



תיק משימטיקה

הנחות המבוססות על

שרטוט: מרובעים

להגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

© כל הזכויות שמורות

תוכן עניינים

3	פתיחה
3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
3	החומרים והעזרים הדרושים
4	רקע
4	הצעה למהלך העבודה
5	עבודה על משימת הערכה
5	משימה: נכון או לא נכון?
6	הערכת תוצרי תלמידים
8	פעילות בעקבות ההערכה
8	פעילות: מסתמכים רק על הנתונים
9	עבודה על דף הפעילות: מסתמכים רק על הנתונים - חלק א'
10	דיון
11	עבודה על דף הפעילות: מסתמכים רק על הנתונים - חלק ב'
12	דיון וסיכום

פתיחה¹



מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים להסתמך רק על נתונים ועל משפטים ידועים, ולא להסיק מסקנות המבוססות על מראה השרטוט בלבד. התיק עוסק במרובעים. ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים להסיק מסקנות על סמך נתונים ומשפטים, ללא שימוש בתכונות המבוססות רק על מראה השרטוט.

זמני עבודה משוערים

- ❖ עבודה על משימת הערכה: 15-20 דקות.
- ❖ פעילות בעקבות ההערכה: כ-45 דקות.



החומרים והעזרים הדרושים

לצורך העבודה על משימת הערכה (לכל תלמיד/ה):

- ❖ דף המשימה: [נכון או לא נכון?](#)

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- ❖ לפעילות חלק א'

- דף הפעילות: [מסתמכים רק על הנתונים – חלק א'](#)
- יישומון: [גבהים בטרפז](#)
- יישומון: [שטחים שווים וחפיפה](#)

- ❖ לפעילות חלק ב'

- דף הפעילות: [מסתמכים רק על הנתונים – חלק ב'](#)
- יישומון: [מקביל בתוך מקבילית](#)
- יישומון: [מקבילים לאלכסוני המעוין](#)

¹ שישה תיקי משימטיקה עוסקים בייחוס תכונות לשרטוט במהלך הוכחה בגיאומטריה. ארבעה תיקים מתמקדים בהנחות המבוססות על שרטוט נתון, בארבעה נושאים מרכזיים מתכנית הלימודים בגיאומטריה: **משולשים, מרובעים, מעגל, דמיון משולשים**. שני תיקים – בניית עזר והנחות שגויות: **מרובעים, וקו עזר והנחות שגויות: מעגל** – מתמקדים בייחוס תכונות לבניות עזר.



רקע

במתמטיקה בכלל ובגיאומטריה בפרט, נעזרים רבות בשרטוטים המייצגים את הנתונים בבעיה. לדוגמה, להבנת המצב ההדדי של צלעות וזוויות. עם זאת, שרטוט עלול גם ליצור רושם מוטעה. במהלך הוכחה בגיאומטריה תלמידים נוטים לעיתים להניח הנחות המבוססות על מראה השרטוט, למשל, מניחים שקטע היורד מקודקוד המקבילית אל הצלע שמולו הוא גובה במקבילית, רק משום שכך הוא נראה בשרטוט. לפעמים הנחות המבוססות על מראה השרטוט נכונות, וניתן להצדיק אותן על ידי שיקולים גיאומטריים; לפעמים הנחות אלה נכונות רק במקרים פרטיים, אך לא במקרה הכללי; ובמקרים אחרים הנחות אלה אינן נכונות כלל ויוצרות סתירה בין ובין נתוני הבעיה.

ייחוס תכונות המבוססות על מראה השרטוט ללא שיקולים גיאומטריים מתאימים, קשור, לעיתים קרובות, לכך שתלמידים מתייחסים לשרטוט כאל אובייקט המתאר מקרה כללי, בעוד ששרטוט יחיד מייצג מקרה פרטי בלבד. שימוש בתוכנה של גיאומטריה דינמית מאפשר יצירה של שרטוטים שונים המתאימים לאותם הנתונים ובכך ממחיש את הזהירות שיש לנקוט בהסקת תכונות משרטוט, ואת הצורך להשתמש בשיקולים גיאומטריים ולא במראה השרטוט בלבד.

