"תוכנית רוטשילד-ויצמן למצוינות בהוראת המדעים"
במימונה של קרן קיסריה אדמונד בנימין דה רוטשילד

אפסים משותפים של פונקציות אלגבריות ופונקציות פאפיניות

מגישה: רחלי אשכנזי

מנחה: פרופסור דמטרי נוביקוב

תאריך: 24.4.12

אפסים משותפים של פונקציות אלגבריות ופונקציות פאפיניות

1.מבוא:

1.1 הקדמה

נושא עבודתי הוא מציאת החסם על מספר האפסים המשותפים בין פונקציות אלגבריות לבין פונקציות פאפיניות-pffaffian function.

מתמטיקאי Khovanskii פיתח תיאוריה חדשה הנקראת fewnomials, הרעיון הכללי מאחורי התיאוריה שלו הייתה שלמערכת משוואות עם מבנה פשוט יש גם פתרונות עם מבנה פשוט.
קיים קושי למצוא אפסים לפונקציות שאינן אלגבריות ולכן הרעיון של חובנסקי היה למצוא את <u>כמות האפסים</u> .
כמות האפסים זהו מידע החשוב למשל בנושא יציבות של מערכות דינמיות.(שורש חיובי מצביע על אי יציבות המערכת)
בכדי למצוא את כמות האפסים חובנסקי השתמש במשפט רול ומערכת עם פונקציות טרנסצנדנטיות הוחלפה במערכת המכילה פונקציה אלגברית (עם איבוד מבוקר של אפסים)
לכן התיאוריה אשר חובנסקי פיתח היא אנלוגיה למשפט בזו (bezout) לפונקציות פאפיניות.
כשמדברים על פולינום ממעלה n ברור שמספר האפסים יהיה לכל היותר n,
מה שנוכיח בעבודה יהיה הרחבת פולינומים לפונקציות פאפיניות של שני משתנים.
חובנסקי בעבודתו חקר מקרים כלליים יותר.

1.2 ניסוח משפט עיקרי

מהי פונקציה פאפינית? (pffaffian function)
לצורך ההגדרה נזכיר מספר מושגים חשובים :

א. <u>פתרון של מערכת משוואות דיפרנציאליות</u>:

נתונה מערכת :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \\ \dot{y} &= g(x,y) \end{aligned} \qquad (1)$$

כאשר $f(x,y)$ ו-$g(x,y)$ הן שתי פונקציות רציפות

וקטור-פונקציה $z(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$,

המקיים את המערכת (1)

$\dot{x}(t)= f\left(x(t),y(t)\right), \dot{y}(t)=g\left(x(t),y(t)\right)$ נקרא פיתרון המערכת (1)

בכל מערכת כזו אם מתחילים מנקודה מסוימת יהיה פתרון,יהיה מסלול יחיד מוגדר לשדה הווקטורי המוגדר על ידי מערכת (1)

משפט הקיום והיחידות אומר:

בהינתן f,g רציפות וחלקות, אז לכל $(x_0,y_0),t_0$

קיים פתרון $z(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ יחיד למערכת (1) כך ש $x_0=x(t_0), y_0=y(t_0)$

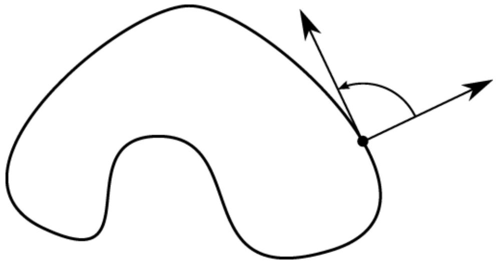
הפתרון תלוי בזמן כשהזמן משתנה המיקום על העקומה משתנה.

נקודות השבת (הנקודות הסינגולאריות) הן הנקודות (x_0,y_0) בהן $f(x_0,y_0)=g(x_0,y_0)=0$

המהירות אפס ולכן הפתרון למערכת הינו טריביאלי (x_0,y_0) =z(t) לכל t.

ב. כוון טבעי של שפת התחום

האוריינטציה הטבעית על עקומה שהיא שפה של תחום היא כאשר ווקטור נורמאלי הפונה מחוץ לשפה מסובב ב 90 מעלות כנגד כוון השעון.



ג. פתרון מפריד:

עקומה היא "פתרון מפריד" (separating solution) של מערכת (1) אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

1. היא איחוד של כמה מסלולים של המערכת הדיפרנציאלית עם הכוון הטבעי, אינה עוברת דרך הנקודות הסינגולאריות
2. העקומה היא שפה של תחום.
3. האוריינטציות של פתרון מפריד הן של המערכת הדיפרנציאלית והן של שפת התחום זהות

הגדרה:

עקומה פאפינית היא פתרון מפריד של מערכת משוואות דיפרנציאליות מהצורה:

$$\begin{cases} \dot{y} = P(x,y) \\ \dot{x} = Q(x,y) \end{cases}$$ כאשר P,Q פולינומים.

דרגת העקומה הפאפינית היא $\max(\deg P, \deg Q)$

דוגמא :

נתבונן במערכת :

$$\dot{x} = -y$$
$$\dot{y} = x$$

הפתרון הכללי הוא :

$$x(t) = \sqrt{C}\cos(t + C_1)$$
$$y(t) = \sqrt{C}\sin(t + C_1)$$

כלומר ,מעגלים.

אם נתבונן בכל מעגל בנפרד הוא יהיה עקומה פאפינית.

איחוד של שני המעגלים יחד זו שפת התחום. אבל האוריאנטציה של המעגלים לפי המערכת אינה זהה לאוריינטציה של שפת התחום. לכן האיחוד של שני המעגלים אינו פתרון מפריד.

והעקומה אינה עקומה פאפינית.

יש אפשרות לבנות מערכת אחרת מדרגה גבוהה יותר כלומר לכפול בפולינום שיהיה חיובי במעגל אחד ושלילית במעגל השני ותתקבל האוריינטציה הנכונה.

המשפט העיקרי:

מספר נקודות החיתוך שבין שתי עקומות פאפיניות בעלות דרגה n,m הוא לכל היותר (m+n)(2n+m)+n+1

1.3 דוגמאות

כשנתבקשתי לחשוב על נושא לעבודת הגמר מיד ידעתי שהנושא שאבחר יהיה קשור לחשבון דיפרנציאלי .כל הקשור לחקירת פונקציה מאד מעניין ומסקרן אותי.במסגרת ההוראה בתיכון מלמדים את נוסחאות וויאטה. נוסחאות אלו מאפשרות לחקור את סימני השורשים מבלי לפתור את המשוואה הריבועית. בתהליך שעברתי בעבודת גמר זו גיליתי שניתן להרחיב את נוסחאות וויאטה גם לפולינומים מדרגות גבוהות יותר ולמצוא תכונות יפות התקיימות גם בהם.

