



תיק משימטיקה

דוגמה נגדית: מרובעים

להגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

© כל הזכויות שמורות

תוכן עניינים

3	פתיחה
3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
3	החומרים והעזרים הדרושים
4	רקע
4	הצעה למהלך העבודה
5	עבודה על משימות הערכה
6	משימה 1: בודקים הסברים
7	משימה 2: מפריכים טענה שאינה נכונה
8	משימה 3: בוחרים דוגמאות נגדיות
9	הערכת תוצרי תלמידים
11	פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה
11	פעילות 1: האם ההסברים משכנעים?
12	עבודה על דף פעילות 1: האם ההסברים משכנעים?
13	דיון
14	פעילות 2: מפריכים טענות באמצעות דוגמאות נגדיות
14	עבודה על דף פעילות 2: מפריכים טענות באמצעות דוגמאות נגדיות
16	דיון

פתיחה



מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים לקשור בין שימוש בדוגמאות פרטיות לבין הוכחות והפרכות של טענות גיאומטריות. התיק עוסק בנושא מרובעים.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- ❖ לפסול הוכחות לנכונות טענות לגבי מרובע כלשהו, המתבססות רק על דוגמאות פרטיות.
- ❖ להשתמש בשיטה של דוגמה נגדית כדי להוכיח שטענה לא נכונה.
- ❖ לזהות דוגמאות פרטיות שיכולות לשמש כדוגמאות נגדיות לטענות לא נכונות.



זמני עבודה משוערים

- ❖ עבודה על משימת ההערכה: 20-30 דקות.
- ❖ פעילויות בעקבות ההערכה: 60-90 דקות.



החומרים והעזרים הדרושים

לצורך העבודה על משימות הערכה (לכל תלמיד/ה):

- ❖ דף משימה 1: [בודקים הסברים](#).
- ❖ דף משימה 2: [מפריכים טענה שאינה נכונה](#).
- ❖ דף משימה 3: [בוחרים דוגמאות נגדיות](#).

לצורך הפעילויות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

❖ לפעילות 1

- דף פעילות 1: [האם ההסברים משכנעים?](#)
- [היישומון: "גבהים במעוין"](#).

❖ לפעילות 2

- דף פעילות 2: [מפריכים טענות באמצעות דוגמאות נגדיות](#).
- [היישומון: "זוג צלעות מקבילות וזוג זוויות סמוכות שוות"](#).
- [היישומון: "האם האלכסונים במלבן מאונכים?"](#)

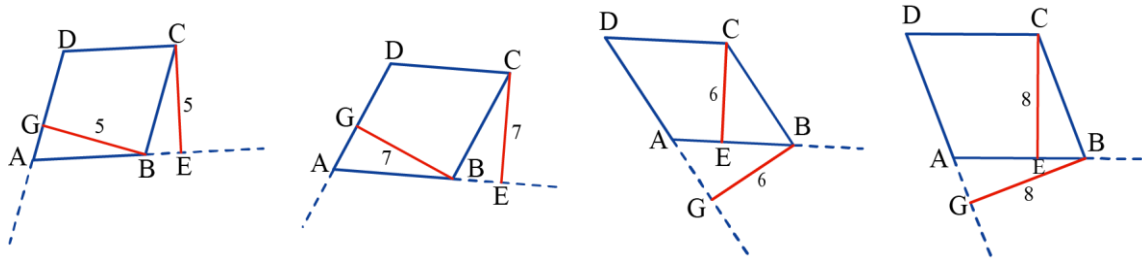


רקע

במתמטיקה עוסקים רבות בבחינת אמיתות של השערות, במטרה להוכיח או להפריך אותן. שיטה נפוצה להפרכת טענות במתמטיקה היא מתן דוגמה נגדית. שיטה זאת מתבססת על כך שבמתמטיקה טענה נחשבת נכונה אם ורק אם היא נכונה תמיד, כלומר, היא חלה על כל מקרה פרטי. לכן, די במקרה פרטי אחד שלגביו טענה אינה נכונה, כלומר, די בדוגמה נגדית אחת, כדי לפסול נכונות של טענה ובכך להפריכה.

תלמידים מתקשים לעיתים קרובות בשימוש בשיטה של דוגמה נגדית לצורך הפרכה של טענות. קושי זה כרוך הן בהכרה בשיטה זאת כמתאימה להוכחה שטענה אינה נכונה, והן בזיהוי וביצירה של דוגמאות נגדיות.

