



"תוכנית רוטשילד-ויצמן למצוינות בהוראת המדעים"  
במיסונה של קרן קיסריה אדמונד בנימין דה רוטשילד

# בעיית SAT

## ואלגוריתמים לפתרונה

מגישות: נעמה טל

נילי לוריא (גלבוע)

מנחה: פרופ' מרדכי בן-ארי

חשוון תשע"ד

אוקטובר 2013

## תוכן עניינים

3	מבוא
4	בעיית SAT
4	תרגום בעיה לשפה לוגית
5	מושגי יסוד
7	אלגוריתמים לפתרון בעיית SAT
7	DPLL (Davis , Putnam , Logemann , Loveland)
8	DPLL - תרשים זרימה
9	הדגמה של אלגוריתם ה-DPLL - בעיית "שובך היונים"
14	CDCL - Conflict Directed Clause Learning
14	למידת פסוקיות במקרה של קונפליקט באלגוריתם CDCL
15	תוספת יעילות ל"פסוקיות הנלמדות" - שימוש ב-UIP
16	הדגמת האלגוריתם CDCL - דוגמת MLM
20	NCB - Non Chronological Backtracking
23	יצירת דוגמאות
28	סיכום ומסקנות

---

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

## מבוא

עבודה זו היא סיכום של פרויקט גמר במסגרת תכנית "רוטשילד ויצמן למצוינות בהוראת המדעים" בתחום המתמטיקה ומדעי המחשב.

עבודה זו עוסקת בבעיית SAT ובאלגוריתמים לפתרונה.

במסגרת החלק התיאורטי של העבודה נסביר מהי בעיית SAT, מדוע היא מורכבת לפתרון, ונציג שלושה אלגוריתמים שונים לפתרון בעיות מסוג זה.

האלגוריתמים השונים נבדלים זה מזה, באופן בו הם מבצעים את החיפוש אחר פתרון לבעיה, כאשר מתגלה קונפליקט<sup>1</sup> במהלך החיפוש.

בעבודה זו נציג כיצד פועל כל אחד מהאלגוריתמים, ומהם המאפיינים המיוחדים של כל אחד מהם.

בהמשך העבודה, מוצג תהליך בניית דוגמאות נוספות על אלו הקיימות כיום. חלק זה הוא החלק המעשי של עבודת הגמר, ובו בנינו דוגמאות שיכולות לשמש סטודנטים ואנשי הוראת מדעי המחשב, לטובת לימוד והמחשת האלגוריתמים לפתרון בעיית SAT.

---

<sup>1</sup> מושג זה מוסבר בהרחבה בפרק העוסק בבעיית SAT

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

## בעיית SAT

בעיית SAT היא בעיה לוגית המיוצגת על ידי נוסחה שיש לבדוק האם היא פתירה או לא, ואם כן מהו הפתרון.

בעיות אלו, נפוצות ומוכרות במגוון תחומי החיים, למשל, סידור מערכת שעות בבית ספר הוא בעיה, המכילה מספר רב של אילוצים:

מורה לא יכול ללמד בשתי כיתות במקביל. שני מורים לא יכולים ללמד באותה כיתה במקביל. מורה מסוים לא עובד ביום מסוים בשבוע. מספר השעות שמורה צריך ללמד מוגבל, ועוד אילוצים נוספים. דוגמא נוספת, מערכת הפעלה של מחשב צריכה לדאוג לכך שתוכנות מסוימות לא ירוצו במקביל, בעוד שתוכנות אחרות כן תפעלנה במקביל, לסדר בסדר קדימויות תהליכים שונים ועוד.

בעיית SAT נוספת היא בעיית צביעת המפות, שהיא בעיה מתחום תורת הגרפים, העוסקת בשאלה כיצד ניתן לצבוע גרף בעל  $n$  קודקודים בארבעה צבעים בלבד, כך שכל קודקוד ייצבע בצבע שונה מכל הקודקודים המקושרים אליו באופן ישיר.

כל אלו הינם אילוצים שיש לספק, והם לעיתים סותרים זה את זה. לפיכך, לא לכל בעיית SAT קיים פתרון, וככל שמספר האילוצים והתנאים גדל, מציאת פתרון או הכרעה אם קיים פתרון, הופכים לבעיה מסובכת, שפתרונה עשוי לקחת זמן רב.

בעיית SAT משתייכת לקבוצת בעיות במתמטיקה/מדעי המחשב הנקראת NP-Complete שפירושה - בעיות שלא ידוע אם הן ניתנות לפיתרון כללי בזמן סביר (מניחים שלא). משמעות הדבר היא, שמספר המהלכים הדרוש למציאת פתרון או להכרעה כי לא קיים פתרון הוא מעריכי, ותלוי במספר האילוצים והמשתנים. באופן כזה, כאשר קיימים אילוצים ומשתנים רבים, הזמן הדרוש למציאת פתרון עלול להיות לא ריאלי. עם זאת, קיימים אלגוריתמים שהם יעילים עבור בעיות שימושיות מסוימות. מאידך, קיימות בעיות שעבורן האלגוריתמים הללו לא יעילים.

### תרגום בעיה לשפה לוגית

כמעט כל בעיה הכוללת אילוצים, ניתנת ל"תרגום" לשפה לוגית, בעזרת משתנים בוליאניים ואופרטורים בינאריים. לדוגמא: "נתרגם" את התנאי - מורה 1 ומורה 2 לא יכולים ללמד בכיתה א' באותה השעה. נגדיר משתנה בעל שני אינדקסים,  $t_{i,j}$ , כך ש-  $i$  מייצג את המורה ו-  $j$  את הכיתה. נוכל לרשום את התנאי שלעיל באופן הבא:  $\sim (t_{11} \wedge t_{21})$ .

באופן זה, נוכל להגדיר את כל התנאים, משום שבעזרת שלושת האופרטורים הבינאריים AND, OR ו-NOT ניתן לבטא את כל שאר האופרטורים הבינאריים.

---

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

## מושגי יסוד

בשפה הלוגית נעשה שימוש במושגים הבאים :

- אטום - המשתנה הבסיסי, בדוגמא שלעיל  $t_{11}$  הוא אטום.
- ליטרל - אטום או שלילתו, לדוגמא:  $t_{21} \sim$  הוא ליטרל שהוא שלילה של האטום  $t_{21}$ .
- פסוקית - אוסף של ליטרלים (משתנים ושלילות משתנים) המחוברים ביניהם על ידי פעולות "או" (דיסקיונציה).
- נוסחה - אוסף של פסוקיות המחוברות ביניהן ע"י פעולות "וגם" (קוניונקציה).
- Conjunctive Normal Form – CNF - הצורה הנורמלית הקוניוקטיבית - הינו ביטוי המורכב מאוסף "פסוקיות" המחוברות ביניהן על ידי פעולות "וגם" (קוניונקציה).
- דוגמא: נוסחת CNF במשתנים  $x_1, \dots, x_n$  בעלת צורה כגון:

$$(x_1 \vee \neg x_3 \vee x_5) \wedge (\neg x_2 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \neg x_5)$$

יתרון משמעותי של השימוש בצורת CNF הוא שכאשר ליטרל אחד מקבל ערך true בפסוקית, הרי שהפסוקית כולה מתקיימת, כלומר מקבלת ערך true ואין צורך להמשיך ולבדוק אותה תחת השמה זו.

בנוסף, ישנו יתרון לשימוש בייצוג אחיד לבעיות מסוג מסוים, כדי לאפשר לכל העוסקים בסוג זה של בעיות "לדבר" באותה שפה לוגית.

- Branching - כל משתנה יכול לקבל ערך 1 או 0 (true or false). הבחירה השרירותית בערך שאותו יקבל המשתנה, להבדיל מהשמה שנכפית על משתנה מסוים במטרה לספק את הנוסחה, נקראת branching. לאחר שמתבצעת השמה בשלב branching מחושבות התוצאות הלוגיות הנובעות מהשמה זו.

