מכון ויצמן למדע

מדרשת פיינברג – המחלקה להוראת המדעים

אנליזה לא סטנדרטית

מנחה: פרופסור יקר קנאי

מגישה: קירה סגל

אוקטובר 2013

תוכן עניינים

מבוא

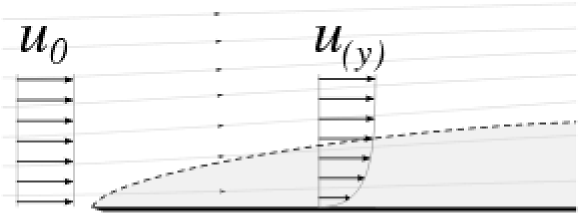
"קיים בסיס מוצק להניח שאנליזה לא סטנדרטית בגרסה זו או אחרת תהיה האנליזה של העתיד"

(קורט גדל, 1973)

המונח "אנליזה לא סטנדרטית"הופיע לראשונה בשנת 1961 במאמר שהתפרסם בכתב-עת של האקדמיה למדעים של הולנד. המאמר נכתב על ידי *אברהם רובינסון* (1918-1974), שנודע בגישה העושה שימוש במודלים בלוגיקה מתמטית המבוססים על תאוריית מסנני העל (Ultrafilters) ועל משפטי השלמות והקומפקטיות. רובינסון כתב: "המטרה העיקרית שלנו - היא להראות, שמודלים האלה מספקים גישה טבעית לבעיה ארוכת שנים של חישובים הכוללים מספרים אינפיניטסימליים או מספרים "גדולים לאינסוף". כפי שידוע היטב, השימוש באינפיניטסימליים, זכה לתמיכתו של לייבניץ, אשר הגן עליו והצדיק אותו, וללא ספק נלקח על ידי *אוילר*, נדחה על ידי הגישה של *קושי*, אשר נתנה בסיס מוצק לאנליזה מתמטית. על ידי כך, אנליזה קיבלה כלים מתמטיים מתוחכמים והפכה לתחום מופשט".

עד שנת 1961, היחס למושג "אינפיניטסימלי" כגודל קבוע של מספר קטן מאוד היה זלזול עמוק, ובמקרה הפחות טוב היחס היה כמושג חסר משמעות מתמטי. רובינסון היה המתמטיקאי הראשון שייחס למושג הזה משמעות מתמטית מדויקת. אחת הסיבות לכך היא עבודה בתחום המחקר והפיתוח בקולג' המלכותי לאווירונאוטיקה באנגליה (בשנים 1946-1951) ובאוניברסיטת טורונטו במחלקה למתמטיקה שימושית (בשנים 1951-1957). רובינסון עבד בצוות שפיתח את התאוריה של "כנף דלתא"- תאוריה יעילה במיוחד לטיסות במהירות על קולית גבוהה. במהלך עבודתו חקר רובינסון את מהירות זרימת האוויר ואת השפעתה על מהלך הטיסה.

אחד המושגים המרכזיים באווירודינמיקה הוא "שכבת הגבול": שכבה שבה מתרחש שינוי מיידי של מהירות האוויר ממהירות שווה ל-0 למהירות השווה בקירוב למהירות החיצונית. עובי שכבת הגבול תלוי בצמיגות ולחץ האוויר, בצורתו של הגוף התעופה, ובמצבו בזרימת האוויר. עובי שכבת הגבול הולך וגדל מקצה הקדמי לקצה האחורי של גוף התעופה. האופי של תנועת חלקיקי האוויר בתוך שכבת הגבול שונה מאופיים של תנועת חלקיקי האוויר מחוץ לשכבת הגבול.



השרטוט לעיל מתאר את השינוי של מהירות האוויר ליד הכנף (או חלק אחר בגוף של כלי תעופה): בסמוך לכנף המטוס, חלקיקי האוויר אינם מחליקים על פני הכנף אלא מאטים את עצמם, וכתוצאה מכך מהירות האוויר שווה ל-0. אם נתרחק מהכנף במרחק של מילימטרים ספורים (עובי שכבת הגבול), מהירות האוויר תלך ותגדל מ-0 עד למהירות של זרימת האוויר.

עבודת המחקר של אברהם רובינסון במכניקה ובאווירודינמיקה אפשרה לו לנקוט בגישה רעננה בתחומים שונים של מתמטיקה. חשיבה מחודשת על התפקיד של גדלים "אינפיניטסימליים" בתחומי מדע שונים נתנה דחיפה לפיתוח אנליזה מתמטית חדשה – אנליזה לא סטנדרטית.

המספר האינפיניטסימלי: הגדרה

אינטואיציה

אחד העקרונות החשובים ביותר באנליזה הלא-סטנדרטית היא התייחסות למספר אינפיניטסימלי כגודל קבוע. גישה זו עולה בקנה אחד עם האינטואיציה הטבעית וגם עם ההתפתחות ההסטורית של האנליזה המתמטית. בכל ספר פיזיקה ניתן לראות התייחסות לשינויים "קטנים מאוד" של זמן, של נפח, ושל גדלים פיזיקליים אחרים. לכל הגדלים האלו מתייחסים כגדלים "קטנים מאוד" שכמעט שווים ל-0, ולא כמשתנים. גם בספרי מתמטיקה, בתחום הגיאומטריה הדיפרנציאלית, ניתן לראות התייחסות לאורך האינפיניטסימלי של הקשת ds כ"קשת קטנה מאוד".

נתקדם לקראת הגדרה של מספר אינפיניטסימלי. ראשית, מובן כי 0 הוא מספר אינפיניטסימלי. נחפש כעת מספר אינפיניטסימלי חיובי ממש. התשובה האינטואיטיבית הראשונה היא: המספר הקטן ביותר מכל המספרים החיוביים.

קל לראות, שאם מספר קטן יותר מכל המספרים החיוביים, הוא חייב להיות קטן גם עצמו. נדרש שמספר ε יהיה קטן מכל המספרים החיוביים, אבל גדול מ-0, כלומר ε יהיה מספר הקטן ביותר בקבוצה של מספרים חיוביים.

ההגדרה הזו נפוצה מאוד בקרב תלמידים המתחילים ללמוד את האנליזה. למרבה הצער, לא קיים מספר ממשי ε עם תכונה כזו, מכיוון שלפי תכונות המספרים הממשיים, לכל מספר $a > 0$ מתקיים אי שוויון $0 < {}^{a}/_{2} < a$. לכן אם $0 < \varepsilon$, אז המספר ${}^{\varepsilon}/_{2}$ הוא מספר חיובי שקטן מ- ε. אם אנחנו רוצים לשמור על כל התכונות של המספרים הממשיים מצד אחד ומצד שני להגדיר מספרים אינפיניטסימליים, עלינו להשתמש בהגדרה מורכבת יותר.

הגדרה פורמלית

מספר $0 < \varepsilon$ נקרא מספר אינפיניטסימלי, אם כל סכום חלקי של הטור האינסופי

$$\varepsilon, \quad \varepsilon+\varepsilon, \quad \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon, \quad \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon, \ldots, \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\cdots+\varepsilon$$

הוא מספר קטן מ-1.

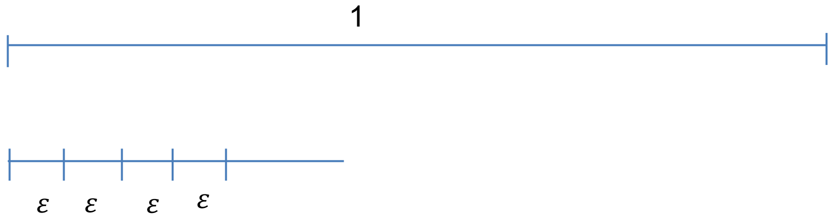
את הדרישה שלנו למספר אינפיניטסימלי, ניתן לכתוב גם בצורה הבאה (נחלק ב- ε):

$$1 < {}^{1}/_{\varepsilon}, \qquad 1+1 < {}^{1}/_{\varepsilon}, \qquad 1+1+1 < {}^{1}/_{\varepsilon}, \dots\dots$$

כלומר, אם מספר ε הוא מספר "קטן מאוד", אז המספר ${}^{1}/_{\varepsilon}$ הוא מספר "גדול מאוד", מכיוון שהוא גדול מכל מספר מהצורה:

$$1, \qquad 1+1, \qquad 1+1+1, \dots., 1+1+1+\cdots\dots$$

במלים אחרות, אם ε הוא מספר אינפיניטסימלי, אז כל כמות של קטעים באורך שווה ל- ε, שנחבר זה לזה, לעולם לא יהיה שווה ל-1.



