תיק משימטיקה

בניית עזר והנחות שגויות: מרובעים

להנגשה פרטנית נא לפנות: **st.negishut@weizmann.ac.il**

תוכן עניינים

פתיחה[1]

מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים לייחס לבניית עזר רק תכונות הנובעות משיקולים גיאומטריים ולא תכונות המבוססות על מראה השרטוט בלבד.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- לזהות הנחה שגויה בהצעה של בניית עזר **שלא** ניתן לבנות על סמך הנתונים.
- לנמק קיום תכונה של בניית עזר בעזרת שיקולים גיאומטריים ולא על סמך מראה השרטוט בלבד.

זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימות הערכה: 20-15 דקות.
- פעילות בעקבות ההערכה: כ-30 דקות.

החומרים והעזרים הדרושים

לצורך העבודה על משימות הערכה (לכל תלמיד/ה):

- דף משימה 1: ***פותרים בעזרת בניית עזר.***
- דף משימה 2: ***מה כדאי לבחור?***

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- לפעילות חלק א':
  - דף הפעילות: ***מוסיפים בניית עזר – חלק א'.***
- לפעילות חלק ב':
  - דף הפעילות: ***מוסיפים בניית עזר – חלק ב'.***
  - יישומון: **בניית עזר בטרפז.**

[1] שישה תיקי משימטיקה עוסקים בייחוס תכונות לשרטוט במהלך הוכחה בגיאומטריה. ארבעה תיקים מתמקדים ***בהנחות המבוססות על שרטוט*** נתון, בארבעה נושאים מרכזיים מתכנית הלימודים בגיאומטריה: ***משולשים***, ***מרובעים***, ***מעגל***, ו***דמיון משולשים***. שני תיקים – **בניית עזר והנחות שגויות: מרובעים, וקו עזר והנחות שגויות: מעגל** – מתמקדים בייחוס תכונות לבניות עזר.

רקע

במהלך פתרון בעיה גיאומטרית, יש צורך לעיתים להוסיף בניית עזר שתקדם את מהלך הפתרון. למשל: למתוח קו דרך נקודות נתונות, או לשרטט קטע מקביל לקטע אחר. במקרים כאלו תלמידים נוטים לפעמים לייחס לבניית העזר תכונה כלשהי על סמך מראה השרטוט. למשל, תלמידים מחברים שתי נקודות בקו ישר, ומניחים שהוא מקביל לקו אחר בשרטוט, או שהוא עובר דרך נקודה שלישית המופיעה בשרטוט. לפעמים הנחות אלו נכונות, וניתן להצדיק אותן על ידי שיקולים גיאומטריים; לפעמים הנחות אלה נכונות רק במקרים פרטיים אך לא במקרה הכללי – כלומר, ניתן לבנות את בניית העזר המוצעת רק אם מתקיימים תנאים נוספים על אלו הנתונים ; ולפעמים הנחות אלה אינן נכונות כלל ויוצרות סתירה בינן ובין נתוני הבעיה – כלומר, לא ניתן לבנות כלל את בניית העזר המוצעת.

שימוש בתוכנת גיאומטריה דינמית יכול לעזור בבדיקת היתכנות הקיום של התכונות המיוחסות לבניות עזר שנוספו במהלך עבודה על בעיה גיאומטרית. באופן כזה ניתן להמחיש את הזהירות שיש לנקוט בהסקת תכונות משרטוט ואת הצורך להשתמש בשיקולים גיאומטריים כדי להצדיק את התכונות שיוחסו לבניית העזר.

התיק ***בניית עזר והנחות שגויות: מרובעים*** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים הנוטים לייחס תכונות לבניית עזר בהתבסס על מראה השרטוט בלבד, ולתת מענה לקושי זה.

הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימות הערכה:
  - משימה 1: *פותרים בעזרת בניית עזר.*
  - משימה 2: *מה כדאי לבחור?*
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימות הערכה

בתיק זה שתי משימות הערכה:

- משימה 1: ***פותרים בעזרת בניית עזר.***
- משימה 2: ***מה כדאי לבחור?***

בשתי המשימות מוצגות הצעות לבניות עזר לצורך פתרון בעיות הוכחה. חלק מבניות העזר המוצעות לא ניתנות לבנייה על סמך הנתונים. התלמידים מתבקשים לקבוע אם ניתן לבנות את בניות העזר המוצעות, ולנמק את קביעתם.

