

"תוכנית רוטשילד-ויצמן למצוינות בהוראת המדעים"
במימונה של קרן קיסריה אדמונד בנימין דה רוטשילד

אסטרטגיות הניצחון למשחק Mark-t

מגישה: יפעת נחשון

מנחה: פרופ' אביעזרי פרנקל

יוני 2012

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

תוכן הענינים

2.....	תוכן הענינים	
3.....	מבוא	.1
5.....	משחקי ה-Mark	.2
5.....	משחק ה-Mark הרגיל	2.1
7.....	סכום של משחקי Mark	2.2
7.....	משחק <i>Misere</i> Mark (הפסד)	2.3
7.....	משחק UPMark	2.4
8.....	משחק ה-Mark-t	2.5
9.....	משחק ה-Mark-t ואסטרטגיות הניצחון שלו	.3
9.....	הוכחה מתי קיימת אסטרטגית ניצחון עבור המשחק Mark-t	
11.....	פונקציית Sprague-Grundy	
12.....	מה ידוע לנו עבור $t \geq 3$	
15.....	תהליך חיפוש האסטרטגיה לניצחון עבור מקרים שאינם ידועים עד כה	.4
16.....	התוצאות	.5
25.....	סיכום	.6
26.....	ביבליוגרפיה	.7

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

1. מבוא

משחקים היו חלק מהחיים, גם בתקופות קדומות. הראשון שידוע עליו כי התייחס למשחק מהאספקט המתמטי היה דניאל ברנולי. הוא דיבר מבחינה מתמטית על משחק סנט פטרבורג. משחק זה מבוסס על הסתברות ועל שיקול דעת של המשחק.

המשחק Mark-t, שייך לסוג המשחקים הנקראים משחקים קומבינטוריים. תחום זה שייך לענף במתמטיקה הנקרא קומבינטוריקה.

לפי Nowakowski משחק קומבינטורי מוגדר בדרך כלל כמשחק בו מתקיימים התנאים הבאים:

1. שני שחקנים שמשחקים לסירוגין.
 2. אין במשחק שום אלמנט הסתברותי כגון קובייה או שליפת קלף, וכל שחקן מודע לכל המהלכים האפשריים, ואף להיסטוריה של המשחק.
 3. החוקים הם כאלו שבסופו של דבר המשחק מסתיים.
 4. אין במשחק תיקו, השחקן ששיחק אחרון הוא המנצח.
- יש דעות כי משחק בו התוצאה יכולה להיות הוא גם משחק קומבינטורי. רק שלושת התנאים הראשונים חייבים להתקיים (פרנקל 1996).
- המשחק בו השחקן האחרון ששיחק מנצח נקרא משחק נורמלי. יש אפשרות שהשחקן ששיחק אחרון מפסיד ואז זהו משחק הפסד (*Misere Game*).
- Guy מפרט יותר:

1. יש רק שני שחקנים, ואין קואליציות ביניהם.
 2. יש מספר, בדרך כלל סופי של מצבים ובד"כ יש מצב התחלתי מסוים.
 3. החוקים מוגדרים באופן ברור, ומציינים את אוסף המהלכים שכל שחקן יכול לבצע בהנתן מצב מסוים.
 4. שני השחקנים משחקים לסירוגין במשחק.
 5. במשחק נורמלי השחקן שאינו יכול לבצע מהלך מפסיד.
 6. החוקים הם כאלו שהמשחק תמיד מסתיים בגלל שאחד השחקנים אינו יכול לבצע מהלך. זה נקרא תנאי סיום. אין משחקים שמסתיימים בתיקו בגלל חזרות על מהלכים.
 7. כל אחד מהשחקנים יודע מה קורה; יש מידע מלא. אין אפשרות לרמות.
 8. אין מהלכים אקראיים. לא שולפים קלף ולא מטילים קובייה.
- בשנת 1902, Bouton היה הראשון שניתח את המשחק NIM (משחק קומבינטורי) מבחינה מתמטית. הוא הראה שכל משחק שאינו חלוק שקול למצב במשחק NIM.
- בשנת 1907 Wythoff הגדיר ופתר משחק קומבינטורי נוסף.
- בשנת 1910, Lasker הרחיב את המשחק NIM, ולמעשה היה על סף פתרון כל המשחקים הבלתי חלוקים.

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

בשנת 1935 Sprague, ובשנת 1939 Grundy, כל אחד בנפרד פרסם פתרון לסכום של משחקים נורמליים בלתי חלוקים, כאשר המשחקים לא תלויים זה בזה.

בשנת 1949 Guy, פתר את המשחק Dawson's Chess. למעשה, Dawson ביקש שיפתרו את Misère Dawson ו-Guy האמין שהפתרון הוא כמעט אותו דבר. (למעשה בעיה זו לא נפתרה עד היום.) בעית ה-Misère נחקרת כיום בצורה אינטנסיבית.

בשנת 1976, Conway פרסם את הספר "On Numbers and Games". הוא גם פיתח מערכת מספרים חדשה כדי להעריך משחקים חלוקים. המספרים הללו קרואים surreal numbers. (שם זה תבע Knuth.)

בשנת 1982, יצא הספר המשותף של Berlekamp, Conway, and Guy, שנקרא Winning Ways.