לחלופין, אם נמדוד קטע באורך ${}^{1}/_{\varepsilon}$ בעזרת בנייה רקורסיבית של קטעים באורך יחידה אחת, לעולם לא נוכל לסיים את התהליך הזה.

קיומם של מספרים אינפיניטסימליים סותר את האקסיומה של ארכימדס, לפיה ניתן להשוות כל שני קטעים ממשיים: אם מניחים עותקים של הקטע הקצר זה אחר זה, בסופו של דבר אפשר יהיה לכסות את הקטע הארוך. ניסוח חלופי לאקסיומה של ארכימדס הוא שלכל שני מספרים שונים a, b, כך ש $0 < a < b$, מתקיים אחד מאי שוויוניים הבאים:

$$\begin{cases} a+a > b \\ a+a+a > b \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a+a+a+\cdots\dots > b \end{cases}$$

בקבוצה של מספרים ממשיים R המקיימת את אקסיומת ארכימדס לא קיימים מספרים אינפיניטסימליים. בהמשך נראה שהאקסיומה של ארכימדס שקולה לטענה על אי הקיום של מספרים אינפיניטסימליים לא שווים ל-0 בקבוצה של מספרים ממשיים.

מסקנה: עלינו להרחיב את הקבוצה של המספרים הממשיים R עד לקבוצה גדולה יותר של מספרים, הכוללת את המספרים האינפיניטסימליים, ובנוסף מקיימת את התכונות החיוניות של המספרים הממשיים (פרט לאקסיומה של ארכימדס). איברי הקבוצה החדשה R^* ייקראו מספרים היפרממשיים, או מספרים לא ארכימדיים.

האנליזה הלא-ארכימדית חוקרת את קבוצת המספרים ההיפרממשיים, ומשתמשת בתוצאות המתקבלות לחקירה של מספרים ממשיים. באופן כזה, ניתן לקבל הוכחות "לא סטנדרטיות" של תכונות שונות של מספרים ממשיים.

תכונות המספרים ההיפרממשיים

כאמור לעיל, בקבוצה הזו קיימים מספרים אינפיניטסימליים, שלכל אחד מהם התכונה הבאה: אם נחבר מספר אינפיניטסימלי עם עצמו אינסוף פעמים, הסכום יהיה תמיד קטן מ-1. בנוסף, בקבוצה זו כל המספרים הממשיים, המקיימים את התכונות הבאות:

1. $a+b=b+a$
2. $a+(b+c)=(a+b)+c$
3. $a+0=a$
4. $a+(-a)=0$
5. $a\cdot b=b\cdot a$
6. $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
7. $a\cdot 1=a$
8. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
9. $\mathrm{a}\cdot {}^{1}\!/_{a}=1$, עבור $a\neq 0$

קבוצה של מספרים המקיימת את התכונות האלו נקראת שדה של מספרים. לפיכך גם הקבוצה R^* חייבת להיות שדה של מספרים. נגדיר גם אקסיומות של סדר המתקיימות ב-R^*:

10. אם $a>b$, ו- $b>c$ אז $\mathrm{a}>\mathrm{c}$
11. אם $a>b$, אז $a+c>b+c$ עבור כל מספר c
12. אם $a>b$, ו- $c>0$, אז $a\cdot c>b\cdot c$
13. אם $a>b$, ו- $c<0$, אז $a\cdot c<b\cdot c$

שדה סדור R^* צריך להיות הרחבה של השדה הסדור R על ידי של מספרים אינפיניטסימליים שונים מ-0.

מספר אינפיניטסימלי של שדה סדור: הגדרה

איבר $x \geq 0$ של שדה סדור נקרא איבר אינפיניטסימלי, אם הוא מקיים:

$$x < 1, \qquad x + x < 1, \qquad x + x + x < 1, \dots \dots .., x + x + x + x + \cdots x, \dots < 1$$

הגדרה זו מתאימה למספרים אי שליליים. המספר השלילי x נקרא מספר אינפיניטסימלי, אם המספר $|x| = -x$ הוא מספר אינפיניטסימלי.

ישר היפרממשי

נניח כי R^* היא הרחבה לא ארכימדית של R. נקרא למספרים הממשיים (איברי R) מספרים סטנדרטיים, ולמספרים אחרים (איברי $R^* \setminus \mathrm{R}$) נקרא מספרים לא סטנדרטיים.

לפי הגדרת R^*, קיימים בו מספרים אינפיניטסימליים חיוביים. יהי ε אינפיניטסימלי כזה.

<u>טענה</u>: המספר ε קטן מכל מספר חיובי סטנדרטי a.

<u>הוכחה</u>: נניח $a \geq \varepsilon$. מכיוון ש- a מספר סטנדרטי, הוא מקיים את האקסיומה של ארכימדס, ועבורו ניתן למצוא n, טבעי כלשהו כך ש: $a + a + a + a \dots ..+a \geq 1$ (נחבר n פעמים).

אבל $\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \cdots + \varepsilon \geq a + a + a + a \dots + a \geq 1$

קיבלנו סתירה עם ההגדרה של ε כמספר אינפיניטסימלי. לכן $\varepsilon < \mathrm{a}$.

<u>מסקנה</u>: המספרים האינפיניטסימליים קטנים מכל המספרים הסטנדרטיים החיוביים.

בנוסף למספרים אינפיניטסימליים, קיימים מספרים מהצורה: $1 + \varepsilon$ (כאשר $0 < \varepsilon$ הוא מספר אינפיניטסימלי), כך שגם הם מספרים לא סטנדרטיים. נשים לב כי מספר זה אינו אינפיניטסימלי משום שהוא גדול מ-1. דוגמא נוספת למספר לא סטנדרטי הוא המספר $1/_{\varepsilon}$ (עבור $0 < \varepsilon$ אינפיניטסימלי). המספר הזה הוא דוגמה למספר "גדול לאינסוף".

הגדרה למספר "גדול לאינסוף"

מספר היפרממשי $\mathrm{A} > 0$ נקרא "גדול לאינסוף", אם הוא מקיים

$$A > 1, \qquad A > 1 + 1, \qquad A > 1 + 1 + 1, \dots \dots$$

(מספר שלילי B נקרא **מספר "גדול לאינסוף"**, אם $|B| = -B$).

ניתן לראות שכאשר $\varepsilon > 0$, המספר $A = 1/_{\varepsilon}$ חיובי ו"גדול לאינסוף". אם נכפיל את שני אגפי אי השוויון $\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \cdots + \varepsilon < 1$ ב- $1/_{\varepsilon}$, נקבל $1 + 1 + 1 + \cdots . +1 < 1/_{\varepsilon}$. קל לראות שמספר חיובי **"גדול לאינסוף"** A גדול מכל מספר סטנדרטי: אם a מספר סטנדרטי כלשהו,

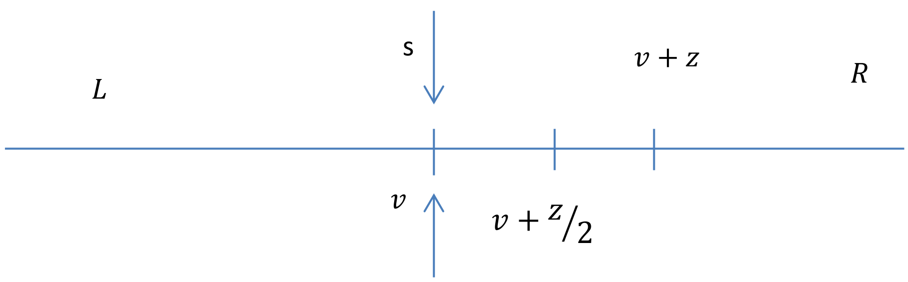
ניתן למצוא מספר טבעי n כך ש: $a < 1+1+\cdots+1$ ואחת כמה וכמה $A > a$. באופן דומה ניתן להראות שכל מספר שלילי היפרממשי ו**"גדול לאינסוף"** קטן יותר מכל מספר סטנדרטי.

