מכון ויצמן למדע
WEIZMANN INSTITUTE OF SCIENCE

קרן רוטשילד קיסריה

"תוכנית רוטשילד-ויצמן למצוינות בהוראת המדעים"
במימונה של קרן קיסריה אדמונד בנימין דה רוטשילד

הבעיה האיזופרמטרית ויישומים בהוראה

מגיש : אבוריא חאלד

מנחה : פרופ' אדריס ס. תיתי

אישור המנחה

המנחה:__________________

תאריך:__________________

אוקטובר 2013

תוכן עניינים

תקציר העבודה

עבודה זו עוסקת בבעיה האיזופרמטרית (Isoperimetric Problem), שיש לה היסטוריה ארוכת ורבת אירועים עם יישומים בבעיות מעשיות מתחומים שונים של מדע וטכנולוגיה, וכתוצאה זה הוביל לפיתוח שיטות מחקר חדשות במתמטיקה ובמיוחד בגיאומטריה דיפרנציאלית וחשבון ווריאציות.

הפרק הראשון נותן סקירה היסטורית של הבעיה האיזופרמטרית (הבעיה של דידו,Dido), ואת ההתפתחות ההיסטורית של השלבים השונים המיוחדים בפתרון הבעיה.

הפרק השני עוסק בפתרון היסודי הראשון של הבעיה האיזופרמטרית שניתן ע״י המתמטיקאי ג'יקוב שטיינר (Jakob Steiner), פתרון זה הוא גיאומטרי בעיקרו. אבל מסתבר שפתרון זה אינו שלם בגלל ששטיינר לא שם לב שתוך כדי הוכחתו הוא הניח קיומו של פתרון.

הפרק השלישי כולל רקע היסטורי ומתמטי של אנליזת פורייה (Fourier), ואת הוכחת הבעיה האיזופרמטרית בעזרת אנליזת פורייה. הוכחה שניתנה בשנת 1902 ע״י אדולף הורוויץ׳ (Adolf Hurwitz).

הפרק הרביעי דן במחשבות מתמטיים אשר בלטו תוך כדי טיפול בבעיה האיזופרמטרית ופתרונה. במיוחד נציג דוגמאות של בעיות ומקרים מיוחדים שניתן לדון בהם בכיתה. וכתוצאה מדיון זה נלמד הלקח שמונחים פשוטים במתמטיקה עשויים לפעמים להוביל לפתרון בעיות גדולות ואתגריות.

פרק ראשון - מבוא

1.1 הבעיה של דידו - Dido:

המלכה דידו ידועה גם בשם אליסאר, נולדה בפיניקיה, היא היתה בתו של מלך העיר צור, ואחותו הבכורה של פיגמליון. לאחר מות אביהם הוסכם ששניהם ישלטו בממלכה. דידו התחתנה עם עאשרבאס שהיה אדם עשיר מאוד. אחיה פיגמליון חמד בעושרו ורצה לשלוט לבדו בממלכה ולרצוח את אחותו. ומסיבה זו היא אספה את תומכיה והחליטה לנטוש את העיר. היא הפליגה דרך קפריסין ונחתה בחוף צפון אפריקה, שם היא הציעה לקנות חלקת אדמה לבנות את ממלכתה מהמלך גארבאס. הוא הציע לה בזלזול את הזכות לשטחים "רבים" שגבולתם עורו של שור. בנוסף להיותה יפה מאוד, דידו הייתה אישה חזקה וחכמה. היא הסכימה לעסקה, לקחה את העור של השור וחתכה אותו לרצועה דקה וארוכה מאוד והקיפה את השטח המירבי האפשרי ע"י שימוש ברצועה כדי לסמן את הגבול של האיזור שקנתה. צורת השטח שקבעה דידו היתה חצי עיגול נגד קו חוף הים הישר. שם ייסדה את העיר קרטאגו שהפכה לממלכה שלה.

שאלה נשאלת: האם דידו באמת קבעה את השטח המירבי ע"י רצועת העור?

שאלה זאת נודעה מאוחר יותר במתמטיקה כהבעיה של דידו או הבעיה האיזופרמטרית.

עבודה זאת דנה בהיבטים שונים של הבעיה הזאת:

- פתרונות שונים של הבעיה.
- השלכות פתרונות אלה לתחום ההוראה.

1.2 היסטורית פתרון הבעיה האיזופרמטרית (Isoperimetric Problem)

הבעיה האיזופרמטרית : *מבין כל העקומים הסגורים בעלי היקף נתון המעגל מקיף את השטח הגדול ביותר.*

השם איזופרמטרית בא מיוונית : שווה=iso היקף=parameter ז"א עקומים שווה היקף.

ניסיונות לפתרון הבעיה האיזופרמטרית ידועים מאז ימי היוונים הקדמונים, והראשונה מבעיות האופטימיזציה. חשיבותה הייתה מיוחדת לנושא המדידות. למשל תוקידידיס (Thukydides), וגם גיאומטרים מלפני 100 שנה לפני הספירה, מדדו את גודלה של עיר ע"י הזמן שנדרש בכדי להקיפה. הוא הגדיר למשל את גודל האי סיציליה כזמן שנדרש להפליג סביבה.

ובאשר למתמטיקה של הבעיה האיזופרמטרית, היוונים חקרו לפני הרבה שנים מקרים פרטים ומיוחדים של הבעיה האיזופרמטרית. למשל זינודורוס (Zenodorus) הוכיח כי לעיגול יש שטח גדול יותר מאשר כל מצולע עם היקף שווה להיקף המעגל. אבל ככל הנראה העבודה הזו של זינודורוס הלכה לאיבוד, כפי שמצטטים פפוס (Pappus) ותיון (Theon) מאלכסנדריה [1] .

מטרתו המוצהרת של המתמטיקאי ג'יקוב שטיינר (Jakob Steiner), מהתקופה של דיקארט (Descartes), היתה לצמצם את הפתרון של בעיות גיאומטריות לחישוב אלגברי כך שהשיטה של הפתרון תהיה מכאנית וכללית.(ראה פרק שני).

שטיינר נתן חמש הוכחות לבעיה האיזופרמטרית, אבל הוא עזב נקודה אחת פתוחה להתקפה : כל ההוכחות שלו מניחות מראש את קיומו של פתרון. האסטרטגיה שלו הייתה תמיד לקחת צורה בעלת שטח מירבי עם היקף נתון שאינה עיגול ולהראות שאפשר להגדיל את השטח מבלי לשנות את ההיקף.

המאמר הראשון של שטיינר לגבי הבעיה האיזופרמטרית הניח באופן ברור קיום של פתרון ללא כל אינדקציה לכך שזה חייב להיות מוכח [2].

נציג את הוכחה מס' 4 של שטיינר לפי [5] בפרק השני.

לגבי שאלת קיומו של פתרון, ויירשטראס (Weierstrass) הוכיח קיום הפתרון בהרצאה שלו עם שיטות של חשבון ווריאציות בשנת 1879, ובכך פתרון קפדני של הבעיה האיזופרמטרית הושלם. אבל ויירשטראס מעולם לא פרסם תוצאות אלו [9].

מצד שני אדלר (Edler) הוכיח בשנת 1882 שצורה שאינה עיגול עם היקף מסוים יש לה שטח קטן מהעיגול בעל היקף שווה [10].

אדולף הורוויץ' (Adolf Hurwitz) בחלק הראשון במאמר שלו הכיל הוכחה בעזרת אנליזת פורייה (Fourier) [5]. הוא ניסה להסביר מדוע הגישה הזו טבעית, ז"א שטורי פורייה והרחבות מקבילות מתערבות בתיאוריה הכללית של עקומות ומשטחים.

ואכן תורת טורי פורייה הנתפסת מנקודת מבט של אנליזה, שעוסקת במחקר של פונקציות מחזוריות , הובילו ליישום לפתרון לבעיות גיאומטריות [3].

בפרק השלישי נציג את ההוכחה של הורוויץ' לפי [5].

ניתן לציין שבהכנת החומר ההיסטורי נעזרנו בחוברת של Viktor Blasjo [11].

פרק שני - הוכחת הבעיה האיזופרמטרית ע"י ג'יקוב שטיינר

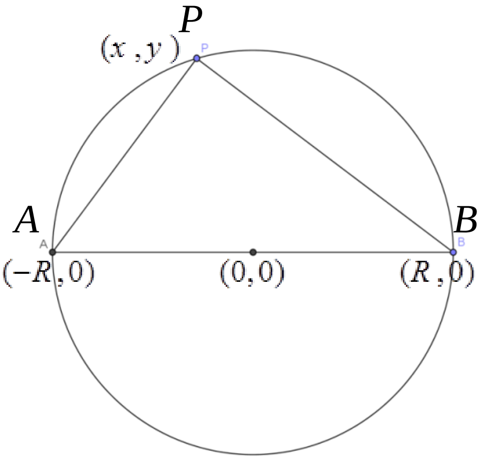
הפרק יעסוק בהוכחת הבעיה כפתרון יסודי ראשון שניתן ע"י המתמטיקאי השוויצרי ג'יקוב שטיינר (Jakob Steiner) (1769-1863) מעל 130 שנה, ואת הרעיונות מגיאומטריה שהסתמך עליהם בהוכחתו.

פרק זה מציג את ההוכחה הרביעית של שטיינר לפי [5].

<u>משפט</u><u>2.1</u>: *מבין כל העקומים הסגורים והגזירים למקוטעין בעלי היקף נתון המעגל מקיף את השטח הגדול ביותר.*

ההוכחות של שטיינר הסתמכו על שתי עובדות מגיאומטריה אוקלידית:

<u>טענה 2.2</u> : *יהי נתון עקום סגור במישור ושתי נקודות קבועות עליו A ו- B. נניח שלכל נקודה P על העקום הזווית בין הקטעים AP ו- BP זווית ישרה, אזי העקום הוא מעגל.*



<u>הוכחה טענה 2.2</u> :

בלי הגבלת הכלליות אפשר להניח שהנקודה $A=(0,-R)$ ו- $B=(R,0)$. ניקח נקודה P עם קואורדינטות (x,y) כלשהי על העקום השונה מ- A ו- B.

אזי $\frac{y}{x-R}$ $(x\neq R)$ שווה לשיפוע הישר BP, ו- $\frac{y}{x+R}$ שווה לשיפוע הישר AP. בגלל ששני הישרים מאונכים

אזי: $x^2+y^2=R^2 \Rightarrow x^2-R^2=-y^2 \Rightarrow \left(\frac{y}{x-R}\right)\cdot\left(\frac{y}{x+R}\right)=-1$.