- Unit clause - פסוקית שבה כל הליטרלים פרט לאחד קיבלו ערך false. מצב זה מחייב השמה של ערך true בליטרל האחרון (אחרת אי אפשר יהיה לספק את הפסוקית, וממנה גם את כל הנוסחה). השמה זו נקראת implication.

- Conflict - מצב בו כל הליטרלים בפסוקית קיבלו ערך false. במצב זה אי אפשר לספק את הפסוקית. על מנת למצוא פתרון לנוסחה, כל הפסוקיות חייבות לקבל ערך true ולכן אם פסוקית אחת אינה מקבלת ערך true, אז אין פתרון לנוסחה כולה תחת השמה זו. במצב כזה, יש צורך לבדוק האם קיימת השמה אחרת שתחתיה כן ניתן לספק את הפסוקית, ואת הנוסחה כולה.

דוגמא: בנוסחה  $(x_1 \vee x_2) \wedge (\dots)$  תחת ההשמה  $\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix}$  תקבל הפסוקית הראשונה ערך

false, ולכן אין טעם לבדוק את שאר הפסוקיות כי בכל מקרה לא יהיה פתרון לנוסחה. זהו מצב של conflict. כאשר מתקבל מצב כזה, יש לבדוק השמות אחרות.

---

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

- Backtrack – כאשר מתגלה Conflict, האלגוריתם משנה את ערכו של האטום שבו הושם ערך בשלב ה- branching האחרון שביצע, ומוחק את כל ההשמות שנבעו משלב זה. האלגוריתם מבצע את החזרה לשלב ה- branching האחרון אם הדבר אפשרי, כלומר, אם עדיין לא הושמו עבור אותו אטום גם ערך true וגם ערך false. במקרה שכבר הושמו באטום שנבחר בשלב ה- branching שתי ההשמות, ובכל זאת התקבל קונפליקט, חוזר האלגוריתם לשלב branching קודם. במקרה שהאלגוריתם הגיע עד לרמה הראשונה בעץ ההחלטה, כלומר לשלב ה- branching הראשון, וכבר הציב באטום את שתי האפשרויות, הנוסחה מוכרזת כ- unsatisfiable. הערה: התיאור הנ"ל מתייחס ל- Chronological Backtracking, בו תמיד חוזר האלגוריתם לשלב ה- branching האחרון. בהמשך, נראה כי קיים אלגוריתם שמבצע Non Chronological Backtracking וחוזר לשלב branching מוקדם יותר בעץ החיפוש.

---

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

## SAT אלגוריתמים לפתרון בעיית SAT

### DPLL (Davis , Putnam , Logemann , Loveland)

רוב אלגוריתמי החיפוש לבעיית SAT מבוססים על אלגוריתם ה-DPLL שפותח ע"י Davis, Putnam, Logemann and Loveland ופורסם בשנת 1962 .

השלבים העיקריים של האלגוריתם הם :

כל עוד לא הושמו ערכים עבור כל האטומים וגם אין קונפליקט

בחר השמה עבור אטום. /\*שלב החלטה\*/

מחק באופן זמני, פסוקיות שבהן אחד הליטרלים קיבל ערך true.

כל עוד יש unit clause :

בצע implication. /\*השמות שנכפות על ידי unit clauses\*/

אם יש קונפליקט :

אם נבדקו כל המצבים האפשריים

/\* (אם כל אחד מהאטומים כבר קיבל גם ערך true וגם ערך false בשלב החלטה ולא כחלק

מ-implication)\*/

החזר unsat

אחרת backtrack

/\*שנה את ערכו של האטום האחרון שקיבל השמה בשלב Branching ועדיין לא נבדקו שני

ענפיו.\*/

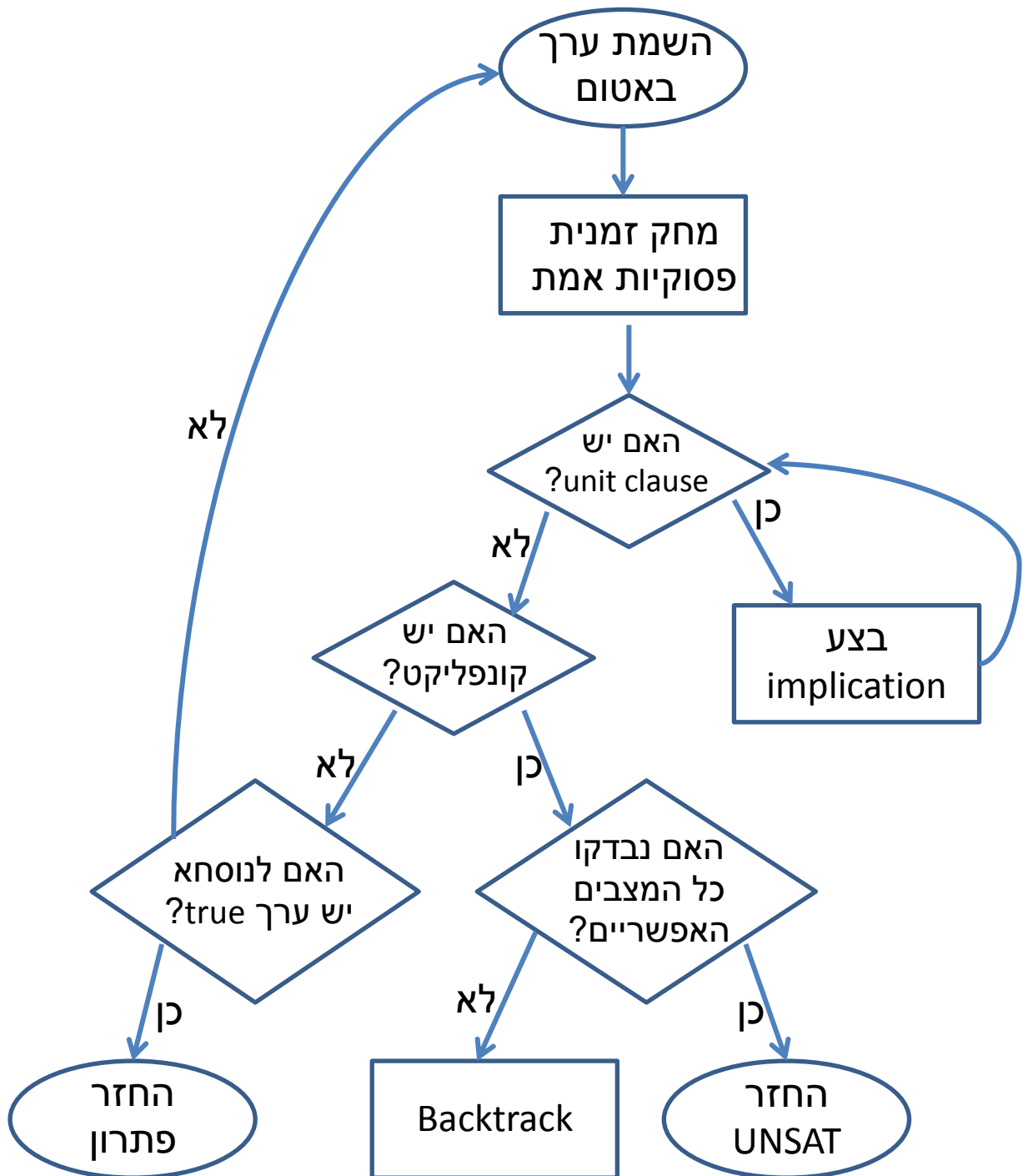
אחרת

אם הושמו ערכים בכל האטומים

החזר פיתרון.

---

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.



כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

## הדגמה של אלגוריתם ה-DPLL - בעיית "שובך היונים"

עקרון שובך היונים הוא עיקרון מתמטי הקובע כי אם יש  $m$  תאים בשובך שלתוכם יש להכניס  $m+1$  יונים, קיים בהכרח תא אחד שבו תימצאנה לפחות שתי יונים. עיקרון זה ככל הנראה נוסח לראשונה באופן פורמאלי על ידי יוהאן דיריכלה בשנת 1834 ומכאן שמו הנוסף עקרון דיריכלה. על פי עקרון זה, בהינתן הבעיה: "האם ניתן להכניס 3 יונים לתוך 2 שובכים, כך שבכל שובך תהיה בדיוק יונה אחת?", ברור שהיא בעיה שאינה פתירה כלומר UNSAT.

