ^2 הם בהתאמה התוחלת והשונות הסופיים של משתנים בלתי תלויים $X_1, X_2 \ldots \ldots X_n$ אזי : $E(\bar{X}_n)=\mu$, $Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.

נתבונן במשתנה המקרי $\bar{X}_n$, נפעיל עליו את אי שוויון צ'בישב ונקבל:

$$P(|\bar{X}_n-\mu|\geq t)\leq\frac{\sigma^2}{nt^2}$$

קבלנו כי ההסתברות שהסטייה של $\bar{X}_n$ מ μ תעלה על גודל נתון t חסומה על ידי: $\frac{\sigma^2}{nt^2}$.

ככל שנגדיל את מספר התצפיות n החסם $\frac{\sigma^2}{nt^2}$ ילך ויקטן. כאשר $n\to\infty$ גודל החסם שואף ל- 0.

מסקנה: כאשר $n\to\infty$, ההסתברות שהסטייה של $\bar{X}_n$ מ μ תעלה על t שואפת ל 0.

■

לסיום, נציג את *משפט הגבול המרכזי*. משפט זה הוא אחד המשפטים המרשימים והמפתיעים ביותר בתורת ההסתברות. הוא קובע כי התפלגות הסכום (וכן הממוצע) של מספר רב של משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות שואפת להתפלגות הנורמלית, וזאת ללא תלות בהתפלגות המקורית של המשתנים, כל עוד הם בעלי תוחלת ושונות סופיים. תחילה נסביר מהי התפלגות נורמלית, נראה כיצד ניתן לחשב הסתברויות על ידי שימוש בטבלת התפלגות נורמלית סטנדרטית עבור כל משתנה המתפלג נורמלית, ונביא סקירה המתארת את התפתחות משפט הגבול המרכזי.

<u>הגדרה</u>

יהי X משתנה מקרי רציף. נאמר כי X הוא משתנה מקרי נורמלי בעל תוחלת μ ושונות σ^2 אם:

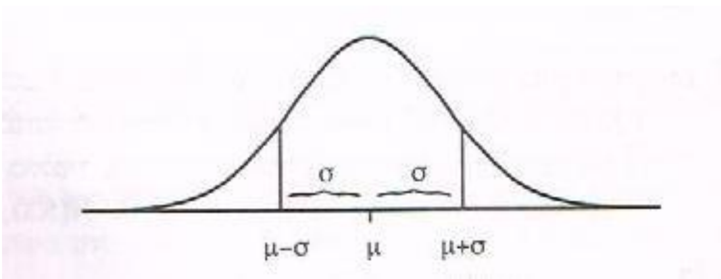
פונקצית הצפיפות של X נתונה על ידי:

$-\infty<x<\infty$, $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$. ומסמנים: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

מהתבוננות בפונקצית הצפיפות רואים כי היא סימטרית סביב μ, כלומר לכל ערך של k מתקיים $f(\mu+k)=f(\mu-k)$. הפונקציה מקבלת ערך מקסימלי $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}}$ עבור $x=\mu$

והיא שואפת ל 0 כאשר $x\to\infty$ או $x\to-\infty$.

זהו גרף של פונקצית הצפיפות של משתנה נורמלי X בעל תוחלת μ ושונות σ^2 . לגרף יש צורת פעמון .



הגדרה

משתנה נורמלי Z ייקרא משתנה נורמלי סטנדרטי אם הוא בעל תוחלת 0 ושונות 1 ומסמנים אותו כך: $Z\sim N(0,1)$.

טענה

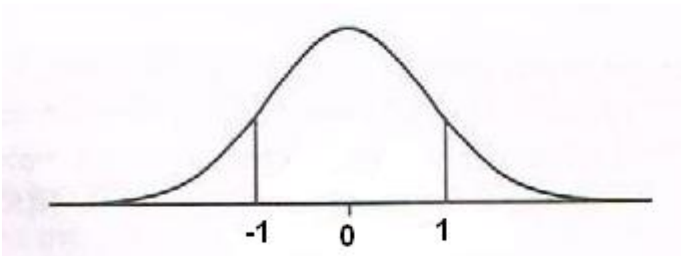
אם $X\sim N(\mu\,,\sigma^2)$ אזי על ידי התקנון $\mathrm{Z}=\frac{X-\mu}{\sigma}$ מתקבל משתנה נורמלי סטנדרטי הנקרא ציון תקן.

הסבר

בתקנון של X בצענו שנוי בקנה המידה של המשתנה הנורמלי. במקום למדוד אותו ביחידות המקוריות, אנו מודדים אותו ב"יחידות תקן", כלומר בכמה סטיות תקן גבוה או נמוך הערך של X מתוחלתו μ. מכאן שאם ל- X התפלגות נורמלית אזי גם ל- Z התפלגות נורמלית. באופן מעשי כאשר אנו נדרשים לפתור בעיות בהן המשתנה המקרי X מתפלג נורמלית, נחשב את ציון התקן Z ונחשב הסתברויות שונות בעזרת טבלת התפלגות נורמלית סטנדרטית.

זהו הגרף של משתנה נורמלי סטנדרטי Z שפונקצית הצפיפות שלו היא:

$$\boldsymbol{f(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-z^2}{2}}} \qquad , \qquad -\infty<z<\infty$$



משפט הגבול המרכזי

יהיו $X_1,X_2\ldots\ldots X_n$ סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות בעלי תוחלת μ ושונות σ^2 סופיים. אזי ההתפלגות של: $\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ שואפת להתפלגות נורמלית סטנדרטית כאשר $n\to\infty$.

כלומר לכל $-\infty<a<\infty$ $\quad \boldsymbol{\mathrm{P}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\le a\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}dx=\phi(a)}$.

