



קרן רוטשילד קיסריה



**"תוכנית רוטשילד-ויצמן למצוינות בהוראת המדעים"
במימנה של קרן קיסריה אדמונד בנימין דה רוטשילד**

הדרך מאינטגרל רימן לאינטגרל רימן-סטילטייס

מגישה : רעות הראש
מנחה: פרופסור סרגיי יעקובנקו

תאריך ההגשה: 24.4.2012

תוכן עיניינים:

1. מבוא..... 3
2. ההיסטוריה של האינטגרל..... 4
3. הקשר בין הפונקציה הקדומה למציאת שטח..... 5
4. משמעותו של הסימון dx - בדוגמאות..... 10
5. אינטגרל רימן סטילטייס- הגדרה מתמטית..... 14
6. אינטגרל רימן סטילטייס- שימושים מתמטיים..... 18
7. סיכום..... 19
8. רשימה ביבליוגרפית..... 20

מבוא

מספר שנים שאני מלמדת תלמידים לבגרות במתמטיקה ברמת 5 יח"ל. בכל פעם שהגעתי לנושא האינטגרלים הרגשתי שיש אצלי כמה שאלות שעדיין לא קבלו תשובות מושלמות. "מה הקשר בין הפונקציה הקדומה לשטח הכלוא מתחת לפונקציה?" זו הייתה השאלה הראשונה שהעסיקה אותי. אומנם התשובה לשאלה נמצאת במשפט ניוטון-לייבניץ שנלמד במהלך הלימודים הגבוהים במתמטיקה, אך כנראה שלא הופנם מספיק.

השאלה השנייה הייתה "מה משמעות הסימון dx בכתיבת האינטגרל?". השאלה הזו נשאלה גם ע"י התלמידים אותם למדתי ואפילו ע"י מורים שפגשתי במסגרת עבודתי כמורה וכמדריכת מורים. לשאלה הזו עניתי לתלמידים וגם לחלק מהמורים תשובה שלא סיפקה אפילו אותי. מדי פעם ניסיתי לחפש תשובה מעמיקה שתהיה מובנת מהיסוד לי ולתלמידים.

בסוף השנה השנייה ללימודי התואר השני "בהוראת המדעים" במכון ויצמן, התבקשתי להתחיל לחשוב על נושא שמעניין אותי ושארצה ללמוד עליו בצורה מעמיקה יותר. על הנושא שיבחר הייתי צריכה לכתוב את פרויקט הסיכום של התואר. ידעתי שכדי להיות מורה טובה יותר ויסודית יותר בפועל כדאי לי מאוד לנסות ולחפש תשובות לשאלות שעלו לי בתחום האינטגרלים.

מטרת העבודה המוצגת לפניכם היא בעיקר לענות על שתי השאלות שנשאלו. האחת "מה הקשר בין הפונקציה הקדומה לשטח הכלוא מתחת לפונקציה?" והשנייה "מהי משמעותו של הסימון dx בכתיבת האינטגרל?".

בחלק הראשון של העבודה נוכיח את משפט ניוטון-לייבניץ ונסביר את הקשר בין השטח הכלוא מתחת לפונקציה f לפונקציה הקדומה F . בחלק השני נציג מספר דוגמאות סיפוריות שיעזרו לנו להבין את משמעות ותפקידו של הביטוי dx בכתיבת האינטגרל. נגדיר את אינטגרל רימן סטילטייס שהוא הכללה של אינטגרל רימן, ונבדוק מתי הוא מתקיים וכיצד יכול לעזור לנו ולהקל מעלינו את ההבנה במספר כללים מתמטיים מוכרים.

מעט היסטוריה...

"הקלולוס", זה היה השם שניתן למקצוע המתמטיקה שהתגלה במאה ה-17. ה"קלולוס" פירושו "לחשב", לכן מקצוע זה נקרא גם החשבון הדפרנציאלי והאינטגראלי.

בעקבות התפתחות המתמטיקה במקצועות השונים היה ביקוש למצא תשובות לבעיות מדעיות שצמחו מהעיסוקים המדעיים של הפילוסופים של הטבע והמתמטיקאים של המאה ה-17, כמו: 1. כאשר נתון קשר פונקציונאלי בין מרחק לזמן של גוף בתנועה, צריך למצוא את מהירותו הרגעית ואת תאוצתו ולהפך, כשנתונה התאוצה כפונקציה של הזמן יש למצוא את המהירות הרגעית ואת המרחק הנגמע בזמן מסוים.

2. בעיה אחרת שהצריכה את הקלולוס היא מציאת משיק לעקומה נתונה בנקודה נתונה עליה. 3. סוג שלישי של בעיה היה מציאת הערך המקסימאלי והמינימאלי של פונקציה נתונה. 4. וסוג רביעי ואחרון הוא מציאת אורכן של עקומות שונות ומציאת שטחים התחומים בעזרת עקומות או נפחים התחומים בעזרת מישורים.

כל סוגי הבעיות הללו שהיוו כאמור מוטיבציה להתפתחות הקלולוס נתפסו לרוב כבעיות נפרדות אף כי החלו להסתמן קשרים בינהן.

אייזק ניוטון (נולד ב-1642) וגוטפריד וילהלם לייבניץ (נולד ב-1646) היו שני המתמטיקאים מחוללי השינוי במאה ה-17, שגילו ופיתחו (ככול הנראה במקביל) מונחים בסיסיים של הקלולוס. ככול הנראה ניוטון הקדים את לייבניץ בבניית יסודות הקלולוס אך שמר הכל בסוד ולא פרסם את תגליותיו. לעומתו, לייבניץ פיתח את יסודות הקלולוס ודאג לפרסם את הישגיו ברבים.