קושי נפוץ נוסף של תלמידים הוא שימוש בדוגמאות פרטיות בהקשר של הוכחות במתמטיקה, אך לא לצורך הוכחה שטענה מסוימת אינה נכונה, אלא לצורך הוכחה של טענה כללית. לדוגמה, הטענה **גבהים לצלעות סמוכות במעוין שווים באורכם**, היא טענה נכונה, אך כדי להוכיח את הטענה, לא מספיק לבנות באמצעות המחשב מעוינים, ולשרטט גבהים לצלעות סמוכות. בכל המקרים האלה הגבהים אכן שווים באורכם (ראו שרטוטים למטה) אבל השימוש בדוגמאות אינו מהווה הוכחה לנכונות הטענה.



נושא המרובעים הוא נושא מרכזי בתוכנית הלימודים בגיאומטריה. התיק **דוגמה נגדית: מרובעים** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים המתקשים בשימוש במקרים פרטיים בהקשר של הוכחות והפרכות של טענות גיאומטריות, ולתת להם מענה.



הצעה למהלך העבודה

❖ עבודה על משימות הערכה:

- משימה 1: **בודקים הסברים**.
- משימה 2: **מפריכים טענה שאינה נכונה**.
- משימה 3: **בוחרים דוגמאות נגדיות**.

❖ הערכת תוצרי התלמידים.

❖ פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימות הערכה

בתיק זה שלוש משימות הערכה:

- ❖ משימה 1: **בודקים הסברים.**
- ❖ משימה 2: **מפריכים טענה שאינה נכונה.**
- ❖ משימה 3: **בוחרים דוגמאות נגדיות.**

במשימה 1 מוצגים הסברים של תלמידים לטענה נכונה והתלמידים צריכים לקבוע אם ההסבר משכנע **בנכונות הטענה**. במשימה 2 התלמידים נדרשים לקבוע אם ההסבר משכנע **שהטענה אינה נכונה**. במשימה 3 התלמידים נדרשים לזהות שרטוטים המהווים דוגמאות נגדיות לטענות שאינן נכונות.



משימה 1: בודקים הסברים

משימה 1: בודקים הסברים

במסגרת שלפניכם **טענה נכונה**. לאחריה הסברים של אנה, יוליה ורחל, לנכונות הטענה. בדקו כל אחד משלושת ההסברים, קבעו אם הוא משכנע בנכונות הטענה, ונמקו את קביעתכם.

הטענה הבאה **נכונה**:
מרובע שיש בו 3 זוויות ישרות, הוא מלבן.

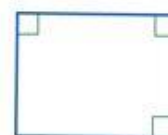
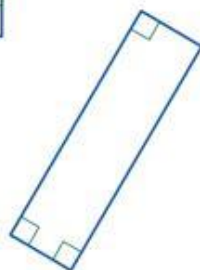


❖ **ההסבר של אנה:** אני יודעת שהטענה נכונה כי יש לי דוגמה שמראה זאת.

ההסבר של אנה משכנע שהטענה **נכונה**. כן לא

נימוק: _____

❖ **ההסבר של יוליה:** בניתי באמצעות המחשב שישה מרובעים עם 3 זוויות ישרות, ותמיד התקבלו מלבנים.



ההסבר של יוליה משכנע שהטענה **נכונה**. כן לא

נימוק: _____

❖ **ההסבר של רחל:** סכום הזוויות במרובע הוא 360° . לכן, אם שלוש זוויות גודלן 90° אז גודל הזווית הרביעית הוא גם 90° כי $360 - 270 = 90$. מרובע עם ארבע זוויות ישרות הוא מלבן.

ההסבר של רחל משכנע שהטענה **נכונה**. כן לא

נימוק: _____

למשימה 1 מוגשת



משימה 2: מפריכים טענה שאינה נכונה

משימה 2: מפריכים טענה שאינה נכונה

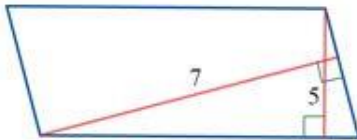
במסגרת שלפניכם טענה שאינה נכונה. לאחריה הסברים של נירה, נועה ורות, לאי-נכונות הטענה. בדקו כל אחד משלושת ההסברים, קבעו אם הוא משכנע בנכונות הטענה, ונמקו את קביעתכם.

הטענה הבאה אינה נכונה:
כל הגבהים במקבילית שווים באורכם.

❖ **ההסבר של נירה:** הטענה אינה נכונה כי אי אפשר להוכיח אותה.