מספר היפרממשי שאינו **"גדול לאינסוף"**, נקרא **מספר סופי**. ההגדרה השקולה היא: A הוא מספר סופי, אם $a < A < b$ עבור מספרים סטנדרטיים כלשהם a, b.

כל המספרים הסטנדרטיים הם סופיים. למשל, $1+\varepsilon$ (עבור $0 < \varepsilon$ אינפיניטסימלי) הוא מספר סופי לא סטנדרטי. בדרך כלל, אם a הוא מספר סטנדרטי ו- ε מספר אינפיניטסימלי השונה מ-0, אז $a+\varepsilon$ הוא מספר סופי לא סטנדרטי. בצורה כזו ניתן להציג את כל המספרים היפרממשיים לא סטנדרטיים.

<u>טענה</u>: אם s הוא מספר סופי היפרממשי, אז קיימים מספר סטנדרטי v ומספר אינפיניטסימלי ε, כך ש $s = v + \varepsilon$.

<u>הוכחה</u>: נניח ש s הוא מספר סופי היפרממשי. מכיוון שהוא סופי, ניתן למצוא מספרים סטנדרטיים a ו- b עבורם $a < s < b$. נתבונן בשתי קבוצות של כל המספרים הסטנדרטיים: קבוצה L של כל המספרים הסטנדרטיים x שקטנים מ- s, וקבוצה R של כל המספרים הסטנדרטיים שגדולים מ- s. קבוצה L כוללת את המספר a וקבוצה R כוללת את המספר b. כלומר, שתי קבוצות הללו אינן ריקות. הקבוצות האלו לא נחתכות (לפי הגדרה של סדר, לא קיים מספר שבו זמני גדול וקטן מאותו מספר נתון). כל מספר מ- L קטן יותר מכל מספר מ- R: אם $p < s$ ו- $s < q$, אז $p < q$. לפי אקסיומת של דדקינד, קיים "מספר מפריד" v אשר עבורו $p \le v$ לכל $p \in L$ וגם $v \le q$ לכל $q \in R$. ניתן להוכיח, ש $\varepsilon = s - v$ יהיה מספר אינפיניטסימלי. נוכיח ש ε הוא מספר הקטן מכל מספר סטנדרטי חיובי z, כלומר ש $s - v < z$ או ש $s < v + z$. אם זה לא כך וגם $v + z \le s$ אז $v + {}^{z}/_{2} < v + z \le s$, כלומר $v + {}^{z}/_{2} \in L$. קיבלנו סתירה לטענה ש-v הוא מספר המפריד, מכיוון ש $v + {}^{z}/_{2} > v$ וכל האלמנטים של L חייבים להיות לא גדולים מ- v. באופן דומה מוכיחים ש $\varepsilon = s - v$ גדול מכל מספר שלילי סטנדרטי.



כך כל מספר סופי היפרממשי ניתן להציג בצורה: $v + \varepsilon$. ההצגה כזו היא יחידה. למעשה, אם

$v + \varepsilon = v' + \varepsilon'$, אז $v - v' = \varepsilon' - \varepsilon$. החלק השמאלי של ביטוי הוא מספר סטנדרטי, וחלק הי הימני הוא מספר אינפיניטסימלי. אבל עבור כל מספר סטנדרטי z מתקיים: $|\varepsilon - \varepsilon'| < z$ מכוון ש- $|\varepsilon - \varepsilon'| \le |\varepsilon| + |\varepsilon'| < {z}/{2} + {z}/{2} = z$ אז $|\varepsilon'| < {z}/{2}$ ולכן $|\varepsilon| < {z}/{2}$. כעת, מאחר שבין כל המספרים הסטנדרטיים אין מספרים אינפיניטסימליים חוץ מ-0, ניתן לומר ש- $v - v' = \varepsilon' - \varepsilon = 0$.

החלק הסטנדרטי של מספר היפרממשי: הגדרה

החלק הסטנדרטי $st(x)$ של מספר סופי היפרממשי x נקרא מספר סטנדרטי v כך ש: $x = v + \varepsilon$. עבור כל מספר אינפיניטסימלי ε ניתן לבנות באופן סכמתי את הישר היפרממשי

מספרים חיוביים	מספרים סופיים	מספרים שליליים
"גדולים לאינסוף"		"גדולים לאינסוף"

הישר הזה מחולק לשלושה חלקים: מספרים שליליים "גדולים לאינסוף", מספרים סופיים, ומספרים חיוביים "גדולים לאינסוף". מרחוק נראה שחלק ה"סופי"של הישר הזה זהה לישר ממשי רגיל. אולם, אם נתבונן בו באופן יסודי יותר ניתן יהיה להבין שליד כל מספר סטנדרטי ממשי a נמצאים אינסוף מספרים היפרממשיים כך שמספר a הוא החלק הסטנדרטי שלהם. את האוסף של המספרים האלה נכנה בשם: "מונדה" *(Monad)* של מספר הסטנדרטי a. באופן כזה, הקבוצה של כל המספרים הסופיים היפרממשיים מחולקת לתת-קבוצות – "מונדות", המתאימות למספרים סטנדרטיים ממשיים.

ניתן לבדוק את התכונות הבאות של מספרים אינפיניטסימליים

א. סכום והפרש של מספרים אינפיניטסימליים הוא מספר אינפיניטסימלי

<u>הוכחה</u>: נניח שנתונים שני מספרים אינפיניטסימליים : ε ו- ε'. נוכיח, שסכום $\varepsilon + \varepsilon'$ והפרש $\varepsilon - \varepsilon'$ מספרים אינפיניטסימליים, כלומר, ש: $|\varepsilon + \varepsilon'| < p$, $|\varepsilon - \varepsilon'| < p$ עבור כל מספר סטנדרטי חיובי p. למעשה, $|\varepsilon + \varepsilon'| \le |\varepsilon| + |\varepsilon'|$ ו-$|\varepsilon - \varepsilon'| \le |\varepsilon| + |\varepsilon'|$. בנוסף: $|\varepsilon| < {p}/{2}$, לכן $|\varepsilon'| < {p}/{2}$. כתוצאה מכך : $|\varepsilon| + |\varepsilon'| < p$.

ב. המכפלה של מספר אינפיניטסימלי במספר סופי היפרממשי - מספר אינפיניטסימלי.

<u>הוכחה</u>: נניח ש- ε הוא מספר אינפיניטסימלי ומספר a הוא מספר סופי. a מספר סופי, לכן $|a|$ קטן יותר ממספר סטנדרטי A כלשהו. לכן מתקיים : $|\varepsilon \cdot a| < |\varepsilon| \cdot |A|$. נוכיח, כי מתקיים $|\varepsilon| \cdot |A| < p$, עבור כל מספר סטנדרטי $p > 0$. למעשה, $|\varepsilon| < {p}/{|A|}$ מכיוון ש-ε מספר אינפיניטסימלי ו- ${p}/{|A|}$ הוא מספר סטנדרטי חיובי. באופן כזה, $\varepsilon \cdot a$ מספר אינפיניטסימלי.

הגדרה: שני מספרים היפרממשיים הם מספרים **"קרובים לאינסוף"**, אם ההפרש שלהם הוא מספר אינפיניטסימלי.