משימה 1: פותרים בעזרת בניית עזר

משימה 1: פותרים בעזרת בניית עזר

לפניכם בעיית הוכחה שקיבלו תלמידי כיתה ט'.

לאחר הבעיה מופיעות הצעות לבניות עזר שהציעו דביר ואורית.

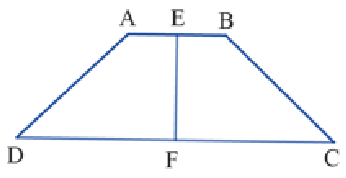
קבעו אם ניתן לבנות את בניות העזר שהם מציעים, ונמקו את קביעתכם.

נתון: טרפז ABCD

הנקודות E ו-F הן אמצעי הבסיסים AB ו- CD בהתאמה.

$EF \perp AB$

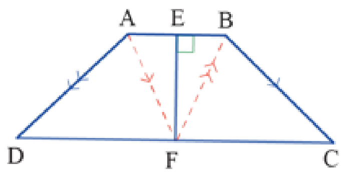
הוכיחו: ABCD טרפז שווה שוקיים



א. בניית העזר שהציע דביר

נשרטט קטע AF המקביל לשוק BC, ונשרטט קטע BF המקביל לקטע AD, כמתואר בשרטוט.

דביר אמר: מכאן הפתרון כבר ממש פשוט.

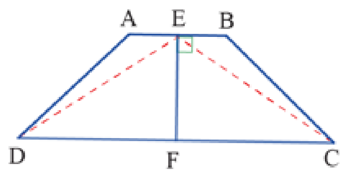


האם ניתן לבנות את בניית העזר שדביר מציע? ☐ כן ☐ לא

נימוק: ________________________________

ב. בניית העזר שהציעה אורית

נשרטט קטע CE, ונשרטט קטע DE, כמתואר בשרטוט.



האם ניתן לבנות את בניית העזר שאורית מציעה? ☐ כן ☐ לא

נימוק: ________________________________

[למשימה 1 מונגשת]

משימה 2: מה כדאי לבחור?

משימה 2: מה כדאי לבחור?

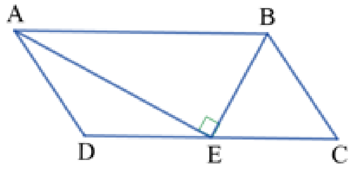
לפניכם בעיית הוכחה בגיאומטריה שקיבלו תלמידים בכיתה ט'.
במהלך פתרון הבעיה תלמידים הציעו **בניות עזר** שונות.
קבעו לכל הצעה, אם ניתן לבנות את בניית העזר נמקו את קביעתכם.

נתון: מקבילית ABCD

E אמצע DC

$AE \perp BE$

צריך להוכיח: $BC = \frac{1}{2} \cdot AB$



הצעות התלמידים לבניית עזר

א. אפרת הציעה: נוסיף תיכון EF לצלע AB במשולש AEB , שהוא גם חוצה את זווית AEB .

האם ניתן לבנות את בניית העזר שאפרת הציעה? ☐ כן ☐ לא

נימוק: ____________________

ב. יוחאי הציע: נוסיף קטע FE המקביל לצלע AD , כאשר הנקודה F נמצאת על הצלע AB .

האם ניתן לבנות את בניית העזר שיוחאי הציע? ☐ כן ☐ לא

נימוק: ____________________

ג. ליבי הציעה: נסמן נקודה F אמצע צלע AB , ונוסיף קו עזר קטע EF .

האם ניתן לבנות את בניית העזר שליבי הציעה? ☐ כן ☐ לא

נימוק: ____________________

ד. מעין הציע: נוריד מנקודה E אנך לצלע AB כך שהוא חוצה את AB .

האם ניתן לבנות את בניית העזר שמעין הציע? ☐ כן ☐ לא

נימוק: ____________________

[למשימה 2 מונגשת]

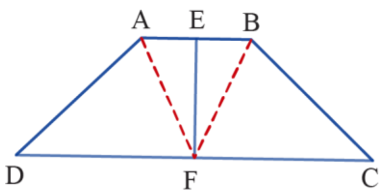
הערכת תוצרי תלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון תשובותיהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה.