נושא המרובעים הוא נושא מרכזי בתוכנית הלימודים בגיאומטריה. התיק **הנחות המבוססות על שרטוט: מרובעים** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים הנוטים להניח הנחות המתבססות על מראה השרטוט, בהקשר של מרובעים, ולתת להם מענה.



הצעה למהלך העבודה

- ❖ עבודה על משימת הערכה: **נכון או לא נכון?**
- ❖ הערכת תוצרי התלמידים.
- ❖ פעילות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימת הערכה

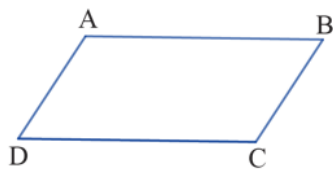
בתיק זה משימת הערכה אחת: **נכון או לא נכון?** במשימה שני סעיפים. בכל סעיף מוצגת בעיה וטענה של תלמיד/ה. התלמידים מתבקשים לקבוע אם הטענות נכונות על סמך נתונים ושרטוט, ולהסביר את תשובתם. מטרת המשימה לזהות אם התלמידים מניחים הנחות בלתי מוצדקות הקשורות לשרטוט.



משימה: נכון או לא נכון?

משימה: נכון או לא נכון?

1. במסגרת לפניכם טענה שהתבקשו תלמידים להוכיח בשיעור גיאומטריה.



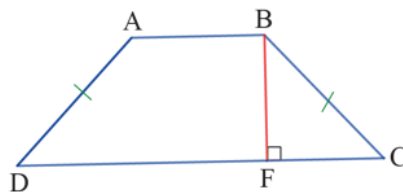
נתון: המרובע ABCD הוא מקבילית.
 E נקודה על הצלע AB ו-G נקודה על הצלע DC,
מסקנה: שטח $\triangle AGB$ שווה לשטח $\triangle DEC$

בהוכחה שלה, אורנה טענה שהמשולשים AGB ו-DEC חופפים ולכן השטחים שלהם שווים.

האם אורנה צודקת? כן לא

הסבירו. _____

2. תלמידי הכיתה התבקשו לחבר בעיות בגיאומטריה. במסגרת שלפניכם בעיה שדני חיבר.



נתון: המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים
 ($AB \parallel DC$)
 BF הוא גובה בטרפז
 הנקודה E היא אמצע הקטע DF
מסקנה: $\triangle BFC \cong \triangle AED$

סמנו בשרטוט את הנקודה E.

קבעו: האם המסקנה בבעיה שדני חיבר נכונה? כן לא

הסבירו. _____

[למשימה מוגשת](#)

הערכת תוצרי תלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

הערות	מסקנה ו/או נימוק המתבססים על מראה השרטוט	כל התשובות נכונות	שם התלמיד/ה
		✓	תלמיד 1
	✓		תלמיד 2
	✓		תלמיד 3
			סך הכול

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימה שלהלן:

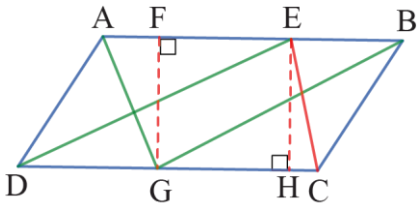
1. המשולשים לא בהכרח חופפים.

הוכחה שהשטחים שווים:

$AB = CD$ (צלעות נגדיות במקבילית).

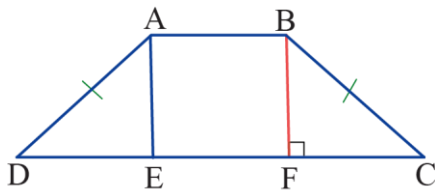
$EH = GF$ (מרחק בין המקבילים AB ו- CD קבוע).

שטח $\triangle AGB$ שווה לשטח $\triangle DEC$ (משולשים להם צלעות שוות באורכן, והגבהים לצלעות האלה שווים באורכם הם משולשים שווי שטח).

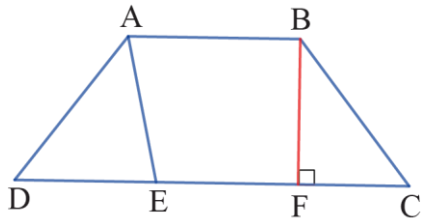


2. לא ניתן להסיק שהמשולשים BFC ו- AED חופפים.