הביטוי: $\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ שקול לביטוי: $\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ולכן *משפט הגבול המרכזי* יכול להיות מנוסח

גם כך: לכל $-\infty<a<\infty$ $\quad \boldsymbol{\mathrm{P}\left\{\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\le a\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}dx=\phi(a)}$

<u>התפתחות משפט הגבול המרכזי</u>

הנוסח הראשון למה שמכונה היום *משפט הגבול המרכזי*, הוכח על ידי אברהם דה מואבר בשנת 1718. הוא הצליח להוכיח כי עבור n גדול מספיק ההתפלגות הבינומית $B(n, \frac{1}{2})$ ניתנת לקירוב בעזרת ההתפלגות הנורמלית. גילוי זה היה מתקדם מאוד יחסית לאותה תקופה,אך הוא כמעט נשכח עד שהמתמטיקאי הצרפתי לפלאס בשנת 1812 בספרו *תיאוריה אנליטית של הסתברויות* התייחס למשפט של דה מואבר והצליח להוכיח את המשפט עבור משתנים מקריים בינומים, לכל פרמטר $0 < p < 1$.

<u>משפט דה מואבר לפלאס</u>

יהי X משתנה בינומי בעל פרמטרים n ו- p. אזי לכל a ממשי מתקיים:

$$.\boldsymbol{lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le a\right) = \phi(a)}$$

המשפט מתבסס על כך שאם $X \sim B(n, p)$ אזי $EX = np$ ו- $Var(X) = np(1-p)$

לפלאס גם ניסח את משפט הגבול המרכזי בצורתו הכללית. אולם, ההוכחה שלו לקתה בחסר מבחינת הדקדוק המתמטי ולא ניתן היה להשלימה בנקל. הוכחה מדוקדקת ומלאה של *משפט הגבול המרכזי* הוצגה לראשונה על ידי המתמטיקאי הרוסי ליאפונוב בשנים 1901-1902. ג'ורג' פויה בשנת 1920 היה הראשון שהשתמש בשם *"משפט הגבול המרכזי"* ככותרת לחיבור שכתב.

2.4 פתרון הבעיות

(1) נסמן X = מספר שקיות החלב הנמכרות ביום אחד במרכול.

נתון כי $\mu = EX = 100$.

א. על פי אי שוויון מרקוב אם X משתנה אי שלילי. אזי לכל מספר $t > 0$ מתקיים:

$P(X \ge t) \le \frac{EX}{t}$. ולכן: $P(X \ge 150) \le \frac{100}{150} = 0.67$. כלומר החסם להסתברות שביום מסוים יהיה ביקוש ל- 150 שקיות חלב לפחות הוא 0.67.

ב. בנוסף נתון כי $\sigma = 16 \leftarrow \sigma^2 = 256$.

נבדוק מהו החסם עבור $P(X \ge 150)$ על פי אי שוויון צ'בישב:

$P(X \ge 150) \le P(|X - 100| \ge 50) \le \frac{256}{50^2} = 0.1024$.

על פי אי שוויון צ'בישב קיבלנו חסם הדוק הרבה יותר להסתברות שביום מסוים יהיה ביקוש ל- 150 שקיות חלב לפחות.

ג.בנוסף נתון כי X מתפלג נורמלית. נמצא את ציון התקן של $X=150$ על פי הנוסחה $z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

על מנת להשתמש בטבלה של התפלגות נורמלית סטנדרטית. $z_{150}=\frac{150-100}{16}=3.125$

על פי הטבלה: $\phi(3.125)=0.9991$ ולכן: $P(X\geq 150)=1-0.9991=0.0009$.

על פי הנתון הנוסף קיבלנו שהסיכוי שהמרכול ימכור לפחות 150 שקיות חלב ביום כמעט אפסי.

(2) נסמן $X_{\text{i}}=$ המספר המתקבל בהטלת קובייה אחת ו- $\text{X}=\sum_{\text{i}=1}^{7}X_i$.

נחשב את $\mu=EX$.

בשלב ראשון נחשב את EX_{i} $\text{EX}_{\text{i}}=(1+2+3+\cdots+6)\cdot\frac{1}{6}=3.5$

ולכן: $\mu=\text{EX}=\text{E}(\sum_{\text{i}=1}^{7}X_i)=\sum_{i=1}^{7}(EX_i)=7\cdot 3.5=24.5$

נחשב את סטיית התקן של X

בשלב ראשון נחשב את $Var(X_i)$

$$Var(X_i)=E(X_i-3.5)^2=\frac{(1-3.5)^2+(2-3.5)^2+\cdots+(6-3.5)^2}{6}=\frac{17.5}{6}=2\frac{11}{12}$$

בהנחה שהתוצאות המתקבלות בקובייה הן בלתי תלויות נקבל כי:

$$Var(X)=Var(\sum_{i=1}^{7}X_i)=\sum_{i=1}^{7}Var(X_i)=7\cdot 2\frac{11}{12}=20\frac{5}{12}\quad\leftarrow\quad\sigma=4.52$$

על פי משפט הגבול המרכזי לסכום של n משתנים מקריים בלתי תלויים יש בקירוב התפלגות נורמלית. כלומר ל- X יש בקירוב התפלגות נורמלית כאשר $\mu=24.5$ ו- $\sigma=4.52$

נבדוק מהי ההסתברות לקבל סכום מספרים בתחום 20-28 (כולל).

נמצא את ציוני התקן של המספרים 20 ו- 28.

$$Z_{28}=\frac{28-24.5}{4.52}=0.77\qquad\qquad \text{Z}_{20}=\frac{20-24.5}{4.52}=-0.99$$

$$P(20\leq X\leq 28)=P(-0.99\leq Z\leq 0.77)=\phi(0.77)-\phi(-0.99)=0.6183$$

נסמן: Y= כמות הכסף שמרוויחים או מפסידים במשחק אחד. נחשב את EY

$$\text{EY}=15\cdot 0.6183-20\cdot(1-0.6183)=1.64$$

קיבלנו כי תוחלת הרווח של משחק בודד היא מספר חיובי.

הערה: אין ניתן להסיק מכך שהסיכוי להרוויח במשחק בודד גבוהה יותר מהסיכוי להפסיד.