אחד המשפטים היפים בנושא הוא משפט דה-קארט. הטענה במשפט היא שמספר השורשים החיוביים הממשיים לעולם אינו גדול ממספר השינויים בסימני המקדמים.

בנוסף הוא אומר שאם המספר קטן ממספר החלפות הסימנים אזי ההפרש יהיה תמיד זוגי.

משפט דה קארט מוכח על ידי אינדוקציה.

אם v מייצג את מספר החלפות הסימן ו r מייצג את מספר השורשים החיוביים אז המשפט יוכיח ש $r \le v$

בדיקת הטענה עבור v=0 היא ברורה משום שאם אין החלפות סימן אין שורשים חיוביים.

נסתכל על המשוואה הריבועית $ax^2+bx+c=0$

כאשר המקדמים a,b,c חיוביים אז על פי נוסחאות וויאטה

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

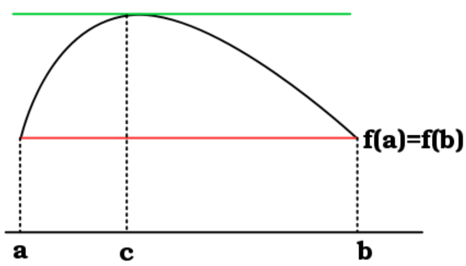
מכפלת השורשים היא חיובית וסכום השורשים שלילי לכן השורשים הם בהכרח שליליים לכן r=0 והטענה נכונה.

הצעד באינדוקציה יוכח על ידי שימוש במשפט רול.

<u>משפט רול</u> אומר כי אם פונקציה רציפה בקטע סגור והיא גם גזירה בו (פרט אולי לקצותיו) וערכיה בשני קצוות הקטע זהים, קיימת נקודה בה נגזרתה מתאפסת, כלומר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה זו הוא קו מאוזן.

תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b) כך שמתקיים

$f(a)=f(b)$, אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך שמתקיים $f'(c)=0$



באינדוקציה במשפט דה-קארט מניחים נכונות עבור v-1 שינויי סימן ומוכיחים עבור v.

דה קארט בהוכחה משתמש במשפט גואה .שגם אותו נזכיר בהמשך העבודה.

חובנסקי למעשה פיתח את אותו רעיון ב fewnomials בשביל פונקציות פאפיניות. הוא השתמש במשפט בזו כבסיס של האינדוקציה.

כאן המקום לציין שלא כל פונקציה טרנסנדנטית (פונקציה שאינה אלגברית) היא פאפינית.

למשל $\sin x$ אינה פאפינית. (מספר הפתרונות של $\sin x=0$ הוא אינסופי)

יחד עם זאת רוב הפונקציות האלמנטריות והרכבותיהן הן פאפיניות :

פונקצית $\tan x$, $\operatorname{arctg} x$, e^x .

משפט (מחובנסקי [1])

יהיו $a_1, a_2, \dots, a_q$ קבוצת וקטורים ב $\mathrm{R^n}$ ו Q_i הם פולינומים ב n+q משתנים שדרגתם p_i.

נתבונן במערכת $Q_i\left(x_1, x_2, \dots, x_n, e^{(a_1 x)}, \dots, e^{(a_q x)}\right) = 0$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ במרחב $\mathrm{R^n}$ כש (a_i, x) זוהי המכפלה הפנימית. אז מספר הפתרונות המבודדים של המערכת הוא לכל היותר

$$2^{\frac{q(q-1)}{2}}\left(\sum_i p_i + 1\right)^q \cdot p_1, \dots, p_n$$

עבור q=1, $n = 1$:

יהי a מספר ממשי, Q פולינום מדרגה p. אז מתקיים :

$$\#\begin{Bmatrix} Q(x,y) = 0 \\ y = e^{ax} \end{Bmatrix} \le 2^{\frac{1\cdot 0}{2}}\left(p+1\right)^1 \cdot p = p(p+1).$$

$y = e^{ax}$ היא עקומה פאפינית המקיימת מערכת משוואות דיפרנציאלית :

$$\begin{cases} \dot{y} = ay \\ \dot{x} = 1 \end{cases}$$

ולכן הדרגה של $y = e^{ax}$ היא 1.

$Q(x,y)$ פונקציה אלגברית המקיימת :

$$\begin{cases} \dot{y} = -Q_x \\ \dot{x} = Q_y \end{cases}$$

ולכן הדרגה של $Q(x,y)$ היא $p-1$.

אם נציב במשפט העיקרי - $n = 1$, $m = p-1$

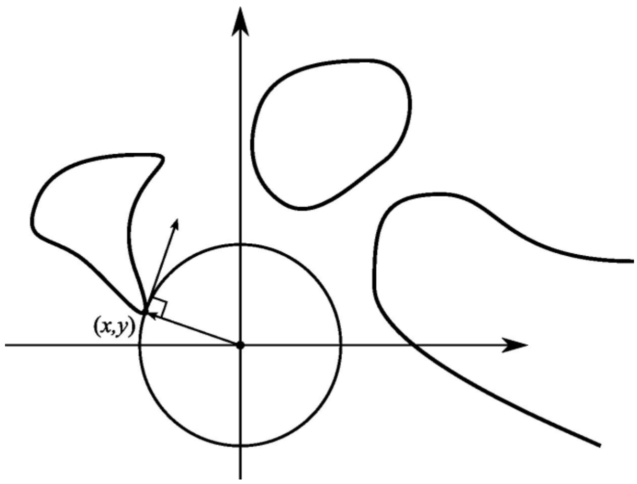
נקבל $(p-1+1)(2+p-1)+1+1$, כלומר מספר הפתרונות אינו עולה על $p(p+1)+2$ (2 זניח).

<u>מדוע קיים הצורך בספירת כמות האפסים?</u>

נציג דוגמא לשימוש בחסמים מהסוג של המשפט עיקרי של חובנסקי :

יהי $P(x,y,z)$ פולינום בשלושה משתנים ותהי $p(x,y) = P\left(x, y, e^x\right)$ פונקציה פאפינית בשני משתנים.

נסתכל בעקומה $p(x,y) = 0$



אנו מניחים שהעקומה אינה עוברת דרך הראשית.וכעת נוכל לספור את הקומפוניאנטות שלה בצורה הבאה:

ניצור מעגלים $x^2+y^2=R^2$ סביב לראשית ואז לכל קומפניאנטה של העקומה הפאפינית יהיה לפחות מעגל אחד שישיק לעקומה (נספור את הראשון שמשיק)

נוכל לומר שמספר הקומפוניאנטות של $p(x,y)=0$ הוא לכל היותר מספר נקודות ההשקה.