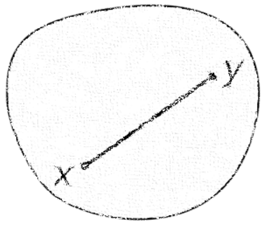
ז"א (x,y) מקיימת משוואה מעגל בעל רדיוס R ומרכז בראשית.

<u>**טענה 2.3**</u>: מבין כל המשולשים בעלי שתי צלעות נתונות, המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא זה עם זווית ישרה בין שתי צלעות אלה, ועל כן הוא יחיד.

<u>הוכחה טענה 2.3</u> : נניח שאורכי שתי הצלעות הם x, y והזווית ביניהם θ אזי השטח של המשולש הוא $A = \frac{1}{2}xy\sin\theta$. והוא מקסימלי כאשר $\sin\theta = 1$, וזה מתקיים כאשר $\theta = 90^\circ$. ■

עכשיו נתאר את **השלבים החיוניים** בהוכחתו של שטיינר של משפט 2.1 :

<u>**הגדרה 2.4**</u> : במרחב לינארי, קבוצה נקראת קמורה אם לכל זוג נקודות בתוך הקבוצה, מתקיים שכל נקודה על קטע הקו הישר שמחבר אותן גם הוא בתוך הקבוצה.



ובניסוח אלגברי : *תהי $S \subset V$, כאשר V מרחב לינארי.* S נקראת קבוצה קמורה אם $\forall\lambda \in [0,1]$ ו- $\forall x, x' \in S$ מתקיים $\lambda x + (1-\lambda)x' \in S$.

<u>**הגדרה 2.5**</u> : *הפונקציה $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ נקראת גזירה למקוטעין אם יש לה נגזרת רציפה חוץ ממספר סופי של נקודות בקטע $[a,b]$.*

<u>**הגדרה 2.6:**</u> תהי $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, Γ נקראת עקום סגור אם קיימת פונקציה רציפה $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ כך ש- ו- $\Gamma = \{f(t) : t \in [a,b]\}$ ו- $f(a) = f(b)$.

<u>**הגדרה 2.7:**</u> *אורך עקום גזיר למקוטעין במישור הנתון ע"י ההצגה הפרמטרית $(x(t), y(t))$ על האינטרוול $[a,b]$ הוא האינטגרל $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$.*

הגדרה 2.8 : *עקום פשוט במישור הוא עקום לא חותך את עצמו, ז"א אם* $f:[a,b]\to\mathbb{R}^2$

הצגה כלשהי של העקום אזי $f(\alpha)\neq f(\beta)$ *לכל* $\alpha\neq\beta$ *ו-* $\alpha,\beta\in(a,b)$.

את השלבים של הוכחת משפט 2.1 הם כדלקמן:

<u>שלב א':</u>

<u>הגדרה 2.9</u>: *יהי* Γ *עקום סגור גזיר למקוטעין ובעל אורך* L. Γ *נקרא עקום החוסם שטח מקסימלי* A, *אם כל עקום סגור הגזיר למקוטעין בעל אורך* L *הוא חוסם שטח הקטן או שווה ל-* A.

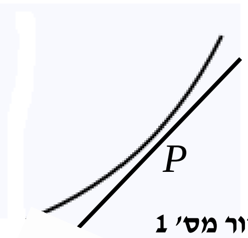
<u>הנחה 2.10</u>: *לכל אורך* $L>0$ *אנו מניחים שקיים עקום סגור הגזיר למקוטעין בעל אורך* L *ובעל שטח מקסימלי* $A(L)$.

<u>הערה</u>: אם נתון $L>0$ אזי תמיד אפשר למצוא עקום סגור בעל אורך L, למשל המעגל בעל רדיוס $\frac{L}{2\pi}$. אבל עוד לא הוכחנו שקיים עקום בעל שטח מקסימלי עם היקף L. ועל כן ההנחה 2.10 למעלה היא הכרחית בשלב זה. וזאת בדיוק היתה הנקודה שלא שם לב אליה שטיינר בהוכחתו. ולכן הפתרון שלו אינו מושלם.

<u>טענה 2.11</u>: *הפונקציה* $A(L)$ *עבור* $0<L$ *המוגדרת למעלה בהנחה 2.10 הינה מונוטונית עולה.*

<u>הוכחת טענה 2.11</u>: נניח בשלילה שקיים $L_0>0$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $L_n^*\in\left(L_0-\frac{1}{n},L_0+\frac{1}{n}\right)$ כך שאחד מהתנאים הבאים מתקיים: $A(L_n^*)\geq A(L_0)$ עם $L_n^*<L_0$ או $A(L_n^*)\leq A(L_0)$ עם $L_n^*>L_0$.

לפי ההנחה 2.10 קיים Γ_0 עקום סגור גזיר למקוטעין בעל אורך L_0 אשר חוסם תחום בעל שטח מקסימלי $A(L_0)$. נניח שהצגת העקום Γ_0 נתונה ע"י $(x(t),y(t))$ עבור $t\in[a,b]$. קיימת נקודה $t^*\in[a,b]$ כך $(x'(t^*),y'(t^*))\neq(0,0)$, אחרת האורך של העקום שווה אפס. ובנוסף $(x'(t),y'(t))$ רציפה סביב $t=t^*$. ז"א בנקודה $P=(x(t^*),y(t^*))$ ובסביבתה קיים משיק לעקום. ועל כן הגרף נראה כמו באיור מס' 1.

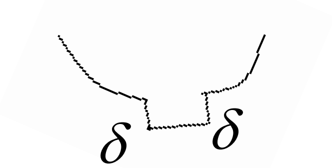


איור מס' 1

אפשר לעשות הזזה באורך δ ($\delta>0$ שנקבע יותר מאוחר) בכיוון

מאונך למשיק בנקודה P כלפי פנימה אם ידוע כי $L_n^*>L_0$

וכלפי חוצה אם $L_n^*<L_0$ (ראה איור מס'2).



איור מס' 2

$\int_a^b (x'(t)^2+(y'(t)^2)dt=L_0>0$. נניח $L_n^*>L_0$, ניקח $\delta=\frac{L_n^*-L_0}{2}>0$ במקרה זה ההזזה תהיה כלפי חוץ. בגלל ש- $\left|L_n^*-L_0\right|<\frac{1}{n}$ אזי $\delta<\frac{1}{2n}$. ועל כן אפשר לבחור n מספיק גדול כך שהעקום החדש אחרי ההזזה כלפי חוץ לא יחתוך את העקום המקורי. מכאן העקום החדש בעל אורך שווה ל- L_n^* ובעל שטח $\tilde{A}$ אשר מקיים

$A(L_0)\geq A(L_n^*)>\tilde{A}>A(L_0)$ וזו סתירה. ■

אם $L_n^*<L_0$ ניקח את ההזזה כלפי פנימה ושאר שלבי ההוכחה יהיו דומים עד כדי היפוך סימנים באי-שוויונות.

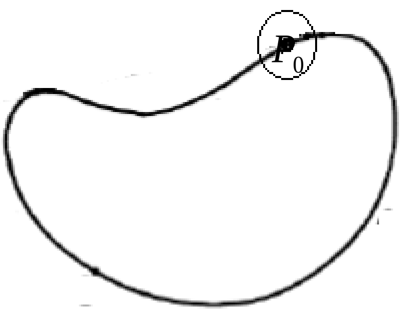
טענה 2.12: *יהי Γ עקום בעל אורך L ושטח מקסימלי $A(L)$ אזי Γ מהווה שפה של תחום קמור.*

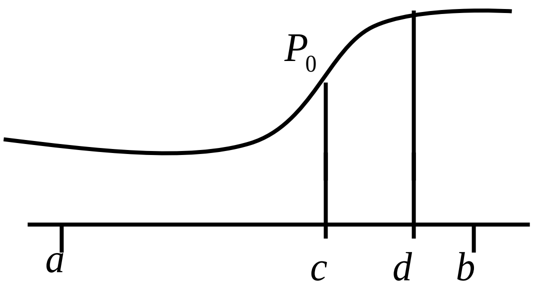
הוכחה טענה 2.12: נניח בשלילה שהעקום מהווה שפה של תחום לא קמור.

נבחין בין שני מקרים :

המקרה הראשון :

נניח שקיימת סביבה של נקודה מסויימת P_0 כך שהגרף בסביבה מקיים את התכונה הבאה:

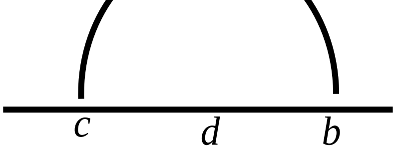




הגרף מוגדר ובעל נגזרת רציפה בקטע $[a,b]$. קיימת נקודה c כך ש- $f'(t)$ עולה בקטע $[a,c]$ ו- $f'(t)$ יורד בקטע $[c,b]$.

ניקח נקודה $c<d<b$ המקיימת $f'(c)>f'(d)$, נעשה רוטציה כך ש- $f'(d)=0$

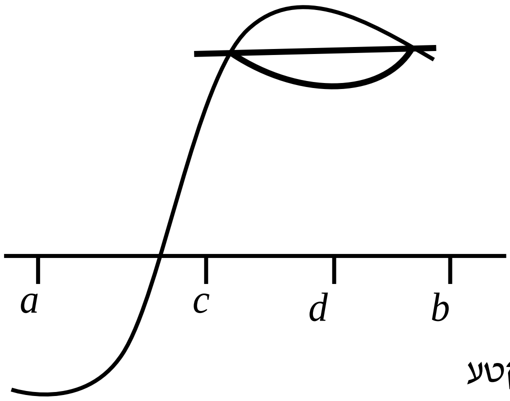
$f'(t)>f'(d)=0$
$c<t<d$



$f'(t)<f'(d)=0$
$d<t<b$

ועל כן $f'(t)>0$ כאשר $c<t<d$ ולכן $f(t)$ עולה , $f'(t)<0$ כאשר $d<t<b$ ולכן $f(t)$ יורדת. ולכן $f(d)$ נקודת מקסימום.