ההסבר של נירה משכנע שהטענה אינה נכונה. כן לא

נימוק: _____

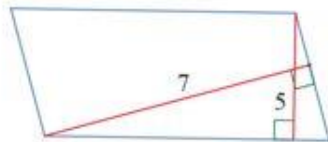


❖ **ההסבר של נועה:** בניתי דוגמה של מקבילית שבה הגבהים לצלעות הסמוכות לא שווים באורכם.

ההסבר של נועה משכנע שהטענה אינה נכונה. כן לא

נימוק: _____

❖ **ההסבר של רות:** במקבילית הגבהים לצלעות נגדיות שווים באורכם, אבל הגבהים לצלעות סמוכות לא חייבים להיות שווים. כדי להדגים בניתי שתי מקביליות עם גבהים שמשמאל היא דוגמה נגדית.



ההסבר של רות משכנע שהטענה אינה נכונה. כן לא

נימוק: _____

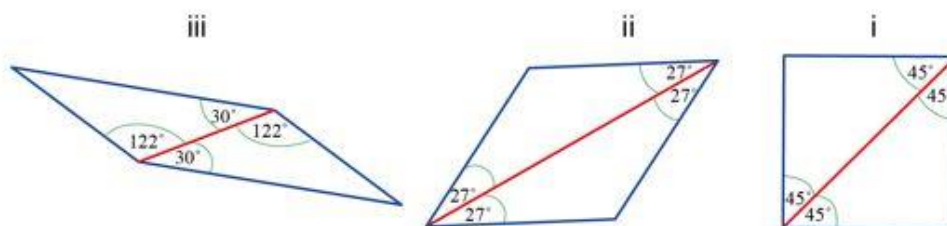
[למשימה 2 מוגשת](#)



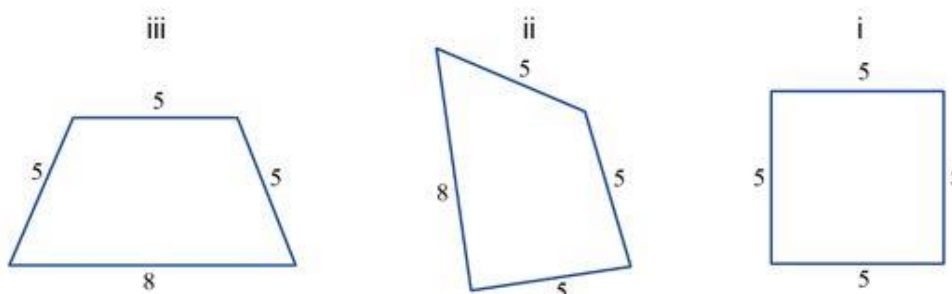
משימה 3: בוחרים דוגמאות נגדיות

משימה 3: בוחרים דוגמאות נגדיות

- א. הטענה הבאה **אינה נכונה**: אלכסון במקבילית חוצה זוג זוויות נגדיות במקבילית. לפניכם שרטוטים של שלוש מקביליות. קבעו אילו משלושת השרטוטים מהווים דוגמה נגדית לטענה.



- ב. הטענה הבאה **אינה נכונה**: מרובע שיש לו שלוש צלעות שוות באורכן, הוא מעוין. לפניכם שרטוטים של שלושה מרובעים. קבעו אילו משלושת השרטוטים מהווים דוגמה נגדית לטענה.



[למשימה 3 מוגשת](#)

הערכת תוצרי תלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בטבלה שלהלן.

שם התלמיד/ה	כל התשובות נכונות	בחרו בדוגמאות כהסבר לנכונות טענה	טעו בדוגמאות נגדיות	הערות
תלמיד 1	√			
תלמיד 2		√		
תלמיד 3		√	√	
סך הכול				

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרונות המופיעים להלן.

משימה 1

הטענה: **מרובע שיש בו 3 זוויות ישרות, הוא מלבן.**

- ❖ ההסבר של **אנה** אינו משכנע, כי דוגמה אינה מספיקה כדי להצדיק נכונות של טענה.
- ❖ ההסבר של **יוליה** אינו משכנע. גם דוגמאות רבות אינן משכנעות שהטענה נכונה, וגם חוסר היכולת למצוא דוגמה נגדית אינו מבטיח שלא קיימת דוגמה כזו.
- ❖ ההסבר של **רחל** משכנע שהטענה נכונה: היא הוכיחה שהמרובע הוא מלבן.