ניוטון היה הראשון שהראה שגבולות של סכומים (של שטחים) ניתן לקבל בתהליך הפוך למציאת מידת ההשתנות הרגעית (שזו הנגזרת). זה היה הישג יוצא מן הכלל והוא למעשה המשפט היסודי של הקלולוס או במילים אחרות המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגראלי.

לייבניץ היה זה שהמציא את הסימנים של הדיפרנציאל והאינטגרל. dx ו- dy עבור הפרשים הקטנים ביותר האפשריים למשתנים הדיפרנציאליים וה- S המוארך - \int המסמנת את חישוב האינטגרל ומוצב עבור המילה הלטינית Summa – סכום. סימנים אלו הם הסימנים הנפוצים ביותר עד ימינו.

גם לייבניץ כמו ניוטון הגיע למסקנה החשובה שהדיפרנציאל והאינטגרל הן פעולות הפוכות שאם מבצעים אותן אחת אחרי השניה חוזרים לפונקציה המקורית ממנה יצאנו.

מאז שניוטון ולייבניץ גילו את המקצוע המתמטי החדש- הקלולוס, המשיך נושא זה להתפתח ולהיות נושא חשוב מאוד בתחום המתמטיקה.

הקשר בין הפונקציה הקדומה למציאת השטח

הגדרת מושג השטח:

מושג השטח מוכר עוד מהעת העתיקה, אך הגדרתו אינה פשוטה. על שטחה של צורה גיאומטרית במישור ניתן להסתכל כעל תת קבוצה של המישור. כדי להגדיר שטח של צורה A במישור, יש צורך להשתמש במספר אקסיומות: 1. במידה וקיים שטח $S(A)$ הוא חייב להיות תמיד אי-שלילי, 2. במידה וישנה צורה B שחופפת לצורה A במישור אזי $S(A) = S(B)$, 3. אם A היא איחוד זר של מספר סופי של צורות, מחולקים ישיר זוויית ניתן ליצר ע"י חציית המלבן לאורך אחד מאלכסונו. כל משולש רגיל ניתן לחלק לשני משולשים ישרי זוויית ולקבל את שיטחו. טרפז ניתן לחלוקה של מלבן ומשולש, וכן בצורה זו נוכל לבנות את הנוסחאות לשטחים של מצולעים שונים המוכרים לנו.

מכאן ניתן להתפתח ולאומר ששטח של נקודה וגם של קטע הוא אפס (נובע מאקסיומה 1 ו-4). את שטח משולש ישיר זוויית ניתן ליצר ע"י חציית המלבן לאורך אחד מאלכסונו. כל משולש רגיל ניתן לחלק לשני משולשים ישרי זוויית ולקבל את שיטחו. טרפז ניתן לחלוקה של מלבן ומשולש, וכן בצורה זו נוכל לבנות את הנוסחאות לשטחים של מצולעים שונים המוכרים לנו.

מה קורה לגבי מעגל? נקדים את ההגדרה הבאה: הקבוצה A תקרא מדידה אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימים שני מצולעים P_- ו- P_+ כך ש $P_- \subset A \subset P_+$ ו- $0 \leq S(P_+) - S(P_-) < \varepsilon$. המעגל הוא צורה מדידה כי, מצד אחד, ניתן לחסום אותו בעזרת מצולע משוכלל בעל מספר רב של צלעות כרצוננו, נסמנו P_+ , ומצד שני ניתן לחסום בו מצולע משוכלל בעל מספר רב של צלעות כרצוננו, נסמנו P_- , לכן $0 \leq S(P_+) - S(P_-) < \varepsilon$ מתקיים עבור כל $\varepsilon > 0$, וכך ניתן להגדיר את שטח המעגל. באותה הדרך ניתן להגדיר שטח הכלוא מתחת לגרף של פונקציה. במקרה זה נרצה לחסום את השטח בעזרת טרפזים או מלבנים עליונים P_+ ותחתונים P_- דקים מאוד כך שתקיים $0 \leq S(P_+) - S(P_-) < \varepsilon$ עבור כל $\varepsilon > 0$. כדי לעשות זאת נקדים תחילה כמה הגדרות.

■ הגדרת אינטגרל לפי רימן:

הגדרה: $[a, b]$ קטע, $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ כך ש: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, נבחר נקודה $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ מכל תת קטע. חלוקה כזו, יחד עם הנקודות שנבחרו מכל תת הקטעים, נקראת **חלוקה מסומנת**.

הגדרה: לכל חלוקה נתונה של הקטע $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, ניתן להוסיף נקודות חלוקה נוספות $a = x_0 < \bar{x}_1 < x_1 < \bar{x}_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, וכך לקבל **חלוקה מסומנת מעודנת יותר** מהקודמת.

הגדרה: תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת בקטע $[a, b]$. בהינתן חלוקה מסומנת של הקטע $[a, b]$ ניתן להגדיר את **סכום רימן** $\sigma(f, \pi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) |x_i - x_{i-1}|$. סכום רימן זהו השטח הכולל של סכום כל המלבנים שבסיסם $|x_i - x_{i-1}|$ וגובהם $f(\xi_i)$ כאשר $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ (עבור $i = 1, 2, 3, \dots, n$). השטח הוא "שטח מכוון" (העשוי להיות חיובי או שלילי בהתאם לסימן הפונקציה בנקודה ξ_i). כל סכום רימן מהווה קירוב לשטח שמתחת לגרף הפונקציה בקטע המדובר $[a, b]$.

הגדרה תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת בקטע $[a, b]$. תקרא **אינטגרלית לפי רימן** אם לכל בחירת סדרת חלוקות מסומנת π_1, π_2, \dots בעלות גדלים $\lambda(\pi_m)$ השואפים לאפס, הגבול $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma(f, \pi_m)$ קיים. במקרה כזה כל הגבולות $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma(f, \pi_m)$ שווים זה לזה. וגבולן המשותף הוא ערכו של האינטגרל המסוים.