נדגים כיצד עובד אלגוריתם DPLL על הבעיה הזאת:

נגדיר אטום באופן הבא:  $P_{i,j}$  הוא אטום שבו  $i$  מייצג את "מספר" היונה, ו- $j$  מייצג את מספר השובך.

(כל תנאי שצריך להתקיים מיוצג ע"י פסוקית אחת או יותר.)

התנאי הראשון שצריך להתקיים הוא, "כל יונה נמצאת בשובך כלשהו".

$[p11, p12], [p21, p22], [p31, p32],$

הסבר: הפסוקית  $[p21, p22]$  פירושה שיונה מספר 2 נמצאת בשובך 1 או בשובך 2.

הפסיקים שבתוך כל פסוקית, שקולים לאופרטור "או" שמיוצג בדרך כלל על ידי הסימן  $\vee$ .

הפסיקים שבין הפסוקיות, שקולים לאופרטור "וגם" שמיוצג על ידי הסימן  $\wedge$

תנאי נוסף הוא: "בכל שובך, נמצאת יונה אחת לכל היותר". תנאי זה מיוצג ע"י הפסוקיות הבאות:

$[\sim p11, \sim p21], [\sim p11, \sim p31], [\sim p21, \sim p31]$

$[\sim p12, \sim p22], [\sim p12, \sim p32], [\sim p22, \sim p32]$

על פי כללי דה מורגן מתקיים:  $[\sim p11, \sim p31] \equiv [p11 \wedge p31]$

כלומר הפסוקית שלעיל משמעותה כי יונים מספר 3 ו-1 לא נמצאות שתייהן בשובך מספר 1.

---

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

בסך הכל קיימים 6 אטומים ו-9 פסוקיות לבדיקה :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{clause 1} & \text{clause 2} & \text{clause 3} \\
 [p11, p12], & [p21, p22], & [p31, p32], \\
 \\
 \text{clause 4} & \text{clause 5} & \text{clause 6} \\
 [\sim p11, \sim p21], & [\sim p11, \sim p31], & [\sim p21, \sim p31], \\
 \\
 \text{clause 7} & \text{clause 8} & \text{clause 9} \\
 [\sim p12, \sim p22], & [\sim p12, \sim p32], & [\sim p22, \sim p32]
 \end{array}$$

אוסף הפסוקיות הללו מרכיבות את נוסחת ה-CNF אותה יש לספק, על מנת למצוא פתרון לבעיה. מכיוון שיש צורך לענות על כל אילוצי הבעיה, ברור כי יש לספק את כל הפסוקיות בנוסחה ולמצוא הצבה שתגרום לנוסחה לקבל ערך true כדי למצוא פתרון לבעיה.

נדגים כיצד פועל האלגוריתם: בהשמה הראשונה, רמת החלטה מספר 1, המחשב בוחר להציב false באטום הראשון שמופיע בנוסחה, כלומר,  $p11=0$ . מצב הפסוקיות לאחר השמה זו הוא:

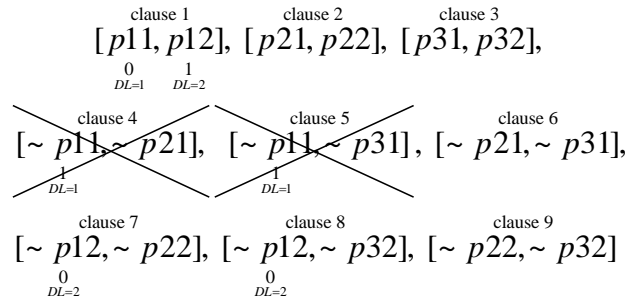
$$\begin{array}{ccc}
 \text{clause 1} & \text{clause 2} & \text{clause 3} \\
 [p11, p12], & [p21, p22], & [p31, p32], \\
 \begin{array}{c} 0 \\ DL=1 \end{array} \\
 \text{clause 4} & \text{clause 5} & \text{clause 6} \\
 [\sim p11, \sim p21], & [\sim p11, \sim p31], & [\sim p21, \sim p31], \\
 \begin{array}{c} 1 \\ DL=1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ DL=1 \end{array} \\
 \text{clause 7} & \text{clause 8} & \text{clause 9} \\
 [\sim p12, \sim p22], & [\sim p12, \sim p32], & [\sim p22, \sim p32]
 \end{array}$$

כתוצאה מההשמה הנ"ל, ימחקו (זמנית) פסוקיות 4 ו-5, שהרי כעת יש להן ערך true, ולכן אין צורך לבדוק את שאר הליטרלים בהן. המצב המתקבל יהיה:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{clause 1} & \text{clause 2} & \text{clause 3} \\
 [p11, p12], & [p21, p22], & [p31, p32], \\
 \begin{array}{c} 0 \\ DL=1 \end{array} \\
 \text{clause 4} & \text{clause 5} & \text{clause 6} \\
 [\sim p11, \sim p21], & [\sim p11, \sim p31], & [\sim p21, \sim p31], \\
 \begin{array}{c} 1 \\ DL=1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ DL=1 \end{array} \\
 \text{clause 7} & \text{clause 8} & \text{clause 9} \\
 [\sim p12, \sim p22], & [\sim p12, \sim p32], & [\sim p22, \sim p32]
 \end{array}$$

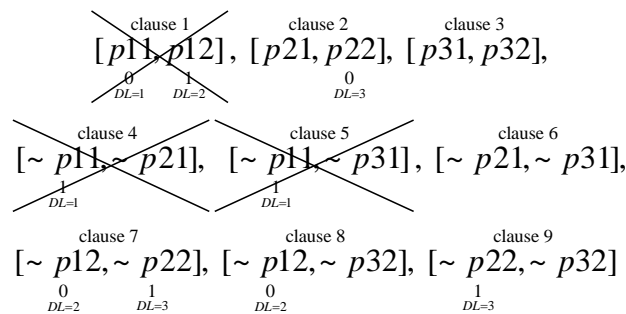
כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

לאחר ההשמה, נוצרו "unit clauses", פסוקיות שכל ההשמות בהן false פרט לאחת, לכן חייבים להציב ערך true בליטרל שנותר. בדוגמא שלעיל, יוצב ערך true בליטרל P12. השמה זו, שנובעת מה unit clause היא השלב הבא ולכן DL=2

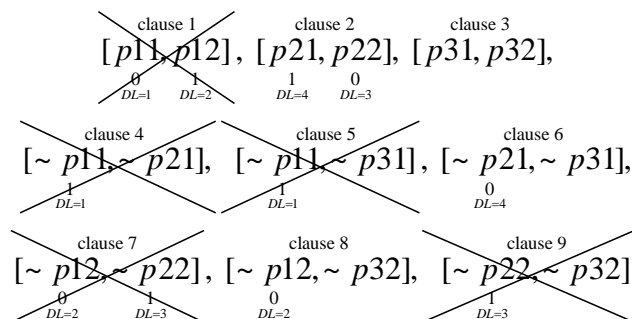


במצב הנוכחי, עדיין לא קיבלנו קונפליקט, לכן נמשיך ונבדוק אם יש עוד אפשרויות שנובעות מההשמה הראשונית. נבדוק אם יש לנו unit clauses נוספים. האלגוריתם מתחיל לבדוק מהפסוקית הראשונה והלאה, ומוצא שהפסוקית השביעית הפכה ל-unit clause ולכן p22 יקבל ערך false.