היחס **"קרובים לאינסוף"** הוא יחס שקילות. כל יחס שקילות מחלק קבוצה של מספרים למחלקות שקילות לא נחתכות, כך ששני אלמנטים כלשהם של מחלקה אחת שקולים אחד לשני, ושני אלמנטים של מחלקות שונות אינם שקולים אחד לשני. בפרט, היחס **"קרובים לאינסוף"** מחלק את הקבוצה R^* למחלקות לא נחתכות, כך שאלמנטים של מחלקה אחת **"קרובים לאינסוף"** אחד לשני, ואלמנטים של מחלקות שונות לא מקיימים את התכונה הזו. מחלקות הכוללות את המספרים הממשיים הסטנדרטיים הן בעצם ה"מונדות".

נתבונן ביחס שקילות מסוג אחר בקבוצה R^*. נאמר שמספרים היפרממשיים x ו- y "נמצאים באותה גלקסיה", אם ההפרש שלהם הוא מספר היפרממשי סופי. יחס השקילות הזה מחלק את קבוצת המספרים ההיפרממשיים למחלקות שקילות הנקראות "גלקסיות". החלוקה הזו היא פחות עדינה מחלוקה ל"מונדות": כל גלקסיה היא אחוד של אינסוף מונדות. אחת הגלקסיות היא קבוצה של מספרים היפרממשיים סופיים.

בנוסף, גלקסיות אינן "מתערבבות". אם G_1 ו- G_2 שתי גלקסיות, אז או ש- G_1 נמצאת כולה מצד שמאל של G_2, כלומר כל מספר מ-G_1 קטן יותר מכל מספר מ- G_2 או להפך.

בין כל שתי גלקסיות נמצאת גלקסיה אחרת. למשל, ניקח שני מספרים x ו- y כל אחד מגלקסיה אחרת, ונתבונן בגלקסיה המכילה חצי סכום של שני המספרים האלו $(x+y)/_2$,

כתוצאה מכך קיימות גם גלקסיות נוספות. לא ניתן להגדיר גלקסיה מקסימלית – "הימנית ביותר" או גלקסיה מינימלית – "השמאלית ביותר": אם גלקסיה G מכילה אלמנט x, ומספר ω הוא מספר "גדול לאינסוף", אז מספר $x+\omega$ יהיה בגלקסיה G', הנמצאת בצד ימין מגלקסיה G, ומספר $x-\omega$ נמצא בגלקסיה G'' הנמצאת מצד שמאל של גלקסיה G.

בדומה לאנליזה הסטנדרטית, ניתן להבחין בין המספרים האינפיניטסימליים (או המספרים "הגדולים לאינסוף") לפי הדרגה שלהם. ניתן לומר, שמספר אינפיניטסימלי ε הוא מספר אינפיניטסימלי בדרגה גבוהה יותר מאשר מספר אינפיניטסימלי δ, אם היחס $\varepsilon/_\delta$ הוא מספר אינפיניטסימלי. באופן דומה למספר "גדול לאינסוף" Aישנה דרגה גבוהה יותר ממספר "גדול לאינסוף" B, אם היחס $A/_B$ הוא מספר "גדול לאינסוף".

על מנת להבין בצורה יסודית יותר את המושגים, ניקח לדוגמא מיקרוסקופ עם הגדלה גבוהה, ונתבונן בסביבה של המספר 0. אנחנו תמיד נראה נקודות קרובות ל-0 כגוש אחד, למרות שהן אובייקטים נפרדים. אם מיקרוסקופ מגדיל ב- $1 / \varepsilon$ פעמים, אז נראה את המספר ε רחוק מ-0, בעוד המספר ε^2 עדיין יתלכד עם 0. בנוסף, כל המספרים הסטנדרטיים

יהיו "רחוקים לאיסוף". אם מיקרוסקופ מגדיל ב- $1/\varepsilon^2$ פעמים, נראה שהמספר ε נמצא "רחוק לאיסוף" מ-0, אולם את המספר ε^2 אנחנו נראה בצורה טובה יותר.

דוגמא למערכת מספרים לא ארכימדית (מערכת מספרים היפרממשיים)

נתאר דרך לבניית מערכת מספרים לא ארכימדית.

הגדרה: מערכת מספרים לא ארכימדית (מערכת מספרים היפרממשיים) – היא הרחבה לא ארכימדית של שדה סדור של מספרים ממשיים.

בהרחבה שאנחנו רוצים ליצור חייב להיות לפחות מספר אינפיניטסימלי אחד. נסמן את המספר ב- ε. מכיוון שמספרים אינפיניטסימליים ניתן להכפיל אחד בשני, בהרחבה יהיו גם מספרים מהצורה: $a\varepsilon$, כאשר a הוא מספר סטנדרטי ממשי כלשהו, כגון 2ε, 0.5ε. יתר על כך, מספר אינפיניטסימלי ε ניתן להכפיל על עצמו, לכן בהרחבה יהיו גם מספרים מהצורה: ε^2, ε^3, $2\varepsilon^2$, $3\varepsilon^2+2\varepsilon+1$..... ובאופן כללי יהיו כל המספרים ההיפרממשיים מהצורה $P(\varepsilon)$, עבור פולינום P עם מקדמים סטנדרטיים ממשיים. הקבוצה של המספרים מהצורה הזו היא קבוצה סגורה יחסית לפעולות חיבור, חיסור וכפל.

עבור מספרים היפרממשיים מוגדרת פעולת חילוק, לכן בהרחבה יהיו מספרים מהצורה: $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$, כאשר P ו-Q הם פולינומים עם מקדמים סטנדרטיים ממשיים ו- $Q(\varepsilon)\neq 0$.

בשלב הזה, ניתן לומר שקיבלנו קבוצה של מספרים היפרממשיים סגורה יחסית לפעולות: חיבור, חיסור, כפל וחילוק. כמו כן ניתן לדעת את הסימן של הביטוי מהצורה $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$.

על מנת להגדיר סימן של פולינום $P(\varepsilon)$, עלינו לבדוק את הסימן של הביטוי $a_0+a_1\varepsilon+\cdots$

הסימן של הביטוי הזה מתלכד עם הסימן של האיבר a_0, עבור $a_0\neq 0$. למעשה, התוספת $a_1\varepsilon+\cdots$ היא אינפיניטסימלית כאשר $a_0=0$.

נניח שמספר ε הוא מספר אינפיניטסימלי חיובי, נוציא מהפולינום את המספר ε בחזקה הכי גבוהה, כלומר נרשום אותו בצורה $\varepsilon^k(a_k+a_{k+1}\varepsilon+\cdots)$ (עבור a_k שונה מ-0). ניתן לראות שהסימן של כל הביטוי הוא הסימן של הביטוי הנמצא בסוגריים, כלומר הסימן של a_k.

דוגמא: נניח שעלינו להשוות בין שני המספרים: $\frac{1+\varepsilon^2}{1+\varepsilon}$ ו- $\frac{2+\varepsilon^3}{2+\varepsilon^2}$. נבדוק את הסימן של ההפרש בין שני המספרים האלו: $\frac{1+\varepsilon^2}{1+\varepsilon}-\frac{2+\varepsilon^3}{2+\varepsilon^2}$

נחשב את ההפרש: $\frac{1+\varepsilon^2}{1+\varepsilon}-\frac{2+\varepsilon^3}{2+\varepsilon^2}=\frac{(1+\varepsilon^2)(2+\varepsilon^2)-(1+\varepsilon)(2+\varepsilon^3)}{(1+\varepsilon)(2+\varepsilon^2)}=\frac{\varepsilon(-2+3\varepsilon-\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon)(2+\varepsilon^2)}$

התוצאה שלילית, לכן המספר הראשון קטן יותר מהמספר השני.

הערה: שני ביטויים שונים מהצורה $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$ (עבור $Q(\varepsilon)\neq 0$). יכולים לסמן את אותו מספר, כמו למשל המנות $\frac{(\varepsilon^2-1)}{(\varepsilon-1)}$ ו- $\frac{(\varepsilon+1)}{1}$.

הגדרה: שני ביטויים $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$, $R(\varepsilon)/S(\varepsilon)$ נקראים שקולים, אם מתקיים השוויון: $P(\varepsilon)\cdot S(\varepsilon)=R(\varepsilon)\cdot Q(\varepsilon)$ (מדובר בשוויון פולינומים, כלומר שוויון מקדמי חזקות זהות).