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

2.1 משחק ה-Mark הרגיל

את המשחק Mark פרסם מרק קורצמאייר בתור חידת השבוע בעיתון "goodsell gazette" של המחלקה למתמטיקה ומדעי המחשב באוניברסיטת קרלטון (Goodsell Gazette) שבארצות הברית, ביוני 2010. הוראות המשחק היו:

1. הוראות המשחק לשני שחקנים הן אלו. השחקנים משחקים לפי תור. בתורם הם מקטינים מספר חיובי ומעבירים את המספר המוקטן ליריב. אם המספר הוא זוגי, שני המהלכים הבאים אפשריים:

i. חיסור 1 מהמספר.

ii. חילוק המספר לשניים.

לדוגמה, עבור המספר 28, המהלכים החוקיים הם ל-27 ול-14.

מצד שני אם המספר הוא אי זוגי, אז יש גם שני מהלכים חוקיים אפשריים:

i. חיסור 1 מהמספר.

ii. חיסור 1 מהמספר, ואז, כחלק מהמהלך, חילוק התוצאה לשניים.

לדוגמה, עבור המספר 27 המהלכים החוקיים הם ל-26 ול-13.

המשחק מסתיים כאשר המספר מגיע לאפס, והשחקן שבצע את המהלך האחרון מנצח.

לדוגמה, נתחיל במספר 15, השחקן הראשון יכול להפוך את המספר ל-7, השחקן השני יכול להפוך את המספר ל-6, השחקן הראשון הופך את המספר ל-3, והשני ל-2, השחקן הראשון ל-1 ועכשיו השחקן השני מגיע ל-0 ומנצח. מכל מקום בדוגמה זו השחקן הראשון יכול היה לשחק טוב יותר! עכשיו לבעיה:

בהנתן המשחק הטוב ביותר, אם המספר ההתחלתי הוא 1,000, האם השחקן הראשון או השני ינצחו? ומה אם נתחיל את המשחק ב-2,000?

ניתן להכליל את שני המקרים ולקבוע את המהלכים האפשריים של המשחק. בהנתן

מספר שלם שאינו שלילי n , כל שחקן בתורו יכול לבצע את אחד משני המהלכים הבאים:

i. חיסור 1 מהמספר. $(n \rightarrow n - 1)$.

ii. חילוק המספר ל-2. והתוצאה היא הערך השלם הנמוך של המנה. $(n \rightarrow \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$.

נגדיר מצב P כמצב שבו השחקן השני מנצח, כלומר, מצב שבו אין מהלך חוקי אפשרי. ומצב

N כמצב שבו השחקן הראשון מנצח, כלומר, יש מהלך חוקי המוביל למצב P. נבנה טבלה שב

נראה איזה שחקן מנצח.

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
N/P	P	N	P	N	N	N	P	N	P	N	P	N	N	N	P	N	N	N	P	N	N	N	P	N

קשה לראות מה בדיוק הולך לכן נפריד לשני מצבים.

כדי לבנות את הסדרות עלינו להגדיר מהו mex.

המילה Mex היא קיצור של minimum excluded ordinal.

בהנתן קבוצה של מספרים שלמים לא שליליים ה- mex של הקבוצה הוא המספר האי שלילי

הקטן ביותר שלא נמצא בקבוצה.

$$\text{mex}\{1,3,4,5,7\} = 0, \text{mex}\{0,1,3,4,7\} = 2$$

נגדיר את שתי הסדרות המייצגות את המהלכים האפשריים כדי לנצח במשחק Mark :

הסדרה a_n מציגה מצבים שאם שני השחקנים משחקים בצורה הטובה ביותר

עבורם, השחקן יפסיד.

הסדרה b_n מציגה מצבים שאם שני השחקנים ישחקו בצורה מיטבית השחקן

שזה המצב שלו ינצח.

$$a_n = \text{mex}\{a_i, b_i : 0 \leq i < n\} \quad (n \geq 0)$$

$$b_n = 2a_n \quad (n \geq 0)$$

נציג את התוצאות לפי הגדרה זו.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
a_n	0	1	3	4	5	7	9	11	12	13	15	16	17	19	20	21	23	25	27	28	29	31	33	35
b_n	0	2	6	8	10	14	18	22	24	26	30	32	34	38	40	42	46	50	54	56	58	62	66	70

n	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
a_n	36	37	39	41	43	44	45	47	48	49	51	52	53	55	57	59	60	61	63	64	65	67	68	69
b_n	72	74	78	82	86	88	90	94	96	98	102	104	106	110	114	118	120	122	126	128	130	134	136	138

נחזור לדוגמה שהופיע בשאלה. נאמר שם כי השחקן הראשון לא שיחק בצורה הטובה ביותר

עבורו. ואכן אנו רואים כי $15 \in a_n$ מכיוון שמהלך של חסור 1 יוביל $14 \in b_n$. אנו יכולים

לראות כי המשחק של הראשון בדוגמה היה יכול להיות טוב יותר ע"י כך שהיה מבצע את המהלך

$$14 \rightarrow 15 \text{ ולא את המהלך } 7 \rightarrow 15, \text{ כי } 7 \in a_n.$$

המשחק Mark-t הוא משחק לא חלוק. משחק לא חלוק הוא משחק בו לכל אחד

מהשחקנים יש את אותם מהלכים אפשריים. חוקי המשחק זהים לכל אחד מהשחקנים, אין

מהלכים המתאימים לשחקן אחד ואינם מתאימים לשחקן השני.

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

2.2 סכום של משחקי Mark

סכום משחקי Mark הוא אוסף של משחקי Mark. במשחק זה, המהלך מתבסס על כך שהשחקן בוחר באחד ממשחקי ה-Mark, ומבצע בו מהלך חוקי, כמו בכל משחק Mark. במשחק נורמלי השחקן שאינו יכול לבצע מהלך כלשהו בכל אחד מהמשחקים הבודדים מפסיד, ויריבו מנצח.