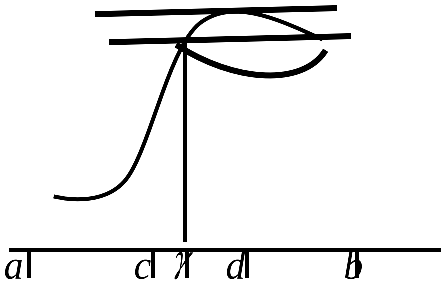
נשווה $f(b)$ עם $f(c)$:



(א) אם $f(b)=f(c)$, ניקח הקטע המחבר $(c,f(c))$ $(b,f(b))$ נבצע שיקוף של הגרף מעל לקטע ואזי נקבל עקום בעל אותו היקף ושטח גדול יותר וזה סותר את ההנחה שהשטח $A(L)$ מקסימלי.

(ב) אם $f(c)<f(b)$

ניקח הפונקציה $y=f(b)$

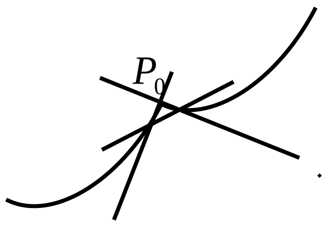


$f(b)$ הוא ערך ביניים בין $f(c)<f(b)<f(d)$ אזי קיימת נקודה יחידה $c<\gamma<d$ כך ש- $f(\gamma)=f(b)$. הנקודה γ יחידה כי $f(t)$ עולה בקטע (c,d). אזי אפשר לקחת הקטע המחבר את $(\gamma,f(\gamma))$ $(b,f(b))$ ונבצע כמו קודם שיקוף בקטע זה של הגרף ונקבל עקום בעל אותו אורך ושטח גדול יותר וזה סותר את ההנחה.

(ג) אם $f(b)<f(c)$ כמו בסעיף (ב) אבל ניקח $y=f(c)$ ושאר שלבי ההוכחה דומים.

המקרה השני:

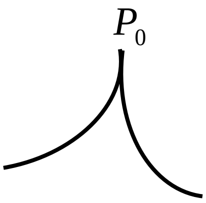
נקודה P_0 שבה הפונקציה לא גזירה. כאן יש שני מקרים שונים:



א. נגזרת עולה לפני P_0 ופתאום קופצת למטה וממשיכה להיות עולה.

ב. נגזרת עולה לפני P_0 ופתאום קופצת למטה וממשיכה להיות יורדת.

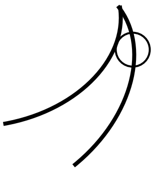
א. נעביר משיקים בנקודת P_0 משמאל ומימין ונציין שהגרף תמיד מעל למשיקים אלה, במקרה זה בגלל שהנגזרת עולה לפני P_0 וגם עולה אחרי P_0 השיפוע לפני P_0 חיובי ואחרי P_0 שלילי.



ואזי נחבר שתי נקודות על המשיקים. אם מבצעים רוטציה הגרף נראה

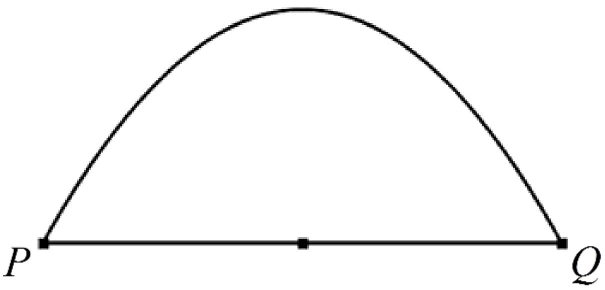
ואז P_0 נקודת מקסימום, וזה דומה למקרה הראשון ושאר שלבי

ההוכחה הולכים בעקבות מקרה ראשון.



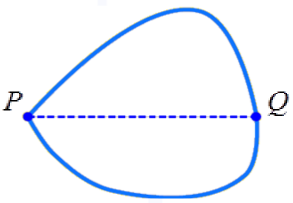
ב) כמו במקרה הראשון ניקח סביבה ושאר שלבי הוכחה דומים.

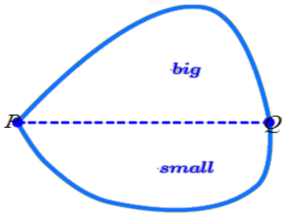
<u>שלב ב:</u> תהי P נקודה על ההיקף ו- Q נקודה על ההיקף שמרחקה מ- P לאורך העקום הוא חצי אורך ההיקף של Γ.

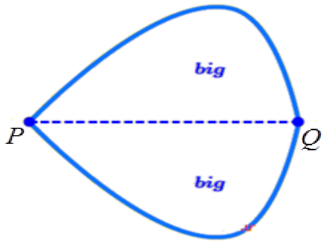


<u>טענה 2.13 :</u> *מספיק להסתכל על חצי ההיקף*

<u>הוכחת טענה 2.13 :</u> ניקח נקודה P על העקום ונקודה Q על העקום שמרחקה לאורך Γ שווה חצי Γ. הישר PQ מחלק את העקום Γ לשני עקומים בעלי אורך $\frac{L}{2}$, והתחום לשני תתי- תחומים, זה אפשרי כי העקום קמור.







עכשיו נוכיח ששטחי שני התת-תחומים שווים.

זה נכון, כי אחרת אם אחד יותר גדול אזי עושים

שיקוף בקטע PQ של החלק היותר גדול בשטחו,

נקבל עקום בעל שטח יותר גדול עם אותו אורך וזו סתירה.

לכן נסתפק בלהסתכל בחצי התחום ז"א באחד מהתת-תחומים ונראה שהוא חצי מעגל.

<u>טענה 2.14</u>: *אם S,T שני תחומים קמורים אזי $S\cap T$ הינו קמור.*

<u>הוכחת טענה 2.14</u>: נניח ש- $x,x'\in S\cap T$, אזי $x,x'\in S$ וגם $x,x'\in T$. מאחר ו- S,T הם שני תחומים קמורים זה גורר ש- $x''\in S$ וגם $x''\in T$ כאשר לכל x'' מהצורה $x''=\lambda x+(1-\lambda)x'$ $\lambda\in[0,1]$. מכאן $x''\in S\cap T$. מאחר וזה נכון עבור $x,x'\in S\cap T$ ועבור $\lambda\in[0,1]$ אזי $S\cap T$ תחום קמור. ■

<u>טענה 2.15</u>: *כל אחד מהתת תחומים הוא קמור.*

<u>הוכחת טענה 2.15</u>: זה נובע מהעובדה שחיתוך של שתי קבוצות קמורות אף הוא קמור. וחצי התחום הוא חיתוך הקבוצה המקורית עם אחד מחצאי המישור שנקבע על ידי הישר PQ.

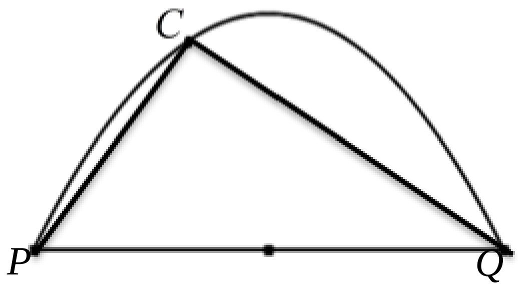
<u>שלב ג:</u>

על סמך שלב ב' מספיק שנתבונן בחצי העקום.

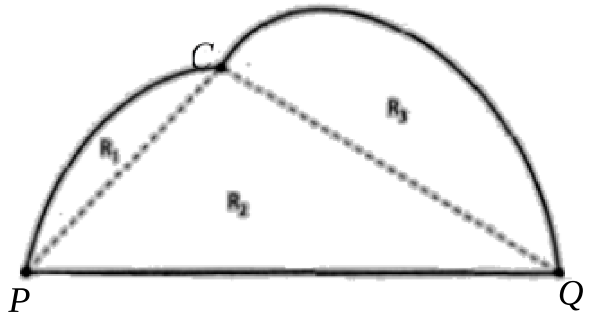
<u>טענה 2.16</u>: *החצי הזה הוא חצי עיגול.*

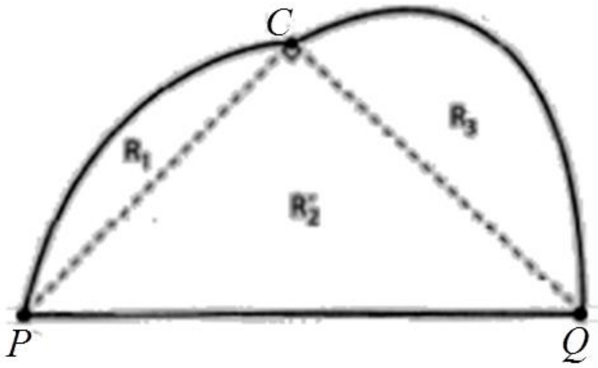
<u>הוכחת טענה 2.16</u>: נניח בשלילה שהעקום אינו

חצי עיגול, ניקח נקודה C על העקום. ואזי



יוצרים משולש בין הנקודות P,Q,C. כך שהמשולש PQC כולו בתוך התחום בגלל שתת התחום הוא קמור על פי טענה 2.14 וטענה 2.15.





אם נסתכל על הצלעות PQ,CQ,PC במשולש , אם נזיז את הנקודות P ו- Q כך ש- PCQ ∠ תהיה זווית ישרה , בעזרת פעולה זו אנחנו שמרנו על האורכים של הקטעים והקשתות CQ,PC אבל קבלנו משולש חדש שהוא בעל שטח גדול יותר לפי טענה 2.3 .

בגלל שהשטחים של R_3,R_1 נשארו אותו דבר אבל $R_2' > R_2$ מכאן הסכום של השטחים גדול יותר. מכיוון שהנקודה C היא נקודה כלשהי על חצי העקום אזי

העקום הוא חצי מעגל לפי טענה 2.2 ואזי בעזרת שיקוף נקבל שהעקום בעל השטח המקסימלי והיקף נתון הינו מעגל .

ובזה מסיימים הוכחת משפט 2.1 בהנחה שקיים פתרון, ראה הנחה 2.10.

<u>פרק שלישי- הוכחת הבעיה האיזופרמטרית ע"י אדולף הורוויץ' בעזרת אנליזת פורייה.</u>

בפרק זה ניתן רקע היסטורי ומתמטי קצר של אנליזת פורייה (Fourier), ואת הוכחת הבעיה האיזופרמטרית בעזרת אנליזת פורייה.

בשנת 1902 פרסם מתמטיקאי גרמני בשם אדולף הורוויץ' – Adolf Hurwitz (1859-1919) הוכחה מפתיעה של הבעיה האיזופרמטרית שהתבססה כולה על טורי פורייה ועל כלים אנאליטיים בלבד. חשוב לציין שהוכחה זו היא מושלמת בהשוואה להוכחתו של שטיינר מפרק 2.