נגדיר את **השטח שמתחת ל- $f(x)$ בקטע $[a, b]$** להיות $\int_a^b f(x) dx$, ז"א הגבול של סכומי רימן.

הגדרה: הפונקציה $f(x)$ **גזירה בקטע $[a, b]$** אם בכל נקודה x בקטע הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

קיים וסופי.

משפט ניוטון-לייבניץ: ■

משפט ניוטון לייבניץ: תהי פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ אזי 1. $f(x)$ רציפה לכל

2. $[c, d] \subseteq [a, b]$ קיימת פונקציה קדומה של $f(x)$ כלומר $F' = f$.

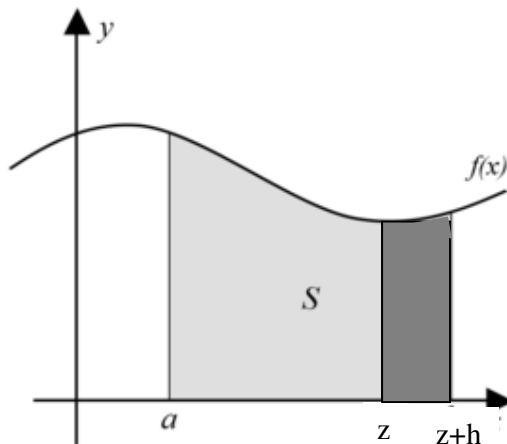
$$3. \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

משפט זה נקרא המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי (שנקרא גם המשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי). משפט זה קושר בין שני מושגי יסוד של גזירה ואינטגרציה. המשפט אומר כי פעולות הגזירה והאינטגרציה הן שתי פעולות הופכיות זו לזו. פעולת הגזירה היא גבול של הפרשים ופעולת האינטגרציה ההופכית לה היא גבול של סכומים. כפי שכבר כתבנו בפרק ההיסטוריה תכונה זו לא היתה ידועה מראש וגילויה היה חשוב ותרם רבות לפיתוח החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי.

הוכחת המשפט:

תהי פונקציה $F(z)$ המוגדרת להיות השטח שנמצא מתחת לגרף הפונקציה $f(z)$ המתחיל בנקודה a

קבועה ומסתיים בנקודה z משתנה z .



$F(z+h)$ מייצג את השטח המתחיל בנקודה a ומסתיים בנקודה $z+h$, ז"א השטח מ- a עד z (שטח צבוע

באפור בהיר) פלוס שטח קטן בין z ל- $z+h$ (שטח צבוע באפור כהה).

הביטוי $F(z+h) - F(z)$ נותן לנו את השטח הנוסף (באפור כהה).

h מתקבל מההפרש של $z+h$ מ- z והוא מיצג את רוחב השטח הנוסף (באפור כהה).

הביטוי $\frac{F(z+h)-F(z)}{h}$ הוא חלוקת השטח הנוסף (באפור כהה) ברוחבו.

הביטוי $\frac{F(z+h)-F(z)}{h}$ נמצא בין אורך המלבן המינימאלי שתוחם את השטח הנוסף לאורך המלבן

המכסימלי שתוחם אותו.

כיוון שהפונקציה f רציפה אזי קיימת נקודה $z_i \in [z, z+h]$ כך שמתקיים $\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z_i)$.

כאשר $h \rightarrow 0$, $f(z+h) \rightarrow f(z)$, נקבל $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$.

על פי הגדרת הנגזרת ידוע כי: $\frac{d}{dz} F(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h}$.

קבלנו: $\frac{d}{dz} F(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$.

לכן כאשר מחפשים את השטח הכולל מתחת לפונקציה f מבצעים אינטגרל ל- f וכך מוצאים את הפונקציה F שהיא מייצגת את השטח המבוקש.

חשיבותו של משפט ניוטון ליבניץ:

למשפט ניוטון לייבניץ חשיבות גדולה במציאת אינטגרלים. ע"פ המשפט כל כלל של גזירה הופך גם לכלל של אינטגרציה. כל נגזרת של פונקציה היא פונקציה שהאינטגרל שלה ידוע (פרט לקבוע). לכן כללי הגזירה יכולים לסייע ככללי אינטגרציה, וכל נגזרת היא הרחבה של מאגר הפונקציות שהאינטגרל שלהם ידוע.

לכן חיפוש אחר אינטגרל של פונקציה יתחיל בהתבוננות בכללי הגזירה או בנגזרות מוכרות של פונקציות במידה ולא ימצא משהו תואם בדיוק ניתן לנסות לבצע פעולות פשוטות שיכולות לעזור כדי להגיע לאינטגרל המדויק (כמו כפל או חלוקה בקבוע וכד'...). במידה ולאחר תהליך זה עדין לא נמצא האינטגרל המבוקש יתכן ונדרש לטכניקות מתקדמות יותר כמו אינטגרציה בחלקים ויתכן שגם זה לא יספק את האינטגרל המבוקש.

ללא משפט ניוטון לייבניץ היה עלינו לחשב אינטגרל בדרך הארוכה של גבול הסכומים. לדוגמה

חישוב האינטגרל של הפונקציה $f(x) = x$ היה צריך להיות ע"י חישוב הסכום בדרך הבאה: נניח כי

החלוקה של הקטע היתה $[0,1,2,\dots,n]$ הסכום הוא:

$$\text{לחישוב הנ"ל ניתן להגיע ע"י סכום} \quad \sum_{i=0}^n f(x)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=0}^n n \cdot 1 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 \dots n = \frac{n^2}{2}$$

סדרה חשבונית והוא יחסית פשוט. חישוב האינטגרל לפונקציה $f(x) = x^2$ מעט יותר מורכב.