הם יהיו חופפים רק במקרה הפרטי שבו אמצע DF יתלכד עם עקב הגובה היוצא מהקודקוד A , כמו בשרטוט:



בשרטוט להלן דוגמה נגדית:



פעילות בעקבות ההערכה

הפעילות מיועדת לתלמידים שהניחו הנחות שגויות ו/או נימקו על סמך השרטוט.



פעילות: מסתמכים רק על הנתונים

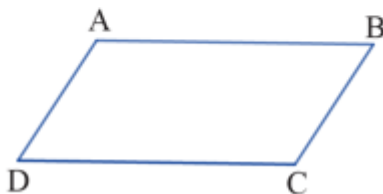
שלבי הפעילות

1. עבודה על דף הפעילות: **מסתמכים רק על הנתונים - חלק א'.**
2. דיון.
3. עבודה על דף הפעילות: **מסתמכים רק על הנתונים - חלק ב'.**
4. דיון מסכם.

עבודה על דף הפעילות: מסתמכים רק על הנתונים - חלק א'

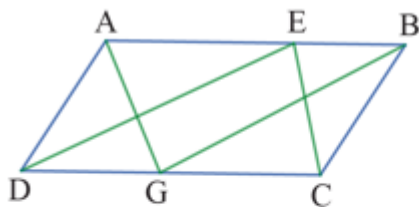
דף הפעילות: מסתמכים רק על הנתונים - חלק א'

1. במסגרת שלפניכם טענה נכונה (בעיה 1 במשימת ההערכה). אחרי המסגרת מופיע ההסבר של אורנה שאינו מצדיק את נכונות הטענה. מצאו את הטעות בהסבר של אורנה.



נתון: המרובע ABCD הוא מקבילית.
נקודה E על הצלע AB ו- G נקודה על הצלע DC

מסקנה: שטח $\triangle AGB$ שווה לשטח $\triangle DEC$

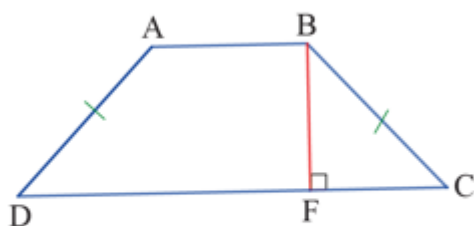


ההסבר של אורנה:
המשולשים AGB ו- DEC חופפים, ולכן השטחים שלהם שווים.

א. היעזרו ביישומון: שטחים שווים וחפיפה, ומצאו את הטעות בהסבר של אורנה. השלימו: הטעות בהסבר של אורנה היא _____

ב. שרטטו גבהים בשני המשולשים (מ- G ומ- E), והוכיחו את שוויון השטחים.

2. במסגרת שלפניכם טענה שהביא דני לכיתה (בעיה 2 במשימת ההערכה). הטענה אינה נכונה.



נתון: המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים

$$AB \parallel DC$$

BF הוא גובה בטרפז

הנקודה E היא אמצע הקטע DF

מסקנה: $\triangle BFC \cong \triangle AED$

א. היעזרו ביישומון: גבהים בטרפז, וצרו דוגמה נגדית שסותרת את טענתו של דני.

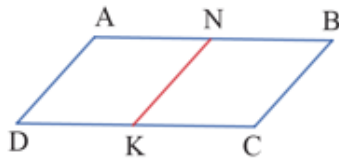
ב. איזו הנחה שגויה הביאה לדעתכם למסקנה השגויה של דני?

[לפעילות חלק א' מונגשת](#)

- ❖ אפשר לשרטט שרטוטים רבים המייצגים נתונים של בעיה בגיאומטריה, אך כל שרטוט מייצג מקרה פרטי, ולכן עלול להכיל תכונות נוספות שאינן נתונות בבעיה.
- ❖ שרטוט הנעשה על פי נתונים בתוכנה של גיאומטריה דינמית, שומר על הנתונים ומאפשר שינוי של תכונות שאינן נתונות וכך מסייע לשער מה ניתן להסיק ומה לא.
- ❖ כאשר משרטטים שרטוט על פי נתונים בתוכנה של גיאומטריה דינמית:
 - התוכנה מאפשרת לראות שרטוטים רבים שבהם הנתונים נשמרים אבל תכונות שאינן נתונות משתנות. השרטוטים מסייעים לשער מה ניתן להסיק ומה לא.
 - התוכנה מסייעת ביצירה של דוגמאות נגדיות לטענות לא נכונות.