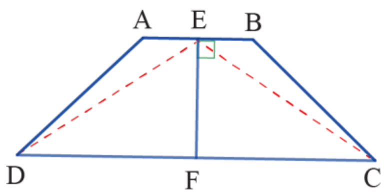
שם התלמיד/ה	כל התשובות נכונות	לא זיהה **טענות שגויות על בניית העזר**	הערות
תלמיד 1	√		
תלמיד 2		√	
סך-הכול			

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימות שלהלן:

פתרון משימה 1 ***פותרים בעזרת בניית עזר***



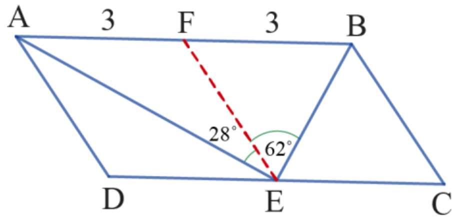
א. לא ניתן לבנות את בניית העזר שדביר מציע, הקטעים AF ו- BF אינם בהכרח מקבילים לשוקי הטרפז. (השרטוט מהווה דוגמה לכך.)
ניתן לבנות את בניית העזר הזו במקרה הפרטי שבו $DC = 2AB$



ב. ניתן לבנות את בניית העזר שאורית מציעה.
אורית חיברה שתי נקודות בקו ישר ושרטטה את הקטעים CE ו- DE
<u>להלן ההוכחה לבעיה באמצעות קווי העזר שהציעה אורית:</u>

$EF \perp DC$	אנך לבסיס אחד של הטרפז מאונך גם לבסיס השני מאחר שהוא מקביל לו
$\Downarrow$ $DE = CE$	כי EF גובה וגם תיכון ב- ΔDEC
$\Downarrow$ $\sphericalangle EDF = \sphericalangle ECF$	במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות בגודלן
$\Downarrow$ $\sphericalangle AED = \sphericalangle BEC$	כי הן זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים לשתי זוויות שוות בגודלן
$AE = BE$	נתון
$\Downarrow$ $\Delta AED \cong \Delta BEC$	לפי משפט חפיפה צ.ז.צ.
$\Downarrow$ $AD = BC$	צלעות מתאימות במשולשים חופפים שוות באורכן

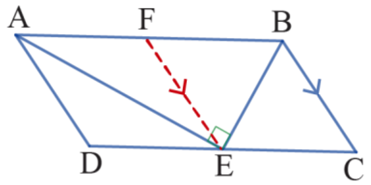
פתרון משימה 2 ***מה כדאי לבחור?***



א. לא ניתן לבנות את בניית העזר שאפרת מציעה. התיכון לצלע AB אינו בהכרח חוצה זווית. (השרטוט מהווה דוגמה נגדית.)

אפרת ייחסה לתיכון לצלע AB תכונה שאינה בהכרח מתקיימת במקרה הכללי.

ניתן לבנות את בניית העזר הזו במקרה הפרטי שבו המקבילית היא מלבן.

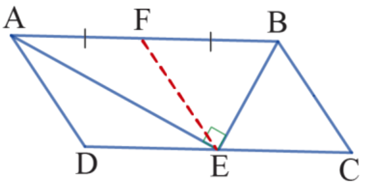


ב. ניתן לבנות קטע FE המקביל ל- AD כפי שהציע יוחאי.

<u>להלן ההוכחה לבעיה באמצעות קו העזר שהציע יוחאי:</u>

$FE \parallel AD$ $\Downarrow$	בניית העזר: FE מקביל ל- AD
FECB מקבילית $\Downarrow$	מרובע שבו שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות הוא מקבילית
$FE = BC$	צלעות נגדיות במקבילית שוות באורכן
$AE \perp BE$ $\Downarrow$	נתון
$FE = FB = FA$ $\Downarrow$	התיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה באורכו לחצי אורך היתר
$BC = \frac{1}{2} \cdot AB$	

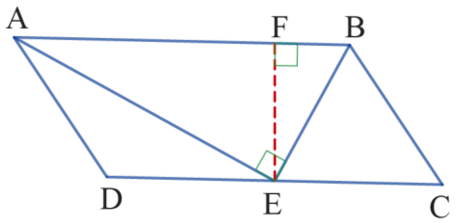
ג.   ניתן לבנות קטע EF שהוא תיכון לצלע AB במשולש AEB , כפי שהציעה ליבי.