<u>רקע היסטורי של טורי פורייה [4]</u>

טורי פורייה הינם יצוג של פונקציה מחזורית, ע"י צירוף לינארי "אינסופי" של פונקציות טריגונומטריות כלומר סינוסים וקוסינוסים (או אקספוננטל המורכב).

טור פורייה הוצג לראשונה על ידי יוסף פורייה(Joseph Fourier) (1768-1830) לצורך פתרון משוואת החום בלוחית מתכת. משוואת התפזרות החום היא משוואה דיפרנציאלית חלקית מהצורה $\frac{\partial u}{\partial t} - k\,\Delta u = f\,(x,t)$.

לפני עבודתו של פורייה, לא היה פתרון ידוע למשוואת החום במצב כללי, למרות שפתרונות מסוימים היו ידועים אם מקור החום $f\,(x,t)$ הינו בעל צורה מיוחדת, בפרט, אם מקור החום היה גל סינוס או גל קוסינוס.

הרעיון של פורייה היה לבנות מודל של מקור חום מסובך כמו למשל קומבינציה ליניארית אינסופית של גלי סינוס וקוסינוס.

למרות המוטיבציה המקורית הייתה לפתור את משוואת החום , מאוחר יותר התברר כי אותה השיטה ניתנת ליישום למגוון רחב של בעיות מתמטיות ופיסיקאליות ושל אנליזה הרמונית.

ובנוסף, לטורי פורייה יש יישומים רבים בהנדסת חשמל ,ניתוח רעידות ,אקוסטיקה , אופטיקה ,עיבוד אותות ,עיבוד תמונה ,מכניקת קוונטים ,אקונומטריקה ,וכו'.

<u>רקע מתמטי של טורי פורייה [5]</u>

נסמן ב- T את המעגל שהוא הקו הממשי $\bmod 2\pi$ ז"א אם $\theta \in \mathrm{T}$ אזי $\theta + 2\pi \equiv \theta$,

לכן אפשר לכתוב אותו כ- $\mathrm{T} = \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$.

<u>הגדרה 3.1 :</u> *עבור פונקציה אינטגרבילית כלשהי $f \ : \mathrm{T} \to \mathbb{C}$, נגדיר את המקדמים של פורייה באופן הבא:* $\hat{f}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{T}} f(t)\exp(-irt)dt$. *כאשר* $r \in \mathbb{Z}$.

<u>הגדרה 3.2 :</u> *פונקציה $f \ : \mathrm{T} \to \mathbb{C}$ נקראת רציפה למקוטעין אם יש לה לכל היותר מספר סופי של נקודות אי-רציפות.*

נסמן את E מרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין המוגדרות על המעגל T, המקבלים ערכים ב- $\mathbb{C}$.

כל פונקציה $f \in E$ ניתן להציג בצורה: $f = u + iv$ כאשר u ו- v הן פונקציות ממשיות ורציפות למקוטעין ב- T, הפונקציה u נקראת החלק הממשי של f ורושמים אותה $u = \mathrm{Re}(f)$ והפונקציה v נקראת החלק המדומה של f ורושמים $v = \mathrm{Im}(f)$.

<u>הגדרה 3.3:</u> *המכפלה הפנימית של $f, g \in E$ מוגדרת ע"י* $(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)^{*}dt$

כאשר z^{*} הוא הצמוד הקומפלקסי של z.

<u>הגדרה 3.4:</u> *הנורמה שנובעת מהמכפלה הפנימית ב- E היא:*

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

הגדרה 3.5: *יהי V מרחב הילברט (Hilbert) (ז"א מרחב לינארי) עם מכפלה פנימית $\langle u,v\rangle$,*

לכל $u,v\in V$, ונורמה $\|u\|=\langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}}$. סדרה $\{e_n\}\subset V$ נקראת אורתונורמלית אם

$\delta_{km}=\langle e_k,e_m\rangle$ לכל $m,k\in\mathbb{N}$.

הגדרה 3.6: *תהי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה אורתונורמלית במרחב הילברט V. $\{e_n\}$ נקראת מערכת*

סגורה אם לכל $u\in V$ מתקיים $\lim_{m\to\infty}\left\|u-\sum_{n=1}^{m}\langle u,e_n\rangle e_n\right\|=0$.

הגדרה 3.7: *$E(x)=\cos x+i\sin x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. העתקה זו שמעתיקה כל מספר ממשי*

לנקודה על מעגל היחידה במישור המרוכב.

מהגדרה 3.7 מסתבר שהפונקציה $E(x)$ הינה למעשה e^{ix}. ובכלל ש-

$e^{irx}=\cos rx+i\sin rx$ בעזרת אקספוננטים מרוכבים e^{irx} $r\in\mathbb{R}$ אפשר ליצור מרחב

פונקציות טריגונומטריות הכולל פונקציות ממשיים ומרוכבים, השימוש באקספוננטים נוח

יותר לחישובים ואז אפשר להשתמש בזהות: $\forall m.n\in\mathbb{Z}$

$$\int_0^{2\pi}e^{inx}e^{-imx}dx=\begin{cases}2\pi & n=m\\ 0 & \mathrm{n}\neq\mathrm{m}\end{cases}.$$

בניית קירוב לפונקציות באמצעות פולינומים טריגונומטריים

הגדרה 3.8: *הטור $\sum_{r=-\infty}^{\infty}\hat{f}(r)e^{irt}$ נקרא טור פורייה המתאים לפונקציה $f(t)\in E$. עבור כל*

$n\in\mathbb{N}$ ניתן לחשב את מקדמי פורייה ולמצוא את סדרת הסכום החלקיים

$S_n(f,t)=\sum_{r=-n}^{n}\hat{f}(r)e^{irt}$.

מכיוון ש- $e^{irx}=\cos rx+i\sin rx$ זהו פולינום טריגונומטרי שמטרתו לקרב את הפונקציה

$f(t)$ בעזרת צירוף לינארי של $\{1,e^{it},e^{-it},\cdots,e^{int},e^{-int}\}$.

בעקבות ההגדרות לעיל נשאלת השאלות הבאות :

<u>שאלה 3.9:</u> *האם ערכי הפולינום $S_n(f,t)$ מתקרבים אל הפונקציה המקורית $f(t)$ כאשר מגדילים את n ? כלומר לכל $t \in \mathrm{T}$ האם מתקיימת ההתכנסות נקודתית $\lim_{n\to\infty} S_n(f,t) = f(t)$?*

ניסוח אחר לשאלה 3.9: האם עבור כל $t \in \mathrm{T}$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים $N(t,\varepsilon)$ כך שלכל $n > N(t,\varepsilon)$ מתקיים $\left|S_n(f,t) - f(t)\right| < \varepsilon$?

<u>שאלה 3.10:</u> *האם לכל פונקציה רציפה מעל T, מקדמי פורייה הם ייחודיים? ז"א האם עבור כל שתי פונקציות רציפות $f, g : \mathrm{T} \to \mathbb{C}$ אשר מקיימות $\hat{f}(r) = \hat{g}(r)$ לכל $r \in \mathbb{Z}$ מתקיים ש- $f = g$.* (התשובה בהמשך).

לגבי שאלה 3.9 פורייה טען שניתן לעשות זאת עבור כל פונקציה שערכיה מוגדרים באינטרוול סגור .אבל אחר כך הסתבר שהוא טעה בעבודתו ואז התחילו לחקור בכדי לגלות מה התנאים שהפונקציה צריכה לקיים בכדי שניתן למצוא לה קירוב בעזרת פולינום טריגונומטרי?.

פריצת הדרך החשובה הינה לזכותם של פייר (Fejér), דיריכלה (Dirichlet), דיני(Dini) ואחרים .

דיריכלה היה הראשון שניסה להגדיר את התנאים האלה באופן מדויק [5]:

<u>משפט דיריכלה</u> : *אם פונקציה היא חסומה באינטרוול $[-\pi,\pi]$, ובעלת מספר סופי של נקודות אי רציפות ,ומספר סופי של נקודות מקסימום ומינימום ,אזי טור פורייה של הפונקציה יתכנס לערכי הפונקציה בכל נקודות הרציפות שלה ,ובנקודות אי הרציפות, הוא יתכנס נקודתית לממוצע החשבוני בין הגבולות של ערכי הפונקציה מימין ומשמאל של נקודת אי הרציפות.*

בשנת 1873 המתמטיקאי ריימונד (Reymond), הצליח לבנות פונקציה רציפה ,שאינה מקיימת את התנאים הנוספים שהציב דיריכלה ,שטור פורייה שלה אינו מתכנס בנקודה מסוימת לערך הפונקציה ,ובכך הראה שטענתו של פורייה אינה נכונה .לגבי שאלה 3.9

ריימונד הראה שלא בכל מקרה יש התכנסות של הסכומים החלקיים של טור פורייה אל הפונקציה [4].

המתמטיקאי פייר גילה שסדרת הממוצעים של הסכומים החלקיים של סדרת פורייה יכולה להיות קירוב טוב יותר לפונקציה רציפה .פייר השתמש בתכונה של סדרות מספרים שהייתה ידועה עוד מימי אוילר (Euler) ונחקרה באופן מעמיק יותר על ידי צ'זארו (Cesaro) :
מסתבר שקיימות סדרות מספרים שאינן מתכנסות אך סדרת הממוצעים החשבוני שלהם מתכנסת.

דוגמה לכך : אם נסתכל על הסדרה $a_n = (-1)^{n+1}$, נראה שאינה מתכנסת כי תת הסדרה של האיברים בעלי אינדקסים זוגיים מתכנסת ל- -1 לעומת זאת תת הסדרה של האיברים בעלי אינדקסים האי זוגיים מתכנסת ל-1.

אבל אם נסתכל על סדרת הממוצעים $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_n$, נראה כי מכיוון שסכום כל שני איברים סמוכים בסדרה a_n הוא אפס, אזי ניתן לכתוב את b_n כך :

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{אי זוגי } n \\ 0 & \text{זוגי } n \end{cases}$$

מכאן שכאשר n הולך וגדל סדרת הממוצעים מתכנסת לאפס.