2.3 משחק *Misère Mark* (הפסד)

משחק זה מכונה גם MIMark. החוקים הם אותם חוקים כמו Mark נורמלי, אך השחקן שמבצע את המהלך האחרון מפסיד. כדאי לציין כי הפתרון של משחק ה-Misère Mark, עבור סכום של משחקים הוא לא פשוט. ניתן היה לחשוב שהפתרון הוא להחליף בין מצבי N למצבי P כפי שהם במשחק הנורמלי ולא כך הוא.

2.4 משחק UPMark

במשחק זה משתנים החוקים של המשחק Mark במעט. המשחק הוא עבור שני שחקנים. בהנתן n מספר שלם אי שלילי ישנם שני המהלכים חוקיים:

- ניתן לחסר 1 מ- n , ולהעביר לשחקן השני את המספר $n \rightarrow n - 1$.
- ניתן לחלק את המספר ל-2, ולהעביר לשחקן השני את המספר $n \rightarrow \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

המשחק מסתיים כאשר n מגיע ל-1. השחקן שהגיע בפעם הראשונה למספר 1 הוא המנצח.

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

2.5 משחק ה-Mark-t

משחק זה הוא הכללה של המשחק Mark.

המשחק הוא עבור שני שחקנים.

בהנתן n מספר שלם אי שלילי ישנם שני המהלכים חוקיים:

א. ניתן לחסר מ- n את אחד מהמספרים $1, 2, \dots, t-1$.

ולהעביר לשחקן השני את ההפרש.

ב. ניתן לחלק את n ב- t , ולהעביר לשחקן השני את הערך התחתון של המנה.

הערה: Mark-2 הוא משחק ה-Mark הרגיל.

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

3. משחק ה-Mark-t ואסטרטגיות הניצחון שלו

הוכחה מתי קיימת אסטרטגית ניצחון עבור המשחק Mark-t

בהנתן מספר לא שלילי n , ניתן להגדיר את המשחק Mark-t, בעזרת שתי הסדרות הבאות:

$$A = \text{mex}\{a_i, b_i | 0 \leq i < n\}$$

$$B = ta_i$$

טענה: שתי סדרות מספרים אלו משלימות זו את זו.

$$A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

הוכחה: לפי ההגדרה של A , אין מספר אי שלילי שלא יופיע באיחוד של A ו- B .

נותר לנו להוכיח כי אין מספרים משותפים לשתי הסדרות.

$$\text{נניח כי } a_n = b_m \text{ עבור } m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

אם $n > m$ אזי a_n הוא ה- mex ולכן מכיל את b_m . סתירה!

אם $n \leq m$ אזי $b_m = ta_m \geq ta_n = tb_m$, לפי הגדרת הסדרות. אך מצב זה יתכן

רק כאשר $m = 0$. סתירה!



משפט: עבור המשחק Mark-t, $N = A, P = B$

A ו- B הן שתי הסדרות המגדירות את המשחק. בהוכחה נראה שאכן הסדרה הראשונה

מתאימה למצב N , והסדרה השנייה מתאימה למצב P .

הוכחה: מספיק להראות את שתי התכונות הבאות:

I. כל שחקן שמבצע מהלך מהסדרה $b_n \in B$, מגיע תמיד למצב בסדרה A .

II. כאשר נתון מצב כלשהו $a_n \in A$, קיים מהלך המוביל למצב השייך לסדרה B .

הוכחת I:

א. התוצאה של מהלך מסוג $q \in \{1, 2, \dots, t-1\}$, $n \rightarrow n - q$, מ- $b_n \in B$ היא

$$b_n = b_n - q, q \in \{1, 2, \dots, t-1\}$$

בסדרה B (לפי ההגדרה בסדרה B יש רק מספרים המתחלקים ב- t), ולכן נמצאת ב- A .

ב. התוצאה של מהלך מסוג $\left\lfloor \frac{n}{t} \right\rfloor$ מ- $b_n \in B$ היא a_n . וזאת משום ש- b_n מתחלק ב- t ,

תוצאת החלוקה של n ב- t היא מספר שלם ללא צורך בערך תחתון. ו- $a_n = \frac{b_n}{t}$ לפי הגדרת

הסדרה, ולכן נמצאת ב- A .

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

הוכחת II:

נניח כי קיים מספר $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, שמתקבל ע"י מהלך מסוג $n \rightarrow \left\lfloor \frac{n}{t} \right\rfloor$,

$c \in A$, אם ורק אם $tc \in B$ ו- $c \in B$, אם ורק אם $tc \in A$.

נניח כי $c \in B$. אם גם $tc \in B$ לפי הגדרת הסדרות $c \in A$. סתירה!

נניח כי $tc \in A$. אך גם $c \in A$ ולכן $tc \in B$ לפי הגדרת הסדרה. סתירה!

נניח כי $a_n \in A$.

אם a_n אינו מתחלק ב- t , אז או $q \in \{1, 2, \dots, t-1\}$, $\left\lfloor \frac{a_n}{t} \right\rfloor = \frac{a_n - q}{t}$, או ש- $\frac{a_n - q}{t} \in B$ עבור

$q \in \{1, 2, \dots, t-1\}$ מסוים מהקבוצה

אם a_n מתחלק ב- t אז $\frac{a_n}{t}$ נמצא ב- B לפי הגדרת הסדרה.