(3) נסמן: $X_{\text{i}}=$ אורך בורג מספר i , $\hat{\mu}=\overline{\text{X}}_{100}=\frac{\sum_{\text{i}=1}^{100}\text{X}_{\text{i}}}{100}$, $\hat{\sigma}=\text{S}(X_i)$.

נעריך את ממוצע אורך הברגים המיוצרים במפעל μ על סמך שני הנתונים הבאים:

$\hat{\sigma} = 0.18$ ו- $\hat{\mu} = 3.7$

מדגם של 100 ברגים גדול מספיק ולכן נוכל להניח שתי הנחות:

א. ל $\hat{\mu}$ יש בקרוב התפלגות נורמלית על פי משפט הגבול המרכזי.

ב. סטיית התקן של 100 הברגים שנדגמו קרובה ביותר לסטיית התקן של כלל הברגים במפעל.
(אם הנחה זו אינה מתאימה למציאות אז התשובה שנקבל תהייה פחות מדויקת).

נניח כי μ הוא האורך הממוצע של הברגים המיוצרים במפעל. ננסה לבדוק האם ברמת בטחון של 95% ניתן לאמר כי μ נמצא בטווח [3.3 , 3.7].

על פי משפט דה מואבר $E(\hat{\mu}) = E(\bar{X}_{100}) = \mu$ ו- $S(\bar{X}_{100}) = S(\hat{\mu}) = \frac{\sigma}{\sqrt{100}} = \frac{\sigma}{10}$

ל $\bar{X}_{100}$ יש בקירוב התפלגות נורמלית, נמצא את ציון התקן של $\bar{X}_{100}$.

$Z = \frac{\bar{X}_{100} - \mu}{\sigma/10}$ נציב את הנתונים שבבעיה ונקבל: $Z = \frac{3.7-\mu}{0.018}$

על פי טבלת התפלגות מצטברת נורמלית סטנדרטית $P(-1.96 \le z \le 1.96) = 0.95$

$\Leftarrow \quad P\left(-1.96 \le \frac{3.7-\mu}{0.018} \le 1.96\right) = 0.95$

$\Leftarrow \quad P(-0.03528 \le 3.7 - \mu \le 0.03528) = 0.95$

$\Leftarrow \quad P(3.665 \le \mu \le 3.735) = 0.95$

המסקנה היא שעל פי הממצאים שבידנו המפעל אינו עומד בדרישות של המכרז ברמת בטחון של 95%.

(4) נסמן: X = מספר התלמידים במדגם המרוצים מהמזון בקפיטריות האוניברסיטה.

p היא פרופורציית הסטודנטים המרוצים מהמזון בקפיטריות.
נתון כי המדגם מונה 100 תלמידים.

על פי הנתונים X הוא משתנה בינומי. נסמן $X \sim B(100, p)$

ידוע כי אם $X \sim B(n, p)$ אז $E(X) = np$ ו- $Var(X) = np(1-p)$

א. נניח כי $\frac{X}{100}$ היא פרופורציית התלמידים במדגם המרוצים מהמזון בקפיטריות.

יש לחשב את ההסתברות הבאה: $P\left(\left|\frac{X}{100} - p\right|\right) \le 0.1$

נבדוק עבור n כללי מהי התוחלת ומהי השונות של $\frac{X}{\text{n}}$

$$Var\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot Var(X) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p \cdot (1-p)}{n} \qquad E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot EX = \frac{np}{n} = p$$

עבור $n = 100$ נקבל: $E\left(\frac{X}{100}\right) = p$ ו- $\text{Var}\left(\frac{X}{100}\right) = \frac{p(1-p)}{100}$

על פי אי שוויון צ׳בישב $P\left(\left|\frac{X}{100} - p\right| \geq 0.1\right) \leq \frac{p(1-p)}{10^2 \cdot 0.1^2} = p(1-p)$

נבדוק מהו הערך המקסימאלי של $p(1-p)$

הגרף של הביטוי הזה הוא פרבולה בעלת ערך מקסימאלי שהקודקוד שלה הוא: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

ולכן $P\left(\left|\frac{X}{100} - p\right| \geq 0.1\right) \leq 0.25 \Rightarrow P\left(\left|\frac{X}{100} - p\right| < 0.1\right) \geq 0.75$

כלומר יש סיכוי של 0.75 לפחות שהפער בין פרופורציית הסטודנטים המרוצים במדגם לבין פרופורציית המרוצים מתוך כלל הסטודנטים לא יעלה על 10%.

ב. נעריך מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 0.95 לפחות פרופורציית הסטודנטים המרוצים במדגם לא תסטה ביותר מ- 10% מהפרופורציה המתאימה באוכלוסיית הסטודנטים.

כלומר דרוש למצוא n כך ש: $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < 0.1\right) \geq 0.95$

על פי אי שוויון צ׳בישב $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq 0.1\right) \leq \frac{p(1-p)}{n \cdot 0.1^2} \leq \frac{0.25}{0.01 \cdot n}$

דרוש כי $\frac{0.25}{0.01 \cdot \text{n}} = 0.05$ הפתרון של המשוואה הזו הוא $n = 500$.

כלומר יש לקחת מדגם בגודל 500 על מנת לקבל את התוצאה המבוקשת.

3. המשוואה המסוכנת ביותר

Howard Wainer / The Most Dangerous Equation

בפרק זה נציג מאמר בשם: *"המשוואה המסוכנת ביותר"* מאת פרופסור הווארד ויינר, אשר פורסם בעיתון *American Scientist* בשנת 2007.

המחבר פותח בשאלה: מה גורם למשוואה להיות מסוכנת? ועונה: ישנן משוואות מסוכנות מעצם המידע שהן מספקות לנו ויש משוואות מסוכנות דווקא כאשר הן נסתרות מעינינו.