<u>הגדרה 3.11 [5]:</u> *סדרת פייר היא סדרת הממוצעים של הסכומים החלקיים לסדרת פורייה כלומר :*

$$\sigma_n(f,t) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} S_n(f,t) = \sum_{r=-n}^{n} \frac{n+1-|r|}{n+1}\hat{f}(r)e^{irt}$$

נכתוב $e_n(t)=\frac{1}{2\pi}e^{\text{int}},(t\in \mathrm{T})$

משפט 3.12: *תהי* $f\in E$ *נגדיר* $g_0=\sum_{j=-n}^{n}(f,e_j)e_j$ *ו-* $g=\sum_{j=-n}^{n}\lambda_j e_j$ *כאשר*

$\lambda_j\in\mathbb{C}$ *עבור* $j\in\mathbb{Z}$ *מספרים נתונים אזי* $\sum_{j=-n}^{n}\left|(f,e_j)\right|^2\le\|f\|_2^2$ *וגם*

$$\|f-g\|_2\ge\|f-g_0\|_2=\left(\|f\|_2^2-\sum_{j=-n}^{n}\left|(f,e_j)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

השוויון $\|f-g\|_2=\|f-g_0\|_2$ *מתקבל אם ורק אם* $\lambda_j=(f,e_j)$.

הוכחה משפט 3.12:

$$\|f-g\|_2^2=\left(f-\sum_{j=-n}^{n}\lambda_j e_j\ ,\ f-\sum_{j=-n}^{n}\lambda_j e_j\right)$$

$$=(f,f)-\sum_{j=-n}^{n}\lambda_j(e_j,f)-\sum_{j=-n}^{n}\lambda_j^*(f,e_j)+\sum_{j=-n}^{n}\sum_{k=-n}^{n}\lambda_j\lambda_k^*\overbrace{(e_j,e_k)}^{\delta_{jk}}$$

$$=(f,f)-\sum_{j=-n}^{n}\lambda_j(f,e_j)^*-\sum_{j=-n}^{n}\lambda_j^*(f,e_j)+\sum_{j=-n}^{n}\lambda_j\lambda_j^*$$

$$=(f,f)-\sum_{j=-n}^{n}(f,e_j)(f,e_j)^*+\sum_{j=-n}^{n}\left(\lambda_j-(f,e_j)\right)\left(\lambda_j-(f,e_j)\right)^*$$

$$=(f,f)-\sum_{j=-n}^{n}\left|(f,e_j)\right|^2+\sum_{j=-n}^{n}\left|\lambda_j-(f,e_j)\right|^2$$

$$\ge(f,f)-\sum_{j=-n}^{n}\left|(f,e_j)\right|^2=\|f\|_2^2-\sum_{j=-n}^{n}\left|(f,e_j)\right|^2$$

באי- שוויון הנ"ל שוויון מתקבל אם ורק אם $[-n \le j \le n]$ $\lambda_j = (f, e_j)$. במקרה זה $g_0 = g$ ואזי נקבל:

$$\|f - g_0\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{j=-n}^{n} \left|(f, e_j)\right|^2 \Rightarrow \|f\|_2^2 - \sum_{j=-n}^{n} \left|(f, e_j)\right|^2 \ge 0 \quad \blacksquare$$

ממשפט 3.12 אפשר לקבל את :

<u>מסקנה 3.13:</u>

א. $\|S_n(f)\|_2^2 = \left\| \sum_{j=-n}^{n} (f, e_j) e_j \right\|_2^2 = \sum_{j=-n}^{n} \left|(f, e_j)\right|^2$.

ב. $\|S_n(f)\|_2 \le \|f\|_2$

<u>המשפט 3.14 (פייר)[5]:</u> *עבור פונקציה אינטגרבילית $f : \mathrm{T} \to \mathbb{C}$. אם f רציפה ב- t אזי $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f, t) \to f(t)$.*

ז"א טור פייר מתכנס נקודתית לפונקציה בנקודות הרציפות שלה.

<u>מסקנה ממשפט פייר</u>: אם נתונות שתי פונקציות רציפות $f, g : \mathrm{T} \to \mathbb{C}$ אשר מקיימות $\hat{f}(r) = \hat{g}(r)$ לכל $r \in \mathbb{Z}$. ניתן למצוא את מקדמי פורייה של פונקציות ההפרש $\hat{f}(r) - \hat{g}(r)$, מקדמים אלה יהיו כולם אפס מכיוון שלכל $r \in \mathbb{Z}$ מתקיים $\hat{f}(r) - \hat{g}(r) = 0$ מכאן נקבל ש- $S_k(f - g, t) \equiv 0$ ולכן $\sigma_n(f - g, t) \equiv 0$.

$f(t) - g(t) = \lim_{n\to\infty}\left(\sigma_n(f, t) - \sigma_n(g, t)\right) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(f - g, t) = 0$ ואז $f \equiv g$.

וזה נותן תשובה חיובית לשאלה 3.10.

משפט 3.15 [5] : *לכל פונקציה רציפה* $f:\mathrm{T}\to\mathbb{C}$*, ולכל* $\varepsilon>0$ *אזי קיים פולינום טריגונומטרי* $P_\varepsilon(t)$ *כך ש-* $\forall t\in\mathrm{T}$ *מתקיים* $\left|f(t)-P_\varepsilon(t)\right|\le\varepsilon$.

כלומר עבור פונקציה רציפה על פני T, ניתן לקרב אותה במ״ש ע״י פולינום טריגונומטרי.

משפט 3.16 [5]: *אם* $f:\mathrm{T}\to\mathbb{C}$ *רציפה, אזי* $\left\|f(t)-S_n(f)\right\|_2\to 0$ *כאשר* $n\to\infty$.

הוכחהמשפט 3.16 : במהלך ההוכחה נשתמש במשפטים 3.13 ו- 3.15

כי לכל פולינום טריגונומטרי טור פורייה שלו שווה לו

כאשר n **מספיק גדול מהסדר של** $P_\varepsilon(t)$

$$\left\|f(t)-S_n(f,t)\right\|_2\le\left\|f(t)-P_\varepsilon(t)\right\|_2+\underbrace{\left\|P_\varepsilon(t)-S_n(P_\varepsilon,t)\right\|_2}_{0}+\left\|S_n(P_\varepsilon,t)-S_n(f,t)\right\|_2$$

$$=\left\|f(t)-P_\varepsilon(t)\right\|_2+\left\|S_n(P_\varepsilon,t)-S_n(f,t)\right\|_2\le\left\|f(t)-P_\varepsilon(t)\right\|+\left\|S_n(P_\varepsilon-f,t)\right\|_2$$

מהמסקנות ממשפט 3.13

$$\le\varepsilon+\left\|P_\varepsilon(t)-f(t)\right\|_2\le\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

עכשיו נוכיח את האי שוויון האחרון :

$$\left\|P_\varepsilon(t)-f(t)\right\|_2=\left(\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left|f(t)-P_\varepsilon(t)\right|^2\right)dt\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\varepsilon^2\right)dt\right)^{\frac{1}{2}}=\varepsilon$$

ובסיכום קבלנו שכאשר $S_n(f,t)=\sum_{-n}^{n}\hat{f}(r)e^{irt}$ הסכומים החלקיים של טור פורייה.

אזי $\left\|f(t)-S_n(f)\right\|_2\to 0$ כאשר $n\to\infty$.

שוויון פרסבל (Parseval)(הזהות של פרסבל)[5]: *אם* f *רציפה* $f:\mathrm{T}\to\mathbb{C}$ *אזי*

$$\|f\|_2^2=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(r)\right|^2 \quad \text{כאשר} \quad \hat{f}(r)=\frac{1}{2\pi}\int f(t)e^{-irt}dt.$$

הוכחה : כמו במשפט 3.12 : כאשר $\lambda_j=\hat{f}(j)$. אנחנו נקבל :

$$\|f-S_n(f)\|_2^2=(f-S_n(f),f-S_n(f))=$$
$$=(f,f)-(S_n(f),f)-(S_n(f),f)^*+(S_n(f),S_n(f))$$
$$=(f,f)-\left(\sum_{j=-n}^{n}\hat{f}(j)e_j,f\right)-\left(\sum_{j=-n}^{n}\hat{f}(j)e_j,f\right)^*+\left(\sum_{j=-n}^{n}\hat{f}(j)e_j,\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e_k\right)$$

$$=(f,f)-\sum_{j=-n}^{n}\hat{f}(j)\hat{f}(j)^*-\cancel{\sum_{j=-n}^{n}\hat{f}(j)\hat{f}(j)^*}+\cancel{\sum_{j=-n}^{n}\hat{f}(j)\hat{f}(j)^*}$$

$$=\|f\|_2^2-\sum_{j=-n}^{n}\left|\hat{f}(j)\right|^2$$

על סמך משפט 3.15 : $\|f\|_2^2-\sum_{j=-n}^{n}\left|\hat{f}(j)\right|^2=\|f-S_n(f)\|_2^2\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

הערה: *אפשר להכליל שוויון פרסבל לפונקציות רציפות למקוטעין.*

עבור פונקציות ממשיות ניתן לתאר טור פורייה $\sum_{r=-\infty}^{\infty}\hat{f}(r)e^{irt} \sim f(t)$ בעזרת פונקציות סינוס וקוסינוס כדלקמן :

$$f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nt+b_n\sin nt]$$

<u>הגדרה 3.17 :</u> *תהי $f\in E$ טור פורייה המרוכב של f כאשר המקדמים $c_n=\hat{f}(n)$.*

$$e^{i0x}=1\quad e^{\text{int}}=\cos nt+i\sin nt,\quad \text{n=0,1,2,}\ldots\qquad e^{-\text{int}}=\cos nt-i\sin nt,\quad \text{n=0,1,2,}\ldots$$

לכל $n=0,1,2,\ldots$.

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-\text{int}}dt=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ntdt-i\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ntdt\right]=\frac{a_n-ib_n}{2}$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-\text{int}}dt=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ntdt+i\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ntdt\right]=\frac{a_n+ib_n}{2}$$

מכך נובע $a_n=c_n+c_{-n},\quad b_n=i(c_n-c_{-n})$

לכן

$$\begin{aligned}f(t)&\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}t=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_ne^{\text{int}}+c_{-n}e^{-\text{int}}\right]\\&=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n(\cos nt+i\sin nt)+c_{-n}(\cos nt-i\sin nt)\right]\\&=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(c_n+c_{-n})\cos nt+i(c_n+c_{-n})\sin nt\right]\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nt+b_n\sin nt\right]\end{aligned}$$

<u>הוכחת הבעיה האיזופרמטרית לפי הורוויץ' [5]:</u>

הרעיון של הורוויץ' הוא להתבונן בטורי פורייה של פונקציות הפרמטריזציה של העקום לפי הפרמטר אורך העקום s.