נוכל לספור אותם משום שהם פתרון למערכת:

$$\begin{cases} P\left(x,y,e^x\right)=0 \\ \operatorname{grad}p\times\left(x,y\right)=0 \end{cases}$$

ומכאן

$$\#\begin{cases} P\left(x,y,e^x\right)=0 \\ \left(P_x+P_z e^x\right)\left(-y\right)+P_y x=0 \end{cases} \le \boxed{\text{החסם של חובנסקי}}$$

1.4 דרך ההוכחה

הרעיון הכללי הוא להשתמש במשפט רול בצורה של חובנסקי.

כשמשתמשים במשפט רול על פונקציות פאפיניות מקבלים מערכת פולינומיאלית שבה ניתן ליישם את משפט בזו.

למרות שבהוכחה שלנו נעסוק אך ורק במקרה שבו העקומות חלקות וללא נקודות סינגולאריות.

חובנסקי בתיאוריה שלו דיבר גם על מקרים כלליים.

2.משפט בזו (Bezout)

2.1 ניסוח המשפט

יהיו P,Q פולינומים בשני משתנים.

נתבונן בשתי עקומות אלגבריות P(X,Y)=0 ו Q(X,Y)=0 .

<u>משפט בזו</u> אומר שמספר נקודות החיתוך המבודדות שבין שתי עקומות האלגבריות הללו הוא לכל היותר מכפלת דרגות P,Q

נסביר את הרעיון הכללי בהוכחה :

2.2 מטריצת סילבסטר וה- Resultant

נתחיל מדוגמא:

יהיו $Q(x)=x^2+2x+3 \quad , \quad P(x)=x^3+x^2+x \quad (\deg P=3,\ \deg Q=2)$.

יהיו A,B פולינומים כך ש- $\deg B=\deg P-1 \quad , \quad \deg A=\deg Q-1$.

$B=b_1x^2+b_2x+b_3 \quad , \quad A=a_1x+a_2$.

נכפול A ב- P ואת B ב- Q ונקבל פולינום C שדרגתו 4 :

$$C=AP+BQ=\left(x^3+x^2+x\right)\left(a_1x+a_2\right)+\left(x^2+2x+3\right)\left(b_1x^2+b_2x+b_3\right)$$

אם נפתח סוגריים ונפשט את הביטוי שיתקבל נראה שמקדמי C מתקבלים על ידי מכפלת הווקטור $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ במטריצה S (הבנויה ממקדמי הפולינומים P,Q)

$$S=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

למטריצה הזו נקרא מטריצת סילבסטר.

<u>טענה</u>: אם $\det S=0$ (כלומר resultant) אז קיים אפס משותף ל- P,Q .

<u>הוכחה</u>: אם $\det S=0$ אז זה אומר שקיים וקטור מקדמים $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\neq 0$ כך ש-

$$P\left(a_1x+a_2\right)+Q\left(b_1x^2+b_2x+b_3\right)=0 \ .$$

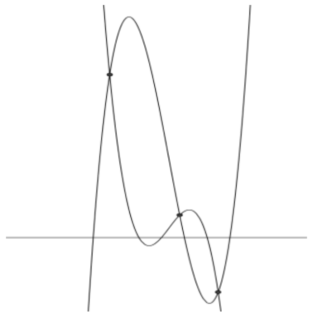
נניח ש 0= $P(x_1)=P(x_2)=P(x_3)$ עבור $x_1\neq x_2\neq x_3$ אז מתקיים

$\begin{cases} Q(x_1)\left(b_1x_1^2+b_2x_1+b_3\right)=0 \\ Q(x_2)\left(b_1x_2^2+b_2x_2+b_3\right)=0 \\ Q(x_3)\left(b_1x_3^2+b_2x_3+b_3\right)=0 \end{cases}$, אבל ל- $b_1x^2+b_2x+b_3=0$ יש לכל היותר 2 אפסים, אז

המסקנה שאפס אחד חייב להיות שורש של $Q(x)$ ולכן קיים אפס משותף ל- P,Q.

<u>באופן כללי</u> :

נתבונן בשני פולינומים במשתנה אחד $P(\mathrm{Y})$, $Q(\mathrm{Y})$



בדרך כלל למערכת $P(\mathrm{Y})=Q(\mathrm{Y})=0$ אין פתרון- כלומר אין אפס משותף. (לא קיימת נקודת חיתוך משותפת של שתי העקומות עם ציר ה x)

השאלה עליה נענה היא מהו התנאי על מקדמי הפולינומים P,Q שייתן לנו אפס משותף למערכת

$$P(\mathrm{Y})=Q(\mathrm{Y})=0$$

התשובה לשאלה נתונה על ידי מטריצת סילבסטר.

מהי המטריצה וכיצד היא בנויה?

יהיו שני פולינומים $q(z),\ p(z)$ שונים מאפס בעלי דרגות m,n בהתאמה.

$$p(z)=p_0+p_1z+p_2z^2+\ldots+p_mz^m$$
$$q(z)=q_0+q_1z+q_2z^2+\ldots+q_nz^n$$

מטריצת סילבסטר בנויה בדרך הבאה (לדוגמא עבור $m=4,n=3$)

$$S_{p,q}=\begin{pmatrix} p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 \\ 0 & 0 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \\ q_3 & q_2 & q_1 & q_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_3 & q_2 & q_1 & q_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & q_2 & q_1 & q_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_3 & q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

<u>טענה:</u>

קיים אפס משותף ל $p(z)$, $q(z)$ אם ורק אם הדטרמיננטה של $S_{p,q}$ תתאפס.

<u>הוכחה</u>:

נניח ש $\det S = 0$ אז

קיים ווקטור x שגודלו n ווקטור y שגודלו m (אחד מהווקטורים שונה מאפס)

כך ש: $S_{p,q}{}^{T} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

יהי X פולינום שמקדמיו הם ווקטור x, יהי Y פולינום שמקדמיו הם ווקטור y

אז, $\deg X < \deg q$ $\deg Y < \deg p$ ו $Xp+Yq=0$

מכאן נובע של p ו q אפס משותף.

אכן Yq מתאפס בכל האפסים של p,

ל p יש m אפסים לכן לא יתכן שכל m האפסים הם של Y כי דרגת Y קטנה מדרגת p ולכן

לפחות אחד האפסים של p הוא אפס משותף ל q.