משוואות מהקטגוריה הראשונה נראות מסוכנות, מכיוון שהן פותחות בפנינו דלתות שמאחוריהן מצויים סודות האוצרים בתוכם סכנות ענקיות. המנצחת הברורה בקטגוריה זו היא המשוואה של איינשטיין: $\boldsymbol{e = mc^2}$, מכיוון שמשוואה זו נותנת קנה מידה לאנרגיה האדירה שחבויה בתוך חומר רגיל. יכולת ההרס שלה זוהתה על ידי הפיזיקאי לאו סילארד (Leo Szilar) שחזה את תופעת תגובת השרשרת הגרעינית שעומדת בבסיסה של פצצת אטום.

משוואות מהקטגוריה השנייה הן משוואות שמהוות סיכון לא כאשר אנו מכירים אותן אלא דווקא להיפך. כאשר קיימת בורות ביחס למשוואות מהסוג הזה, קרוב לוודאי שנשגה בניתוח ממצאים וכתוצאה מכך נקבל החלטות מוטעות. במקרה שמדובר בבעיות מורכבות ורחבות היקף, ההשלכות של קבלת החלטות שגויות עלולות להיות הרסניות ביותר.

מחבר המאמר ויינר קובע כי מבין המשוואות מהקטגוריה השנייה, המשוואה: $\mathbf{S(\overline{X}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ שפותחה בשנת 1730 על ידי אברהם דה מואבר, היא המשוואה המסוכנת ביותר. הוא כותב שהוא היגיע למסקנה הזו בגלל שההתעלמות מהמשוואה יצרה בלבול ואי הבנה למשך זמן ארוך ביותר, וגם בגלל מגוון תחומי החיים שנפגעו באופן רציני ביותר כתוצאה מהבורות הזו. המחבר מביא מספר דוגמאות הממחישות כיצד אי ידיעת המשוואה או אי הבנה של המשמעות שלה גרמו לכך שמומחים הסיקו מסקנות מוטעות מבחינה סטטיסטית. למסקנות המוטעות האלה היו השלכות כבדות משקל לגבי כל הנוגעים בדבר בקנה מידה עצום, ובפרט להפסד כספי של מיליארדי דולרים לאורך כמעט אלף שנים.

לפני שנציג מספר דוגמאות ננסה להבין מה עומד מאחורי משוואת דה מואבר.

משמעות אחת שעולה מהמשוואה היא כי קיים קשר בין סטיית התקן σ של משתנה יחיד שנלקח מתוך אוכלוסייה מסוימת, לבין $\boldsymbol{S(\overline{X}_n)}$ שהיא סטיית התקן של ממוצע של n

משתנים שנלקחו מתוך אותה האוכלוסייה. הנקודה החשובה היא שסטיית התקן של הממוצע קטנה פי $\sqrt{\boldsymbol{n}}$ מסטיית התקן של משתנה יחיד ולא פי n למשל, כפי שסברו לפני גילוי המשפט.

המשמעות השנייה היא שאם נתונים שני מדגמים בגודל שונה מתוך אותה אוכלוסייה, אזי קיים קשר הפוך בין גודל המדגם לבין סטיית התקן של הממוצע שלו. כלומר, ככל שהמדגם גדול יותר נצפה שסטיית התקן של הממוצע שלו תהייה קטנה יותר.

ובכתיב מתמטי: $n_2 > \mathrm{n}_1 \Leftrightarrow \mathrm{S}\left(\bar{X}_{n_1}\right) > S(\bar{X}_{n_2})$.

3.1 דוגמה ראשונה: The Trial of the Pyx

לפני אלפי שנים, בניגוד למקובל כיום ערך כספי של מטבע היה נקבע על פי כמות המתכת היקרה ממנה הוא עשוי (זהב, כסף וכוי). בשנת 1150 כמאה שנה לאחר קרבות האסטינגס היה ידוע למלך אנגליה ששיטות ייצור המטבעות אינן כה מדויקות ולכן לא ניתן להתעקש על כך שכל המטבעות יהיו בעלי אותו משקל בדיוק. לכן המלך והברונים באנגליה פעלו באופן הבא: הם סיפקו לבעלי מטבעה בלונדון כמות מסוימת של זהב שאותו צריך היה להמיס ולייצר ממנו כמות מוסכמת של מטבעות. אחד המטבעות הנפוצים באותה תקופה באנגליה היה גינאה. זהו מטבע העשוי מזהב ומשקלו כ- 128 גרעינים. היה מוסכם על שני הצדדים שלמטבע אחד של גינאה המיוצר במטבעה יכולה להיות סטייה של $\frac{1}{400}$ מכמות הזהב של מטבע סטנדרטי. כלומר משקל כל גינאה צריך להיות ± 0.32 גרעינים ממשקלו של מטבע סטנדרטי המצוי בידי המלך. בטקס המבחן שבו נציגי האוצר קיבלו את המטבעות המיוצרים מהמטבעה הלונדונית, השוו בין סכום של 100 מטבעות חדשים לבין סכומם של 100 מטבעות במשקל סטנדרטי, שאוחסנו בקופסה מיוחדת שנקראה *Pyx*. נציגי האוצר פעלו מתוך הנחה שסטיית התקן של סכום 100 מטבעות חדשים, צריכה להיות גדולה פי 100 מסטיית התקן של מטבע אחד. נבדוק מה היו ההשלכות של הקביעה המוטעית הזו.