המצב המתקבל הוא:

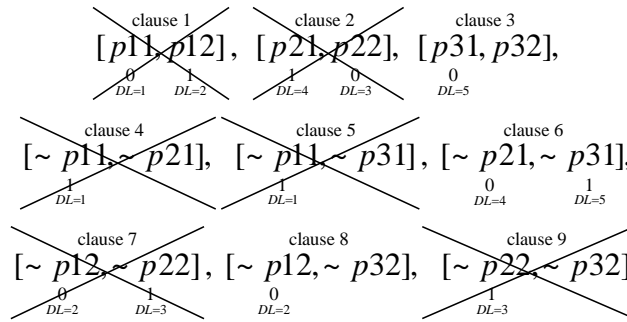


עדיין אין קונפליקט, אבל יש unit clause בפסוקית 2, מה שמחייב השמת true באטום p21:



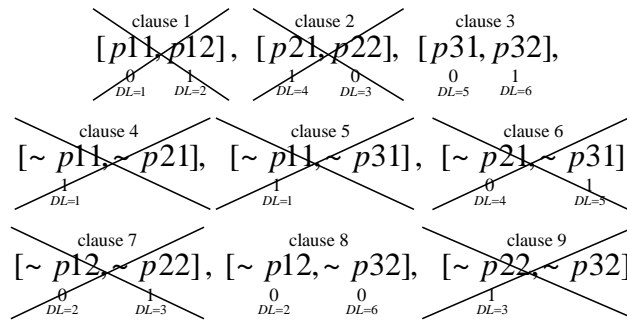
גם כאן עדיין אין קונפליקט, אבל יש unit clause חדש ולכן נציב באטום p31 ערך false:

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.



ההצבה לא גרמה לקונפליקט, אך נוצר unit clause חדש בפסוקית השלישית, ולכן נציב באטום p32 ערך true.

המצב המתקבל הוא :



כעת נוצר קונפליקט. פסוקית מספר 8 היא false, כלומר, ערך הנוסחה כולה הוא false. משמעות הדבר היא לא שאין פתרון, אלא, אין פתרון תחת ההצבה הזאת.

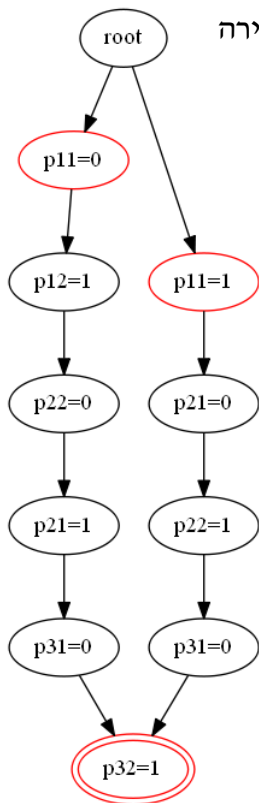
על פי האלגוריתם, עלינו לחזור לשלב האחרון שבו בחרנו מה להציב (ולא נאלצנו להציב בunit clause). במקרה שלנו, מדובר בהצבה הראשונה, כי כל ההצבות שנעשו אחריה, נבעו מ-unit clauses. האלגוריתם יחזור לאטום p11 והפעם יציב בו true.

מכיוון שלבעיה אין פתרון, האלגוריתם יקבל גם כאן קונפליקט, ואז ינסה הצבה אחרת שהיא להציב באטום הבא בפסוקית הראשונה false ולבדוק משם האם קיים פתרון.

באופן זה, האלגוריתם יעבור על כל ההצבות האפשריות, עד שיחזיר בסופו של דבר את התשובה unsat.

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

דיאגרמת העץ מראה את התהליך המתבצע על ידי אלגוריתם ה-DPLL על הדוגמה שהסברנו ופירטנו.



אטומים שמוקפים באליפסה אדומה אחת הם אטומים שבהם הוצבו ערכים מבחירה

ולא מאילוץ (implication) שנכפה על ידי unit clause.

אטום שמוקף בשתי אליפסות אדומות הוא אטום שההצבה בו הכריעה

אם הבעיה פתירה או לא, כלומר, האלגוריתם הגיע למצב סופי

והוא מסתיים עם החזרת פתרון לבעיה או לחילופין (כמו בדוגמה שלנו),

עם הכרעה כי הבעיה אינה פתירה, דהיינו, unsat.

בענף השמאלי של העץ רואים את ההצבות בכל אחד מהאטומים

על פי הסדר שבו הן מתבצעות על ידי האלגוריתם.

ההשמה האחרונה שמתבצעת היא  $p_{32}=1$  והיא גורמת לקונפליקט.

כתוצאה מכך, חוזר האלגוריתם לאטום האחרון שבו הוצב ערך מבחירה,

ומשנה את ערכו לערך שטרם נבדק, כלומר, עובר לענף הימני של העץ.

בסופו של התהליך המתואר כאן, שוב מתקבלת ההצבה של true באטום  $p_{32}$ ,

שוב נוצר קונפליקט, ומתקבלת ההכרעה כי הבעיה אינה פתירה.

DPLL הוא אלגוריתם שלם ונאות, כלומר, אם הנוסחה פתירה,

האלגוריתם ימצא ויחזיר את הפתרון, ואם הנוסחה לא פתירה, יחזיר UNSAT,

וכן להיפך, אם האלגוריתם מוצא פתרון לבעיה אז היא פתירה,

ואם מחזיר UNSAT אז הבעיה לא פתירה.

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

## CDCL - Conflict Directed Clause Learning

Conflict-Directed Clause Learning - CDCL הוא אלגוריתם שפותח במחצית שנות התשעים של

המאה הקודמת על ידי J. P. Marques-Silva and Karem A. Sakallah

והן על ידי R. J. Bayardo Jr. and R. C. Schrag.

האלגוריתם מבוסס DPLL אך עשוי להיות יעיל יותר, מכיוון שהוא מבצע למידה תוך כדי חיפוש פתרון. בתהליך הלמידה הזה, מתווספות פסוקיות לנוסחה, שמחד מגדילות את אורך הנוסחה כולה, ומאידך, יכולות לקצר את הזמן עד למציאת הפתרון אם קיים.

על מנת שהחיפוש יוכל להיות יעיל יותר במקרה של קונפליקט, האלגוריתם שומר עבור כל אטום לא רק את ערך האמת שנבחר עבורו, אלא גם את "רמת החלטה", decision level, השלב שבו הוחלט מה יהיה ערכו של האטום. כמו כן, עבור כל אטום שקיבל את ערכו ע"י implication ב-unit clause נשמרת הפסוקית שבה הוכרעה ההשמה באטום זה. פסוקית זו נקראת ה- antecedent של האטום. במקרה שההשמה באטום מסוים נעשתה כבחירה ולא כאילוץ של unit clause לא יהיה לאטום זה antecedent.

האלגוריתם מתחיל לפעול כמו DPLL, אך במקרה שמתגלה קונפליקט מתבצע ניתוח שבעקבותיו נלמדת פסוקית חדשה שמתווספת לנוסחה, ומתקבלת החלטה לאיזה מקום יש לחזור בתהליך החיפוש הרקורסיבי.

למידת פסוקיות במקרה של קונפליקט באלגוריתם CDCL :

כאשר מתגלה קונפליקט במהלך הפעלת האלגוריתם, מופעלת פונקציית CONFLICTANALYSIS, שמטרתה לזהות את הגורמים העיקריים לקונפליקט, וללמוד פסוקית נוספת שאותה יהיה על הנוסחה לספק במטרה לייעל את זמן החיפוש.

תהליך למידת הפסוקיות תלוי בתוצאות המוחזרות משתי פונקציות : פרדיקט בינארי,  $\xi$ , ו- Resolution operator,  $\odot$ .

הפרדיקט הבינארי בודק אם ההשמה של ליטרל מסוים, נעשתה ברמת החלטה הנבדקת כעת, ובנוסף אם קיים לו antecedent. אם שני התנאים מתקיימים, יוחזר 1, אחרת יוחזר 0.

כאשר בפסוקית מסוימת, הפרדיקט מחזיר ערך 0 עבור כל אחד מהליטרלים בפסוקית,

כלומר, כל הליטרלים בפסוקית זו הושמו ברמת החלטה נמוכה יותר או שאין להם antecedent,

משמעות הדבר היא כי תהליך הלמידה הסתיים, והפסוקית הנלמדת התקבלה.