<u>בכיוון ההפוך</u>: אם x_0 הוא אפס משותף של P,Q אז $\det S = 0$.

x_0 אפס משותף ולכן $P(x_0) = Q(x_0) = 0$.

$$\begin{cases} P(x) = \tilde{P}(x)\left(x - x_0\right) \\ Q(x) = \tilde{Q}(x)\left(x - x_0\right) \end{cases}$$

עבור $\begin{matrix} A = -\tilde{Q} \\ B = \tilde{P} \end{matrix}$

$A,B \neq 0$ מתקיים $-\tilde{Q} \cdot \tilde{P}\left(x - x_0\right) + \tilde{P} \cdot \tilde{Q}\left(x - x_0\right) = 0$ וגם $\deg A < n$, $\deg B < m$.

$AP + BQ = 0$, כלומר $S\left(a,b\right)^{T} = 0$ כש $\left(a,b\right)^{T}$ המקדמים של A,B

והוכחנו $\det S = 0$.

2.3 הוכחת משפט בזו:

<u>מטריצת סילבסטר במשפט בז'ו</u>

יהיו $Q(x,y)$, $P(x,y)$ פולינומים בעלי דרגות d_1, d_2 בהתאמה.

$$P(x,y) = p_0(x) \cdot y^{d_1} + p_1(x) \cdot y^{d_1 - 1} + \ldots + p_{d_1}(x)$$
$$Q(x,y) = q_0(x) \cdot y^{d_2} + q_1(x) \cdot y^{d_2 - 1} + \ldots + q_{d_2}(x)$$

נסתכל על מערכת של שני פולינומים בשני משתנים x,y על מערכת של משתנה אחד y עם

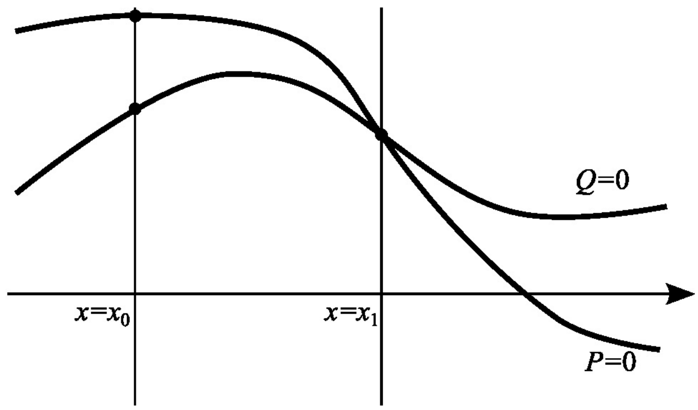
פרמטר x.

נשאל עבור איזה x ל- P,Q יהיה אפס משותף. על פי סעיף 2.2 עלינו לבדוק מתי $\det\left(S(x)\right)=0$.

$$Q(x)=y-g(x)$$
$$P(x)=y-f(x)$$

בנקודה x_1 : resultant=detS=0

בנקודה x_0 : $\det S \neq 0$

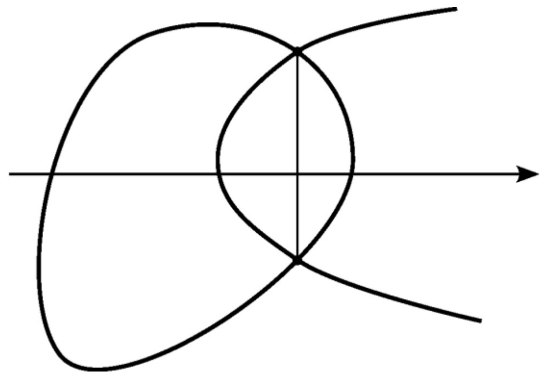


מעלת הפולינום $\det\left(S(x)\right)$ הוא לכל היותר $d_1\cdot d_2$ ולמעשה קיבלנו שיש לכל היותר $d_1\cdot d_2$ ערכי x שעבורם $\det S=0$ וזהו החסם על מספר הפתרונות המשותפים בין P,Q .

2.4 קשיים בהוכחה:

שאלה נוספת מעניינת (שבה לא נדון) –מדוע לכל x יש לכל היותר y אחד?

נתבונן בשני העקומים:



אפסי ה-resultant הם ההטלות של נקודות המפגש על ציר x. יש מצב שבו ל- 2 נקודות יש הטלה לאותה נקודה על ציר x, בשל הריבוי.
נוצרת למעשה בעיה בספירת האפסים.

3. משפט דה –קארט (Descartes rule of signs)

3.1 משפט דה קארט [2]:

תהייה $a_0, a_1, ..., a_n$ סדרת מספרים אנו אומרים שיש החלפת סימן ב a_i אם $a_i \neq 0$ והמספר אחריו ששונה מאפס סימנו הפוך מ a_i.

משפט דה קארט אומר ש מספר השורשים החיוביים של פולינום עם מקדמים ממשיים מהצורה:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0$$

לעולם אינו גדול ממספר החלפות הסימנים בסדרת המקדמים $a_0, a_1, ..., a_n$ של הפולינום.

3.2 הוכחה:

נגדיר v מספר החלפות הסימנים

r מספר השורשים החיוביים.(יש לציין שהשורשים נספרים על פי הריבוי שלהם)

נוכיח: $V = r + 2h$

הוכחה עבור v=0: אם אין החלפות סימנים השורשים בהכרח שליליים ולכן מספר השורשים החיוביים הינו 0 r=0.(פירוט במבוא)

הנחת הטענה עבור v-1 החלפות סימן ונוכיח עבור v

נבחר a_β, a_α $(\alpha < \beta)$ שני מקדמים סמוכים מחליפי סימן.

כעת ישנם 3 חלקים אפשריים לשינוי סימן:

V_1 מספר שינויי הסימן שבין $a_0,...,a_\alpha$

1 מספר שינויי הסימן שבין $a_\alpha,...,a_\beta$

V_2 מספר שינויי הסימן שבין $a_\beta,...,a_n$

ולכן סך הכול שינויי סימן יהיו $V=V_1+V_2+1$

נגדיר פונקציה חדשה $F(x)=xf'(x)-\lambda f(x)$

משפט **Gua** מדבר על כך שמספר השורשים של הפונקציה F לעולם אינו קטן ממספר השורשים של f פחות 1.

$$\begin{cases} f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n \\ f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+...+0 \end{cases}$$

$$F(x)=xf'(x)-\lambda f(x)=na_0x^n+(n-1)a_1x^n+...+0-\lambda a_0x^n-\lambda a_1x^{n-1}-...-\lambda a_n=$$
$$=(n-\lambda)a_0x^n+(n-1-\lambda)a_1x^n+...-\lambda a_n$$

המקדמים במשוואה החדשה הם:

$$(n-0-\lambda)a_0,(n-1-\lambda)a_1,...,(n-\alpha-\lambda)a_\alpha,...,(n-\beta-\lambda)a_\beta,...,(n-\alpha-\lambda)a_n$$

נבחר $n-\beta<\lambda<n-\alpha$

V_1 מספר שינויי הסימן ב $(n-\lambda)a_0,...,(n-\alpha-\lambda)a_\alpha$

V_2 מספר שינויי הסימן ב $(n-\beta-\lambda)a_\beta,...,\lambda a_n$

אבל בין $(n-\alpha-\lambda)a_\alpha,...,(n-\beta-\lambda)a_\beta$ אין שינוי בסימנים כי בחרנו את המקדמים שיהיו בעלי סימנים מנוגדים וגם a_β,a_α הם שוני סימן.