על פי משוואת דה מואבר: $$\mathrm{S}\left(\frac{x_1+x_2+.\,.\,.\,.\,.\,\mathrm{x_n}}{n}\right)=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

כלומר $$\frac{1}{\mathrm{n}}\cdot \mathrm{S}(x_1+x_2+\cdots \qquad +x_n)=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ולכן: $$\mathrm{S}(x_1+x_2+\cdots \qquad +x_n)=\sqrt{n}\cdot\sigma$$

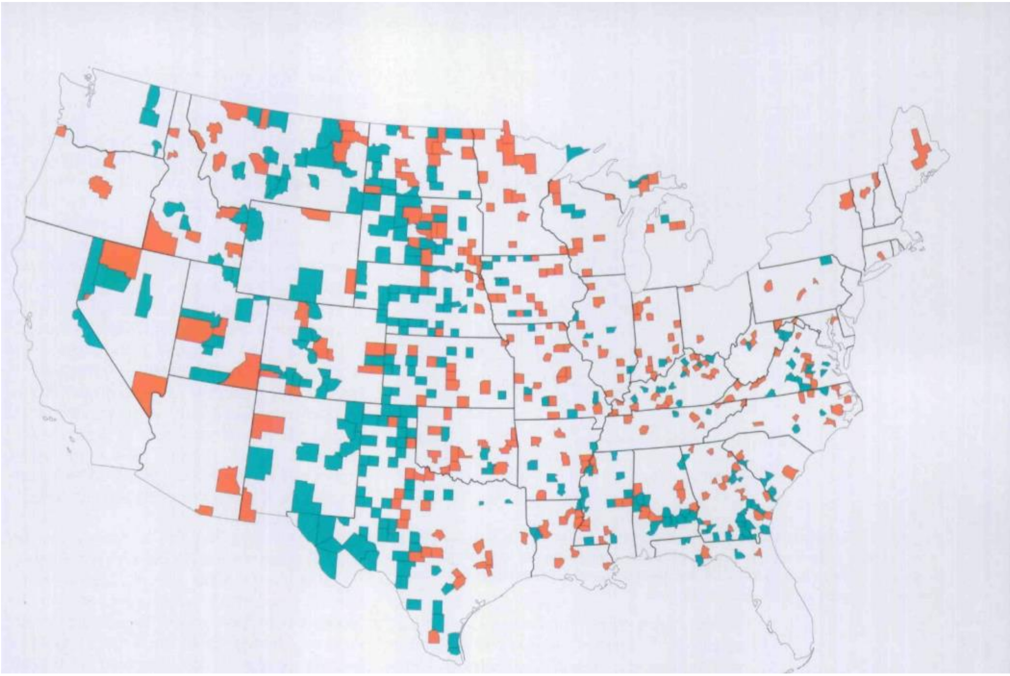
עבור הנתונים $n=100$ ו- $\sigma=0.32$ מתקבל:

על פי משוואת דה מואבר: $$\mathbf{S}(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2}+\cdots \quad +\boldsymbol{x_{100}})=\mathbf{3.2}$$

ועל פי נציגי האוצר: $$\mathbf{S}(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2}+\cdots \quad +\boldsymbol{x_{100}})=\mathbf{32}$$

כלומר, עבור 100 מטבעות אמורה להיות סטייה של 3.2 גרעינים ולא 32 גרעינים! כפי שסברו נציגי האוצר. מה שקרה באופן מעשי, העובדים במטבעה יכלו ליצור באופן מכוון מטבעות הרבה יותר קלים מהמטבעות הסטנדרטים ולשלשל כמות אדירה של זהב שערכה הון עתק לכיסם הפרטי. העובדה שטעות זו התרחשה בקנה מידה ארצי באנגליה ונמשכה לאורך כמעט 600 שנים, מספקת תמיכה חזקה לטענה שמשוואת דה מואבר תיחשב למשוואה מאוד מסוכנת.

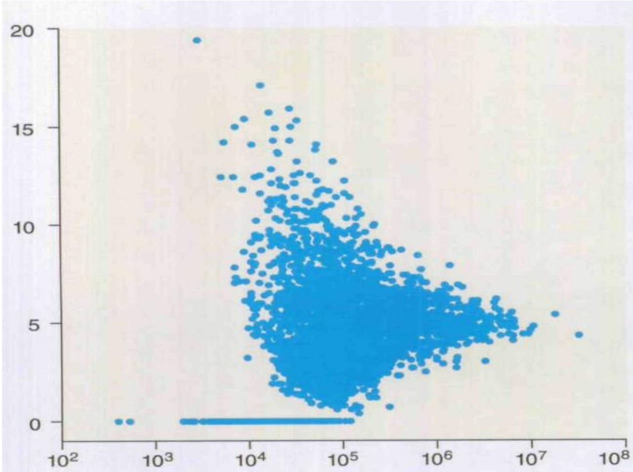
3.2 דוגמה שנייה: החיים בכפר, מקלט או איום?



איור 1: חלוקה של ארה״ב למחוזות על פי שיעור חולי סרטן כליה נדיר. המחוזות הצבועים בכחול נמצאים בעשירון התחתון, המחוזות שצבועים בכתום נמצאים בעשירון העליון של חולי הסרטן.

באיור 1 רואים את מפת המחוזות בארצות הברית בהם יש שיעור חריג של חולים בסרטן כליה נדיר. המחוזות שצבועים **בכחול** נמצאים בעשירון התחתון של שיעור החולים בסרטן . נציין שאלו בדרך כלל מחוזות כפריים שנמצאים במערב או בדרום. קל וגם מפתה להסיק כי תוצאה טובה זו נגרמה באופן ישיר הודות לסגנון החיים הנקי באזורים הכפריים: חיים ללא זיהום אויר, ללא זיהום מים, גישה למאכלים טריים ללא תוספי מזון ועוד. אולם המחוזות שצבועים **בכתום** מפריכים את המסקנה הזו. נשים לב שהם ממוקמים גיאוגרפית באופן מאוד דומה לאלו שצבועים בכחול, והם גם בעלי אותם מאפיינים. כלומר, גם הם אזורים כפריים במערב או בדרום. אבל מחוזות אלו נמצאים דווקא בעשירון העליון של שיעור מספר החולים בסרטן! כאן ניתן לתרץ ולאמר כי ממצאים אלה הם אולי תולדה של העוני באזורים הכפריים, שם אין גישה לטיפול רפואי טוב, יש שימוש מופרז בטבק ואלכוהול, ואכילת מזון עתיר שומן ועוד. אך המסקנה הבלתי נמנעת היא שישנו גורם אחר שיכול להסביר את התוצאות האלה. מסתבר שמה שמשותף למחוזות בעלי אחוז גבוה במיוחד או נמוך במיוחד של מקרי סרטן הוא... אוכלוסיה קטנה. נדגים זאת באופן הבא: אם במחוז המונה 100 אנשים למשל לא מצאנו אף מקרה מוות כתוצאה מסרטן כליה, הוא ישתייך לעשירון התחתון. אך מצד שני אם מצאנו באותו מחוז מקרה אחד של מוות כתוצאה מסרטן זה הוא יהיה בעשירון העליון. (כי פרופורציית החולים היא $\frac{1}{100}$!). ככל שהמחוז מונה יותר אנשים מספר הדגימות גדול יותר, ולכן על פי משוואת דה מואבר סטיית התקן של