---

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

## □ Resolution operator

אופרטור בינארי הפועל על שתי פסוקיות, ומחזיר את כל הליטרלים הנמצאים בפסוקיות, למעט ליטרלים, שמופיעים בפסוקית אחת ושוללתם מופיעה בפסוקית השנייה.

תהליך חישוב פסוקית הביניים :  $W_L^{d,i}$

d – רמת ההשמה.

i - אינדקס מונה החל מ-0 עד שהפרדיקט הבינארי  $\xi$  מחזיר 0 לכל ליטרל בפסוקית הנבדקת.

אם  $i = 0$ , כלומר, זיהינו עכשיו את הקונפליקט, פסוקית הביניים הראשונה  $W_L^{d,0}$  תהיה למעשה הפסוקית שבה נתגלה הקונפליקט.

בשלב הבאים, אם תוצאת הפרדיקט  $\xi$  המופעל על ליטרל<sup>2</sup> בפסוקית הביניים האחרונה שקיבלנו היא 1, מופעל האופרטור □ על פסוקית הביניים האחרונה עם ה- antecedent של הליטרל הנבדק.

אם תוצאת הפרדיקט  $\xi$  היא 0, יבדקו שאר הליטרלים בפסוקית הביניים האחרונה. אם הפרדיקט מחזיר 0 עבור כל הליטרלים בפסוקית הביניים, אז מסתיים תהליך הלמידה ומתקבלת הפסוקית החדשה.

## תוספת יעילות ל"פסוקיות הנלמדות" - שימוש ב- UIP

UIP – Unit Implication Points פירושו, שבפסוקית ביניים,  $W_L^{d,i}$ , יש רק ליטרל אחד שהושם ברמה d.

הרעיון המרכזי הוא צמצום גודל הפסוקית הנלמדת. אפשר לזהות את ה- UIP בזמן לינארי, כך שהתוספת לזמן ריצת האלגוריתם היא לא גדולה. הפסוקית הראשונה שהתגלתה כ- UIP היא בהכרח הקטנה ביותר, ולכן אין טעם לחפש אחרות.

השפעת הפסוקית הנלמדת על יעילות האלגוריתם

הפסוקית הנלמדת היא פסוקית שמתווספת לנוסחה הקיימת, וחייבת להיות ספיקה אף היא, תחת כל השמה, לכן, אם לא ניתן לספק פסוקית זו, לא ניתן לספק את הנוסחה כולה, וההחלטה שהנוסחה היא unsat עשויה להתקבל מהר יותר.

---

<sup>2</sup> הליטרל הראשון שנבדק בפסוקית הוא ליטרל שכבר הופיע בפסוקית קודמת. אם אין כזה, אז נבחר הליטרל הראשון שמופיע בפסוקית.

---

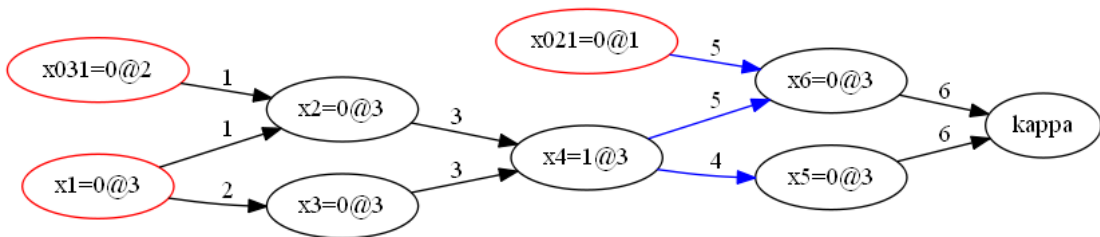
כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

הדוגמה שאותה נציג פותחה ע"י Marques-Silva, Lynce, Malik ומכאן שמה MLM.

הדוגמה מכילה שש פסוקיות שיש לספק וממחישה את אופן פעולת האלגוריתם.

$[x1, x031, \sim x2], [x1, \sim x3], [x2, x3, x4],$   
 $[\sim x4, \sim x5], [x021, \sim x4, \sim x6], [x5, x6]$

בשלב ראשון, כמו באלגוריתם DPLL מתבצעות השמות באטומים x021, x031 ו-x1 כפי שניתן לראות בתרשים:



השמות אלו יוצרות unit clauses בפסוקית 1. כתוצאה מכך, מתבצעת סדרת השמות באטומים שכולן נובעות מ-unit propagation ובעקבותיהן נוצר קונפליקט בפסוקית 6.

ניתוח הקונפליקט ולמידת פסוקית חדשה:

פסוקית מספר 6 היא הפסוקית שבה נוצר הקונפליקט, כלומר,  $W_L^{d,i} = W_L^{3,0} = [X5, X6]$

כעת ייבדק הליטרל x5, כלומר נמצא מי ה-antecedent שלו, ויופעל ה-resolution operator על פסוקית מספר 6 ועל ה-antecedent של X5 שהוא פסוקית מספר 4:

$$[x5, x6] \odot [\sim x4, \sim x5] = [x6, \sim x4]$$

בשלב זה, יופעל בשנית ה-resolution operator, הפעם על פסוקית הביניים שהתקבלה ועל ה-antecedent של x6 שהוא פסוקית מספר 5:

$$[x6, \sim x4] \odot [x021, \sim x4, \sim x6] = [\sim x4, x021]$$

באותו אופן, יופעל ה-resolution operator שוב ויתקבלו פסוקיות הביניים הבאות:

$$[\sim x4, x021] \odot [x2, x3, x4] = [x021, x2, x3]$$

$$[x021, x2, x3] \odot [x1, x031, \sim x2] = [x021, x3, x1, x031]$$

$$[x021, x3, x1, x031] \odot [x1, \sim x3] = [x021, x1, x031]$$

$$[x021, x1, x031]$$

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

התהליך נעצר כאשר התקבלה פסוקית ביניים שלכל האטומים המופיעים בה לא קיים antecedent. פסוקית זו היא הפסוקית הנלמדת. ניתן לראות בבירור בגרף כי אכן שלושת הליטרלים המופיעים בפסוקית הנלמדת הם אלה שגרמו לקונפליקט, ולכן אם לא ניתן למצוא השמה שמספקת את הפסוקית הנלמדת, הרי שלא ניתן לספק את הנוסחה כולה.

### תוספת יעילות UIP :

בסדרת פסוקיות הביניים שנוצרו בתהליך ניתוח הקונפליקט, יחפש האלגוריתם אחר הפסוקית הראשונה שבה רק ליטרל אחד הוכרע ברמת ההחלטה האחרונה. פסוקית הביניים הראשונה היא פסוקית מספר 6 שבה נוצר הקונפליקט. שני האטומים שמופיעים בפסוקית זו הם  $x_5$  ו- $x_6$ , ששניהם הוכרעו ברמה 3, ולכן פסוקית זו אינה UIP. פסוקית הביניים השניה שהתקבלה היא  $[x_6, \sim x_4]$ . שני הליטרלים שנמצאים בפסוקית זו הוכרעו ברמה 3, ולכן גם היא לא UIP. פסוקית הביניים השלישית שהתקבלה היא  $[x_4, x_{021}]$ . בפסוקית זו, רק  $x_4$  הוכרע ברמה 3 ואילו  $x_{021}$  הוכרע ברמה 1, ולכן היא UIP. לשם יעילות האלגוריתם, הפסוקית שתצורף לנוסחה תהיה פסוקית ה- UIP שנמצאה ולא הפסוקית הנלמדת  $[x_{021}, x_1, x_{031}]$ . הסיבה לכך היא שפסוקית ה- UIP היא קצרה יותר ובעלת משמעות דומה לפסוקית הנלמדת, כי שני הליטרלים המופיעים ב- UIP הם גורמים מהותיים בדרך אל הקונפליקט שהתקבל. מהתבוננות בגרף, ניתן לראות כי אכן המסלולים המובילים לקונפליקט, עוברים דרך הצמתים שבהם מופיעים  $x_{021}$  ו- $x_4$ , ללא תלות בערכים של האטומים האחרים.