הגדרה זו מאפשרת להגדיר יחס שקילות, המחלק את כל הביטויים מהצורה: $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$ למחלקות שקילות. המחלקות האלו נקראות מספרים היפרממשיים.

הפעולות האלגבריות (חיבור, חיסור, כפל וחילוק) ניתנות להגדרה באופן טבעי, בדומה להגדרתן בקבוצת המספרים הממשיים. לדוגמא, אם מחלקת שקילות α כוללת בתוכה את $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$, ומחלקת שקילות β כוללת בתוכה $R(\varepsilon)/S(\varepsilon)$, אז ניתן לומר, שמחלקת השקילות הכוללת את המספר $\frac{(P(\varepsilon)S(\varepsilon)+R(\varepsilon)Q(\varepsilon))}{S(\varepsilon)Q(\varepsilon)}$ היא סכום של שני המספרים האלו.

מכפלה היא מחלקת שקילות הכוללת את המספר $\frac{P(\varepsilon)R(\varepsilon)}{Q(\varepsilon)S(\varepsilon)}$.

באופן דומה, ניתן לבדוק שבמודל הזה קיים איבר הופכי, איבר נגדי, ו-0. יתר על כך, מתקיימות כל האקסיומות של שדה. השדה שבנינו הוא שדה של פונקציות רציונאליות עם מקדמים ממשיים, מסמנים אותו ב- $\mathbb{R}\,(\varepsilon)$. שדה סדור $\mathbb{R}\,(\varepsilon)$ הוא הרחבה של $\mathbb{R}$, כך שלכל מספר ממשי x מספיק להתאים שבר $1/x$.

נשאר להראות אי קיימות של אקסיומה של ארכימדס ב- $\mathbb{R}\,(\varepsilon)$. בשדה של פונקציות רציונאליות $\mathbb{R}\,(\varepsilon)$ קיים מספר אינפיניטסימלי ε (באופן מדויק יותר, מחלקת שקילות המכילה את $\varepsilon/1$). אמנם: $1>\varepsilon+\cdots+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon$ (n – פעמים). ניתן לכתוב: $n\cdot\varepsilon<1$, כלומר $1-n\cdot\varepsilon>0$ (מכוון ש: $1>0$, וסימן של הביטוי מוגדר לפי סימן של איבר החופשי).

דוגמאות למספרים ב-(ε) $\mathbb{R}$

מספרים "גדולים לאינסוף"	מספרים היפרממשיים סופיים	מספרים "קטנים לאינסוף"
$1/_{\varepsilon}, \dfrac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2+2\varepsilon^3}$	$\dfrac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon}, \dfrac{\varepsilon^2+\varepsilon^4}{2\varepsilon^2+3\varepsilon^4}$	$\varepsilon, \varepsilon^2, \dfrac{\varepsilon^2+2\varepsilon^3}{1+\varepsilon}$

על מנת להשתמש באנליזה לא סטנדרטית בהוכחות או חישובים, עלינו לחשב ערכים של פונקציות סטנדרטיות (המוגדרות כפונקציות של משתנה ממשי) עבור משתנים היפרממשיים. כלומר, לכל פונקציה: $f: R \to R$ חייבת להתקיים פונקציה: $f^*: R^* \to R^*$ המהווה הרחבה של הפונקציה f לקבוצה של מספרים היפרממשיים R^*. בפרט, הפונקציה f^* תתלכד עם הפונקציה f בהצבת מספרים סטנדרטיים באותם משתנים. אם פונקציה f היא פונקציה של מספר משתנים, אז גם פונקציה f^* היא פונקציה של אותו מספר משתנים.

נתבונן במערכת של משוואות מהצורה $t = s$ ואי- שוויוניים מהצורה $t \neq s$, כך שבמקום פרמטרים t ו- s יכולים להיות פונקציות של משתנים ממשיים, מספרים ממשיים קבועים, ומשתנים. לדוגמא, המערכת הנתונה לפי:

$\sin(\cos(x)) = y + \exp(z)$ כך ש: $z \neq y - 2x$, $[z] = y$. (1)

לכל הפונקציות של המערכת הזו, חייבות להיות הרחבות בקבוצה של מספרים היפרממשיים, כלומר, אמורה להתקיים מערכת מהצורה:

$sin^*(cos^*(x)) = y^* + exp^*(z)$, כך ש: $z \neq y^* - 2^*x$, $[z]^* = y$. (2)

פתרונות אפשריים של מערכת זו יכולים להיות מספרים היפרממשיים כלשהם.. מאחר שכל הפונקציות של מערכת (2) הן הרחבות של פונקציות של מערכת (1), אז כל פתרון ממשי של מערכת (1) יהיה גם פתרון של מערכת (2). כלומר, אם למערכת המקורית קיים פתרון, אז גם למערכת החדשה, המהווה הרחבה של המערכת המקורית בקבוצה של מספרים היפרממשיים, קיים פתרון.

נדרוש שתתקיים גם טענה הפוכה: אם להרחבה של מערכת כלשהי בקבוצה של מספרים היפרממשיים קיים פתרון, אז גם למערכת מקורית חייב להיות פתרון ממשי.

הגדרה: "term"– הוא משתנה כלשהו, או מספר ממשי כלשהו, או כל ביטוי מהצורה: $f(t_1, \dots, t_n)$, כאשר f היא פונקציה של *n* – משתנים ממשיים, ו- $t_1, \dots, t_n$ הם "*terms*" שבנינו קודם.

באופן זה, כל אחד מהביטויים $\sin(\cos(x))$, $a(y,\exp(z))$ (עבור פונקציית סכום a), יהיה "term".

הגדרה: לרשימה סופית של ביטויים מהצורה: $t = s$ או $t \neq s$ כאשר t ו-s הם "term" נקרא מערכת של משוואות ואי-שוויוניים. הפתרון של המערכת הוא אוסף של ערכים של משתנים המקיימים את המשוואה ואי שוויון.

כלומר, דוגמא (1) היא מערכת, לפי ההגדרה. בנוסף, ראינו כי לכל פונקציה עם משתנים ממשיים, קיימת הרחבה בקבוצה של מספרים היפרממשיים. באופן דומה ניתן לדבר על הרחבה של "*term*". אם נחליף את כל הפונקציות עם המשתנים הממשיים להרחבות שלהן נקבל "*term*" המוגדר בקבוצה של מספרים היפרממשיים. כך ניתן להתאים לכל "*term* – "של מערכת S את הרחבתו בקבוצה של מספרים היפרממשיים. S^* פתרון היפרממשי של מערכת S^* - הוא אוסף של משתנים היפרממשיים המקיים את המשוואות ואי - שוויוניים שלה. בשלב זה ניתן לנסח את העיקרון היסודי של האנליזה הלא-סטנדרטית.

העיקרון היסודי של האנליזה הלא-סטנדרטית

יהיו S מערכת של משוואות ואי – שוויוניים, S^* הרחבתה בקבוצה של המספרים ההיפרממשיים. אם ל- S^* קיימים פתרונות היפרממשיים, אז ל- S חייבים להיות פתרונות ממשיים.

העקרון היסודי מאפשר להצדיק ולנמק טענות מהותיות הקשורות למספרים היפרממשיים.

דוגמא 1: תהי f פונקציה של משתנה ממשי אחד, שמקבלת רק ערכים 0 או 1. הפונקציה f^* מקבלת אך ורק את אותם ערכים 0 או 1.

<u>הוכחה</u>: נתבונן במערכת $f(x) \neq 1, f(x) \neq 0$. למערכת הזו לא קיימים פתרונות ממשיים. לכן גם להרחבה $f^*(\mathrm{x}) \neq 1, f^*(x) \neq 0$ של המערכת בקבוצה של מספרים היפרממשיים לא קיים פתרון היפרממשי.