עבודה על דף הפעילות: מסתמכים רק על הנתונים - חלק ב'

דף הפעילות: מסתמכים רק על הנתונים - חלק ב'



1. נתון: ABCD מקבילית

N נקודה על AB ו-K נקודה על DC כך שמתקיים:

$$AN = AD$$

$$NK \parallel AD$$

עומרי שרטט שרטוט מתאים לבעיה, ורשם את המסקנות הבאות.

בדקו כל אחת ממסקנותיו ורשמו אם היא בהכרח נכונה או לא. נמקו את קביעתכם.

א. ANKD מעוין נכון/לא נכון

נימוק:

ב. NBCK מעוין נכון/לא נכון

נימוק:

ג. $\angle AKD = \angle AKN$ נכון/לא נכון

נימוק:

ד. $\angle AKB = 90^\circ$ נכון/לא נכון

נימוק:

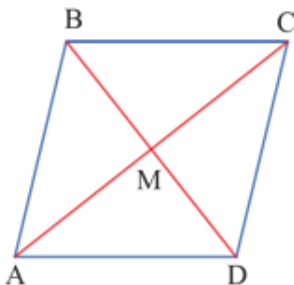
ה. $AN = NK$ נכון/לא נכון

נימוק:

ו. $BN = NK$ נכון/לא נכון

נימוק:

תוכלו לבדוק באמצעות היישומון: [מקביל בתוך מקבילית](#)



2. המרובע ABCD הוא מעוין.

האלכסונים AC ו-BD נפגשים בנקודה M.

שרטטו מהנקודה B מקביל לאלכסון AC.

שרטטו מהנקודה C מקביל לאלכסון BD.

שני הישרים ששרטטתם נחתכים בנקודה K.

מהו סוג המרובע MBKC? הוכיחו.

תוכלו לבדוק באמצעות היישומון: [מקבילים לאלכסוני המעוין](#).

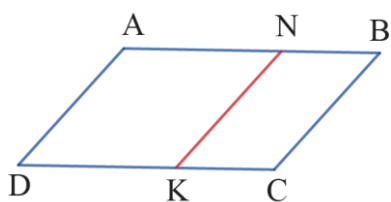
[לפעילות חלק ב' מוגשת](#)

דיון וסיכום

- ❖ במתמטיקה לא ניתן להסיק מסקנות ולנמק על פי מראה השרטוט בלבד.
- ❖ במתמטיקה מסיקים מסקנות ומנמקים אותן בהתבסס על הנתונים ועל משפטים שכבר הוכחו.

הצעה לפתרון דף הפעילות: מסתמכים רק על הנתונים - חלק ב'

1. א. המרובע ANKD הוא מעוין (הצלעות הנגדיות מקבילות ויש לו זוג צלעות סמוכות שוות).



ב. המרובע NBCK אינו בהכרח מעוין, כי NB לא שווה בהכרח ל-NK.

ג. $\angle AKD = \angle AKN$ הזוויות שוות כי האלכסון במעוין ANKD חוצה את הזוויות.

ד. $\angle AKB = 90^\circ$ הטענה אינה נובעת מהנתונים מאחר ש-KB אינו בהכרח חוצה זווית ואז גודל $\angle NKB$ אינו בהכרח חצי מגודל זווית שטוחה.

ה. $AN = NK$ הטענה נובעת מהנתונים כי $AD = NK$ (הן צלעות נגדיות במקבילית) ו- $AD = AN$ נתון.

ו. $BN = NK$ הטענה לא נובעת מהנתונים כי לא נתון שגם הקטע NB שווה באורכו לצלע AD. לסעיפים ב, ד, ו, אפשר ליצור דוגמאות נגדיות בעזרת היישומון.

2. המרובע הוא מלבן: יש במרובע MBKC שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות ולכן המרובע הוא מקבילית, ומקבילית שיש בה זווית ישרה היא מלבן $\angle BMC = 90^\circ$ (כי אלכסוני מעוין מאונכים זה לזה).