### השימוש בפסוקית הנלמדת - המשך תהליך החיפוש

לאחר שנלמדה ונוספה פסוקית לנוסחה, האלגוריתם מוחק את כל ה- implications שהוכרחו בשלב ההחלטה האחרון (שלב 3 בדוגמא), ומשנה את ההשמה הראשונה בשלב זה, כלומר, מציב  $x_1=1@3$ . לאחר מכן, מוחק האלגוריתם באופן זמני את פסוקיות 1 ו-2 שסופקו עם הצבת הערך 1 באטום  $x_1$ . מכאן, ימשיך האלגוריתם ויחפש אחר unit clauses. Unit clause יתגלה מיד בפסוקית הנלמדת, שכן  $x_{021}=0$ , ולכן, יציב  $x_4=0$  על מנת לספק אותה. הדבר יגרום למחיקת פסוקיות 4 ו-5 באופן זמני. כעת, ניצב האלגוריתם בפני שלב החלטה חדש (branching), זאת משום שאין עוד unit clauses. השמת  $x_2=0@4$  בפסוקית 3 תגרור מיד unit clause והצבה של  $x_3=1@4$ . כעת נותרה רק פסוקית אחת שיש לספק והיא פסוקית מס' 6. השמה אפשרית היא  $x_5=0@5$  ובעקבותיה יתבצע  $x_6=1@5$  implication.

קיבלנו אם כן את ההשמה הבאה:  $x_1=1, x_2=0, x_3=1, x_4=0, x_5=0, x_6=1, x_{021}=0, x_{031}=0$ . השמה זו מהווה פתרון לבעיה מכיוון שהיא גורמת לנוסחה כולה לקבל ערך true.

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

הערה: ייתכן שקיימות השמות אחרות שגם הן מהוות פתרון לבעיה, אך האלגוריתם עוצר ברגע שהוא מוצא השמה כלשהי שמספקת את כל הפסוקיות (כולל הפסוקית הנלמדת), דהיינו, ברגע שהוא מוצא פתרון לבעיה.

---

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

## ביצועים

אמנם דוגמת MLM היא דוגמא קטנה יחסית, אך גם בה יש הבדל בביצועים בין אלגוריתם DPLL לאלגוריתם CDCL. ה-DPLL ייתקל ויתמודד עם 2 קונפליקטים מה שיגרום ליותר unit clauses ויותר decisions. לעומתו, CDCL מוצא פתרון תוך התמודדות עם קונפליקט אחד בלבד ועם מספר נמוך יותר של unit clauses ו- decisions.

---

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

## NCB - Non Chronological Backtracking

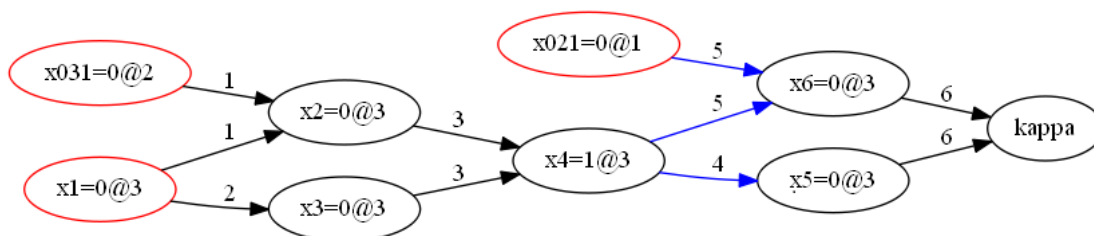
NCB הוא אופטימיזציה על אלגוריתם CDCL שיכולה במקרים רבים לקצר את זמן החיפוש, לקצר את מספר ה-Unit clauses, ההחלטות והקונפליקטים.

אלגוריתם NCB פועל בדיוק כמו DPLL ו-CDCL עד לשלב שבו מתגלה קונפליקט.

כאשר מתגלה קונפליקט, הוא מנותח באופן זהה לניתוח שנעשה ע"י CDCL ונלמדת פסוקית חדשה. לכל אטום בפסוקית זו נשמר מספר שמייצג את השלב שבו הוא קיבל את ערכו. מספר זה נקרא רמת ההחלטה (decision level) של האטום. בעוד שב-CDCL מתבצע Chronological backtracking כלומר חזרה לשלב ה-branching האחרון, דהיינו ברמת ההחלטה הגבוהה ביותר, ה-NCB כשמו כן הוא, בודק את רמות ההחלטה של האטומים בפסוקית הנלמדת וחוזר ומשנה דווקא את ערכו של האטום בעל דרגת ההחלטה הנמוכה ביותר, ומוחק כמובן את כל ההשמות שנבעו מהחלטה זו.

בדוגמת ה-MLM שבחנו, הפסוקית הנלמדת היא  $[x4, x021]$ . האטום  $x4$  הושם ברמה 3 ואילו האטום  $x021$  הושם ברמה 1. בניגוד ל-CDCL שהיה משנה את ההשמה ב- $x4$ , ה-NCB יחליף את ההשמה באטום שערכו נקבע ברמת החלטה נמוכה יותר, כלומר, ב- $x021$ . חזרה לרמת החלטה נמוכה יותר, יכולה בחלק מהמקרים לחסוך שלבים רבים בתהליך החיפוש, ובכך עשויה להיות יעילה יותר ולהוביל להכרעה בזמן קצר יותר.

בגרף מתואר עץ החיפוש כפי שהוא מתבצע עד לקונפליקט



אפשר לראות שעד שלב הקונפליקט הגרף זהה לחלוטין לזה של CDCL.

אולם, לאחר הקונפליקט, מוחלפת ההשמה ל  $x021=1@1$ . כתוצאה מכך, נמחקות פסוקית 5  $[x021, \sim x4, \sim x6]$  והפסוקית הנלמדת  $[x4, x021]$ , משום שערכן true ואין עוד צורך לבדוק אותן.

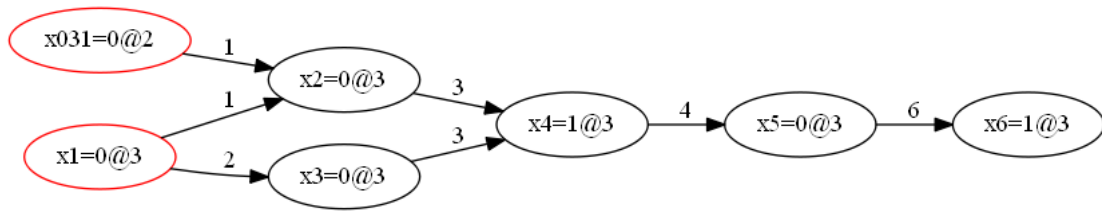
בשלב הבא, כלומר ברמת החלטה 2 מתבצעת השמה ל  $x031=0@2$  ומכיוון שהיא אינה גורמת ל-unit clause מתבצעת השמה נוספת ברמת החלטה 3  $x1=0@3$ . מכאן, מתבצעת סדרת השמות שנובעות מ-unit clause ונמצא פתרון לבעיה, כלומר השמה שמספקת את כל הפסוקיות, ונותנת ערך True לנוסחה.

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

---

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

ניתן לראות זאת בגרף הבא :



כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

## יצירת דוגמאות

לאחר שלמדנו את האלגוריתמים CDCL, DPLL ואת אופטימיזציית ה-NCB, פנינו לחלק המעשי של הפרויקט, שתכליתו הייתה לייצר דוגמא או מספר דוגמאות, שידגימו את השימוש באלגוריתמים השונים, ואת הבדלי היעילות ביניהם.

חיפשנו דוגמא שתענה על הקריטריונים הבאים :

1. דוגמה בעלת משמעות – "סיפור" או בעיה מציאותית.
2. דוגמא קטנה שיהיה קל לעקוב בה אחר אופן הרצת האלגוריתם.
3. דוגמא שתמחיש את ההבדלים בביצועים בין האלגוריתמים.
4. דוגמא שניתנת לייצוג וקידוד בשפה הלוגית פרולוג.