■

הגדרות:

• $R(n)$ הוא הייצוג של המספר n בבסיס t .

• מספר vile הוא מספר שהייצוג שלו בבסיס t מסתיים במספר זוגי של אפסים.

קבוצת מספרים זו נסמן ב- V .

• מספר dopey הוא מספר שהייצוג שלו בבסיס t מסתיים במספר אי זוגי של אפסים.

קבוצת מספרים זו נסמן ב- D .

משפט: במשחק Mark-t, $N=V, D=P$.

הוכחה: מספיק להראות כי:

I. כל מהלך של שחקן מ- $d \in D$ מוביל תמיד למצב ב- V .

II. בהנתן מצב $v \in V$, קיים מהלך שיוביל ל- D .

הוכחת I.

נניח כי $d > 0$. אז ניתן להציג את d בבסיס t כך: $R(d) = b_n \dots b_m 0^{2r-1}$,

$b_i \in \{0, 1, \dots, t-1\}$ כאשר $b_n \dots b_m$ הם ספרות בבסיס t , $t \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, יכולות להיות

אפסים.

• מהלך מסוג $n \rightarrow n - q$, $q \in \{1, 2, \dots, t-1\}$ משנה את הסיומת של $R(d)$ להיות

$(t - q)^{2p-1}$ כך שהמספר $d - q$ הוא מספר vile.

• מהלך מסוג $n \rightarrow \left\lfloor \frac{n}{t} \right\rfloor$ מוחק את האפס האחרון, והמספר $\left\lfloor \frac{d}{t} \right\rfloor$ הופך להיות מספר vile.

הוכחת II.

הסיומת של $R(v)$ היא מהצורה: $b_m 0^{2r}$, כאשר $b_m \in \{1, 2, \dots, t-1\}$, עבור $r \geq 0$.

אם $r > 0$, אז מהלך מהסוג $n \rightarrow \left\lfloor \frac{n}{t} \right\rfloor$ מוחק את האפס האחרון ואז $\frac{v}{t}$ הוא מספר dopey.

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

אם $r = 0$, אז הסיימת של $R(v)$ היא מהצורה $b_n^x b_m^s$, $b_m \in \{1, 2, \dots, t-1\}$, $b_m \in \{0, 1, \dots, t-1\}$, $s \geq 1, x > 0$.

אם $s > 1$.

אז נוכל לחסר מ- v את אחד המספרים מהקבוצה $\{1, 2, \dots, t-1\}$, וזאת ע"י ביצוע מהלך

מסוג $n \rightarrow n - q$, והסיימת של $R(v)$ תהפוך להיות $b_m^{s-1} 0$ שהוא מספר dopey.

אם $s = 1$.

אם הסיימת של $R(v)$ היא מהצורה $b_n^x b_l b_m$ גם $b_n^x b_l \neq 0, b_m \neq 0$, נוכל לבצע מהלך של

חיסור b_m מהמספר v ולקבל את המספר $v - b_m$ שהוא מספר dopey.

אם הסיימת של $R(v)$ היא מהצורה $b_n^x b_l 0^p b_m$, $b_n^x b_l \neq 0, b_m \neq 0, x < 0$,

אם p זוגי נוכל לבצע מהלך של חיסור המספר b_m מהמספר v ונקבל את $v - b_m$, שסיימתו

היא $b_n^x b_l 0^{p+1}$, והוא מספר dopey.

אם p אי זוגי נוכל לבצע מהלך של חילוק $\left\lfloor \frac{v}{t} \right\rfloor$ ויתקבל מספר שסיימתו היא $b_n^x b_l 0^p$,

והוא מספר dopey.



פונקציית Sprague-Grundy

לפי התיאוריה של Sprague-Grundy כל משחק הוגן נורמלי שקול לגודל של ערמה במשחק

ה-NIM.

מצב במשחק הוא מצב P אם ערך פונקציית g שלו הוא 0.

פונקציית Sprague-Grundy מאפשרת לנו למצוא את מצבי ה-N וה-P במשחק Mark של

סכום. נקרא לפונקציה זו בקיצור פונקציית g .

משחק ה-Mark-t הוא הכללה של המשחק Mark, ולכן אנו משתמשים בפונקציית g , כדי

למצוא את מצבי ה-N וה-P גם עבור במשחק זה.

פונקציית g מוגדרת באופן רקורסיבי:

עבור מצב u , $g(u) = \text{mex}(F(u))$, כאשר $F(u)$ היא קבוצת כל המצבים האפשריים ממצב u .

כמו כן, נגדיר $g(\emptyset) = 0$.

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

נציג את ערכי פונקצית g עבור $t=2$.

(n מצין את המשחק, g את ערך פונקצית g ו- $R(n)$ את הייצוג של n בבסיס 2)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g	0	1	0	2	1	2	0	1	0	2	0
$R(n)$	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
g	1	2	1	0	2	1	2	0	1	2	1
$R(n)$	1011	1100	1101	1110	1111	10000	10001	10010	10011	10100	10101

n	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
g	0	2	0	1	0	2	1	2	1	0	2
$R(n)$	10110	10111	11000	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111	100000

ניתן לראות מהטבלה, ולהוכיח כי מתקיים:

$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{אם } n - \text{ יש מספר אי זוגי של אפסים בסופו ביצוג הבינארי} \\ 1 & \text{אם } n - \text{ יש מספר זוגי של אפסים בסופו ומספר אי זוגי של אחדים ביצוג הבינארי} \\ 2 & \text{אם } n - \text{ יש מספר זוגי של אפסים בסופו ומספר זוגי של אחדים ביצוג הבינארי} \end{cases}$$

ההוכחה קיימת במאמרו של פרנקל.