בעזרת המשפט, האינטגרל של כל פולינום ובפרט לפולינומים $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ הוא כמעט

מייד. ההיכרות שלנו עם כלל הגזירה $(x^n)' = nx^{n-1}$ מובילה אותנו גם לאינטגרל של פולינום. אם

האינטגרל הוא פעולה הופכית של הגזירה אזי במקום להוריד אחד מהמעריך נוסיף לו אחד ובמקום לכפול

במעריך הקודם נחלק במעריך החדש. כך נקבל ש: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$ ו- $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$. ובאופן כללי:

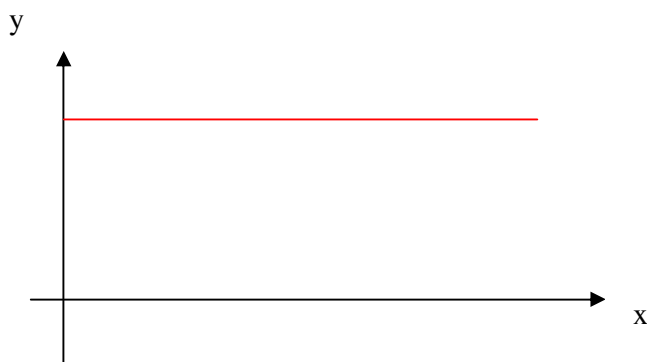
$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

המשמעות של dx בכתיבת האינטגרל $\int f(x)dx$

נפתח במספר דוגמאות שיעזרו לנו להבין את המשמעות של dx .

דוגמה ראשונה - שטח גדר

בנאדם הולך לאורך גדר, בקצב משתנה, ורוצה לדעת מה שטחה. נניח בהתחלה כי גובה הגדר הוא אחיד.



ציר ה- x יציין את מספר הדקות שהלך וציר ה- y יציין את גובה הגדר באותה הדקה. נניח כי אחרי כל דקה הוא מסמן פס קטן על הגדר. הקטעים שנוצרים לאורך הגדר יוצרים חלוקה של הגדר למספר מלבנים שסכום שטחם ייתן לנו את שטח הגדר כולה.

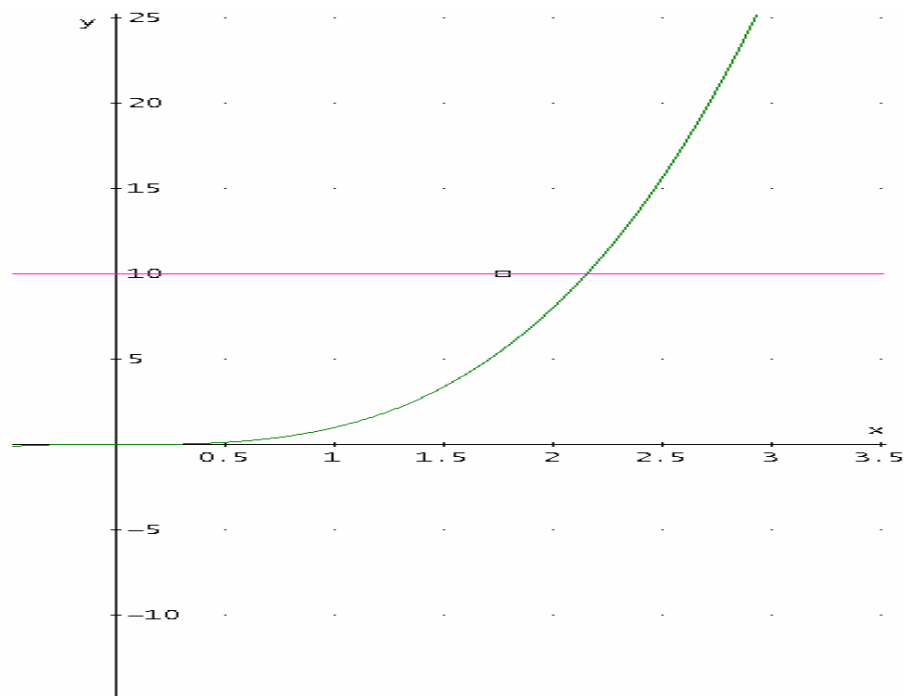
האורך של המלבנים במקרה שלנו הוא קבוע אך רוחבם משתנה לפי קצב ההליכה של האדם. בדקה בה ההליכה מהירה יותר "נוצר" רוחב מלבן גדול יותר לעומת דקה בה ההליכה איטית ו"נוצר" רוחב מלבן צר יותר. כדי לקבל את שטח הגדר יש לסכם את כל המלבנים שנוצרו.

כדי לכתוב את הסכום נכון יש צורך להגדיר פונקציה $\alpha(t)$ שתתאים בין הזמן למקום בו אני נמצאת על הגדר. ז"א בזמן t אני נמצאת במקום $\alpha(t)$ לאורך הגדר, וכאשר אני מתקדמת בזמן מ- t_i ל- t_{i+1} אני מתקדמת במיקום שלי לאורך הגדר מהמקום $\alpha(t_i)$ למקום $\alpha(t_{i+1})$. כך מתקבל $(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))$ שנותן לי את המרחק שהלכתי לאורך הגדר במשך דקה $i + 1$.