<u>משפט 3.18:</u> *לכל עקום סגור גזיר למקוטעין עם אורך L ושטח חסום A מתקיים האי שוויון האיזופרמטרי* $L^2 - 4\pi A \geq 0$.

השוויון מתקיים אם ורק אם A שטח מעגל.

<u>הוכחה משפט 3.18:</u>

יהיה הייצוג הפרמטרי של העקום נתון ע"י הפונקציות:

$$x = x(s), \ \ y = y(s) \qquad 0 \leq s \leq L$$

הרעיון של הורוויץ' היה לרשום את הפרמטריזציה לאורך העקום כך ש- $\sqrt{\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s)} = 1$ כאשר s הוא פרמטר אורך הקשת של העקום.

נראה איך מגיעים לפרמטריזציה זו:

אם ההצגה הפרמטרית של העקום היא $a \leq \tau \leq b$ $\quad x = x(\tau), \ \ y = y(\tau)$

אזי $s(\tau) = \int_a^\tau \sqrt{(\dot{x}(\tau))^2 + (\dot{y}(\tau))^2} d\tau$ ו- $\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau)} \geq 0$.

אם נבצע החלפת משתנים: $\tau(s)$ כך ש- $\begin{matrix} s = 0 \rightarrow \tau = a \\ s = L \rightarrow \tau = b \end{matrix}$ נקבל:

$\int_0^L \sqrt{\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s)} ds = L$ מכאן נראה שהפרמטריזציה לאורך העקום מקיימת $\sqrt{\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s)} = 1$.

$$x(s) = x(\tau(s)), y(s) = y(\tau(s)) \ , \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{d\tau}\frac{d\tau}{ds} \quad , \quad \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{ds}.$$

$$\dot{x}(\tau)=\dot{x}(s)\frac{ds}{d\tau}\qquad \dot{y}(\tau)=\dot{y}(s)\frac{ds}{d\tau}$$

$$\dot{x}^2(\tau)+\dot{y}^2(\tau)=\left(\dot{x}^2(s)+\dot{y}^2(s)\right)\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2=\left(\dot{x}^2(s)+\dot{y}^2(s)\right)\left(\dot{x}^2(\tau)+\dot{y}^2(\tau)\right)$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2(s)+\dot{y}^2(s)=1$$

קבלנו $0\le s\le L$ $\quad x(s),y(s)$ אם נבצע החלפת משתנים כך ש-

$$\frac{ds}{dt}=\left(\frac{L}{2\pi}\right)\quad,\quad s=\frac{Lt}{2\pi}\quad\Rightarrow\quad 0\le t\le 2\pi\qquad t=\left(\frac{s}{L}2\pi\right)$$ מזה נקבל

$\left(X(t),Y(t)\right)=\left(X(s(t)),Y(s(t))\right)$.

[1]

$$\dot{X}^2(t)+\dot{Y}^2(t)=\left(\dot{x}(s)\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\dot{y}(s)\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\dot{x}^2(s)+\dot{y}^2(s)\right)^2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2$$

לשם פשטות נסמן בחזרה $X(t)=x(t)$ ו- $Y(t)=y(t)$

אם נכתוב את טור פורייה לשתי המשוואות הפרמטריות של $(x(t),y(t))$ נקבל :

$$x(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+b_n\sin nt$$

$$y(t)\sim\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos nt+d_n\sin nt$$

התנאי להשתמש באינטגרציה בחלקים הוא שהפונקציות תהיינה רציפות ובעלות נגזרות רציפות למקוטעין.

נוסחת אינטגרציה בחלקים : $\int_a^b f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)|_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx$

אם נגזור את טור פורייה , נשתמש באינטגרציה בחלקים ונקבל :

$$x(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+b_n\sin nt$$

כאשר $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt$

a_n', b_n' הם המקדמים הנגזרות של x'.

$$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)dt = f(\pi) - f(-\pi) = 0$$

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos nt\, dt = \frac{1}{\pi}\left[\cos ntf(t)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt =$$

$$= \underbrace{\frac{\cos n\pi f(\pi) - \cos(-\pi n) f(-\pi)}{\pi}}_{=0} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt = nb_n$$

בגלל ש- $\cos x$ פונקציה מחזורית

$\cos(x) = \cos(-x)$

באותו אופן

$$b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos nt\, dt = \frac{1}{\pi}\left[\sin ntf(t)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt =$$

$$= \underbrace{\frac{\sin n\pi f(\pi) - \sin(-\pi n) f(-\pi)}{\pi}}_{=0} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt = -na_n$$

בגלל ש- $\sin x$ פונקציה מחזורית

$\sin(x) = \sin(-x)$

מכאן נקבל :

$$\dot{x}(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nt - a_n \sin nt)$$

$$\dot{y}(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n(d_n \cos nt - c_n \sin nt)$$

מכיוון ש- $\dot{x}^2+\dot{y}^2=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2$ אזי $\dot{x}$ ו- $\dot{y}\in L^2(\mathrm{T})$

נשתמש בשוויון פרסבל בכדי לבטא את L^2 ו- A באמצעות מקדמי פורייה.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t))dt=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2.\frac{2\pi}{\pi}=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2.2$$

ולכן לפי פרסבל

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2.2=\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\dot{x}^2+\dot{y}^2dt\right)=2\pi^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n{}^2+b_n{}^2+c_n{}^2+d_n{}^2)\right)$$

בכדי לחשב את A נשתמש במשפט גרין (Green).

הוא משפט באנליזה מתמטית המגדיר קשר בין אינטגרל קווי של פונקציה על עקום סגור ופשוט לבין האינטגרל הכפול על השטח החסום על ידי העקום.

<u>משפט גרין (Green)</u>: *יהי D תחום חסום בעל שפה Γ גזירה למקוטעין. יהיו $P(x,y)$ ו- $Q(x,y)$ פונקציות רציפות ב- $\bar{D}$, ועם נגזרות חלקיות מסדר ראשון רציפות ב- D.*

אזי $\oint_\Gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D(Q_x-P_y)dxdy$. ובמיוחד אם ניקח

$P=0$, $Q=x$ אז $Q_x-P_y=1$ *ולכן השטח שווה ל-* $A=\oint_\Gamma xdy$.

אם נשתמש בשוויון פרסבל מקבלים :

$$A=\oint_\Gamma xdy=\int_0^l f(t)g'(t)dt=(f,g')=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(a_nd_n-b_nc_n)$$

כלומר : $A=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(a_nd_n-b_nc_n)$.

נציב ב- $L^2-4\pi A$ ונקבל :

$$L^2-4\pi A=2\pi^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n{}^2+b_n{}^2+c_n{}^2+d_n{}^2)-2n(a_nd_n-b_nc_n)\right)$$
$$=2\pi^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}(na_n-d_n)^2+(nb_n+c_n)^2+(n^2-1)(c_n{}^2+d_n{}^2\right)\geq 0$$

הוכחנו את האי שוויון האיזופרמטרי לכל עקום גזיר למקוטעין.

השאלה : מתי נקבל שוויון?

מקרה 1 : עבור $n=1$ נקבל $b_1=-c_1 \quad a_1=d_1$

מקרה 2 : עבור כל n גדול המקדמים נעלמים $a_n=b_n=c_n=d_n=0$ כי עבור $n\geq 1$
נקבל $\mathrm{na}_n=d_n \quad nb_n=-c_n$ מכאן $c_n=d_n=0$ לכל $n>1$.

וכך גם עבור $n>1$, $\mathrm{a}_n=\frac{d_n}{n}=0$, $b_n=-\frac{c_n}{n}=0$.

נקבל ש- $$x(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos t+b_1\sin t$$ $$y(t)=\frac{c_0}{2}-b_1\cos t+a_1\sin t$$ הסכום הוא סופי לכן מתקיים השוויון

מכאן נובע שאפשר לרשום את משוואת העקום Γ כך :

$$\left(x-\frac{a_0}{2}\right)^2+\left(y-\frac{c_0}{2}\right)^2=\left(a_1\cos t+b_1\sin t\right)^2+\left(-b_1\cos t+a_1\sin t\right)^2=a_1{}^2+b_1{}^2$$

מה שמוכיח שהעקומים המישוריים היחידים הפותרים את בעיית דידו הם מעגלים בלבד.

פרק רביעי : יישומים והשלכות של הבעיה האיזופרמטרית

לבעיה האיזופרמטרית יש יישומים והשלכות שאפשר למצוא בהם שימושים מגוונים. בפרק הזה נדון בהשלכות של הבעיה האיזופרמטרית על מגוון משפטים ונושאים מתמטיים, ונתייחס לניתוח עתיק שמשתמש באי שיוויון האיזופרמטרי בנושא המבנה של חלת הדבש בכוורת הדבורים.

בעיה ראשונה לדיון בכיתה: השוואת שטח מעגל לשטח מצולע שווה היקף

משפט 4.1: *למעגל יש שטח הגדול משטח של כל מצולע בעל אותו היקף.*

ההוכחה המלאה של משפט 4.1 תבוא בהמשך, לשם פשטות נתייחס פה למקרה שהמצולע הוא מצולע משוכלל.

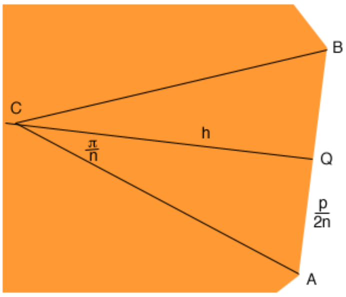
משפט 4.2 : *למעגל יש שטח הגדול משטח של כל מצולע משוכלל בעל אותו היקף.*

הוכחה משפט 4.1 : לצורך הוכחת משפט 4.2 נוכיח קודם את :

טענה 4.3 : $\tan x > x$ *לכל* $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

הוכחת טענה 4.3 **:** נסתכל על הפונקציה $f(x) = \tan x - x$, $f(0) = 0$. נחשב את הנגזרת של $f(x)$. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, עבור $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0$. מכאן $f(x)$ הינה מונוטונית עולה בקטע $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ואז $f(x) = \tan x - x > 0$ ■

הוכחת משפט 4.2:



נניח שיש לנו מעגל בעל רדיוס r והיקף p אזי : $p = 2\pi r$

ואזי השטח של העיגול : $S_c = \pi r^2$, מכאן נקבל ש- $S_c = \frac{p^2}{4\pi}$.

עבור מצולע משוכלל בעל היקף p ו- n צלעות.