דוגמא 2: $f(x)$ ו- $g(x)$ הן שתי פונקציות של משתנה ממשי אחד, כך שקבוצות האפסים שלהם מתלכדות. במקרה הזה קבוצה של מספרים היפרממשיים שהיא קבוצת האפסים של פונקציות $f^*(x)$ ו- $g^*(x)$ מתלכדות.

<u>הוכחה</u>: למעשה, לכל אחת מצמד המערכות
$$(1)\ f(x) = 0, g(x) \neq 0$$
$$(2)\ \mathrm{g(x)} = 0, \mathrm{f(x)} \neq 0$$

לא קיים פתרון ממשי. כתוצאה מכך, להרחבות של מערכות האלו לקבוצה של מספרים היפרממשיים לא קיים פתרון היפרממשי. לכן, כל 0 היפרממשי של פונקציה $f^*(x)$ חייב להיות 0 היפרממשי של פונקציה $g^*(x)$ ולהפך.

דוגמא (2) מאפשרת להגדיר הרחבה היפרממשית לאו דווקא לפונקציות, אלא גם לקבוצות של מספרים. תהי A קבוצה של מספרים ממשיים. נדגים פונקציה $f(x)$ עבורה A היא קבוצה של אפסים. לדוגמא, $f(x) = 0,$ כאשר $x \in A$ ו- , $f(x) = 1,$ כאשר $x \notin A$.
נתבונן בהרחבה היפרממשית של פונקציה $f(x)$ בקבוצה של מספרים היפרממשיים $f^*(x)$ ובקבוצה A^* של אפסים היפרממשיים. ניתן לראות, שקבוצה A^* לא תלויה בבחירה של פונקציה $f(x)$. קבוצה A^* היא הרחבה היפרממשית של קבוצה A.

הגדרה זו מאפשרת לכלול במערכת יחד עם משוואה $t = s$ ואי שוויון $t \neq s$ את הרשימות מהצורה: $s \in A$, כאשר s הוא "term" ו- A קבוצה של מספרים ממשיים. קיימת הרחבה של $s \in A$ לקבוצה של מספרים היפרממשיים $s^* \in A^*$.

דוגמא 3: תהי A תהיה קבוצה ריקה. נוכיח, ש- A^* היא קבוצה ריקה.

<u>הוכחה</u>: למעשה, למערכת $x \in A$ אין פתרונות ממשיים, לכן גם למערכת $x \in \mathrm{A}^*$ אין פתרונות היפרממשיים. אם נתבונן במערכת $x \notin A$, נקבל באופן דומה שאם A מכילה את כל המספרים הממשיים, אז גם A^* מכילה את כל המספרים היפרממשיים. מתוך כך, נסמן ב- R^* את ההרחבה היפרממשית של קבוצה של מספרים ממשיים R.

בהמשך, במקום לדבר על מערכת S והפתרונות שלה בקבוצה של מספרים ממשיים, כמו גם על מערכת S^* ופתרונות שלה בקבוצה של מספרים היפרממשיים, נדבר על פתרונות ממשיים והיפרממשיים של מערכת S.

הערה: אחת הדרישות למערכת של מספרים היפרממשיים היא קיום של הרחבה היפרממשית לכל פונקציה המוגדרת בקבוצה של מספרים ממשיים שמתאימה לדרישות של מערכת S. הדרישה הזו היא מיותרת, מכוון שהרחבה היפרממשית של פונקציות סכום ומכפלה הופכת את הקבוצה $\mathbb{R}^*$ לשדה סדור, ואת זה ניתן להסיק מהדרישות של העקרון היסודי.

דוגמא 4: יהיו a ו- m פונקציות ממשיות של סכום ומכפלה (בהתאמה), כלומר מתקיים: $a(x, y) = x + y$ וגם $m(x, y) = x \cdot y$. לפונקציות $a(x, y)$ ו- $m(x, y)$ קיימות הרחבות $a^*(x, y) = x + y$ וגם $\mathrm{m}^*(x, y) = x \cdot y$ (בהתאמה) בקבוצת המספרים ההיפרממשיים.

באופן דומה ניתן להגדיר פונקציה N (מציאת אלמנט נגדי) ו-פונקציה R (מציאת אלמנט הופכי) והרחבות שלהן ב- $\mathbb{R}^*$. (עלינו רק להגדיר $R(0) = 0$).

הוכחה: נבדוק שב- $\mathbb{R}^*$, מתקיים: $x(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$

$\mathbb{R}$ שדה, לכן לא קיימים שורשים ממשיים למערכת $m(x,a(y,z)) \neq a(m(x,y),m(x,z))$

לכן לא קיימים גם פתרונות היפרממשיים. כלומר התכונה הנדרשת מתקיימת גם ב- $\mathbb{R}^*$.

דוגמא 5: מתכונות המספרים הממשיים, ב-$\mathbb{R}$ מתקיים: $x\cdot {}^{1}\!/_{x} = 1$ עבור $x \neq 0$. למערכת: $x \neq 0, m(x,R(x)) \neq 1$ אין שורשים ממשיים וכתוצאה מכך, לא קיים מספר היפרממשי x עבורו : כאשר $x \neq 0$ ו- $m^*(x,R^*(x)) \neq 1$.

דוגמא 6: "יחס סדר" ב-$\mathbb{R}$ הוא תת קבוצה של $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (זוגות סדורים של מספרים ממשיים). קיימת הרחבה של מושג "יחס של סדר" ב- $\mathbb{R}^*$.

הוכחה: לכל $S \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ נגדיר את הרחבתה באופן הבא: ניקח פונקציה s בשני משתנים ממשיים שעבורה $s(x,y) = 0$ שקול ל- $\langle x,y\rangle \in S$. נתבונן בהרחבה שלה בקבוצה של מספרים היפרממשיים s^* ובקבוצה של זוגות של מספרים היפרממשיים S^* שעבורם $s^*(x,y) = 0$. הקבוצה S^* תלויה רק בקבוצה של האפסים של פונקציה s.

התהליך הזה נכון גם עבור יחס הסדר, אם נתבונן בקבוצה Ord זוגות של מספרים ממשיים $\langle x,y\rangle$ עבורם $x<y$, אז את הרחבתו לקבוצה של מספרים היפרממשיים נסמן ב-Ord^* ונגדיר את יחס הסדר ב- $\mathbb{R}^*$: מספר היפרממשי xקטן יותר ממספר היפרממשי y אם זוג $\langle x,y\rangle$ שייך ל- Ord^*.

בשלב הזה בהשערה העיקרית יחד עם משוואות $t=s$ ואי שוויוניים $t\neq s$ ניתן להשתמש בהכללות מהצורה $t\in A$ וב-אי שוויוניים מהצורה $t<s$ ו $t \nless s$.

למעשה, למערכת $x<y$ ו- $y<x$ לא קיימים שורשים ממשיים, לכן לא מתקיימים בו זמנית אותם אי שוויוניים גם בקבוצה של מספרים היפרממשיים. באופן דומה, למערכת $x<x$ אין פתרון ממשי, לכן אין גם פתרון היפרממשי. לבסוף, אם נתבונן במערכת: $x\neq y, x\nless y, y\nless x$ נראה שאין לה פתרונות ממשיים, ניתן להבין שבין כל שני מספרים היפרממשיים תמיד מספר אחד קטן מהמספר השני. כך ניתן לומר ש- $\mathbb{R}^*$ הוא שדה סדור.

דוגמא 7: תהי A קבוצה כלשהי של מספרים ממשיים. נוכיח כי $\mathrm{A} \subset A^*$.

הוכחה: אם $a\in A$ ו- f מאפסת את a, אז $f(a) = 0$, לכן $f^*(\mathrm{a}) = 0$ כלומר $a \in A^*$.

דוגמא 8: תהי A קבוצה סופית של מספרים ממשיים. נוכיח ש: $A^* = A$, כלומר ב- A^* לא קיימים איברים נוספים יחסית לקבוצה A.