משפט זה נותן לנו אפשרות לחשב את ערך פונקצית g לכל n , שלא בצורה רקורסיבית, אלא

בצורה ישירה, עבור $t=2$.

מה ידוע לנו עבור $t \geq 3$

עבור $t \geq 3$, עדיין מספרי dopey בבסיס t , הם המספרים שמתארים מצבי P .

משפט: לכל $k \in \{0, 1, \dots, t-2\}$, $g(n) = k$ אם ורק אם ל- $R(n)$ יש מספר אי זוגי של k

בסופו.

הוכחה:

נוכיח באינדוקציה על n ו- k .

בסיס האינדוקציה עבור $k = 0$. הוא שקול לעובדה שמצב P הוא בדיוק קבוצת מספרי

ה- dopey בבסיס t .

נניח ש $k > 0$ ונניח שהנחת האינדוקציה מתקיימת עבור כל הערכים הקטנים מ- k . נבצע

אינדוקציה על n .

הנחת היסוד אם נניח שנתון כאשר $g(n) = k$, בגלל ש- k יכול לעבור לכל אחד מהמצבים $k -$

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

$0, 1, \dots, k-1$, וערכים אלו, נותנים על סמך האינדוקציה ערכי g של $0, 1, \dots, k-1$ בהתאמה, ע"י שימוש בחוק ה- mex . הנחת היסוד היא $g(n) = 0 \neq k$. נניח עכשיו ש- $n > k$ והשקילות נכונה עבור ערכים קטנים יותר של n . תחילה נניח כי ל- $R(n)$ יש מספר אי זוגי של k -ים. קיימים שני מקרים:

$$r < 1 \quad (i)$$

לאפשרויות $n-1, n-2, \dots, n-k$ קיימים ערכי $g, 0, \dots, k-1, k-2, \dots, k-1$ בהתאמה, ע"י הנחת האינדוקציה, ול- $\{k+1, \dots, t-1\}$, $i \in \{k+1, \dots, t-1\}$, לאפשרות $m = n-i$ יש בדיוק "זנב" אחד של $t+k-1$ כשלפניו יש $k-1 \pmod{t}$, כך של- $R(m-(t-i))$ יש בדיוק זנב של k אחד, ולכן $g(m-(t-i)) = k$ ולכן $g(m) \neq k$. ובנוסף, לאפשרות של $m = \lfloor n/t \rfloor$ יש מספר זוגי של k -ים בסוף ולכן $g(m) \neq n$ ע"י הנחת האינדוקציה.

$$r = 1 \quad (ii)$$

בגלל ש- $n > k$, יש לפני ה"זנב" של ה- $k, j \neq k$. אם יש מספר זוגי של j -ים לפני ה- k , אז הטענה היא כמו (i) עבור $\{0, 1, \dots, k-1\} \subset g(S_n)$ עדיין נכונה. עבור $i \in \{k+1, \dots, t-1\}$, $R(n-i)$ מסתיים ב- $(j-1)(t+k-i)$ כאשר לפניו יש מספר אי זוגי של j -ים. אם $j > k+1$, אז אנחנו יכולים לבצע מהלך של חיסור כדי להפוך את הסיפורה האחרונה להיות k , ואם $j = k+1$ אנחנו יכולים לבצע מהלך של חילוק ב- t , ולהפוך את הסיפורה האחרונה להיות k , ולכן $g(n-i) \neq k$. לבסוף, $\lfloor n/t \rfloor$ לא מסתיים ב- k -ים, ולכן ערך ה- g אינו שווה ל- k .

נניח עכשיו, כי יש מספר אי זוגי של j -ים שלפניהם יש k . אם $j > k$, אז הטענה ממקרה (i), מראה כי $\{0, 1, \dots, k-1\} \subset g(S_n)$.

אם $j < k$, יש רק אפשרות אחת למהלך וזה כאשר אנחנו עוברים ל- $n-(k-j)$, אבל אז $g(\lfloor n/t \rfloor) = j$.

עבור $i \in \{k+1, \dots, t-1\}$ טענה (i) מתקיימת, כאשר $n-i$ מסתיים ב- $t+k-i$ כשלפניו $j-1 \neq t+k-i$, לכן $g(n-i) \neq k$. וכך הוכחנו שמתקיים: $g(\lfloor n/t \rfloor) = j \neq k$. לעומת זאת, נניח כי ל- $R(n)$ יש מספר זוגי של k -ים בסופו.

אם $r > 0$, אז ל- $m = \lfloor n/t \rfloor$ יש מספר אי זוגי של k -ים בסופו, ונובע מהנחת האינדוקציה כי $g(m) = k$ ולכן $g(n) \neq k$.

נסתכל על המקרה בו $r = 0$.

ניתן לכתוב את $R(n) = d_1 k^j d_2$, כאשר $d_1, d_2 \neq k$, ויתכן כי d_1 ריק. יש לנו שני מקרים:

$$j = 0 \quad (i)$$

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

אם $d_2 > k$, אז $R(n - (d_2 - k)) = \dots d_1 k$, ולפי הנחת האינדוקציה
 $g(n - (d_2 - k)) = k$ ולכן $g(n) \neq k$.
 אם $d_2 < k$, אז יש שני תתי מקרים, תלוי אם d_1, d_2 שונים זה מזה או לא.
 אם $d_1 \neq d_2$, אז ל- $R(n)$ יש בדיוק זנב של d_2 , ולכן $g(n) = d_2 \neq k$.
 אם $d_1 = d_2 < k$, אז $R(n - (t + k - d_2)) = \dots (d_1 - 1)k$, ויש לו זנב של k אחד ולכן
 $g(n - (t + k - d_2)) = k$ ולכן $g(n) \neq k$.
 (ii) $j > 0$.