קובץ זה נועד אך ורק לשימושם האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

נחבר את שני הקודקודים הסמוכים A,B עם מרכז המצולע C.

ניקח את Q נקודת האמצע של AB. מאחר ונתון מצולע משוכלל בעל n צלעות והיקף p

אזי אורך הצלע $AB=\frac{p}{n}$ ומכאן אורך הצלע $AQ=\frac{P}{2n}$. מאחר והמצולע משוכלל אזי

$\angle BCA=\frac{2\pi}{n}$ ברדיאנים. ומכאן נקבל ש- $\angle QCA=\frac{\pi}{n}$.

נניח שהמרחק בין C ל- Q הוא הגובה h במשולש שווה השוקיים BCA. אזי

$\frac{p}{2n}=h\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$, ואזי שטח המשולש BCA הוא אמצע הבסיס כפול הגובה ונקבל ש-

$\frac{p^2}{2n^2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$. המצולע מורכב מ- n משולשים ומכאן שטח המצולע הינו :

$S_p=\frac{p^2}{4n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$ עבור $n\geq 3$.

נשתמש בטענה 4.3 ונקבל :

$S_p=\frac{p^2}{4n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}\leq\frac{p^2}{4\cancel{n}\left(\frac{\pi}{\cancel{n}}\right)}=\frac{p^2}{4\pi}=S_c$ עבור $n\geq 3$.

ובכך הוכחנו את משפט 4.2.■

זינדורס הראה כי המצולעים המשוכללים בעלי אותו היקף השטח גדל כאשר מספר הצלעות גדל.

<u>שאלה:</u> מה קורה לשטח המצולעים בעלי אותו היקף $S_p = \dfrac{p^2}{4n\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}$ כאשר n גדל?

לצורך זה נשתמש בחשבון דיפרציאלי ואיטגרלי, ובכדי לחקור שאלה זאת. לכן נסתכל על

הפונקציה $f(x) = x\tan\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ כאשר $x \geq 3$

ע״י חקירת פונקציה נראה האם הפונקציה עולה או יורדת?

נחשב את הנגזרת:

$$f'(x) = \tan\left(\frac{\pi}{x}\right) + x \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} \cdot \left(\frac{-\pi}{x^2}\right) =$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{\pi}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} \geq \frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} = \frac{\pi}{x}\left(1 - \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}\right) \leq 0$$

על סמך טענה 4.3

מכאן הנגזרת שלילית לכן הפונקציה יורדת. וכמסקנה נקבל ששטח המצולעים בעלי אותו

היקף כאשר n גדל הוא גדול יותר. כלומר: $S_p(n) = \dfrac{p^2}{4n\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}$

בגלל ש- $n\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ קטן כאשר n גדל אזי $S_p(n)$ גדל כאשר מגדילים את מספר הצלעות n.

עכשיו נחשב את הגבול של הפונקציה $x\tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$ כאשר $x\to\infty$. נכתוב את הפונקציה

בצורה הבאה $x=\frac{1}{z}$ ואזי הפונקציה תהיה $\frac{\tan\pi z}{z}$.

נחשב את הגבול של $\frac{\tan\pi z}{z}$ כאשר $z\to 0$.

בגלל שהגבולות של המכנה והמונה שניהם שווים לאפס זה מאפשר לנו להשתמש

בכלל לופיטל (L'Hôpital) : $\lim_{z\to 0}\frac{\tan\pi z}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{\pi}{(\cos\pi z)^2}}{1}=\lim_{z\to 0}\frac{\pi}{(\underset{\downarrow 1}{\cos\pi z})^2}=\pi$.

במיוחד כאשר n מספר הצלעות שואף לאינסוף נקבל ששטח המצולעים שואף כמצופה

לשטח העיגול $S_p(n)\to\frac{p^2}{4\pi}=S_c$.

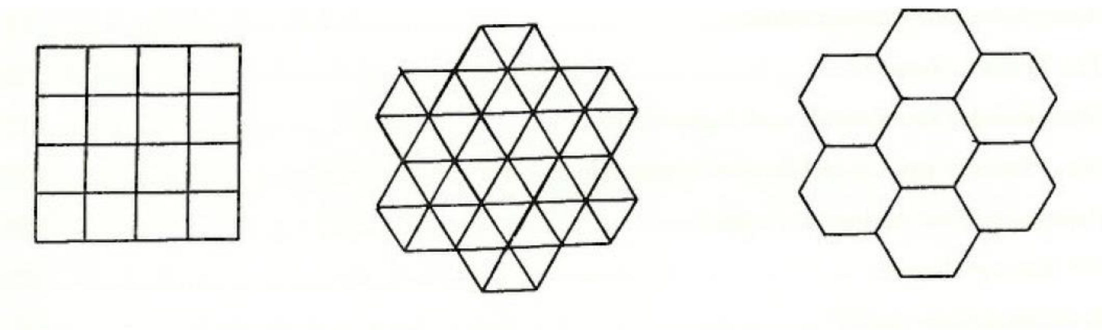
בסיכום הוכחנו למעלה את המשפט הבא:

<u>משפט 4.4 :</u> *שטח המצולעים המשוכללים בעלי אותו היקף עולה כפונקציה של מספר הצלעות ושואף לשטח העיגול בעל אותו היקף.*

בעית דיון שניה בכיתה : ניתוח המבנה המשושה של חלת הדבש שבכוורת הדבורים.

פפוס (100-200 לפני הספירה) היה אחד המתמטיקאים היוונים הקלאסים האחרונים שבאו בעקבות זינדורס (120-200 לפני הספירה). פפוס היה האיש המפורסם ביותר באותו עת שעסק בניתוח של מבנה משושה של חלת דבש בכוורת הדבורים[7].

טענה 4.5: *משולש שווה צלעות, ריבוע ומשושה הן שלוש הצורות היחידות לריצוף מישור.*



הוכחה טענה 4.5 : נניח שהמצולע המשוכלל הוא בעל n צלעות ($n \geq 3$). אזי נוכיח קודם שסכום הזוויות הפנימיות במצולע משוכלל בעל n צלעות הוא $180^{\circ}(n-2)$ מעלות ובפרט כל זווית פנימית שווה ל- $\frac{180^{\circ}(n-2)}{n}$.

ובאמת ניקח מצולע משוכלל בעל n צלעות, אזי ניתן לחבר קודקוד אחד עם כל הקודקודים פרט לשלושה שהם הסמוכים לו, בצורה כזו נוצרו לנו $(n-2)$ משלושים , סכום הזוויות בכל אחד הוא 180°. מכאן סכום הזוויות הפנימיות במצולע הוא $180^{\circ}(n-2)$, ואם המצולע משוכלל, כל הזוויות שוות אזי אפשר לחלק סכום הזוויות הפנימיות במספר הקודקודים ולקבל $\frac{180^{\circ}(n-2)}{n}$.■

בכדי שנקבל ריצוף צריך להתקיים : $m\cdot 360^\circ=$ $\frac{180(n-2)}{n}$ עבור m (מספר טבעי) שהוא

מספר המצולעים בכל קודקוד , מכאן נקבל $m=\frac{2n}{n-2}=2+\frac{4}{n-2}$.

עכשיו נוכיח ש- $\frac{4}{n-2}$ מספר שלם כאשר $n\geq 3$ אם ורק אם $n=3,4,6$.

נראה ש- $\frac{4}{n-2}$ מספר שלם כאשר $n=3,4,6$. זה מתקיים כאשר $n-2$ מחלק של המספר

4 בלי שארית ז"א שמחלקי 4 בלי שארית הם $1,2,4$.

ובכך כאשר $n-2=1$ נקבל $n=3$

וכאשר $n-2=2$ נקבל $n=4$

וכאשר $n-2=4$ נקבל $n=6$

מצד שני נראה את הכיוון ההפוך : אם נציב $n=3,4,6$ בביטוי $\frac{4}{n-2}$ נקבל מספר שלם. ■

להדגמה ניקח את המקרה $n=4$ אזי הזווית הפנימית שלו היא : $\frac{180(4-2)}{4}=90^\circ$.

ארבעה ריבועים מסודרים בכך שקודקוד אחד יוצר זווית שלמה של סביב פינה משותפת.

כי בכדי ליצור ריצוף פשוט, המצולעים צריכים שלושה מצולעים או יותר להיפגש בכל קודקוד

של כל מצולע כך שסביב הקודקוד המשותף ייווצר סכום זוויות של 360° בדיוק לא פחות

ולא יותר.

כך הדבר גם עם ששה משולשים שווה צלעות (שכל זווית מהם שווה ל- 60°)יכולים ליצור

זווית מלאה של 360°. וכך גם שלושה משושים משוכללים בעלי זווית פנימית של 120°.

ואזי מתעוררת השאלה: איזה משלושת המצולעים הנ"ל $n = 3, 4, 6$ הוא בעל השטח הגדול ביותר בהנחה ששלושתם בעלי אותו היקף.

מאחר והצורות הם איזופרמטרית, אזי נניח שההיקף של כל צורה הוא p ואזי:

$$T \to Triangle \quad S \to Square \quad H \to Hexegone$$

$S_T = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{3}\right)^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{36} p^2$	שטח המשולש שווה הצלעות
$S_S = \frac{p^2}{16}$	שטח הריבוע
$S_H = 6.\frac{1}{2}.\frac{p}{6}.\frac{p}{12} tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{24} p^2$	שטח המשושה המשוכלל

השווה ביניהם מראה ש- $S_T < S_S < S_H$.

אם נסתכל על הבעיה בצורה הדואלית כלומר יהיה נתון השטח אזי איזו מבין המצולעים (משולש שווה צלעות, ריבוע ומשושה) בעלי אותו היקף הוא בעל היקף מינימלי. התשובה היא המשושה המשוכלל. וזה מסביר שהדבורה בחרה בצורה שצריכה עבודה מינימלית בכדי לבנות אותה.

מה שמרתק ושהדהים את החוקרים מהימים של פפוס ועד היום הוא איך הדבורים הבינו אופטימזציה זו!!

בעית דיון שלישית בכיתה: הוכחת האי שוויון האיזופרמטרי $L^2 \geq 4\pi A$

נציג הוכחה יסודית של האי שוויון האיזופרמטרי $L^2 \geq 4\pi A$ כאשר L ההיקף של מצולע ו- A שטח המצולע עבור מצולעים כלליים. (פישוט של ההוכחה שניתנה ע"י *T. Bonnesen*) [8].

ושוויון מתקיים עבור מעגל.