הוכחה: נניח שבקבוצה A נמצאים שלושה איברים ממשיים: p,q,r. נתבונן במערכת:

$$x \neq p, x \neq q, x \neq r, x \in A$$

למערכת הזו לא קיים פתרון ממשי, כלומר גם לא קיים פתרון היפרממשי. אולם כל $x \in A^*$, שונה מ- p, q, r, יהיה פתרון שלה. זאת אומרת ש: $A^* = A$.

דוגמא 9. תהי A היא קבוצה אינסופית של מספרים ממשיים כלשהם, אז בקבוצה A^* קיימים איברים לא סטנדרטיים (לכן לא שייכים ל- A).

<u>הוכחה</u>: תהי A קבוצה אינסופית. נתבונן בפונקציה ממשית f שאינה חסומה מלמעלה ב- A. על מנת לבנות פונקציה מהצורה הזו, ניקח קבוצה בת-מניה: $A' = \{a_0, a_1, \dots\} \subset A$ ונגדיר פונקציה המקיימת $f(a_n) = n$, $f(x) = 0$ עבור $x \notin A'$. מכיוון שהפונקציה f לא חסומה, אז לכל מספר c קיים $x \in A$, כך ש: $f(x) > c$. נסמן איבר x זה בתור $g(c)$. בשלב הזה קיבלנו שתי פונקציות: f ו- g המקיימות את התכונה הבאה: $g(c) \in A$, עבור כל המספרים הממשיים c ובנוסף $c < f(g(c))$.

נתבונן בהרחבות היפרממשיות f^* ו- g^* של פונקציות f ו- g (בהתאמה). $g^*(c) \in A^*$ עבור כל המספרים ההיפרממשיים c. למערכת $g(x) \notin A$ לא קיימים פתרונות היפרממשיים, מכיוון שלא היו גם פתרונות ממשיים. $c < f^*(g^*(c))$ עבור כל המספרים היפרממשיים c. למערכת $x \nless f(g(x))$ לא קיימים פתרונות היפרממשיים מכוון שלא קיימים פתרונות ממשיים.

כאשר המספר c "גדול לאינסוף"מתקיים שמספר $g^*(c)$לא סטנדרטי. למעשה, אם $g^*(c)$ היה מספר סטנדרטי, אז $f^*(g^*(c))$ גם היה מספר סטנדרטי, מכוון ש: f^* עבור משתנים סטנדרטיים מקבל ערכים סטנדרטיים. קיבלנו סתירה עם אי שוויון: $c < f^*(g^*(c))$ואם זה שמספר c "גדול לאינסוף". באופן כזה, $g^*(c)$ כאשר מספר c "גדול לאינסוף"הוא מספר היפרממשי לא סטנדרטי השייך ל- A^*.

חסימות וגבולות

דוגמא לשימוש באנליזה לא סטנדרטית היא הוכחה לא סטנדרטית של המשפט:

לכל קבוצה אינסופית וחסומה של מספרים ממשיים קיימת נקודת הצטברות.

על מנת להוכיח את המשפט, נשתמש בהגדרות לא סטנדרטיות עבור קבוצה חסומה ועבורנקודת הצטברות. לכל מושג נזכיר ראשית את ההגדרה הסטנדרטית.

הגדרה (סטנדרטית): קבוצה A של מספרים ממשיים נקראת *קבוצה חסומה*, אם היא מוכלת בתוך קטע כלשהו, כלומר אם קיימים מספרים ממשיים p ו- q כך ש $p \le x \le q$ לכל $x \in A$.

הגדרה (לא סטנדרטית): קבוצה A היא *קבוצה חסומה*, אם קבוצה A^* אינה מכילה מספרים היפרממשיים "גדולים לאינסוף"

<u>טענה</u>: שתי ההגדרות הן שקולות.

<u>הוכחה</u>: תהי קבוצה A חסומה, כלומר מוכלת בקטע $[p,q]$, אז למערכת: $x \in A, x < q$

אין שורשים ממשיים, לכן אין גם שורשים היפרממשיים, ולפיכך כל האיברים של A^* לא גדולים מ- q. באופן דומה כל האיברים של A^* לא קטנים מ- p, לכן כל האיברים של A^* סופיים.

בכיוון ההפוך: תהי קבוצה A לא חסומה, לכן לכל מספר ממשי p קיים x כך ש: $x < p$ (קבוצה A לא חסומה מלמטה) או לכל מספר ממשי q קיים x כך ש: $x > q$ (קבוצה A לא חסומה מלמעלה). נשתמש במקרה השני. נתבונן בפונקציה f המתאימה לכל מספר ממשי q $x \in A,$ כך ש: $x > q$. במלים אחרות: $f(q) \in A$ ו- $f(q) > q$ עבור כל q ממשי. אם כן, $f^*(q) \in A^*$ ו- $f^*(q) > q$ עבור כל המספרים היפרממשיים. q מספר חיובי ו- "גדול לאינסוף", נוכל לראות ש: $f^*(q)$ גם מספר "גדול לאינסוף"השייך לקבוצה A^*. מתוך כך קבוצה A לא חסומה גם במובן של ההגדרה הלא סטנדרטית.

הגדרה (סטנדרטית): נקודה a נקראת *נקודת הצטברות* של קבוצה A, אם עבור כל מספר חיובי ε השייך לקטע $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ קיימת נקודה מהקבוצה A השונה מנקודה x.

הגדרה (לא סטנדרטית): מספר סטנדרטי a נקרא *נקודת הצטברות* של קבוצה A של מספרים ממשיים, אם A^* מכילה מספר לא סטנדרטי היפרממשי, "הקרוב כי אינסוף"ל- a.

<u>טענה</u>: שתי ההגדרות הן שקולות

<u>הוכחה</u>: תהי a נקודת הצטברות של קבוצה A לפי ההגדרה הסטנדרטית, ואז לכל מספר ממשי $0 <$ ε קיים מספר $x \in A$, כך ש $x \neq a$ ו- $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. נתבונן בפונקציה f, המתאימה למספר $0 <$ ε אחד מה-x. אם כן, נקבל:

$$f(\varepsilon) \in A, f(\varepsilon) \neq a, f(\varepsilon) < a+\varepsilon, f(\varepsilon) > a-\varepsilon$$

כל אחד מהיחסים הללו יישמר אחרי מעבר למספרים היפרממשיים: לכל מספר $\varepsilon \in R^*$, $0 <$ ε מתקיים: $f^*(\varepsilon) \in A^*, f^*(\varepsilon) \neq a,\ f^*(\varepsilon) < a+\varepsilon, f^*(\varepsilon) > a-\varepsilon$

ניקח מספר חיובי "קטן לאינסוף" ε, אז $f^*(\varepsilon)$ יהיה איבר של A, השונה מ-a. בנוסף, $f^*(\varepsilon)$ "קרוב לאינסוף" ל- a, מכוון שההפרש $f(\varepsilon)-a$ נמצא בין $-\varepsilon$ ו- ε, כלומר הערך המוחלט שלו קטן מ- ε ומכל מספר חיובי סטנדרטי אחר.

בכיוון ההפוך: נניח ש-a אינה נקודת הצטברות במובן הסטנדרטי. אז קיים מספר חיובי ε, כך שבתחום $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ לא נמצאות נקודות של קבוצה A, השונות מ- a. במילים אחרות למערכת: $x > a-\varepsilon, x < a+\varepsilon, x \neq a, x \in A$ לא קיים פתרון (ε הוא מספר קבוע).

על פי ההשערה העיקרית, למערכת לא קיימים גם פתרונות היפרממשיים. אולם כל איבר לא סטנדרטי של A^* "קרוב לאינסוף" ל- a היה יכול להיות פתרון היפרממשי של המערכת. לכן a הוא לא נקודת הצטברות של A.

בשלב הזה ניתן להשלים את ההוכחה של המשפט.

משפט: לכל קבוצה אינסופית וחסומה של מספרים ממשיים קיימת נקודת הצטברות.