משימה 2

הטענה: **כל הגבהים במקבילית שווים באורכם.**

- ❖ ההסבר של **נירה** אינו משכנע: חוסר יכולת להוכיח אינו פוסל נכונות של טענה.
- ❖ ההסבר של **נועה** משכנע: היא בנתה דוגמה נגדית המראה שהגבהים במקבילית אינם בהכרח שווים זה לזה.
- ❖ ההסבר של **רות** משכנע: כי היא הסבירה שגבהים לצלעות סמוכות אינם בהכרח שווים באורכם. ושרטטה דוגמה כזו.

משימה 3

א. טענה: אלכסון במקבילית חוצה זוג זוויות נגדיות במקבילית.

הריבוע והמעוין מקיימים את הנתון (המרובע הוא מקבילית) אבל גם את המסקנה (האלכסון המשורטט חוצה את הזוויות), ולכן אינם יכולים לשמש דוגמה נגדית לטענה. המקבילית היא דוגמה נגדית מאחר שהנתון מתקיים והמסקנה אינה מתקיימת.

ב. טענה: מרובע שיש לו שלוש צלעות שוות באורכן, הוא מעוין.

- i – המרובע הוא מעוין (ואולי אפילו ריבוע) ולכן המסקנה מתקיימת וזו אינה דוגמה נגדית.
- ii – המרובע מקיים את הנתון (יש בו 3 צלעות שוות באורכן) אך אינו מקיים את המסקנה: אין בו ארבע צלעות שוות ואינו מעוין, ולכן יכול לשמש דוגמה נגדית לטענה.
- iii – כמו ב- ii.

פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

מוצעות שתי פעילויות דיפרנציאליות שמטרתן לסייע למורה לתת מענה לקשיים שונים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.

פעילות 2	פעילות 1	למי מיועדת הפעילות?
	V	לתלמידים שבחרו בדוגמאות כהסבר משכנע בנכונות טענה
V		לתלמידים שטעו בבחירה של דוגמה נגדית להפרכת טענה שאינה נכונה



פעילות 1: האם ההסברים משכנעים?

שלבי הפעילות

- עבודה על דף פעילות 1: האם ההסברים משכנעים?
- דיון.

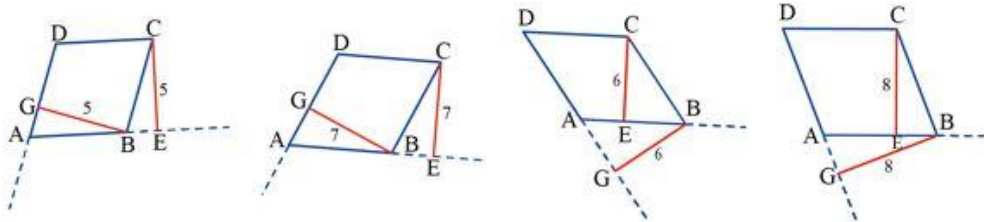
עבודה על דף פעילות 1: האם ההסברים משכנעים?

דף פעילות 1: האם ההסברים משכנעים?

א. במסגרת שלפניכם טענה ולאחריה ההסבר של גליה לנכונות הטענה. בדקו אם ההסבר משכנע בנכונות הטענה ונמקו.

טענה: **גבהים לצלעות סמוכות במעוין שווים באורכם.**

גליה אמרה: **הטענה נכונה. כדי להוכיח את הטענה, בניתי באמצעות המחשב מעוין, ושרטטתי גבהים לצלעות סמוכות, גררתי קודקודים ובכל המקרים הגבהים היו שווים באורכם.**



❖ האם ההסבר של גליה משכנע שהטענה נכונה? נמקו.

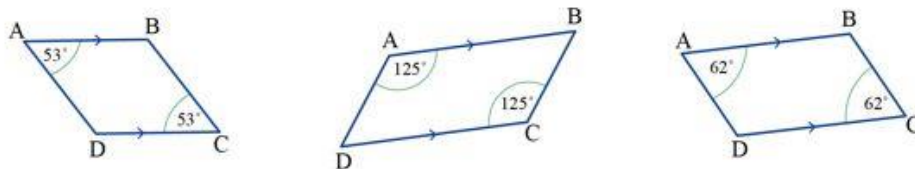
❖ בדקו באמצעות היישומון "גבהים במעוין":

- האם נכונות הטענה בכל המקרים שהתקבלו על המסך **מבטיח** שבכל מקרה הגבהים שווים באורכם?
- האם נכונות הטענה בכל המקרים שבדקנו **מסביר** את נכונות הטענה?