<u>להלן ההוכחה לבעיה באמצעות קו העזר שהציעה ליבי:</u>

$FA = FB$	בניית העזר: F אמצע AB
$AE \perp BE$	נתון
$\Downarrow$ $EF = FB = FA$	התיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה באורכו לחצי אורך היתר
$\Downarrow$ $FB = CE$	קטעים שווים באורכם לחצי אורך שתי צלעות נגדיות של המקבילית $ABCD$
$FBCE$ מקבילית $\Downarrow$	כי יש בו זוג צלעות נגדיות מקבילות ושוות באורכן
$EF \parallel BC$	צלעות נגדיות במקבילית
$EF = \frac{1}{2} \cdot AB$ $\Downarrow$	תיכון ליתר במשולש ישר זווית AEB שווה באורכו לחצי אורך היתר
$EF = BC$ $\Downarrow$	צלעות נגדיות במקבילית $FBCE$
$BC = \frac{1}{2} \cdot AB$	

ד.   לא ניתן לבנות את בניית העזר שהציע מעין: האנך EF אינו בהכרח תיכון ב- ΔAEB (השרטוט מהווה דוגמה נגדית).



פעילות בעקבות ההערכה

הפעילות מיועדת לתלמידים שייחסו לבניית עזר תכונה שלא בהכרח מתקיימת במקרה הכללי.

פעילות: מוסיפים בניית עזר

שלבי הפעילות

1. עבודה על דף הפעילות: ***מוסיפים בניית עזר – חלק א'***.
2. דיון.
3. עבודה על דף הפעילות: ***מוסיפים בניית עזר – חלק ב'***.
4. דיון מסכם.

עבודה על דף הפעילות: *מוסיפים בניית עזר – חלק א'*

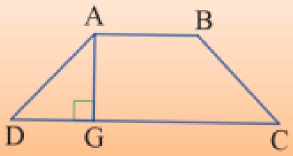
דף הפעילות: *מוסיפים בניית עזר – חלק א'*

תלמידי הכיתה התבקשו לחבר בעיות בגיאומטריה. יואב ואלכס חיברו את הבעיה הבאה:

נתון: המרובע $ABCD$ הוא טרפז שווה שוקיים ($AB \parallel CD$)

מהקודקוד A העבירו גובה AG לבסיס DC

מסקנה: $AB = DG$



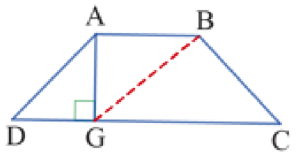
לפניכם ההצעות של יואב ואלכס להוכחת המסקנה שלהם. בִּדקו את ההצעות שלהם.

ההצעה של יואב

אשרטט קטע BG המקביל לשוק הטרפז AD.

המרובע $ABGD$ הוא מקבילית (הצלעות הנגדיות מקבילות), לכן,

$AB = DG$ (צלעות נגדיות במקבילית שוות באורכן)



א. נטע אמרה שיש טעות בהצעה של יואב, והסבירה את הטעות באמצעות היישומון [בניית עזר בטרפז](#).
עליכם לפתוח את היישומון, להוסיף את הקטע BG ולגרור קודקודים. האם BG מקביל ל- AD?
הסבירו את הטעות בהצעה של יואב.

ההצעה של אלכס

מהקודקוד B של הטרפז אשרטט גובה BE לבסיס DC,

ואעביר את AE, שהוא אלכסון המרובע

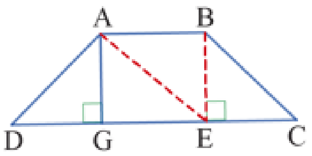
$ABEG$, המקביל לצלע BC.

המרובע $ABEG$ הוא מלבן (הצלעות הנגדיות מקבילות וזווית ישרה)

המרובע $ABCE$ הוא מקבילית (הצלעות הנגדיות מקבילות)

מכאן נובע: $\Delta ABE \cong \Delta BEC$ (לפי ניצב משותף BE ויתר $AE = BC$) $\Leftarrow$ $AB = EC = DG$.

מה דעתכם על ההצעה של עוזי? הסבירו.



ב. נטע אמרה שיש טעות גם בהצעה של אלכס, ושוב הסבירה את הטעות באמצעות היישומון
[בניית עזר בטרפז](#). עליכם לפתוח את היישומון, לשרטט גובה מהקודקוד B ואת AE אלכסון המלבן,
ולגרור קודקודים. האם האלכסון AE מקביל לשוק BC?
הסבירו את הטעות בהצעה של אלכס.

ג. האם המסקנה של יואב ואלכס בבעיה שהציעו, נכונה? נמקו.