לכן קיבלנו של- $F(x)$ יש V_1+V_2 שינויי סימן.על פי מה שהוכחנו לעיל $V_1+V_2=V-1$

על פי משפט גואה ניתן לומר שמספר השורשים החיוביים של $F(x)=0$ הוא לא פחות מ- $r-1$

ולכן $r-1\le V-1$

כלומר $r\le V$

וכך הוכחנו את החלק הראשון בטענה של משפט דה-קארט.

כעת נותר להוכיח שההפרש $V-r$ <u>זוגי</u>.

ניקח את סידרת המקדמים: $a_0,a_1,...,a_n$ נבחר a_ε כמקדם האחרון ששונה מאפס.

אם V זוגי אז a_0,a_ε בעלי אותו סימן

אם V אי-זוגי אז a_0,a_ε בעלי סימנים מנוגדים

נתבונן ב $F(x)=a_0x^n+...+a_\varepsilon x^{n-\varepsilon}$

אם x מספר מספיק קטן וחיובי אז ל $F(x)$ אותו סימן כמו של a_ε (כי כל אלה שלפניו זניחים)

אם x מספר חיובי גדול אז ל $F(x)$ אותו סימן כמו של a_0

למעשה מה שקיבלנו הוא:

אם a_0, a_ε בעלי אותו סימן אז r זוגי כמו V

ואם a_0, a_ε בעלי סימנים מנוגדים אז r אי זוגי כמו V

למעשה קיבלנו את הנדרש-ל r, V אותה זוגיות.

דוגמאות:

$x^2 - 2x + 1 = 0$ יש 2 החלפות סימן ומספר השורשים החיוביים הוא 2 (x=1)

$-x^2 - 3x + 4 = 0$ יש החלפת סימן אחת ושורש חיובי אחד.(x=1)

4.דוגמאות להוכחת חובנסקי.

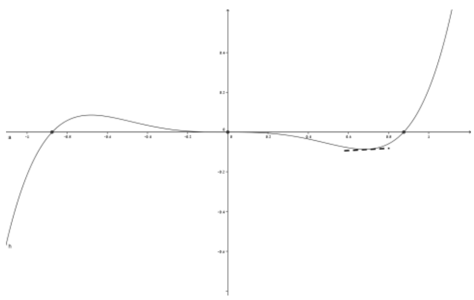
<u>דוגמא 1</u>:

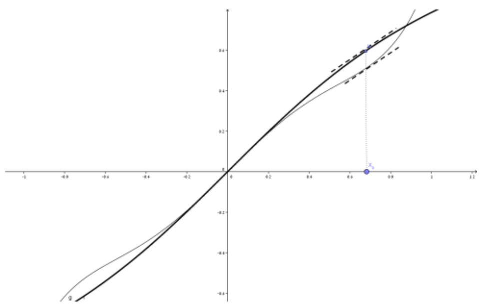
מהו החסם על מספר האפסים המשותפים של המערכת $S = \begin{cases} y = \arctan x \\ y = x^5 - x^3 + x \end{cases}$?

$y = \arctan x$ זו עקומה פאפיאנית (Pfaffian) והיא פתרון של מערכת משוואות דיפרנציאלית

מהצורה $\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) = 1 \\ \dot{y} = Q(x,y) = x^2 + 1 \end{cases}$. נמיר את הבעיה לחיפוש החסם על המערכת $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2+1} \\ y = x^5 - x^3 + x \end{cases}$.

פונקצית ההפרש:





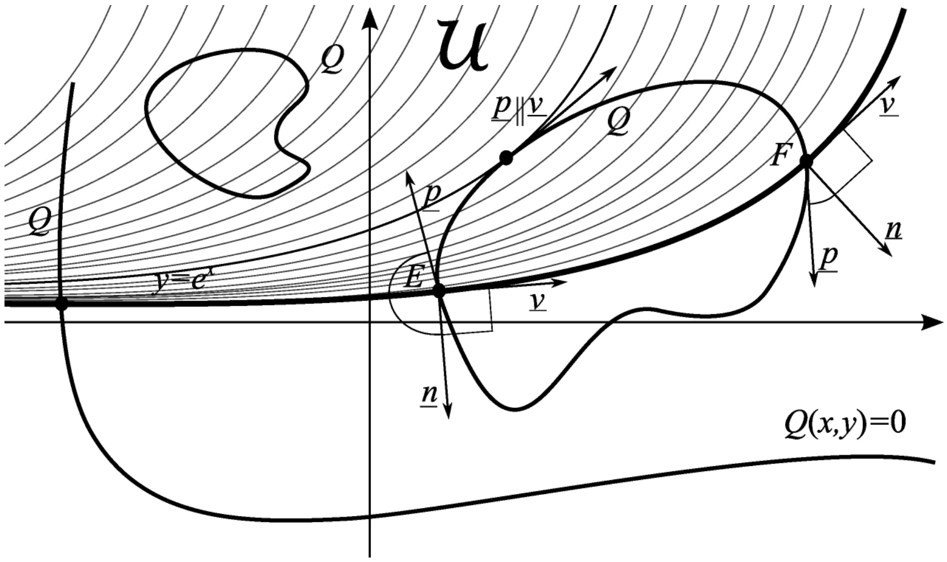
נמצא x_0 עבורו שיפועי המשיקים לעקומות בנקודה זו שווים. נשווה אם כך את הנגזרות בנקודה x_0 :

$$5x_0^4-3x_0^2+1=\frac{1}{x_0^2+1} \quad (*) .$$

כשמתבוננים בפונקצית ההפרש $\left(x^5-x^3+x\right)-\arctan(x)$ אז על פי משפט רול, בין כל שתי נקודות אפס של פונקצית ההפרש יהיה אפס של הנגזרת. אותה נק' אפס היא הפתרון של מערכת (*) . קיבלנו : $\left(5x_0^4-3x_0^2+1\right)\left(x_0^2+1\right)=1$. זהו פולינום ממעלה 6 ויש לו לכל היותר 6 אפסים, כלומר למערכת S יהיו לכל היותר 7 אפסים.