מספר מקרי הסרטן שם תהייה קטנה יותר. זה מסביר מדוע מחוזות גדולים אינם מופיעים בעשירון העליון או בעשירון התחתון של שיעור חולי הסרטן.



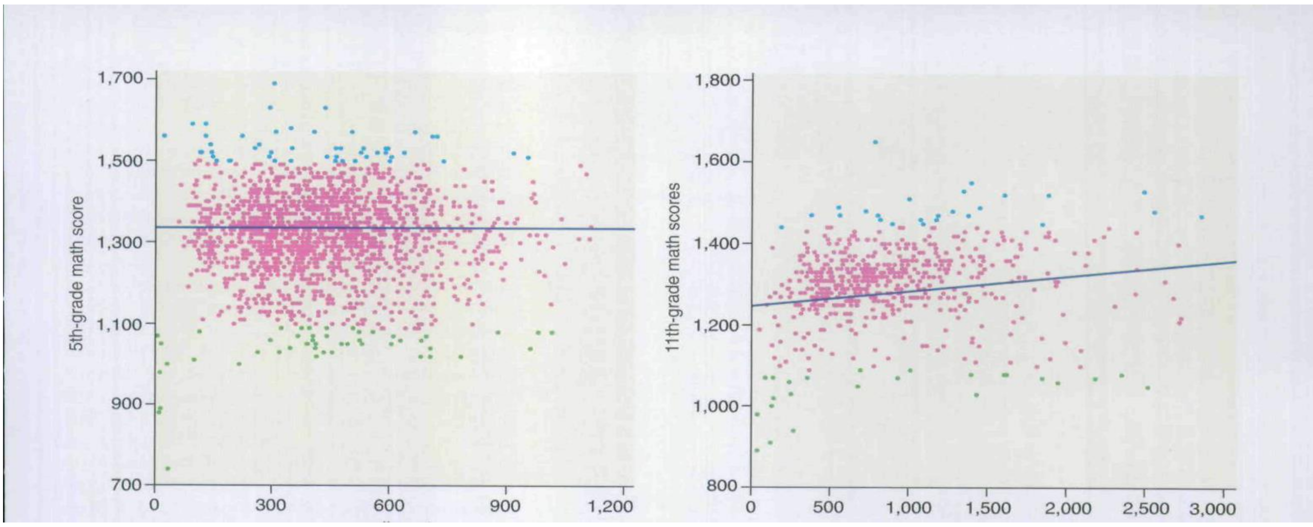
איור 2: מספר חולי הסרטן על כל 100,000 תושבים במחוזות בארה״ב

באיור 2 ישנה דיאגרמה שמתארת את הקשר בין גודל האוכלוסייה במחוזות השונים לבין מספר חולי סרטן כליה. גודל האוכלוסייה נע בין 10^2 ל- 10^8 תושבים. לדיאגרמה יש צורת משולש טיפוסי הממחיש את העובדה הבאה: הסטייה מהממוצע עומדת ביחס הפוך לגודל המדגם. ניתן לראות בתרשים כי כאשר האוכלוסייה קטנה יש טווח גדול של מספר חולי סרטן מ-0 ועד- 20 חולים על כל 100,000 תושבים, וכשאוכלוסיית המחוז גדולה יש טווח מאוד קטן ודי קבוע של חולי סרטן: בערך 5 מקרי תחלואה על כל 100,00 תושבים. למעשה הדיאגרמה הזו ממחישה באופן מושלם את המסקנה שנובעת ממשוואת דה מואבר: ככל שהאוכלוסייה גדולה יותר סטיית התקן שלה נמוכה יותר.

3.3 דוגמה שלישית:התנועה למען בתי ספר קטנים

תהליך העיור שאפיין את המאה העשרים הוביל לנטישת אורח החיים הכפרי וכתוצאה מכך לעלייה בגודלם של בתי הספר. בתי ספר בעלי חדר אחד הוחלפו בבת אחת בבתי ספר גדולים המאכלסים 1000 תלמידים ויותר. במשך הרבע האחרון של המאה העשרים החלו להופיע סימנים של אי שביעות רצון מבתי הספר הגדולים ועלתה ההצעה שבתי ספר קטנים עשויים להציע חינוך טוב יותר. בשנות ה-90 המאוחרות הקרן ע״ש ביל ומלינדה גייטס החלה לתמוך בבתי ספר קטנים באופן אינטנסיבי, מקיף, ולאומי. עד 2001 הקרן הספיקה לקדם מענקים עבור פרויקטים חינוכיים שהסתכמו לכדי 1.7 מיליארד דולר. מאז, הצטרפו לתמיכה בבתי ספר קטנים קרנות פילנתרופיות רבות אחרות וגם משרד החינוך בארה״ב. כמויות גדולות של כסף הוזרמו במטרה ליישם מדיניות של בתי ספר קטנים, כמו כן הופעלו לחצים ליישם את המדיניות של פירוק בתי ספר גדולים לבתי ספר קטנים יותר. (ניו יורק העיר, לוס אנג׳לס, שיקאגו וסיאטל הן רק דוגמאות בודדות של ערים שיישמו את המדיניות הזו). ישנן טענות רבות לגבי היתרונות של בתי ספר קטנים, אבל אנו נתמקד בטענה שכאשר בתי הספר קטנים יותר, הישגי התלמידים משתפרים. כראיה לטענתם, המצדדים בבתי ספר קטנים מראים נתונים המצביעים על כך, שפרופורציית בתי