הוכחה: תהי A קבוצה חסומה ואינסופית של מספרים ממשיים. A אינסופית, לכן הקבוצה A^* מכילה איבר לא סטנדרטי s (לפי ההגדרה ההיפרממשית של אינסוף). A חסומה, לכן s הוא מספר היפרממשי סופי (לפי הגדרה היפרממשית של קבוצה חסומה). כמו לכל מספר סופי, ל- s קיים חלק סטנדרטי a – מספר סטנדרטי "קרוב לאינסוף" ל-s. לכן הוא יהיה נקודת הצטברות של קבוצה A.

ניתן לראות שהוכחות המשפטים הופכות להיות כמעט טריוויאליות, מפני שהקושי העיקרי הוא בהוכחת שקילות של הגדרות סטנדרטיות ולא סטנדרטיות. אומנם חסידי אנליזה לא סטנדרטית, טוענים שלא קיים צורך בשימוש בהגדרות הסטנדרטיות בכלל. אפשר מלכתחילה להשתמש אך ורק בהגדרות הלא סטנדרטיות.

יישומים בהוראת המתמטיקה בחטיבה העליונה

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי הוא אחד הנושאים החשובים בתכנית הלימודים של החטיבה העליונה. ברמה הלימוד הגבוהה ביותר, 5 יחידות לימוד, משרד החינוך ממליץ להשקיע 20% מתוך כל שעות ההוראה בנושא הזה, כלומר סך של 110 שעות הוראה מתוך 540 שעות במהלך 3 שנות לימוד. הוראת אנליזה בתיכון מבוססת על לימוד נוסחאות לחישוב נגזרות של פונקציות שונות (ללא הוכחות) ועל תרגול אינטנסיבי של שני סוגי מיומנויות עיקריים: א. שיפוע המשיק ופונקציה בנקודת ההשקה; ב. חקירת פונקציה ובניית גרף. בתוכנית ההיבחנות החדשה במתמטיקה אין דרישה להוכחות ואין התייחסות למשמעות הפיזיקלית של הנגזרת. על ידי כך חשבון דיפרנציאלי ואינטגראלי נחשב בעיני תלמידים למופשטים ומסתורי.

חלק ניכר מתלמידים הלומדים ברמה של 4-5 יחידות לימוד ממשיכים את הלימודים במוסדות להשכלה גבוהה, ועומדים להתחיל את לימודיהם בפקולטות להנדסה או מדעים מדויקים. תוכניות הלימודים בפקולטות אלו כוללות קורסים שונים במתמטיקה. המעבר החד שבין המתמטיקה התיכונית למתמטיקה הנלמדת במוסדות להשכלה גבוהה, יוצר קשיים רבים עבור סטודנטים בתחילת לימודיהם האקדמיים.

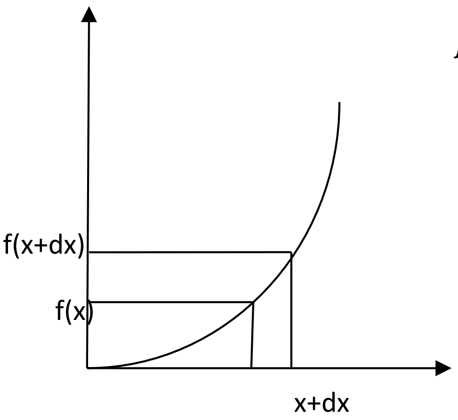
שימוש באנליזה לא סטנדרטית בהוראת הנושאים בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, מאפשר למורים בקלות להוכיח נוסחאות לחישוב נגזרות של פונקציות שונות, ללא שימוש בתורת הגבולות. שימוש באינפיניטסימל כמספר לא-סטנדרטי מאפשר לדבר על המשמעות הפיזיקלית של הנגזרת כמהירות של שינוי של משתנה y יחסית למשתנה x: $v_{\text{ממוצע}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
בשיעורי מתמטיקה ניתן גם להגדיר מושג פיזיקלי "קיבול חום" - שינוי של כמות החום במערכת בשינוי קטן מאוד של טמפרטורה: $C_{\text{ממוצע}} = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$

דוגמאות להוכחות נוסחאות לחישוב נגזרת בעזרת אינפיניטסימלי

דוגמא 1: חישוב נגזרת של פונקציה: $\boldsymbol{f(x) = x^2}$

$$x \to f(x) = x^2$$

$$x + dx \to f(x + dx) = (x + dx)^2$$



$$f(x + dx) = (x + dx)^2$$

$$= x^2 + 2xdx + (dx)^2$$

כלומר הערך של הפונקציה השתנה ב- $dy = 2xdx + (dx)^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x \cdot dx + (dx)^2}{dx} = \frac{dx(2x+dx)}{dx} = 2x + dx$$

אם dx הוא גודל קטן מאוד (מספר אינפיניטסימאלי),כך ש- $2x + dx$ נמצא במונדה של המספר ממשי $2x$, אז ניתן להגדיר את $\frac{dy}{dx}$ כחלק הסטנדרטי של הביטוי הזה, כלומר:

$$\frac{dy}{\mathrm{dx}} = 2\mathrm{x}$$

דוגמא 2: חישוב נגזרת של פונקציה: $f(x) = \sqrt{x}$

$$x \to f(x) = \sqrt{x}$$

$$x + dx \to f(x+dx) = \sqrt{x+dx}$$

כלומר הערך של הפונקציה השתנה ב- $dy = f(x+dx) - f(x) = \sqrt{x+dx} - \sqrt{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x+dx} - \sqrt{x}}{dx} = \frac{dx}{dx(\sqrt{x+dx} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+dx} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

אם dx הוא גודל קטן מאוד (מספר אינפיניטסימאלי),כך ש- $x + dx$ נמצא במונדה של המספר ממשי x, אז ניתן להגדיר : $\frac{dy}{\mathrm{dx}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

דוגמא 3: חישוב נגזרת של פונקציה: $f(x) = sin\,x$

על מנת לחשב נגזרת זו נשתמש בזהות $sin\alpha - sin\beta = 2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

נחשב נגזרת:

$$x \to f(x) = sinx$$

$$x + dx \to f(x+dx) = \sin(x+dx)$$

כלומר הערך של הפונקציה השתנה ב- $dy = f(x+dx) - f(x) = \sin(x+dx) - sinx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x+dx) - sinx}{dx} = \frac{2sin\frac{x+dx-x}{2}cos\frac{x+dx+x}{2}}{dx} =$$

$$= \frac{2sin\frac{dx}{2}cos\frac{2x+dx}{2}}{dx} = \frac{2sin\frac{dx}{2}}{dx} \cdot cos\frac{2x+dx}{2} = \frac{sin\frac{dx}{2}}{\frac{dx}{2}} \cdot \cos(x + \frac{dx}{2})$$

המספר $\frac{sin\frac{dx}{2}}{\frac{dx}{2}}$ נמצא במונדה של המספר 1 מכיוון ש- $\frac{dx}{2}$ הוא מספר אינפיניטסימאלי, והערך של הפונקציה $sinx$ עבור מספר אינפיניטסימאלי $\frac{dx}{2}$ יהיה קרוב למספר $\frac{dx}{2}$ בגלל רציפות הפונקציה הזו. המספר $x+\frac{dx}{2}$ נמצא במונדה של המספר ממשי x, כאשר $\frac{dx}{2}$ הוא מספר אינפיניטסימאלי. מרציפות פונקציית הקוסינוס נובע כי $\cos(x+\frac{dx}{2})$ נמצא במונדה של $\cos x$, לכן הנגזרת של הפונקציה $\boldsymbol{f(x)=sin\ x}$ שווה ל: $\frac{dy}{dx}=cosx$

באופן דומה ניתן להוכיח גם נוסחאות נוספות לחישוב הנגזרת.

ביבליוגרפיה

Dauben, J.W. (1995). Abraham Robinson, Princeton University press, Princeton, New Jersey.

Davis, M. (1977). Applied Nonstandard analysis. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University.

Robinson, A. (1970). Non-standard analysis. North-Holland Publishing Company, Amsterdam-London.

Успенский В.А. Что такое нестандартный анализ? М., Наука, 1987