[לפעילות חלק א' מונגשת](#)

דיון

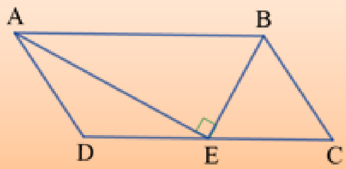
- ❖ אפשר לפסול בניות עזר שלא ניתן לבנות בעזרת דוגמאות נגדיות. אפשר להיעזר לשם כך בתוכנת גיאומטריה דינמית.

עבודה על דף הפעילות: *מוסיפים בניית עזר* – חלק ב'

דף הפעילות: *מוסיפים בניית עזר* – *חלק ב'*

1. לפניכם הבעיה ממשימה 2.

נתון: ABCD מקבילית
E אמצע DC
$AE \perp BE$
צריך להוכיח: $BC = \frac{1}{2} \cdot AB$



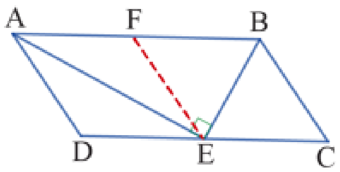
א. במהלך פתרון הבעיה אפרת ומעין הציעו **את בניות העזר** הבאות:
אפרת הציעה: נוסיף תיכון EF לצלע AB במשולש ABC, שהוא גם חוצה את זווית AEB.
מעין הציע: נוריד מנקודה E אנך לצלע AB כך שהוא חוצה את AB.

שרטטו דוגמה של מקבילית שבה התיכון שאפרת מציעה להוסיף, **לא** חוצה את זווית AEB.

שרטטו דוגמה של מקבילית שבה האנך שמעיין מציע לשרטט, **לא** חוצה את צלע AB.

ב. **נועם הציע את בניית העזר הבאה:**
נסמן את אמצע AB באות F ונשרטט קטע EF מקביל ל- BC.
המקביל EF יוצר שתי מקביליות, ובעזרת המשפט בדבר התיכון ליתר נוכיח את הטענה.

מיכל אמרה: ניתן לבנות את בניית העזר שהציע נועם.
האם מיכל צודקת?



אם כן, הוכיחו את הבעיה שבמסגרת.
אם לא, נמקו.

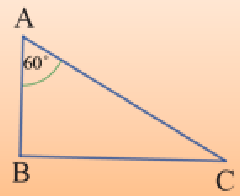
2. בשיעור גיאומטריה תלמידים קיבלו את הבעיה הבאה:

נתון: ΔABC

$AB = \frac{1}{2} \cdot AC$

$\sphericalangle A = 60°$

צריך להוכיח: $\sphericalangle B = 90°$



עמוס הציע לשרטט תיכון BD לצלע AC ששווה באורכו לצלע AB.

א. שרטטו תיכון לצלע AC, ו**הוכיחו** שהוא שווה באורכו לצלע AB.

ב. הוכיחו: $\sphericalangle B = 90°$.

לפעילות חלק ב' מונגשת

דיון וסיכום

- דנים בהצעות של יואב, אלכס ועמוס:
  - יואב ואלכס בדף הפעילות חלק א', ייחסו לבניית עזר תכונות שמתקיימות רק במקרים פרטיים כלומר אינן נובעות מהנתונים, וניתן לפסול אותן למקרה הכללי באמצעות דוגמאות נגדיות.
  - עמוס שרטט תיכון. הטענה: התיכון BD שווה לאורך הצלע AB נובעת מהנתונים ואפשר להוכיח אותה, כיוון שהיא מתקיימת במקרה הכללי.
- מסכמים:
  - אם בניית העזר מתקיימת רק במקרים פרטיים, כלומר אינה נובעת מהנתונים, ניתן לפסול אותה באמצעות דוגמאות נגדיות.
  - במקרים בהם בניית העזר מתבססת על הנחה שניתן להוכיח על סמך הנתונים, נדרשת הוכחה.

הצעה לפתרון דפי הפעילות

<u>פתרון דף הפעילות:</u> ***מוסיפים בניית עזר - חלק א'***

השגיאה בהצעה של יואב: יואב חיבר שתי נקודות נתונות, קבע בכך את הקטע BG , והניח ש- $BG \parallel AD$
ההנחה הזו לא מתקיימת במקרה הכללי.
כמו יואב גם אלכס שרטט אלכסון במלבן, כלומר חיבר שתי נקודות נתונות והניח שהאלסון הזה מקביל לשוק של הטרפז. גם במקרה זה ההנחה לא מתקיימת במקרה הכללי.