כדי לקבל את שטח הגדר נסכם את כל המלבנים שהתקבלו ונקבל את הביטוי $\sum_{i=1}^n f(t_i)(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))$

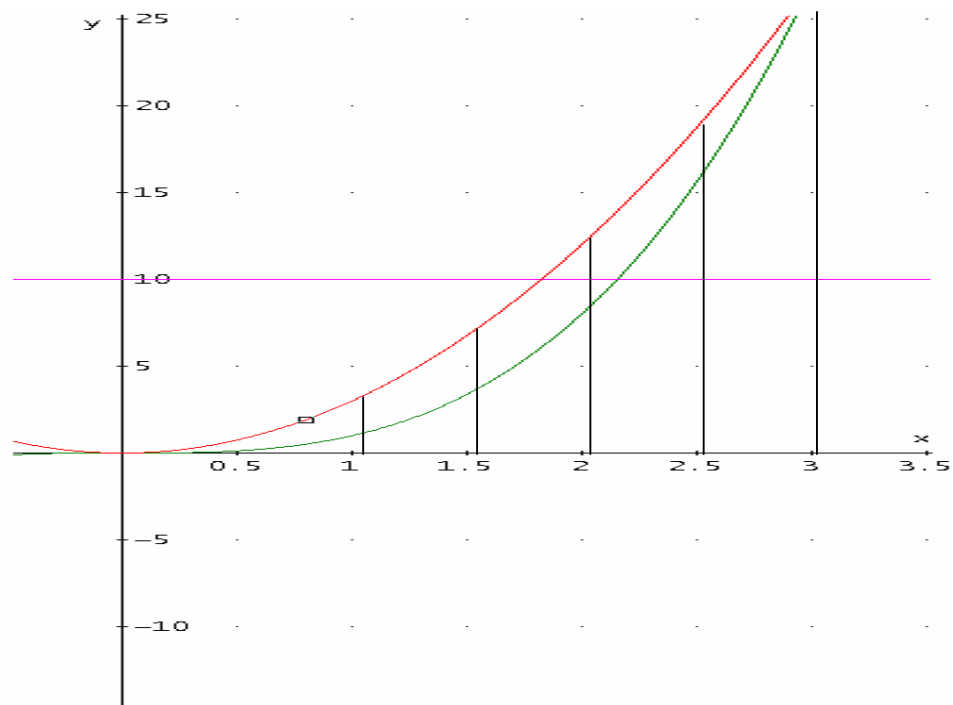
שהוא סכום של מכפלת גובה המלבן $f(t_i)$ (שבמקרה שלנו לא משתנה מדקה לדקה), ברוחב המלבן שנוצר בכל דקה $(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))$.

ננסה להמחיש זאת בעזרת גרפים:



הפונקציה הורודה מייצגת את גובה הגדר. הפונקציה הירוקה מייצגת את המרחק שהלך האדם במשך כל דקה. מסרטוט הפונקציה ניתן לראות שבהתחלת הטיול ההליכה של האדם הייתה מאוד איטית וככול שהוא מתקדם בטיול קצב ההליכה שלו הולך וגדל.

ניתן לראות את קצב השינוי של "כמות" הדרך אותה עבר המטיל בסרטוט הבא:



הפונקציה האדומה היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה הירוקה. בעזרת פונקציית הנגזרת נוכל לראות את המשקל שיש לתת לכל חצי דקת הליכה, ככול שהשטח שמתחת לגרף הנגזרת גבוהה יותר יש לתת לחצי דקת הליכה זו משמעות גדולה יותר בחישוב הסכום.

כאשר אנחנו הולכים לאורך גדר שגובהה לא אחיד, הגובה משתנה בכל נקודה. פונקציה $\alpha(t)$ תתאים בין הזמן למקום בו אני נמצאת על הגדר, והביטוי $(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))$ ייצג את המרחק שהלכתי לאורך הגדר בהתאם לזמן. במקרה זה לא מתקבלים מלבנים בעלי גובה אחיד אלא מתקבלים שטחים שתחומים משלושה כיוונים בעזרת קווים ישרים והחלק הנוסף שתוחם אותה הוא החלק של הפונקציה שמייצגת את גובה הגדר. לכן לא נוכל לקבל את השטח בצורה מדויקת אך נוכל לתחום בעזרת מלבן מינימאלי $f(t_{i-1})(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))$ ומלבן מקסימאלי $f(t_i)(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))$. כיוון שהגדר רציפה גם פונקציה f רציפה, לכן קיימת נקודה $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ כך ש $f(\xi_i) \cdot (\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))$ יהיה שווה לשטח הגדר בקטע $[t_{i-1}, t_i]$. כדי לקבל את שטח הגדר כולה נסכם את כל השטחים החלקיים ונקבל:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))$$

הגבול של הביטוי הזה כאשר כל תת-קטע בחלוקה שואף לאפס באורכו נתן לנו את הקירוב הטוב ביותר לשטח הגדר.

🇮🇱 דוגמה שנייה - שיעון השמל

שיעון חשמל מודד את החשמל בערים מסוימות באופן הבא: תשלום השיא של החשמל הוא בשעות היום מ- 8:00 עד 17:00. לאחר מכן עלות החשמל לשעה יורדת בהדרגה ונמצאת בשפל בין חצות הלילה ל- 5:00 בבוקר. מ- 5:00 בבוקר מתחילה שוב עליה הדרגתית עד 8:00 פונקציה $f(t)$ תייצג את עלות החשמל בכל אחד מחלקי היממה. פונקציה זו היא פונקציית מדרגות. פונקציה $\alpha(t)$ מייצגת את צריכת החשמל שלי במהלך היממה, ז"א כמות קילוואט/לשעה שבו השתמשתי. $\alpha(t)$ היא פונקציה עולה כי היא מסכמת את המספר של כמות קילוואט/לשעה שהשתמשתי לאורך הזמן. נחלק את היממה לקטעים $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ כאשר a מייצג את תחילת היממה ו- b את סופה. $(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))$ מייצג את צריכת החשמל שלי בחלק הזמן $[t_{i-1}, t_i]$. $f(\xi_i) \cdot (\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))$ הוא מכפלת כמות החשמל בה השתמשתי $(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))$ בעלות היחסית שלה $(f(\xi_i))$ כאשר $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

כדי לקבל את העלות הכוללת נסכם את כל העלויות החלקיות ונקבל:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))$$

דוגמה שלישית- מדידת אנרגיה פנימית של מים בבריכה

בריכה עירונית ממלאים ע"י צינור אחד. הבריכה מקורה ובחורף ממלאים אותה במים חמים. מסקר שעשו בין הרוחצים בבריכה הגיעו למסקנה שהטמפרטורה האידיאלית של המים לרחצה היא 27° . בזמן מילוי הבריכה, המים לא זורמים בצינור בצורה אחידה וגם הטמפרטורה שלהם משתנה. ישנו מד טמפרטורה שנמצא בקצה הצינור שמודד את טמפרטורת המים כאשר נכנסים לבריכה. שעון המים מודד את כמות המים שנכנסת לבריכה.