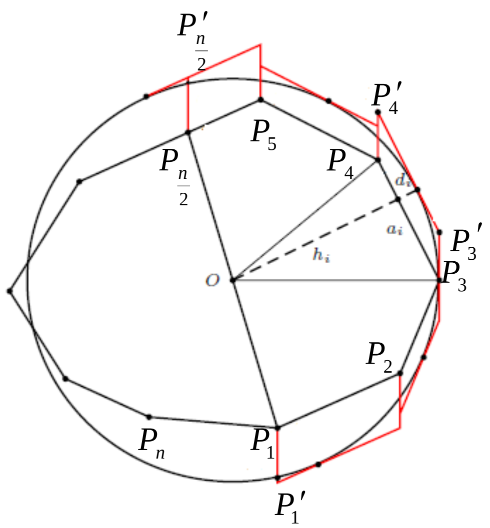
שאם נתון היקפו של המעגל L אזי $L = 2\pi R$ ושטחו של המעגל A אזי השוויון מתקיים

$$A = \pi R^2 = \pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}.$$

משפט 4.1 [6]: *בכל מצולע עם היקף* L *ושטח* A *מתקיים האי שוויון* $L^2 \geq 4\pi A$.

הוכחת משפט 4.1: נסתכל על מצולע כלשהו $P_1P_2P_3\cdots P_n$ בעל n צלעות וקודקודים.

מהקודקוד P_1 של המצולע אנחנו יכולים לצייר את הקטע $P_1P_{\frac{n}{2}}$ אשר תחלק את המצולע לשני מצולעים כך ש-



1. $P_1P_2 + P_2P_3 + \cdots + P_{\frac{n}{2}-1}P_{\frac{n}{2}} = \frac{L}{2}$ וגם :

2. השטח של המצולע $P_1P_2P_3\cdots PP_{\frac{n}{2}}$ הוא A_1

מקיים $A_1 \geq \frac{A}{2}$.

ניתן לנקודה O אמצע הקטע $P_1P_{\frac{n}{2}}$ ואת P_3 להיות קודקוד על $P_1P_2P_3\cdots PPP_{\frac{n}{2}}$ הרחוק

ביותר מ- O. נסמן $OP_3 = R$ ואז נצייר את המעגל (O,R).

הערה : בתמונה נניח שהקודקוד P_3 בעל מרחק מקסימלי מ- O, אבל קיים קודוקד בעל

מרחק מקסימלי מ- O לכן ניתן לקחת כל קודקוד אחר.

מהנקודות $P_1, P_{\frac{n}{2}}$ נצייר ניצבים ל- OP_3 אשר נפגשים על המעגל ב- $P_1', P_{\frac{n}{2}}'$ בהתאמה.

בגלל הסימטריה לחלק מהמעגל $P_1P_1'P_3P_{\frac{n}{2}}'P_{\frac{n}{2}}P_1$ יש שטח S ששווה למחצית שטח המעגל

ז״א $S = \frac{1}{2}\pi R^2$. מחוץ למצולע $P_1P_2P_3\cdots PPP_{\frac{n}{2}}$ נבנה מקביליות שנוגעות במעגל.

ניקח $P_1P_2 = a$ ו- h_1 גובה ב- $\triangle OP_1P_2$ ו- d_1 גובה ל- $\square P_1P_1'P_2'P_2$. אזי ניקח $P_3P_4 = a_i$ ו-

h_i גובה ב- $\triangle OP_3P_4$ ו- d_i גובה ל- $\square P_3P_3'P_4'P_4$, אזי $h_i + d_i = R$.

ומכאן $A_1 = \triangle OP_1P_2 + \cdots + \triangle OP_{\frac{n}{2}-1}P_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\sum_i a_i h_i$

אם נציין את A_2 להיות $A_2 = \square P_1P_1'P_2'P_2 + \cdots + \square P_{\frac{n}{2}-1}P'_{\frac{n}{2}-1}P_{\frac{n}{2}}{}'P_{\frac{n}{2}}$ אזי נקבל

$A_2 = \sum_i a_i d_i = \sum_i a_i (R-h_i) = R.\frac{L}{2} - 2A_1$ מאחר ו- $A_1 + A_2 \ge S$ אזי נקבל

וגם $R.\frac{L}{2} - A_1 \ge \frac{1}{2}\pi R^2$

$$\pi R^2 - LR + 2A_1 \le 0$$

$$\pi\left[R^2 - \frac{L}{\pi}R + \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2\right] - \frac{L^2}{4\pi} + 2A_1 \le 0$$

$$\pi\left(R - \frac{L}{2\pi}\right)^2 - \left(\frac{L^2}{4\pi} - 2A_1\right) \le 0$$

$$\frac{L^2}{4\pi} - 2A_1 \ge \pi\left(R - \frac{L}{2\pi}\right)^2$$

מאחר ו- $\pi\left(R - \frac{L}{2\pi}\right)^2 \ge 0$ וגם $A_1 \ge \frac{A}{2}$ אזי $\frac{L^2}{4\pi} \ge 2A_1$.

ומכאן נסיק ש- $L^2 \ge 4\pi.2A_1 \ge 4\pi A$. ■

העקום הסגור היחיד שיתקיים בו השוויון הוא המעגל, מזה נסיק כי העקומים הסגורים עם היקף קבוע אשר מכילים את השטח הגדול ביותר הם המעגלים.

סיכום ורפלקציה

עבודה זו עסקה בבעיה האיזופרמטרית של דידו ויישומים להוראה.
במהלך העבודה שכללה הוכחת משפטים מתמטיים נתקלתי בגישות שונות לתהליך ההוכחה, הן בדרך גיאומטרית והן באמצעות אנליזת פורייה שהם שני תחומים שבצורה שטחית לא נראה קשר הדוק ביניהם, וזה מחזק את האמרה "שלמשפט עמוק חייב להיות יותר מהוכחה אחת".
תוך כדי עריכת המחקר הזה התברר שיש צורך בשלבי ההוכחה השונים להבין מושגים חדשים ולהשתמש בהם בצורה נכונה, ובכדי להבין נושא מסוים התברר שיש גם צורך בקריאת והבנת פרק מתמטי אחר שיעזור בתהליך ההוכחה.
ראינו דוגמה להתפתחות ההיסטורית של תחומים מתמטיים – למשל אנליזת פורייה שמתעסק בטורי פורייה ושיש לה שימושים הן במתמטיקה והן בפיזיקה והנדסה.
בתהליך כתיבת העבודה היה תהליך של למידה שבו התגלה צורך בעבודה ממוקדת על חומר שבדרך כלל נלמד בתואר ראשון.
הייתה דרישה לקרוא פרקים מתחומים מתמטיים רבים, דרך הלמידה דרש לפעמים חקר, חיפוש מקורות ושאילת שאלות למנחה. וגם הרגשה של תסכול לכך שמה שמצאתי לא קשור ורלוונטי לעבודה.
תוך כדי אינטראקציה עם המנחה שלי במשך העבודה הזאת נחשפתי לאופן הראייה המתמטית ושיטת החשיבה שלו , זכיתי לתמיכה אישית ממנו אשר הנחה והדריך אותי לשנות את ההסתכלות והראייה שלי לנושא מתמטי חדש ולמתמטיקה בכלל ובמיוחד שמתמטיקה היא נושא מושלם שאין בתוכו גבולות.
בקשר למישור הלימודים, מצאתי פרקים הקשורים לעבודה שלי שאינם מצריכים רקע מתמטי עמוק, ושאפשר לפשט אותם שיכולים להוות חומר נספח לחשיבה מתמטית, חומר מאתגר ומעניין, חשיפה להיסטוריה והתפתחות מתמטיקה. להראות שבעיות קלאסיות במתמטיקה נפתרו במלואן אחרי אלפי שנים וזה מאפיין מתמטיקה.
נציין נקודה חשובה לדיון במהלך עריכת המחקר היא מדוע אסור להניח שקיים פתרון? זו הייתה נקודה פתוחה בהוכחתו של שטיינר והדבר יכול לגרום לטעות פתאלית. כי לפעמים אם מניחים שמשהו קיים ומנסים למצוא אותו אפשר להגיע לסתירה. אפשר לתת דוגמה נגדית למשל :

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n + \cdots$$

אם הסכום סופי אזי אפשר להראות ש- $S = -1$.

הינה ההוכחה :

$$S - 1 = 2(1 + 2 + 4 + \cdots)$$
$$S - 1 = 2S \Rightarrow S = -1$$

שלילה. כי הנחנו ש- S מספר קיים.

ביבליוגרפיה

1. T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 2, Clarendon Press, Oxford, 1921.

2. J. Steiner, *Einfache Beweise der isoperimetrischen Haupts¨atze*, J. Reine Angew. Math. 18 (1838) 281–296.

3. A. Hurwitz, *Sur quelques applications g´eom´etriques des s´eries de Fourier*, Annales Scientifiques del'E´cole Normale Supe´rieure 19 (1902) 357–408.

4. H. Eves, (1981). *Great Moments In Mathematics (After 1650)*. The `Mathematical Association of America. pp 52-62.

5. T.W. Körner, (1988). *Fourier Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.

6. T. Bonnesen, *Les Probl`emes des Isop´erim`etres et des Is´epiphanes*, Paris, authier-Villars 1929;pp. 59-61.

7. C. Bandle. *Isoperimetric Inequalities and Applications*. Marsh_eld, Mass. Pitman Pub. 1980.

8. Nikolas Dergiades, *An Elementary Proof of the Isoperimetric Inequality*, Forum Geometricorum, Volume 2 (2002) 129-130.

9. K. Weierstrass, *Mathematische Werke, vol. 7, Mayer&M¨uller, Berlin, 1927.*

10. F. Edler, *Vervollst¨andigung der Steinerschen elementargeometrischen Beweise f¨ur den Satz, daß derKreis gr¨osseren Fl¨acheninhalt besitzt, als jede andere ebene Figur gleich grossen Umfanges, Nachrichten von der K¨onigl. Gesellschaft der issenschaften und der Georg-Augusts-Universit¨at zu G¨ottingen* (1882)73–80.

11. http://www.google.co.il/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&ved=0CCsQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.maa.org%2Fsites%2Fdefault%2Ffiles%2Fpdf%2Fupload_library%2F22%2FFord%2Fblasjo526.pdf&ei=pPAGUsuqCsXsO7uegLAJ&usg=AFQjCNFMQJSXhILtQoRoIsDheoKHXUDl1Q&bvm=bv.50500085,d.ZWU