במקרה זה יש שני תתי מקרים התלויים בזוגיות של j :

אם j אי זוגי, אז ל- $R(\lfloor n/t \rfloor)$ יש מספר אי זוגי של k -ים בסופו, ולכן לפי הנחת האינדוקציה
 $g(\lfloor n/t \rfloor) = k$ ולכן $g(n) \neq k$.
 אם j זוגי, אז יש שני תתי מקרים נוספים:
 אם $d_2 < k$ אז לפי הנחת האינדוקציה $g(n) = d_2$.
 אם $d_2 > k$ אז ל- $R(n - (d_2 - k))$ יש מספר אי זוגי של k -ים, ולכן
 $g(n - (d_2 - k)) = k$ ולכן $g(n) \neq k$.

למה: אם $R(n) = wk(t - 1)^r$ ו- $R(m) = (t - 1)$, כאשר $r > 1$, $k \neq t$ ו- w הוא

מחרוזת (יכולה להיות ריקה), אז $g(n) = g(m)$ אם ורק אם r אי זוגי.

במילים אחרות, אפשר למחוק את הזנב של ה- $(t - 1)$ -ים שלאחר ה- $(t - 1)$ הראשון
 וערך ה- g יהיה לסירוגין $t - 1$ ו- t לכל $(t - 1)$ שנמחק.

הוכחה: ע"י אינדוקציה. מספיק להראות כי $R(m) = wk(-1)^{r-1}$, ואז $g(n) \neq g(m)$.

זה קל כי m הוא מהלך אפשרי מ- n ע"י חלוקה ב- t . בגלל ששני ערכי ה- g , $\{t - 1, t\}$, הן ערכי
 ה- g לסירוגין.

הלמה הזו מאפשרת לנו למחוק את הזנב של ה- $(t - 1)$ -ים מעבר לראשון כאשר אנחנו

מבחינים בין מספרים עם ערכי g בתוך $\{t - 1, t\}$. כך שאנו צריכים לטפל רק במקרים בהם יש

בסוף $(t - 1)$ בודד או שאין בסוף $(t - 1)$.

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם.
 אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר
 (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ
 זה או חלק ממנו.

4. תהליך חיפוש האסטרטגיה לניצחון עבור מקרים שאינם ידועים עד כה

- במאמרו של Alan Guo מוצגת אסטרטגיה חלקית כדי לדעת עבור איזה ערך של מספר, יש לשחקן מסוים, אסטרטגית ניצחון במשחק Mark-t.
- האסטרטגיה שמובאת, מאפשרת לנו לבדוק מי המנצח, וזאת בעזרת הייצוג בבסיס t של המספר n . על מספר זה, עתיד להתבצע המהלך הבא. המאמר נותן מענה לערך פונקצית ה-Sprague-Grundy שמחשב רק כאשר ערכי פונקציה זו קטנים מ- $t - 1$, ורק כאשר בזנבו של n , המיוצג בבסיס t , יש מספר אי זוגי של k -ים, ואז ערך פונקצית ה-Sprague-Grundy שווה ל- k . נותר לנו לבדוק מה קורה במקרים הבאים:
- מהם ערכי פונקצית ה-Sprague-Grundy, כאשר הייצוג בבסיס t של n , מסתיים במספר זוגי של k -ים, $k < t - 1$?
 - מהם ערכי פונקצית ה-Sprague-Grundy, כאשר הייצוג בבסיס t של n , מסתיים ב- $t - 1$?
 - מהם ערכי פונקצית ה-Sprague-Grundy, כאשר הייצוג בבסיס t של n , מסתיים ב- t ?

לשם בחינת מקרים אלו בנינו תוכנית מחשב המחשבת את ערכי פונקצית ה-Sprague-Grundy עבור בסיסים שונים.

בשלב התוכנית מיינה את המספרים לפי ערכי פונקציה ה-Sprague-Grundy המתאימים. בפלט הופיע המספר, יצוגו בבסיס t וערך פונקציה ה-Sprague-Grundy. ניסינו למצוא מה המשותף בין המספרים.

בהמשך ראינו כי יש משמעות גם לבסיס t^2 , ולכן הוספנו לפלט עמודה בה מופיע גם המספר מיוצג בבסיס t^2 .

לאחר מכן הוספנו גם את תוצאת החלוקה של המספר ב- t^2 ואת השארית של חלוקה זו.

לא סיימנו לנתח ולהסיק מסקנות מוכחות, אך ראינו כמה ממצאים מעניינים.

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

5. התוצאות

בחלק זה נציג את המסקנות החלקיות שראינו.
 הרצנו את תוכנית המחשב עבור ערכי $t : t=3,4,\dots,10$.
 סיכמנו את הממצאים עבור שארית החלוקה ב- t^2 . תוצאות אלו מוצגות להלן.