כיצד יצליחו למדוד את האנרגיה הפנימית של המים (שתלויה בכמות המים והטמפרטורה שלהם) בכל שלב של מילוי הבריכה?

פונקציה $f(t)$ תייצג את טמפרטורת המים הנמדדת בעזרת מד הטמפרטורה בכל רגע. פונקציה $\alpha(t)$ תייצג את כמות המים הנמצאת בבריכה. נחלק את הזמן שלוקח למלא את כל הבריכה לקטעים $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ כאשר a מיצג את תחילת זמן המילוי ו- b את סופו.

$(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))$ מיצג את כמות המים שזרמו לבריכה בחלק הזמן $[t_{i-1}, t_i]$.

$f(\xi_i) \cdot (\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))$ הוא מכפלת טמפרטורת המים שנכנסו לבריכה בכמות המים שנכנסה. כך

מקבלים את האנרגיה הפנימית של המים בכל רגע. כדי לקבל את האנרגיה הפנימית של המים בבריכה

כולה נסכם את כל המדידות החלקיות ונקבל: $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))$.

אינטגרל רימן סטילטיים

הגדרה: אינטגרל רימן סטילטיים של פונקציה ממשית f של משתנה ממשית, ביחס לפונקציה ממשית α

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) \text{ ומוגדר להיות הגבול של הסכומים: } \sum_{i=1}^n f(t_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}))$$

כאשר $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ בחלוקת הקטע $[a, b]$ וכאשר אורך הקטע המכסימלי בחלוקה שואף ל-0.

מתי הגבול הזה קיים? ■

הגבול קיים כאשר פונקציה f רציפה ופונקציה α מונוטונית.

$$\text{נסביר: נתונה פונקציה } f \text{ רציפה ו-} \alpha \text{ מונוטונית נראה שהגבול } \int_a^b f(x) d\alpha(x) \text{ קיים.}$$

נניח ב.ה.כ שפונקציה α מונוטונית עולה.

פונקציה g תהייה פונקצית מדרגות המקורבת ביותר לפונקציה f כך שמתקיים $|f - g| < \varepsilon$ בקטע

$[a, b]$. משמעות הדברים היא שהשטח שנוצר מתחת לפונקציה f בקטע $[a, b]$ קרוב לשטח שנוצר

מתחת לפונקציה g עד כדי ε . נוכל לכתוב זאת בצורה מתמטית כך:

$$\left| \int_a^b (f - g) d\alpha \right| = \left| \lim \sum_{i=1}^n (f - g)(t_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \right| \leq \sum_{i=1}^n |(f - g)(t_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}))| \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) = \varepsilon \cdot (\alpha(x) - \alpha(a))_a^b$$

כיוון ש α היא פונקציה מונוטונית עולה החלק $(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}))$ בסכום רימן סטילטיים חיובי לכל i ,

ובקטע $[a, b]$

$$\sum_{i=1}^n (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) = \alpha(x_1) - \alpha(x_0) + \alpha(x_2) - \alpha(x_1) + \dots + \alpha(x_n) - \alpha(x_{n-1}) = \alpha(b) - \alpha(a)$$

(אם היא יורדת צריך להפוך סימן).

$$\text{לכן נקבל ש: } \left| \int_a^b (f - g) d\alpha \right| < \varepsilon \cdot (\alpha(b) - \alpha(a)) \text{ . נבחר את } \varepsilon \text{ להיות } \hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)} \text{ . נציב}$$

$$\left| \int_a^b (f - g) d\alpha \right| < \hat{\varepsilon} < \varepsilon \text{ ונקבל}$$

מסקנה: הגבול של סכומי רימן סטילטיים קיים ולכן אינטגרל רימן סטילטיים מוגדר בתנאים שהצגנו לעיל.

מה קורה כאשר α לא מונוטונית?

צריך לבדוק האם הגבול $\lim_{i=1}^n f(t_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}))$ קיים.

הבעיה שלנו יכולה להיווצר בחלק $(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}))$ של הסכום. כיוון ש α לא מונוטונית פעמים שהביטוי הזה יהיה חיוב ופעמים שיהיה שלילי. כאשר אנחנו שמים לביטוי ערך מוחלט אנחנו הופכים אתו לחיובי לכל i . בפונקציות בהם יהיו לנו עליות וירידות אינסוף פעמים נקבל: $\sum_{i=1}^n |(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}))| = \infty$

ולכן $\lim_{i=1}^n f(t_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}))$ לא קיים. לדוגמה: ניקח את הפונקציה $\alpha = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ בקטע $[0,1]$.

לפונקציה ישנם אינסוף עליות וירידות בסביבת האפס. במצב כזה סכומי רימן סטילטיים לא מתכנסים עבור פונקציות f מסוימות ולכן אינטגרל רימן סטילטיים לא מוגדר.

מתי ניתן להציג את אינטגרל רימן סטילטיים כמו אינטגרל רימן?

טענה: כאשר פונקציה α גזירה ו- $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ קיים, אזי ניתן להציג אותו בצורה של אינטגרל רימן.

הוכחה: נניח כי α גזירה, ואינטגרל רימן סטילטיים קיים עבור פונקציה ממשית f ופונקציה α הנ"ל.