<u>דוגמא 2</u> :

נתבונן במערכת $\begin{cases} y=e^x \\ Q(x,y)=0 \end{cases}$, כש- $Q(x,y)$ הוא פולינום בשני משתנים.



$y=e^x$ זוהי עקומה פאפיאנית, כמו בסעיף 1.3, מוגדרת על ידי $\underline{v}$ שדה וקטורי

$$\underline{v}=\begin{cases} \dot{x}=1 \\ \dot{y}=y \end{cases}$$

עקומה $y=e^x$ היא שפה של תחום $U=\left\{(x,y)\,|\,e^x<y\right\}$. (החלק המקווקו בציור).

נסמן ב $\underline{n}$ וקטור הנורמלי לשפה של U הפונה מחוץ לשפה.

נניח ש $\text{grad}Q=\left(Q_x,Q_y\right)$ לא יתאפס במקום שבו $Q\ =0$. נניח גם שהעקומות $Q\ =0$ ו $y=e^x$ לא משיקות זו לזו באף נקודה. כדאי לציין שחובנסקי מוכיח גם למקרה הכללי ללא ההנחה.

על פי משפט הפונקציה הסתומה נובע ש Q עקומה חלקה

מכיוון שהעקומה חלקה היא איחוד של מעגלים (קומפיניאנטות חסומות) וישרים (קומפיניאנטות לא חסומות). כלומר במקרה של רכיב חסום ניתן לבצע פרמטריזציה חד חד ערכית וחלקה על ידי מעגל. וכשהרכיב אינו חסום לבצע פרמטריזציה חד חד ערכית וחלקה על ידי ישר.

אם (x=x(t), y=y(t)) הפרמטריזציה הזאת נסמן ב $\underline{P}=\left(\dot{x}(t),\dot{y}(t)\right)$ ווקטור הנגזרות המשיק ל $Q\ =0$. הפרמטיזציה תיתן איזושהי אוריינטציה לעקומה $Q\ =0$

ואז נקודות החיתוך עם העקומה הפאפינית יהיו אחד משני סוגים-יציאה או כניסה :

בנקודה $t=t_0$ נכנסים לתחום, אם עבור $0<\varepsilon$ קטן $t=t_0-\varepsilon$ הנקודה (x=x(t), y=y(t)) היא מחוץ ל U ועבור $t=t_0+\varepsilon$ הנקודה (x=x(t), y=y(t)) היא בתוך U (דומה לנקודת יציאה).

ברור שאחרי נקודת הכניסה תהייה נקודת יציאה.

נתבונן בזוג נקודות כניסה ויציאה $E=\left(x(t_0),y(t_0)\right)$, $F=\left(x(t_1),y(t_1)\right)$ (ראה ציור).

בנקודת הכניסה E נוצרת זוית קהה בין $\underline{p},\underline{n}$ ולכן $\underline{p}\cdot\underline{n}<0$.

בנקודת היציאה F נוצרת זוית חדה בין $\underline{p},\underline{n}$ ולכן $0<\underline{p}\cdot\underline{n}$.

נרצה לקבל עפ"י משפט ערך הביניים נקודה בקשת שבין E ו F שבתחום U בה $\underline{p}\cdot\underline{n}=0$, אבל משום שבין הנקודות E,F אין לנו שפה של U ולכן לא קיים וקטור $\underline{n}$. במקום $\underline{n}$ נשתמש בשדה הווקטורי $\underline{v}$ שהוא כן מוגדר בכל נקודה.

נתבונן במכפלה הוקטורית $\vec{p}\times\vec{v}$ (זה אפשרי כי למעשה ההבדל בין מכפלה סקלרית לוקטורית הוא הבדל שבין $\cos\alpha$ לבין $\sin\alpha$ וההפרש הוא $90°$). לפי הגדרת העקומה הפאפינית כפתרון מפריד המכפלה הווקטורית $\vec{p}\times\vec{v}$ יש אותו סימן כמו ל מכפלה הסקלארית של $\underline{n}$ ו $\underline{p}$

לכן מתקיים $\vec{p}\times\vec{v}<0$, $0<\vec{p}\times\vec{v}$ בנקודות E,F אז ישנה נקודה בין E,F עבורה $\vec{p}\times\vec{v}=0$. (על פי משפט ערך הביניים). נקרא להם נקודות השקה.

נתבונן בגרדיאנט $\text{grad}Q=\left(Q_x,Q_y\right)$. כיוון הגרדיאנט הוא הכיוון שבו גידול הפונקציה הוא המהיר ביותר. הוא מאונך לכיוון בו הפונקציה אינה משתנה כלל, בפרט מאונך לוקטור המשיק כאשר $Q\ =0$.

נבדוק מתי

$$0=gradQ\cdot\vec{v}=\left(Q_x,Q_y\right)\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$$

מכיוון ש- $y=e^x$ מיוצגת על ידי המערכת הדיפרנציאלית $\begin{cases}\dot{x}=1\\ \dot{y}=y\end{cases}$, מתקיים $(v_1,v_2)=(1,y)$

ונקבל $\begin{cases}Q_x\cdot 1+Q_y\cdot y=0\\ Q(x,y)=0\end{cases}$.

בין כל שני אפסים של המערכת ההתחלתית בין E ל F יש אפס של המערכת החדשה

$$\begin{cases}Q_x\cdot 1+Q_y\cdot y=0\\ Q(x,y)=0\end{cases}$$

זה אומר שלכל קופניאנטה חסומה של $Q=0$ מספר נקודות ההשקה אינו עולה על מספר נקודות החיתוך של הקומפניאנטה עם $y=e^x$. ולכל קומפניאנטה לא חסומה של $Q=0$ מספר נקודות ההשקה אינו עולה על מספר נקודות החיתוך של הקומפניאנטה עם $y=e^x$ פחות 1. לכן מספר הפתרונות של המערכת המקורית אינו עולה על מספר נקודות ההשקה פלוס מספר הקומפוניאנטות הלא חסומות של $Q=0$.

אבל נקודות ההשקה הם פתרונות למערכת פולינומיאלית

$$\begin{cases}Q_x\cdot 1+Q_y\cdot y=0\\ Q(x,y)=0\end{cases}$$

ועפ"י משפט בז'ו מס' הפתרונות המשותפים אינו עולה על מכפלת דרגותיהם, כלומר d^2.
ומספר הקומפונטות הלא חסומות של $Q=0$ הוא לכל היותר דרגת הפולינום Q (לכל היותר d), ראה סעיף 6.3 . לכן מספר הפתרונות של

$$\begin{cases}y=e^x\\ Q(x,y)=0\end{cases}$$

הוא לכל היותר $d+d^2$.