טבלה עבור $t=3$

שארית החלוקה ב- t^2	ערך פונקצית g
0	0 או 2 או 3
1	1
2	2 או 3
3	0

4	1 או 2 או 3
5	2 או 3
6	0
7	1
8	2 או 3

טבלה עבור $t=4$

שארית החלוקה ב- t^2	ערך פונקצית g
0	0 או 3 או 4
1	1
2	2
3	3 או 4
4	0
5	1 או 3 או 4
6	2
7	3 או 4

8	0
9	1
10	2 או 3 או 4
11	3 או 4
12	0
13	1
14	2
15	3 או 4

טבלה עבור $t=5$

שארית החלוקה ב- t^2	ערך פונקצית g
0	0 או 4 או 5
1	1
2	2
3	3
4	4 או 5
5	0
6	1 או 4 או 5
7	2
8	3
9	4 או 5
10	0
11	1

12	2 או 4 או 5
13	3
14	4 או 5
15	0
16	1
17	2
18	3 או 4 או 5
19	4 או 5
20	0
21	1
22	2
23	3
24	4 או 5

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם.
 אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר
 (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ
 זה או חלק ממנו.

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

טבלה עבור $t=6$

17	5 או 6
18	0
19	1
20	2
21	3 או 5 או 6
22	4
23	5 או 6
24	0
25	1
26	2
27	3
28	4 או 5 או 6
29	5 או 6
30	0
31	1
32	2
33	3
34	4
35	5 או 6

שארית החלוקה ב- t^2	ערך פונקצית g
0	0 או 5 או 6
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5 או 6
6	0
7	1 או 5 או 6
8	2
9	3
10	4
11	5 או 6
12	0
13	1
14	2 או 5 או 6
15	3
16	4

טבלה עבור $t=7$

13	6 או 7
14	0
15	1
16	2 או 6 או 7
17	3
18	4
19	5
20	6 או 7
21	0
22	1
23	2
24	3 או 6 או 7
25	4
26	5
27	6 או 7

שארית החלוקה ב- t^2	ערך פונקצית g
0	0 או 6 או 7
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6 או 7
7	0
8	1 או 6 או 7
9	2
10	3
11	4
12	5

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

4	39
7 או 6 או 5	40
7 או 6	41
0	42
1	43
2	44
3	45
4	46
5	47
7 או 6	48

0	28
1	29
2	30
3	31
4 או 7 או 8	32
5	33
7 או 6	34
0	35
1	36
2	37
3	38

טבלה עבור t=8

1	25
2	26
8 או 7 או 3	27
4	28
5	29
6	30
8 או 7	31
0	32
1	33
2	34
3	35
8 או 7 או 4	36
5	37
6	38
8 או 7	39
0	40
1	41
2	42
3	43
4	44
8 או 7 או 5	45
6	46
8 או 7	47
0	48
1	49
2	50

ערך פונקצית g	שארית החלוקה ב- t^2
8 או 7 או 0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
8 או 7	7
0	8
8 או 7 או 1	9
2	10
3	11
4	12
5	13
6	14
8 או 7	15
0	16
1	17
8 או 7 או 2	18
3	19
4	20
5	21
6	22
8 או 7	23
0	24

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

2	58
3	59
4	60
5	61
6	62
8 או 7	63

3	51
4	52
5	53
8 או 7 או 6	54
8 או 7	55
0	56
1	57

טבלה עבור $t=9$

2	29
9 או 8 או 3	30
4	31
5	32
6	33
7	34
9 או 8	35
0	36
1	37
2	38
3	39
9 או 8 או 4	40
5	41
6	42
7	43
9 או 8	44
0	45
1	46
2	47
3	48
4	49
9 או 8 או 5	50
6	51
7	52
9 או 8	53
0	54
1	55
2	56
3	57
4	58

ערך פונקציה g	שארית החלוקה ב- t^2
9 או 8 או 0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
9 או 8	8
0	9
9 או 8 או 1	10
2	11
3	12
4	13
5	14
6	15
7	16
9 או 8	17
0	18
1	19
9 או 8 או 2	20
3	21
4	22
5	23
6	24
7	25
9 או 8	26
0	27
1	28

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

7 או 8 או 9	70
8 או 9	71
0	72
1	73
2	74
3	75
4	76
5	77
6	78
7	79
8 או 9	80

5	59
6 או 8 או 9	60
7	61
8 או 9	62
0	63
1	64
2	65
3	66
4	67
5	68
6	69

טבלה עבור $t=10$

2 או 9 או 10	22
3	23
4	24
5	25
6	26
7	27
8	28
9 או 10	29
0	30
1	31
2	32
3 או 9 או 10	33
4	34
5	35
6	36
7	37
8	38
9 או 10	39
0	40
1	41
2	42
3	43

ערך פונקצית g	שארית החלוקה ב- t^2
0 או 9 או 10	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9 או 10	9
0	10
1 או 9 או 10	11
2	12
3	13
4	14
5	15
6	16
7	17
8	18
9 או 10	19
0	20
1	21

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

1	71
2	72
3	73
4	74
5	75
6	76
7 או 9 או 10	77
8	78
9 או 10	79
0	80
1	81
2	82
3	83
4	84
5	85
6	86
7	87
8 או 9 או 10	88
9 או 10	89
0	90
1	91
2	92
3	93
4	94
5	95
6	96
7	97
8	98
9 או 10	99

4 או 9 או 10	44
5	45
6	46
7	47
8	48
9 או 10	49
0	50
1	51
2	52
3	53
4	54
5 או 9 או 10	55
6	56
7	57
8	58
9 או 10	59
0	60
1	61
2	62
3	63
4	64
5	65
6 או 9 או 10	66
7	67
8	68
9 או 10	69
0	70