הספר הקטנים מבין בתי הספר בעלי הישגים גבוהים, גבוהה יותר באופן חריג מפרופורציית בתי הספר הקטנים מתוך כלל בתי הספר. מחבר המאמר הווארד ויינר כותב כי הוא ועמיתו האריס זוורלינג ניסו לעמוד על הקשר שבין גודל בית ספר לבין הישגיו. לשם כך הם בחנו את ההישגים של תלמידים בכל בתי הספר הציבוריים בפנסילבניה, כפונקציה של גודל בית הספר. בתור מדד לביצועים של כל בית ספר, הם השתמשו בתוכנית הבחינה של פנסילבניה (PSSA), שהיא רחבה מאוד ובוחנת הישגים במגוון מקצועות ולאורך כל שנות הלימודים שלפני הקולג׳. כאשר הם בחנו את התוצאות הממוצעות של 1,662 בתי ספר שונים שהציגו את ציוניהם של תלמידי כיתה ה׳ בקריאה, גילו שמתוך 50 בתי הספר בעלי הציונים הגבוהים ביותר (3% עליונים), 6 נמנו על בתי הספר הקטנים. כלומר 12% מבין בתי הספר בעלי ההישגים הגבוהים ביותר הם בתי ספר קטנים. בעוד ששיעור בתי הספר הקטנים מתוך כלל בתי הספר הוא 3% בלבד. אילו גודלו של בית הספר לא היה קשור לביצועיו, היינו מצפים שרק 3% מבתי הספר המצטיינים יהיו בתי ספר קטנים, אבל נמצאו 12% שזה פי ארבעה מהמצופה! כאשר החוקרים בחנו את 50 בתי הספר בעלי הציונים הנמוכים ביותר, הסתבר כי 9 מתוכם (18%) נמנו על בתי הספר הקטנים ביותר. שוב, במקום 3% שזה שיעורם של בתי הספר הקטנים מכלל בתי הספר שנבדקו. ממצאים אלה עולים בקנה אחד עם מה שניתן לצפות לו לפי משוואתו של דה מואבר. לבתי ספר קטנים צפויה להיות שונות גבוהה יותר, ועל כן יהיה להם ייצוג יתר בקצוות.



איור3: הישגי תלמידים בכיתות יא׳ ביחס לגודל בית הספר.   הישגי תלמידים בכיתות ה׳ ביחס לגודל בית הספר.

אם מתבוננים בגרף השמאלי שבאיור 3 רואים כי הקו שמתאר את ממוצע הציונים שטוח כמעט לגמרי, מה שמצביע על כך שלא קיים קשר ברור בין גודל בית הספר והישגי תלמידיו. הגרף הימני שבאיור 4 מתאר ציונים של כיתות י״א במבחן PSSA. גם כאן מוצאים ייצוג-יתר דומה של בתי ספר קטנים בקצוות. אבל הפעם הקו שמתאר את הממוצע מראה שיפוע חיובי משמעותי. כלומר הישגי תלמידים בבתי ספר גדולים גבוהים יותר. נתון זה אינו מפתיע במיוחד, מאחר שבתי ספר תיכוניים קטנים אינם מסוגלים לספק תוכנית לימודים מגוונת ורחבה או מורים רבים בעלי התמחות בתחום ספציפי כמו בבתי ספר גדולים, וזאת בגלל המשאבים המצומצמים שיש לבתי ספר קטנים. כפי שמתואר, בגלל הבורות ביחס למשוואתו של דה מואבר התקבלה החלטה שגויה

ובעקבותיה נעשו מהלכים בקנה מידה לאומי, שגרמו לבזבוז של יותר ממיליארד דולר ולעוגמת נפש למורים לתלמידים ולכל הנוגעים בדבר במערכת החינוך.

3.4 דוגמה רביעית: הערים הבטוחות ביותר

בגיליון של הניו יורק טיימס שפורסם ביוני 2006 הופיע מאמר קצר שמנה את עשרת הערים הבטוחות ביותר ולצידן עשרת הערים הכי פחות בטוחות בארצות הברית (איור 4). רשימה זו התבססה על בדיקה סטטיסטית שערכה חברת הביטוח Allstate. חברת הביטוח בדקה את מספר השנים הממוצע שעבר בין תאונות דרכים אצל אותו נהג ב- 200 הערים הגדולות ביותר בארה״ב. כותב המאמר צירף לרשימה את 10 הערים הגדולות ביותר בארה״ב וקובע: אם לוקחים בחשבון את משוואתו של דה מואבר זה לא מפתיע כלל שברשימת 10 הערים הבטוחות ביותר ו-10 הערים הכי פחות בטוחות לא מופיעה אף אחת מ-10 הערים הגדולות ביותר!

city	state	population rank	population	number of years between accidents
ten safest				
Sioux Falls	South Dakota	170	133,834	14.3
Fort Collins	Colorado	182	125,740	13.2
Cedar Rapids	Iowa	190	122,542	13.2
Huntsville	Alabama	129	164,237	12.8
Chattanooga	Tennessee	138	154,887	12.7
Knoxville	Tennessee	124	173,278	12.6
Des Moines	Iowa	103	196,093	12.6
Milwaukee	Wisconsin	19	586,941	12.5
Colorado Springs	Colorado	48	370,448	12.3
Warren	Michigan	169	136,016	12.3
ten least safe				
Newark	New Jersey	64	277,911	5.0
Washington	DC	25	563,384	5.1
Elizabeth	New Jersey	189	123,215	5.4
Alexandria	Virginia	174	128,923	5.7
Arlington	Virginia	114	187,873	6.0
Glendale	California	92	200,499	6.1
Jersey City	New Jersey	74	239,097	6.2
Paterson	New Jersey	148	150,782	6.5
San Francisco	California	14	751,682	6.5
Baltimore	Maryland	18	628,670	6.5
ten biggest				
New York	New York	1	8,085,742	8.4
Los Angeles	California	2	3,819,951	7.0
Chicago	Illinois	3	2,869,121	7.5
Houston	Texas	4	2,009,690	8.0
Philadelphia	Pennsylvania	5	1,479,339	6.6
Phoenix	Arizona	6	1,388,416	9.7
San Diego	California	7	1,266,753	8.9
San Antonio	Texas	8	1,214,725	8.0
Dallas	Texas	9	1,208,318	7.3
Detroit	Michigan	10	911,402	10.4