<u>רול פשוט</u>

חובנסקי (Khovansky) למעשה הרחיב את משפט רול שאנו מכירים לכל פונקציה פאפיאנית.
נראה כיצד עובד רול באותם תנאי ההוכחה.

נבחר : $\begin{cases}Q(x,y)=0\\ y=0\end{cases}$

כש- $Q(x,y)=f(x)-y$

נגדיר מע' משוואות דיפרנציאלית $\begin{cases}\dot{x}=1\\ \dot{y}=0\end{cases}$ שהעקומה $y=0$ הוא הפתרון המפריד שלה.

כעת $\underline{v}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\text{grad}Q=\left(Q_x,Q_y\right)=\left(f'(x),-y\right)$. הנקי ההשקה הם :

$f'(x)-y\cdot 0=\left(Q_x,Q_y\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\text{grad}Q\cdot v=0$,

כלומר $f'(x)=0$.

הלמה של חובנסקי טוענת שבין שני אפסים של המערכת יש נקודת השקה.

במקרה הזה אפס של המערכת הוא אפס של $f(x)$, ונקודות ההשקה הם האפסים של $f'(x)$,והלמה של חובנסקי היא משפט רול .

5.פונקציות פאפיניות

5.1 פתרון של מערכת משוואות דיפרנציאליות ODE

נתונה מערכת :

$$\begin{aligned}\dot{x}&=f(x,y)\\ \dot{y}&=g(x,y)\end{aligned}\qquad (1)$$

כאשר $f(x,y)$ ו-$g(x,y)$ הן שתי פונקציות רציפות

וקטור-פונקציה $z(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$,

המקיים את המערכת (1)

$\dot{x}(t)=f\left(x(t),y(t)\right),\dot{y}(t)=g\left(x(t),y(t)\right)$ נקרא פיתרון המערכת (1).

5.2 פתרון מפריד:

עקומה היא "פתרון מפריד" (separating solution) של מערכת (1) אם היא מקיימת את התנאים הבאים :

1.היא איחוד של כמה מסלולים של המערכת הדיפרנציאלית עם הכוון הטבעי, אינה עוברת דרך הנקודות הסינגולאריות

2. העקומה היא שפה של תחום.

3. האוריינטציות של פתרון מפריד הן של המערכת הדיפרנציאלית והן של שפת התחום זהות

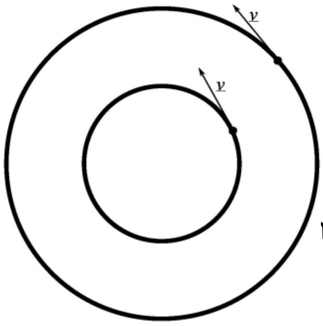
כשמסתכלים על עקומה ישנם שני היבטים .היבט אחד הוא להסתכל על העקומה כפתרון מערכת משוואות דיפרנציאליות (ODE) וההיבט השני הוא טופולוגי.

נתבונן באיחוד של שני מעגלים ,האיחוד הינו פתרון למערכת ODE :

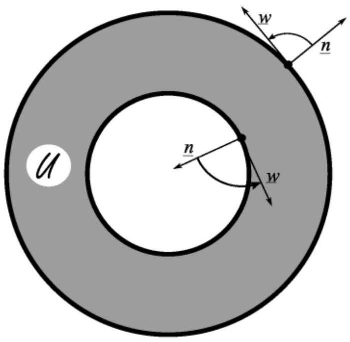
$$\dot{x} = -y$$
$$\dot{y} = x$$

האוריינטציה של האיחוד כפתרון ODE מוגדר על פי החיצים המסומנים ב $\underline{v}$

יחד עם זאת העקומה היא שפה של תחום U (הטבעת) ולכן טופולוגית יש לה אוריינטציה משלה המסומנת ב $\underline{w}$.



ניקח נורמל הפונה מחו כנגד כיוון השעון ונקבל אוריינטציה שונה על שני המעגלים.



לכן איחוד המעגלים אינו פתרון מפריד של המערכת

$$\dot{x} = -y$$
$$\dot{y} = x$$

במידה ונבנה מערכת משוואות דיפרנציאליות שונה (מדרגה גבוהה יותר) נוכל לדאוג שהמעגל הפנימי,למשל,יהפוך אוריינטציה ואז תהייה שקילות בין שתי המגמות והפתרון יהיה כפי שנרצה- פתרון מפריד.

נגדיר קו ז'ורדן (מסילת ז'ורדן)

הוא תמונה של ההעתקה רציפה $\varphi: [0,1] \to R^2$, כך ש :

$\varphi(0) = \varphi(1)$

הצמצום של ההעתקה לקטע החצי פתוח $[0,1)$ הוא חד חד ערכי.

קו ז'ורדן לפי הגדרה זו הוא לולאה רציפה ללא נקודות חיתוך עצמיות.

<u>משפט ז'ורדן אומר</u> :

יהי C קו ז'ורדן ב R^2 אז

$R^2 \setminus C$ יכיל בדיוק שתי מחלקות קשירות. אחד מהם חסום והשני לא ו C הוא השפה של כל אחד מן התחומים.

על פי משפט ז׳ורדן אם עקומה היא חלקה אז יהיה וקטור נורמאלי $\underline{n}$ הפונה מחוץ לתחום מהסוג שאנו זקוקים לו.

6.הוכחת המשפט

6.1 ניסוח המשפט

המשפט העיקרי יוכח עם הנחות של חלקות וללא נקודות סינגולאריות הוא :

מספר נקודות החיתוך שבין שתי עקומות פאפיניות בעלות דרגה n,m הוא לכל היותר (m+n)(2n+m)+n+1

6.2 משפט רול בצורה של חובנסקי

למה :

נניח ש C היא עקומה פאפינית המוגדרת על ידי שדה ווקטורי $\underline{v}$.

נניח שיש לנו עקומה חלקה $\gamma(t)$

$\gamma:[0,1]\to R$ כך ש $\gamma(0),\gamma(1)$ שניהם על C

אז קיים t ב $[0,1]$ כך ש $\dot{\gamma}(t)\times\underline{v}(\gamma(t))=0$

הנקודה $\gamma(t)$ תקרא נקודת ההשקה.

ההוכחה היא כמו בדוגמה 2 : למכפלה יש סימן שונה ל t=0 ולt=1 .

<u>מסקנות מהלמה :</u>

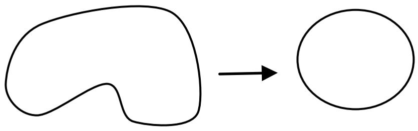
<u>מסקנה 1:</u> מספר נקודות החיתוך של עקומת ז׳ורדן חלקה עם העקומה הפאפינית הוא לכל היותר מספר נקודות ההשקה של העקומה עם השדה הווקטורי.