לא הצלחנו למצוא דוגמא שתענה על כל הקריטריונים, מכיוון שקיים קושי למצוא דוגמא שתהיה משמעותית מחד, קטנה מאידך, ועדיין תמחיש את ההבדלים בין האלגוריתמים. מצאנו דוגמאות שענו על חלק מהקריטריונים אך לא על כולם. לבסוף, החלטנו להתרכז בדוגמא שתמחיש את ההבדלים בביצועים בין האלגוריתמים, ותכיל סיפור "משמעותי", אך לא ניתן יהיה לעקוב אחרי כל שלב ושלב בהרצתה בשל גודלה. בנוסף על אלו, ייצרנו דוגמא קטנה נוספת (בעיית שלושת הגרציות) שהיא דוגמא שבה ניתן בקלות לעקוב אחר שלבי הפתרון של האלגוריתמים אך אין בה הבדלים בין זמני הריצה של האלגוריתמים השונים.

בתהליך החיפוש אחר דוגמא כנ"ל, נדרשנו לבצע את השלבים הבאים :

1. מציאת בעיה מעניינת
2. ניסיון לייצג את הבעיה בעזרת אטומים, ואת אילוצי הבעיה בעזרת פסוקיות בנוסחת CNF
3. קידוד והרצה של הבעיה המתורגמת לCNF
4. ניתוח התוצאות

---

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

בחנו מספר סוגים של בעיות בניסיון למצוא בעיה שתענה על כל הקריטריונים. בין הבעיות שאותן ניסינו לנתח ולהתאים היו הבעיות הבאות:

1. ריבוע "קסם" - בהינתן ריבוע  $3 \times 3$ , האם ניתן לסדר בו את המספרים 1, 2 ו-3, כך שכל מספר יופיע בכל שורה ובכל עמודה בדיוק פעם אחת?  
בחרנו לייצג אטום כ-  $p_{i,j,k}$  כאשר  $i$  מייצג את המספר שנמצא בתא (1, 2 או 3),  $j$  מייצג את מספר השורה ו-  $k$  את מספר העמודה. באופן זה היו לנו 27 אטומים שונים ונדרשו 99 פסוקיות על מנת לייצג את האילוצים של הבעיה, על אף שהיא פשוטה יחסית.  
התנאים שבדקנו:

- א. כל מספר מופיע לפחות בשורה אחת. למימוש תנאי זה נזקקנו ל-9 פסוקיות שונות. לדוגמא: [p111, p112, p113] דואג שהספרה 1 תופיע לפחות פעם אחת בשורה מספר 1.
- ב. כל מספר מופיע לפחות בעמודה אחת. גם תנאי זה דורש בדיקה של 9 פסוקיות שונות, למשל: הפסוקיות [p212, p222, p232] משמעותה שהספרה 2 מופיעה לפחות פעם אחת בעמודה מספר 2.
- ג. עבור כל תא, בדקנו שאם ספרה מסוימת מופיעה בו, אז היא אינה מופיעה שוב באותה עמודה ובאותה שורה. ככל שהתקדמנו בבדיקה, הצטמצם מספר הפסוקיות הנדרש, משום שהתנאי [~p311, ~p312] לדוגמא, שפירושו שהמספר 3 לא יכול להופיע בשורה מס' 1, גם בעמודה 1 וגם בעמודה 2, מתאים גם לשכן שלו, כלומר אם בשורה מס' 1 בעמודה 1 מופיעה הספרה 3, אז היא לא יכולה להופיע באף אחד מהתאים האחרים, בשורה 1 ובעמודה 1, אבל, כאשר נבדוק את האפשרות שספרה מס' 3 מופיעה בשורה הראשונה בעמודה השנייה, לא נצטרך לבדוק שוב את התנאי שהיא אינה מופיעה גם בתא זה וגם בשורה 1 עמודה 1. למרות זאת, נדרשו 81 פסוקיות כדי לתאר תנאי זה.  
לאחר קידוד הבעיה והרצתה גילינו כי הבעיה נפתרת בלי כל קונפליקט, ולמעשה עבודתנו ירדה לטמיון, משום שאין הבדלים בין האלגוריתמים כאשר אין קונפליקטים. מאידך, למדנו מדוגמא זו, על המורכבות של ייצוג תנאים פשוטים בשפה לוגית, והתנסינו בקידוד ובהרצת דוגמא שיצרנו בעצמנו.  
ניתוח הדוגמא, הוביל אותנו לתובנה, שעלינו ראשית להיות בטוחות שיש קונפליקט בבעיה הנבחרת, ולנסות לחפש בעיה מסוג זה.

## 2. סודוקו

בחנו טבלאות שונות של סודוקו, החל מגודל  $4 \times 4$ ,  $6 \times 6$  וחשבנו באופן תיאורטי על טבלה קלאסית של  $9 \times 9$ . הרעיון היה לבדוק אם המחשב בהכרח ייתקל בקונפליקט, בבואו לפתור חידת סודוקו. גילינו כי האופן בו בן-אנוש פותר סודוקו, שונה מאד מאשר מחשב שמספק אילוצים. לאחר שבחנו עשרות לוחות סודוקו של  $6 \times 6$ , הגענו למסקנה שככל הנראה, מחשב לא יגיע לקונפליקט בדוגמא כזו.

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

בחרנו לא להתעמק ולנסות להוכיח אם אכן לא יתרחש קונפליקט בחיפוש אחר פתרון לסודוקו, משום שזאת לא היתה מטרת הפרויקט, וניגשנו לחפש דוגמא אחרת.

3. מגדלי האנוי וחידת מסע הפרש

סוג זה של בעיות, מכיל בנוסף לתנאי המיקום גם אלמנט של זיכרון למקום הקודם או למקום הבא.

בעיית מגדלי האנוי<sup>3</sup> למשל, מכילה בכל שלב, פרט למיקום הנוכחי של הטבעת במגדל מסוים, מידע על איזו טבעת נמצאת תחתיה, איזו מעליה, לאן מותר להעביר אותה ולאן לא. גם בחידת מסע הפרש<sup>4</sup>, לבד ממיקומו הנוכחי של הפרש בלוח השחמט, צריך לזכור היכן כבר היה, וככל שנעשים יותר צעדים, צריך לזכור יותר מידע.

אמנם בשפות תכנות פרוצדוראליות ניתן בקלות לייצג בעיות אלו, תוך שימוש במבני נתונים מתאימים, אך בשפה לוגית הרבה יותר קשה לייצג בעיות מסוג זה. בשלב זה, החלטנו לחפש בעיית סידור אחרת שאינה דורשת אלמנט זיכרון של מיקום או תנועה.

4. בעיית סידור המוזמנים לחתונה – גירסא ראשונה

לאחר התהליך שעברנו בחיפוש אחרי דוגמא, הגענו למסקנה שעלינו לחפש בעיית סידור מציאותית, בעלת מספר לא גדול של משתנים, ולנסות למצוא בעבורה הבדלים בין האלגוריתמים. הבעיה הראשונה שבחרנו היתה סידור מקומות ישיבה עבור 6 מוזמנים לחתונה בשולחן שבו 6 כסאות בתנאים הבאים:

a,b,c,d,e,f צריכים לשבת ליד אותו שולחן בחתונה.

a ו-b לא יושבים אחד ליד השני.

d ו-e לא יושבים אחד ליד השני.

c ו-d צריכים לשבת אחד ליד השני.

c ו-f צריכים לשבת אחד ליד השני.

הגדרנו 36 אטומים  $p_{i,j}$  כאשר אורח i יושב בכסא j.

התנאים שנדרשו לספק הם:

א. בכל כיסא יושב אורח.

ב. כל אורח יושב בכיסא.

ג. אין יותר מאורח אחד בכיסא.

רק שילוב שלושת התנאים הללו, מביא לתוצאה הרצויה של אדם אחד ויחיד בכל כסא. אחרת, ייתכנו מצבים בלתי הגיוניים כמו למשל: בכל הכיסאות יושב אותו אדם או שבכסא אחד יושבים כמה אנשים שונים.