איור 4: רשימת 10 הערים הבטוחות ביותר, 10 הערים הכי פחות בטוחות ו-10 הערים הגדולות ביותר בארה״ב

4. סיכום

במהלך השנתיים האחרונות במסגרת הלמודים *"בתכנית רוטשילד וייצמן"* קראנו מאמרים של חוקרים רבים מתחום החינוך המתמטי. המאמרים עסקו בצדדים שונים של הוראת המתמטיקה בבתי הספר, הן מבחינה פדגוגית והן מבחינת התכנים הלימודיים. חוקרים רבים הגיעו למסקנה שיש חשיבות רבה לכך שהתכנים הנלמדים בבתי הספר יהיו רלוונטים לחיי התלמידים, ולכן רצוי שהבעיות שהתלמידים פותרים תעסוקנה בנושאים מחיי היום שמעניינים אותם. מחקרים נוספים מצביעים על כך שרצוי לשלב היסטוריה של המתמטיקה בהוראת תלמידים בבתי הספר, ובתכניות להכשרת מורים. תכנית לימודים הפועלת על פי עקרונות אלה יכולה להשפיע באופן חיובי על היחס למקצוע ויוצרת מוטיבציה והבנה טובה יותר של החומר הנלמד. באופן אישי הרגשתי שהמאמרים האלה חידשו לי מאוד וקיבלתי החלטה לעשות כמיטב יכולתי ליישם את העקרונות האלה בהוראה שלי.

כיום סטטיסטיקה אינה חלק מתכנית הלימודים של תלמידי תיכון ברמות 4 ו-5 יח"ל, התלמידים לומדים הסתברות בלבד. הנושאים שמופיעים בשאלות בהסתברות לרוב אינם רלוונטים לחיי התלמידים. לעניות דעתי חבל שהתלמידים לא נחשפים לתחום הסטטיסטיקה ולקשר שבין סטטיסטיקה והסתברות, משום שהקשר הזה היה מאפשר להם לעסוק בבעיות שגרתיות מהחיים האמיתיים. בעבודה מובאים תכנים שונים שניתן לשלב בשיעורי הסתברות בתיכון על מנת להפוך אותם לרלוונטים יותר עבור התלמידים. למשל, מוצגים משפטים בסיסיים בתורת ההסתברות ופתרונות של בעיות מחיי היום יום באמצעות משפטים אלה. כמו כן מוצג המאמר: *"המשוואה המסוכנת ביותר"* שבו מובאים סיפורים מתקופות שונות ומתחומי חיים שונים הממחישים כי משוואת דה מואבר הינה משוואה חשובה מאוד ויש לה יישומים מעשיים ביותר. בעבודה גם מובאת סקירה היסטורית של התפתחות משפט הגבול המרכזי לאורך 200 שנה.
לדעתי העבודה עשויה גם לתרום לתלמידים ולמורים המעוניינים להעשיר את הידע שלהם בסטטיסטיקה והסתברות מעבר לתכנית הלימודים הפורמאלית.

בתהליך יצירת העבודה למדתי המון דברים חדשים. החל בתכנים מתמטיים כגון: משתנה מקרי, התיאור הגרפי של משתנה מקרי המתפלג בינומית, גרפים טיפוסיים בסטטיסטיקה והקשר שבין סטטיסטיקה והסתברות. התרומה המשמעותית ביותר עבורי הייתה המודעות לקיומם של משפטים מרכזיים בתורת ההסתברות ולשימוש היישומי שלהם בפתרון בעיות בחיי היום יום. מבחינה היסטורית למדתי על התפתחות משפט הגבול המרכזי, וכמובן העשרתי את הידע הכללי בעקבות קריאת המאמר *"המשוואה המסוכנת ביותר"*.

לבסוף אני רוצה להודות לפרופסור בועז נדלר על ההדרכה המקצועית ועל העזרה הרבה שקיבלתי בתהליך כתיבת העבודה. אני מודה לך על כך שהתייחסת לכל הפרטים: מהתכנים המתמטיים כמובן, דרך הקפדה על ניסוחים ברורים ומדויקים בעברית וגם בצורת כתיבת העבודה בפועל. והכל במאור פנים ובסבר פנים יפות.

5. ביבליוגרפיה

זמיר, ש', בייט- מרום, ר', & ברקן, ס'. (1995). *מבוא לסטטיסטיקה לתלמידי מדעי החברה-א*. תל אביב: הוצאת האוניברסיטה הפתוחה.

לויתן, ת', & רביב, א'. (1997). *מבוא להסתברות וסטטיסטיקה- הסקה סטטיסטית*. תל אביב: הוצאת עמיחי.

לויתן, ת', & רביב, א'. (1996). *מבוא להסתברות וסטטיסטיקה- הסתברות*. תל אביב: הוצאת עמיחי.

מרצבך, ע', & שמרון, א'. (1999). *תורת ההסתברות*. ירושלים: הוצאת אגודת הסטודנטים של האוניברסיטה העברית.

רוס, ש'. (2001). *הסתברות- קורס ראשון*. תל אביב: הוצאת האוניברסיטה הפתוחה.

Wainer, H. (2007, May-June). The Most Dangerous Equation. *American Scientist, Volume 95* , pp. 249-256.