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

השערות שעלו מטבלאות אלו:

- (1) נגדיר את p להיות שארית החלוקה של המספר n ב- t^2 .
 נוכל להציג את p בצורה $p = q \cdot t + r$.
 ערך פונקצית g עבור המספר n שווה ל- r , פרט למקרה בו $q = r$. במקרה זה פונקצית g מקבלת בנוסף את הערכים של t ו- $t-1$.
 לא הצלחנו לאפיין עבור אילו מספרים מתקבל כל אחד מערכים אלו.
- (2) בכל אחת מהטבלאות יוצרת מנת החלוקה של המספר n ב- t^2 , שתי סדרות משלימות של המספרים האי שליליים השלמים.
 עבור השארית $t^2 - 1$ והשארית $t - 1$, וערך פונקצית g שווה ל- t נקבל שתי סדרות משלימות.
 עבור השארית $t^2 - 1$ והשארית $t - 1$, וערך פונקצית g שווה ל- $t-1$ נקבל שתי סדרות משלימות.
 לדוגמא: עבור $t=4$, כאשר שאריות החלוקה ב- t^2 הן 15 ו-11, מנת החלוקה, של כל אחת משאריות אלו מהווה סדרה משלימה לרעותה.

ערך פונקצית g	שארית חלוקה ב- t^2	מנת חלוקה ב- t^2
3	11	0
3	11	1
3	11	2
3	15	3
3	15	4
3	11	5
3	11	6
3	15	7
3	15	8
3	15	9
3	11	10
3	15	11
3	15	12
3	15	13
3	15	14
3	11	15
3	15	16
3	15	17
3	15	18
3	11	19

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

3	11	20
---	----	----

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

6. סיכום

התחום של תורת המשחקים היה קרוב לליבי מאז לימודי התואר הראשון. אחד מהקורסים המעניינים ביותר שלמדתי גם במהלך לימודי לתואר השני במסגרת תוכנית רוטשילד ויצמן, היה הקורס בתורת המשחקים, אותו העביר פרופ' מוסל.

סקרנה אותי הפשטות שבמשחק מול המורכבות המתמטית שעומדת מאחריו. כאשר אנו אומרים 'משחק' בדרך כלל כוונתנו למשחקי ילדים. אותו משחק ילדים שנראה פשוט ותמים, לעיתים, עומדת מאחוריו תיאוריה מתמטית מורכבת. בחלק מהמקרים, עדיין לא הצליחו למצוא אסטרטגיה משחק שמביאה לניצחון.

בעבודה זו עסקתי בתחום חדש עבורי, תחום המשחקים הקומבינטוריים. התמקדתי במשחק אחד משחק Mark-t. גם משחק זה נראה לכאורה פשוט, ללא חוקים מורכבים. משחק זה מבוסס על חוקי של משחק Nim, שהניתוח המתמטי עבורו נראה סגור. השינוי הקטן בחוקי המשחק גורר שינוי כה גדול בתיאוריה המתמטית, ועדיין לא נמצא פתרון שלם למשחק זה.

העבודה במחיצתו של פרופ' פרנקל, העניקה לי הזדמנות לצפות בעבודתו ודרך חשיבתו של מתמטיקאי. ראיתי את יכולתו לנתח נתונים, לחפש דרכים אלטרנטיביות לפיתרון, ולא להתיאש אפילו שהפתרון לא נראה באופן מידי בהישג יד. תודתי על הזדמנות נדירה זו, נתונה לו מקרב לב. במסגרת עבודתי כמורה, אני עובדת עם תלמידים מתקשים. דרך המשחק אני יכולה לעניין אותם, ולהביא לפניהם תיאוריות מתמטיות, ואסטרטגיות פתרון לבעיות, ללא 'יראת המתמטיקה'. עצם המשחק מהנה ומושך את הלב, וכך ניתן להקנות לתלמיד הן חומר לימוד מורכב והן כלים לשימוש במהלך חייו.

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.

A.S. Fraenkel, *Aperiodic subtraction games*, Electronic J. Combinatorics vol. 18(2) #P19 12 pp., 2011.

http://www1.combinatorics.org/Volume_18/v18i2toc.html

A.S. Fraenkel, *The vile, dopey, evil and odious game players*, Discrete Math. 312 (2012), special volume in honor of the 80th birthday of Gert Sabidussi, 42-46

A. Guo, *Winnings strategies for aperiodic subtraction games*, Theoretical Computer Science, Vol 421, (2012), 70-73.

R. K. Guy, *What is a game?*, *All games bright and beautiful*, Games of no chance (ed. R. J. Nowakowski), Cambridge, (1998), 43-60.

R. J. Nowakowski, *The history of combinatorial game theory*. Proceedings of Board Game Studies Colloquium XI (ed. J. N. Silva), (2009), pp. 133-145, Lisbon, Portugal.

R. J. Nowakowski, *All games bright and beautiful*, Games of no chance (ed. R. J. Nowakowski), Cambridge, (1998), 1.

קובץ זה אך ורק לשימוש האישי של מורים למתמטיקה, פיזיקה, כימיה וביולוגיה ולהוראה בכיתותיהם. אין לעשות שימוש כלשהו בקובץ זה לכל מטרה אחרת, ובכלל זה: שימוש מסחרי, פרסום באתר אחר (למעט אתר בית הספר בו מלמד המורה), העמדה לרשות הציבור או הפצה בדרך אחרת כלשהי של קובץ זה או חלק ממנו.