3

[http://he.wikipedia.org/wiki/%D7%9E%D7%92%D7%93%D7%9C%D7%99\\_%D7%94%D7%90%D7%A0%D7%95%D7%99](http://he.wikipedia.org/wiki/%D7%9E%D7%92%D7%93%D7%9C%D7%99_%D7%94%D7%90%D7%A0%D7%95%D7%99)

4

[http://he.wikipedia.org/wiki/%D7%97%D7%99%D7%93%D7%AA\\_%D7%9E%D7%A1%D7%A2\\_%D7%94%D7%A4%D7%A8%D7%A9](http://he.wikipedia.org/wiki/%D7%97%D7%99%D7%93%D7%AA_%D7%9E%D7%A1%D7%A2_%D7%94%D7%A4%D7%A8%D7%A9)

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

שלושת התנאים הללו ייבדקו בכל בעיית סידור מסוג זה. בשלב הבא נבדקים התנאים הפרטיים של הבעיה, כלומר, מי באופן ספציפי צריך לשבת ליד מי, ומי לא יושב ליד מישהו מסוים אחר. בסך הכל לייצוג הבעיה נדרשו 156 פסוקיות שונות. לאחר שקידדנו את התכנית והרצנו אותה, נמצא לה פתרון, תוך שני קונפליקטים. למרות הקונפליקטים, בתכנית זו לא נמצא שום יתרון ל-CDCL על פני ה-DPLL, וגם בשימוש ב-NCB קיבלנו את אותן התוצאות.

5. בעיית סידור המוזמנים לחתונה - גירסא שניה  
לאחר שלא נמצאו הבדלים בין האלגוריתמים בבעיה הראשונה, החלטנו לבדוק אם התוצאות ישתנו כאשר הבעיה תהיה בלתי פתירה, כאשר נדרוש שאדם אחד ישב ליד 3 אנשים שונים.

שינינו את אילוצי האורחים באופן הבא :

a,b,c,d,e,f צריכים לשבת ליד אותו שולחן בחתונה.

a ו-b לא יושבים אחד ליד השני.

d ו-e לא יושבים אחד ליד השני.

c ו-d צריכים לשבת אחד ליד השני.

c ו-f צריכים לשבת אחד ליד השני.

c ו-e צריכים לשבת אחד ליד השני.

כמו בבעיה הקודמת בדקנו ראשית את התנאים ההכרחיים :

א. בכל כיסא יושב אורח.

ב. כל אורח יושב בכיסא.

ג. אין יותר מאורח אחד בכיסא.

בשלב הבא, שוב נבדקים התנאים הפרטיים של הבעיה, כלומר, מי באופן ספציפי צריך לשבת ליד מי, ומי לא יושב ליד מישהו מסוים אחר.

לייצוג התנאי ששני אנשים חייבים לשבת אחד ליד השני, למשל : c ו-d, השתמשנו ב-3 פסוקיות

לכל מיקום אפשרי של אורח c : [~p31, ~p45], [~p31, ~p44], [~p31, ~p43]

המשמעות : אם אורח c יושב בכסא 1, אז אורח d לא יכול לשבת בכיסא 3 או בכיסא 4 או בכיסא

5. (למעשה, יכול לשבת רק בכיסאות 2 או 6 שהם הכיסאות הסמוכים לכסא מספר 1).

כאשר הרצנו את הדוגמא בייצוג הנ"ל, קיבלנו הבדלים משמעותיים בין האלגוריתמים :

dp11: units=969, decisions=196, conflicts=99

cdcl: units=840, decisions=152, conflicts=77

ncb: units=734, decisions=139, conflicts=64

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

אולם, בשלב בדיקת התכנית ביחד עם המנחה, הבנו כי ניתן לייצג את התנאי הנ"ל בדרך מקוצרת:  
במקום שימוש בשלוש פסוקיות אפשר להשתמש בפסוקית אחת [p31, p42, p46] שמשמעותה:  
אורח d יושב בכיסא 2 או שהוא יושב בכיסא 6. אם לא כך, אז אורח מס' 3 לא יושב בכיסא 1.  
תנאי זה שקול לשלושת התנאים שהופיעו בייצוג הקודם.

לאחר ששינינו את ייצוג התנאי לצורה המקוצרת, הרצנו שוב את התכנית בשלושת האלגוריתמים,  
ולצערנו, שוב לא היה הבדל בביצועים בין האלגוריתמים:

DPLL : units=759, decisions=120, conflicts=61

CDCL : units=759, decisions=120, conflicts=61

NCB : units=759, decisions=120, conflicts=61

איננו יודעות מה הסיבה לכך שהשינוי בייצוג, גרם לאלגוריתמים להגיע לתוצאות זהות.  
לדעתנו, זהו נושא שמעניין לחקור אותו, אך לא ביצענו בעצמנו את החקירה, מכיוון שהדבר חורג  
מגבולות הפרויקט שלנו.

עם זאת נשים לב, כי הורדת הכמות הכוללת של הפסוקיות הקטינה את כמות ה- units, ה-  
decisions וה- conflicts, והפכה את שלושת האלגוריתמים ליעילים יותר.

6. בעיית סידור המוזמנים לחתונה – גירסא שלישית ואחרונה  
בגירסה זו בדקנו שוב ייצוג של בעיית סידור בלתי פתירה, אך באופן שונה.  
בבעיה זו שני אנשים אינם יכולים לשבת זה ליד זה, אך כל ארבעת האחרים, חייבים להסתדר  
ברצף. שינינו את אילוצי האורחים באופן הבא:  
a,b,c,d,e,f צריכים לשבת ליד אותו שולחן בחתונה.  
a ו-b לא יושבים אחד ליד השני.  
c ו-d צריכים לשבת אחד ליד השני.  
d ו-e צריכים לשבת אחד ליד השני.  
e ו-f צריכים לשבת אחד ליד השני.

השתמשנו בייצוג היעיל, שלמדנו מגירסא 2 וקיבלנו את התוצאות הבאות:

DPLL : units=1187, decisions=286, conflicts=144

CDCL : units=1016, decisions=232, conflicts=117

NCB: units=926, decisions=207, conflicts=92

---

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה,  
כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר  
אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

לשמחתנו הרבה, דוגמא זו ענתה על 3 מתוך 4 הדרישות שרצינו מדוגמא, ובשילוב עם דוגמת ה- MLM מאפשרת להבין לעומק איך פועלים האלגוריתמים השונים ואיך ההבדלים בביצועים ביניהם באים לידי ביטוי בבעיה מציאותית.

## סיכום ומסקנות

התהליך שעברנו במסגרת פרויקט הגמר, היה תהליך ארוך ומורכב בו התוועדנו לבעיית SAT, ולא אלגוריתמים לפתרונה.

בהמשך, למדנו את האלגוריתמים לעומק, הבנו כיצד הם פועלים, ומדוע קיימים ההבדלים ביניהם.

השלב המעשי, בו ניסינו לייצר דוגמאות חדשות שימחישו את ההבדלים שבין האלגוריתמים, העמיק אף יותר את ההבנה של פעולת האלגוריתמים מחד, ואת הקושי שבמציאת דוגמאות רלוונטיות ומעשיות מאידך.

העברת בעיה מציאותית, המוצגת בשפה טבעית, לבעיה שמחשב יכול לפתור, אינה משימה פשוטה. התמודדנו עם הצורך בחד משמעיות, קושי בייצוג המשתנים, והצורך לשמור על יעילות גבוהה ככל האפשר. גם הצלחה ביצירת דוגמא, לא הבטיחה כפי שראינו, הבדלים משמעותיים בין האלגוריתמים.

העובדה שהתהליך כולו נעשה בזוג, אפשרה לנו להרחיב את היריעה ואת היקף הפרויקט מעבר לפרויקט שנעשה ביחיד.

ברמה האישית, נעזרנו כל אחת בתחומים החזקים של חברתה, והדבר סייע רבות להתמודד עם המשימה.

---

כל קובץ המועלה למרכז משאבים וירטואלי בהוראת המדעים והמתמטיקה נועד אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.