אכן, N נקודות חיתוך חותכות מעגל ל N קטעים ובכל קטע יש נקודת השקה (על פי הלמה).

<u>מסקנה 2:</u> כאשר אנו מחפשים נקודות החיתוך שבין שתי עקומות פאפיניות מספרן אינו עולה על מספר נקודות ההשקה פלוס מספר הקומפוניאנטות הלא חסומות.

העקומה הפאפינית מכילה רכיבים חסומים ולא חסומים :

רכיבים <u>חסומים</u> :



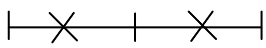
ברכיבים חסומים ניתן לבצע העתקה חד-חד-ערכית למעגל

זאת אומרת שאותם רכיבים הם עקומות ז׳ורדן

נסמן : z- מספר האפסים (Zeroes) , t - מספר נקודות ההשקה (Tangent) . לכן במעגל מתקיים

$z \le t$

רכיבים <u>לא חסומים</u> מבצעים העתקה לישר :



בישר N נקודות חיתוך חותכות ,זאת הישר ל N -1 קטעים ובכל קטע יש לפחות נקודת ההשקה אחת על פי הלמה של חובנסקי. לכן $z \le t + 1$

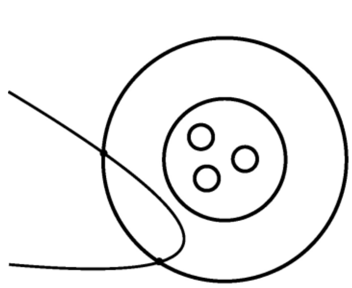
נניח שיש $S_1,...,S_n$ רכיבים חסומים, $L_1,...,L_m$ רכיבים לא חסומים.

אזי

$$\begin{array}{l} z_1 \le t_1 \\ z_2 \le t_2 \\ \vdots \\ z_n \le t_n \\ z_{n+1} \le t_{n+1} + 1 \\ \vdots \\ z_{m+n} \le t_{n+m} + 1 \\ \hline N_z = \sum_{k=1}^{m+n} z_k \le \sum_{k=1}^{m+n} t_k + m \cdot 1 \end{array}$$

6.3 חישוב כמות הרכיבים הלא חסומים:

נסמן ב- m את מספר הרכיבים הלא חסומים.



נבחר מעגל גדול $x^2+y^2=R^2$ מעגל זה יחתוך את הרכיבים הלא חסומים. אם לא יהיה חיתוך נגדיל את המעגל עד אשר יחתוך.

דרגת המעגל היא 2.

אם העקומה $Q=0$ אלגברית ודרגתה d אז עפ"י משפט בז'ו, מספר האפסים של נקודות החיתוך אינו עולה על $2d$. אולם כל קומפינאנטה חותכת את המעגל בשתי נקודות לפחות. לכן $m\le\frac{1}{2}\cdot 2d=d$, כלומר קיבלנו $m\le d$.

אם $Q=0$ עקומה פאפינית אז נקודות החיתוך הם פתרונות המערכת:

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ Q=0 \end{cases}$$

קיבלנו מערכת עם משוואות אלגבריות ונשתמש במסקנה 2.

כמות הפתרונות תהייה לכל היותר כמות נקודות ההשקה של המעגל הזה עם השדה הווקטורי שמגדירה Q וזה לכל היותר הפתרונות של המערכת המתאימה:

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ \underline{V}\cdot(2x,2y)=0 \end{cases}$$

מכאן על פי משפט בזו מספרן של נקודות ההשקה אינו עולה על $2(d+1)$.

למעגל אין קופיניאנטות לא חסומות, לכן זה גם חסם למספר פתרונות של המערכת הקודמת.

לכן מספר הרכיבים הלא חסומים לכל היותר $\frac{(d+1)\cdot 2}{2}=d+1$.

6.4 הרעיון הכללי במשפט:

יהיו ϕ_1,ϕ_2 שני עקומים פאפיניים מדרגות n,m בהתאמה. נגדיר כל פונקציה כמערכת משוואות דיפרנציאליות רגילות (ODE):

$$\phi_1=\begin{cases} \dot{x}=A_1(x,y) \\ \dot{y}=B_1(x,y) \end{cases} \quad \deg\phi_1=n$$

$$\phi_2=\begin{cases} \dot{x}=A_2(x,y) \\ \dot{y}=B_2(x,y) \end{cases} \quad \deg\phi_2=m$$

נוכיח שמספר נקודות החיתוך בין שתי העקומות אינו עולה על $(m+n)(2n+m)+n+1$.

<u>משפט</u> : $\#\begin{Bmatrix} \phi_1 = 0 \\ \phi_2 = 0 \end{Bmatrix} \le (m+n)(2n+m)+n+1$

בתהליך ההוכחה נבצע החלפה, ראשית עפ״י רול נחליף את אחת הפונקציות לאלגברית ובהחלפה השניה נגיע לשתי עקומות אלגבריות. בסופו של התהליך נשתמש במשפט בז'ו (Bézout) שאומר שמספר נקודות החיתוך של שני פולינומים אינו עולה על מכפלת דרגותיהם.

בהוכחה נגדיר :

$$P = \det\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \quad , \quad \deg P = \boxed{m+n}$$

$$R = \det\begin{vmatrix} -P_y & A_1 \\ P_x & B_1 \end{vmatrix} \quad , \quad \deg R = m+n-1+n = \boxed{2n+m-1}$$

:

מספר הרכיבים הלא חסומים של ϕ_1 הוא לכל היותר $n+1$, לפי סעיף הקודם.

קיבלנו :

$$\#\begin{Bmatrix} \phi_1 = 0 \\ \phi_2 = 0 \end{Bmatrix} \underset{Rolle}{\le} \begin{Bmatrix} \phi_1 = 0 \\ P = 0 \\ (\text{P is algebraic}) \end{Bmatrix} + \#\begin{Bmatrix} \text{unbounded} \\ \text{components of } \phi_1 \end{Bmatrix} \le$$

$$\le \begin{Bmatrix} P = 0 \\ R = 0 \\ (\text{P,R } \textit{are} \text{ algebraic}) \end{Bmatrix} + \#\begin{Bmatrix} \text{unbounded} \\ \text{components of } P \end{Bmatrix} \underset{\textbf{Bézout}}{\le} (m+n)(2n+m-1)+n+1+m+n \le$$

$$\le (m+n)(2n+m)-(m+n)+n+1+(m+n) \le (m+n)(2n+m)+n+1$$

References

[1] A. G. Khovanskii, Fewnomials, Translations of Mathematical Monographs,vol 88, AMS, Providence, RI, 1991, 139 pp.

[2] B.E.Meserve, Fundamental concepts of algebra, Dover Publications, NY, 1982