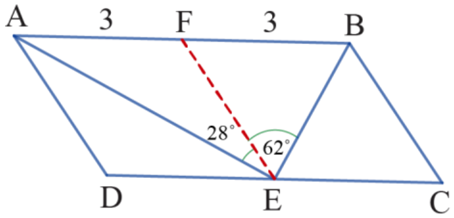
בעזרת היישומון יוצרים דוגמאות הממחישות שההנחות של יואב ואלכס לא מתקיימות במקרה הכללי.

בעזרת היישומון ממחישים שלא ניתן להסיק: $DG = AB$, כלומר המסקנה של יואב ואלכס בבעיה שחיברו, אינה נכונה.

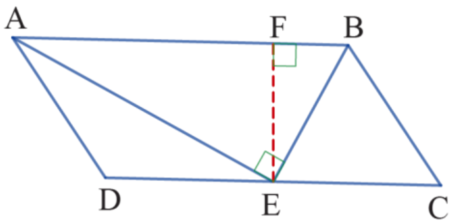
<u>פתרון דף הפעילות:</u> ***מוסיפים בניית עזר - חלק ב'***

1.

א. ההצעה של **אפרת** מהווה דוגמה להצעה של בניית עזר שלא ניתן לבנות (ניתן להדגים באמצעות דוגמה נגדית, כבשרטוט).

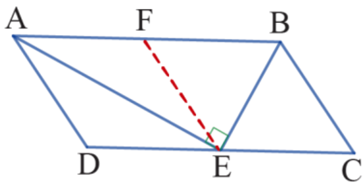


באופן דומה ניתן להדגים שלא ניתן לבנות את בניית העזר שהציע **מעין**.



ב. ההצעה של **נועם** מהווה דוגמה למקרה שבו בניית העזר מתבססת על הנחה שניתן לבנות, אך יש להוכיח על סמך הנתונים: הקטע EF נקבע כתיכון כשנועם קבע ש- F אמצע AB אך התכונה $EF \parallel BC$ נובעת מהנתונים ויש להוכיחה. כלומר, ניתן לסמן את אמצע AB באות F ולחבר את EF אבל אז יש **להוכיח** ש- $EF \parallel BC$, על-סמך $AF = BF$ והנתונים.

<u>להלן ההוכחה לבעיה באמצעות קו העזר שהציע נועם:</u>



נתון: במקבילית $ABCD$
E אמצע DC
$AE \perp BE$
בניית העזר: F אמצע AB
$BF = CE$ (שני <u>הקטעים</u> שווים באורכם לחצי אורך שתי צלעות נגדיות של המקבילית $ABCD$)

לכן, המרובע FBCE מקבילית (כי יש בו זוג צלעות נגדיות מקבילות ושוות באורכן)

$\Downarrow$

$EF \parallel BC$ (כי הן צלעות נגדיות במקבילית)

כעת אפשר להוכיח גם ש- $BC = \frac{1}{2} \cdot AB$

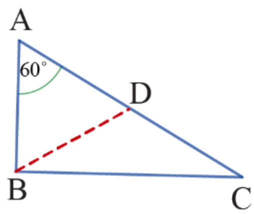
$EF = \frac{1}{2} \cdot AB$ (תיכון ליתר במשולש ישר זווית AEB שווה באורכו לחצי אורך היתר)

$EF = BC$ (כי הן צלעות נגדיות במקבילית FBCE)

$\Downarrow$

$BC = \frac{1}{2} \cdot AB$

.2



א. מבניית העזר נובע ש- $AD = \frac{1}{2} \cdot AC$

ולפי הנתון גם $AB = \frac{1}{2} \cdot AC$

$\Leftarrow AD = AB$

$\Downarrow$

משולש ABD הוא שווה צלעות (משולש שווה שוקיים שיש בו זווית שגודלה 60° הוא שווה צלעות).

$\Downarrow$

$BD = AB$

עמוס הציע לשרטט תיכון BD לצלע AC . במקרה זה ההנחה $BD = AB$ נכונה כפי שהוכח כאן בסעיף א.

ב. $\sphericalangle BDC = 120°$

$BD = DC$ (כי לפי בניית העזר $AD = DC$ והוכחנו $BD = AD$)

$\Downarrow$

$\sphericalangle DBC = \sphericalangle C = 30°$ (סכום זוויות ב- ΔBDC)

$\Downarrow$

$\sphericalangle ABC = 90°$ ($\sphericalangle ABD + \sphericalangle CBD$)