ז"א מתקיים $\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \lim_{x_{i-1} \rightarrow x_i} \sum_{i=1}^n f(t_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}))$ כאשר $\alpha(x_1) = a, \alpha(x_n) = b$ ו- $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

ע"פ הגדרת רימן סטילטיים: $\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \lim_{x_{i-1} \rightarrow x_i} \sum_{i=1}^n f(t_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}))$

ע"פ משפט לגרנץ', כיוון ש α גזירה, $\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) = \alpha'(\xi_i)\Delta x_i$, לכל i , לכן נקבל

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \lim_{x_{i-1} \rightarrow x_i} \sum_{i=1}^n f(t_i)\alpha'(\xi_i)\Delta x_i$$

t_i ו- ξ_i הן לא אותה נקודה, אך לפי משפט לגרנץ' בגבול שלהן הן ישאפו לנקודה אמצעית בקטע. ואז

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \lim_{x_{i-1} \rightarrow x_i} \sum_{i=1}^n f(m_i)\alpha'(m_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$$

ז"א שמתקיים: $\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$

כאשר f קונסטנטה:

עוד קודם דיברנו על הקשר החשוב שהתגלה בין פעולת הדיפרנציאל לפעולת האינטגרל.

כאשר f היא קונסטנטה ניתן לראות זאת בצורה מוחשית.

תהי חלוקה של הקטע $[a, b]$ כך $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. ע"פ הגדרת סכומי רימן-סטילטיס

כאשר $f(x) = 1$ נקבל $\sum_{i=1}^n f(x_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}))$. נפתח את הסכום ונקבל:

$$\alpha(x_2) - \alpha(x_1) + \alpha(x_3) - \alpha(x_2) + \alpha(x_4) - \alpha(x_3) \dots \alpha(x_n) - \alpha(x_{n-1}) = \alpha(x_n) - \alpha(x_1) = \alpha(a) - \alpha(b)$$

$$\int_a^b 1 d\alpha(x) = \lim \sum_{i=1}^n 1 \cdot (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) = \alpha(a) - \alpha(b)$$

$$\int_a^b d\alpha(x) = \alpha(x) \Big|_a^b = \alpha(a) - \alpha(b)$$

פעולת האינטגרל (\int) ופעולת הנגזרת (d) ביטלו אחת את השנייה ונשארו עם $\alpha(x)$ בתחום הנתון.

תכונות באינטגרל רימן סטילטיס:

1. ידוע כלל האדיטיביות באינטגרל רימן $\int (f + g) dx = \int f dx + \int g dx$. כלל זה פועל

גם באינטגרל רימן סטילטיס ומתקיים

$$\int (f + g) d\alpha(x) = \int f d\alpha(x) + \int g d\alpha(x)$$

של האינטגרל לכמה סכומים וכל סכום הופך לאינטגרל בפני עצמו.

$$\int (f + g) d\alpha(x) = \sum [f + g](\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) = \sum f(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) + \sum g(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) = \int f d\alpha(x) + \int g d\alpha(x)$$

2. אדטיביות פועלת גם ביחס לאינטגרטור ולא רק ביחס לאינטגרנד. ז"א באינטגרל רימן

$$\int f d(\alpha + \beta)(x) = \int f d\alpha(x) + \int f d\beta(x)$$

סטילטיס מתקיים: נראה בעזרת כתיבת

האינטגרל ע"י הסכומים:

$$\begin{aligned} \int f d(\alpha + \beta)(x) &= \sum f \cdot ((\alpha + \beta)(x_i) - (\alpha + \beta)(x_{i-1})) = \\ &= \sum f \cdot (\alpha(x_i) + \beta(x_i) - \alpha(x_{i-1}) - \beta(x_{i-1})) = \\ &= \sum f \cdot (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) + \sum f \cdot (\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})) = \int f d\alpha(x) + \int f d\beta(x) \end{aligned}$$

בעזרת תכונה זו ניתן להפוך כל אינטגרל רימן לאינטגרל רימן סטילטיס ע"י מציאת

שתי פונקציות α_1 ו- α_2 שסכומן ייתן את הפונקציה $\alpha(x) = x$. לדוגמה:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \text{ ומתקיים } \alpha_2(x) = \begin{cases} 0 & \forall a \leq x \leq b \\ x & \forall x < a \vee x > b \end{cases} \quad \alpha_1(x) = \begin{cases} x & \forall a \leq x \leq b \\ 0 & \forall x < a \vee x > b \end{cases}$$

3. תכונה נוספת שמוכרת לנו גם מאינטגרל רימן ומתקיימת גם באינטגרל רימן סטילטיס

היא שהאינטגרל בקטע $[a, c]$ שווה לאינטגרל בקטע $[a, b]$ ועוד האינטגרל בקטע

$$\int_a^c f d\alpha = \int_a^b f d\alpha + \int_b^c f d\alpha \quad \text{א"ז, } b \in [a, c] \text{ כאשר } [b, c]$$

תכונות אלה מאפשרות לנו גמישות רבה בחיפוש אחר אינטגרל לפונקציה. הגמישות קיימת בחלוקת הקטע

בו מחפשים את האינטגרל וגם בחלוקת פונקציית המשקל (האינטגרטור) לסכום של שתי פונקציות

אחרות. גמישות זו יכולה לעזור לנו במציאת אינטגרלים שאינם מידיים.

שימושים לאינטגרל רימן סטילטייס:

החלפת משתנים:

כאשר אנו מבצעים החלפת משתנים עלינו לדאוג להחליף את המשתנים באינטגרנד, באינטגרטור וגם בתחומי האינטגרל.

החלפת משתנים באינטגרציה היא פעולה שבאה לפעמים להקל עלינו בחישוב האינטגרל. המשפט הבא מאפשר לנו להחליף משתנים ולא לשנות את התוצאה של האינטגרל.

משפט: תהי $f: [a, b] \rightarrow R$ ותהי $\alpha: [a, b] \rightarrow R$ כך ש: $[a, b] \subseteq R$ ו- $\int_a^b f(x) d\alpha(x) = I$ קיים.

נניח כי קימת העתקה רציפה וחד"ע $h: x = h(z)$ כך ש: $h: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ ו- $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subseteq R_z$. נחליף

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \tilde{f}(z) d\tilde{\alpha}(z) = I \quad \text{אזי מתקיים: } \tilde{\alpha}(z) = \alpha(h(z)) \text{ ו- } \tilde{f}(z) = f(h(z))$$

לרוב אנחנו נפגשים עם אינטגרל רימן, בו $\alpha(x) = x$, כאשר אנחנו מבצעים בו החלפת משתנים

ואם $\tilde{\alpha}(z) = h(z)$ אנו נעזרים באינטגרל רימן סטילטייס בכתיבת האינטגרל החדש $\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(h(z)) dh(z)$

h גזירה נוכל לחזור לאינטגרל רימן ע"י המשפט "כאשר פונקציה α גזירה ו- $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ קיים, אזי

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(h(z)) h'(z) dz$$

נביא דוגמה שתמחיש לנו כיצד משתמשים באינטגרל רימן-סטילטייס לחישוב אינטגרל בעזרת החלפת משתנים.

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx \quad \text{ניקח לדוגמה את האינטגרל הבא:}$$

נניח שאני לא יודעת לחשב אינטגרל של שורש, אבל אינטגרל של פולינום אני יודעת לחשב. נבצע

החלפת משתנים באופן הבא: $x = y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = y$. נציב באינטגרל $\int_1^2 y dy^2$. נשים לב שגם תחום

האינטגרל השתנה. לפי רימן סטילטייס ניתן לחשב את האינטגרל באופן הבא:

$$\int_1^2 y dy^2 = \int_1^2 y (y^2)' dy = \int_1^2 y \cdot 2y dy = \frac{2y^3}{3} \Big|_1^2 = 14 \frac{2}{3}$$

קבלנו את אותה התשובה לו היינו מחשבים אינטגרל לפי שורש: $\int_1^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_1^4 = 14 \frac{2}{3}$

לסיכום

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי הוא חלק מאוד משמעותי בבגרות במתמטיקה. נושא זה מופיע בכל הרמות – 3, 4, ו-5 יח"ל, אך כמובן שרמת הקושי שונה. במהלך שנות הוראתי לימדתי בעיקר את הקבוצה ברמת 5 יח"ל. כמובן שההכנה לשיעור הייתה צריכה להיות מדויקת וברמה גבוהה.

"מכל מלמדי השכלתי ומתלמידי יותר מכלן" (זהו חיבור של שני מקורות שונים). האחד לקוח מתהילים קי"ט והשני מתלמוד בבלי מסכת מכות), לתלמידותיי היו שאלות נפלאות. כדי לענות על השאלות נדרש ממני להבין את החומר בצורה עמוקה. אחת השאלות שליוותה אותי לאורך השנים היא השאלה על הקשר בין האינטגרל לשטח ומשמעות dx בכתובת האינטגרל.

ככול שלמדתי בלימודים גבוהים יותר מתמטיקה, ובתואר זה יותר מקודמו (כיוון שאת התואר הזה אני עושה לאחר ניסיון של כמה שנות הוראה ותוך כדי הוראה בפועל) הדברים התחדדו יותר אך עדיין לא היו לי תשובות שסיפקו אותי עד הסוף. כתיבת העבודה הזו השלימה את המהלך. זה המקום להודות לפרופסור סרגיי על הלייווי המסור לכל אורך הדרך. על הסבלנות אין קץ לענות שוב ושוב על שאלות ולתת הסברים יוצאים מן הכלל כדי שאבין את החומר על הצד הטוב ביותר.

בנוסף רציתי להמליץ משהו לגבי הוראת נושאים אלו בכתה. נראה לי שיש חשיבות גדולה להראות בכתה את הקשר בין האינטגרל לשטח. אין חובה בהוכחה כבדה, אבל יש צורך חשוב בהסבר טוב. כדי להגיע לזה חשוב מאוד עוד קודם בשלב לימוד הנגזרת לא לוותר ולהיכנע ללחץ הזמן בו אנו עומדים וללמד מיד את כללי הגזירה בלבד אלא להראות כיצד הגיעו לכללי הגזירה המוכרים ולשלב בתוך ההסברים את מושג הגבול. אם נתעקש לתת הסבר טוב למושג הנגזרת זה יקל עלינו כאשר נרצה להסביר את הקשר בין האינטגרל לשטח.

כדי להסביר את המשמעות של dx נראה לי שנכון יותר להתמקד בסיפורים שיעזרו להבין את הצורך באינטגרטור מתאים ואז להסביר שהאינטגרלים שאיתם אנו נפגשים הם בעצם מקרה פרטי של האינטגרלים בהם כתוב $d\alpha(x)$.

בהצלחה....

ביבלוגרפיה:

1. שבתאי אונגורו: מבוא לתולדות המתמטיקה, חלק א-ב. תל אביב, משרד הבטחון-ההוצאה לאור, תשמ"ט 1989. 109, 120 ע'.
2. <http://unapologetic.wordpress.com/2008/02/28/the-riemann-stieltjes-integral-i/>
3. <http://unapologetic.wordpress.com/2008/02/29/the-riemann-stieltjes-integral-ii/>
4. <http://unapologetic.wordpress.com/2008/03/03/the-riemann-stieltjes-integral-iii/>
5. <http://unapologetic.wordpress.com/2008/03/04/the-riemann-stieltjes-integral-iv/>