ב. במסגרת שלפניכם טענה ולאחריה הסברים של שני תלמידים לטענה. בדקו כל הסבר אם הוא משכנע בנכונות הטענה ונמקו.

טענה: **מרובע שיש בו שתי צלעות מקבילות ושתי זוויות נגדיות שוות בגודלן הוא מקבילית.**

❖ **בוריס אמר:** הטענה נכונה. כדי להוכיח שרטטתי באמצעות המחשב מרובעים עם שתי צלעות מקבילות וזוג זוויות נגדיות שוות בגודלן, גררתי קודקודים ותמיד התקבלה מקבילית.



האם ההסבר של **בוריס** משכנע שהטענה נכונה? נמקו.

❖ **אורי אמר:** הטענה נכונה. אני מוכיח כך:

$$\angle B = 180^\circ - \angle C \quad (\text{זוויות חד צדדיות בין מקבילים})$$

$$\angle D = 180^\circ - \angle A \quad (\text{זוויות חד צדדיות בין מקבילים})$$

$$\angle A = \angle C \quad (\text{נתון})$$

⇓

$$\angle B = \angle D$$

לכן המרובע הוא מקבילית כי יש בו שני זוגות של זוויות נגדיות שוות בגודלן.

האם ההסבר של **אורי** משכנע שהטענה **נכונה**? נמקו.

[לפעילות 1 מונגשת](#)

דיון

לסיכום דנים בנקודות הבאות:

- ❖ דוגמאות רבות אינן מוכיחות נכונות של טענה כיוון שיכולה להיות דוגמה אחרת שמפריכה את הטענה. כדי להבטיח נכונות של טענה נדרשת הוכחה. (אם מדובר בטענת קיום: דוגמה אחת מאשרת/מוכיחה קיום. למשל: **קיים מרובע שאחת מזוויותיו גדולה מ-180°**. במקרה זה שרטוט של מרובע קעור מהווה הוכחת קיום.)
- ❖ המגבלה של גיאומטריה דינמית (למשל גיאוגברה) לבדיקת נכונות של טענה. (בדיקה באמצעות גיאומטריה דינמית יכולה לחזק השערה בדבר נכונות הטענה אבל היא אינה מבטיחה שנבדקו כל הדוגמאות האפשריות ולא **מסבירה** את נכונות הבעיה.)



פעילות 2: מפריכים טענות באמצעות דוגמאות נגדיות

שלבי הפעילות

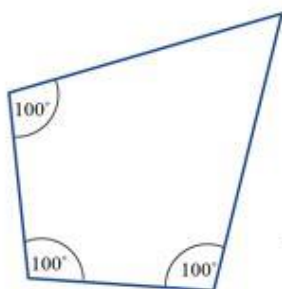
- א. עבודה על דף פעילות 2: **מפריכים טענות באמצעות דוגמאות נגדיות**.
ב. דיון.

עבודה על דף פעילות 2: מפריכים טענות באמצעות דוגמאות נגדיות

דף פעילות 2: מפריכים טענות באמצעות דוגמאות נגדיות

א. אסתר, דינה, יוליה, בֶּדְקו את נכונות הטענה שבמסגרת. עליכם להחליט אם ההסברים שלהן נכונים.

טענה: מרובע שיש בו 3 זוויות שוות בגודלן, הוא מלבן.



❖ **אסתר אמרה:** הטענה אינה נכונה. שרטטתי מרובע שיש בו 3 זוויות שוות בגודלן, והוא אינו מלבן.

האם ההסבר של אסתר משכנע שהטענה אינה נכונה? נמקו.

❖ **דינה אמרה:** הטענה נכונה, כי במלבן יש 3 זוויות שוות בגודלן.

האם ההסבר של דינה משכנע שהטענה נכונה? נמקו.

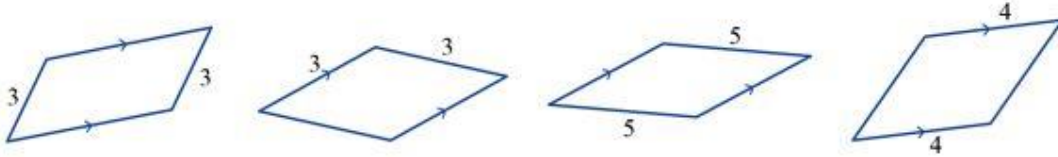
❖ **יוליה אמרה:** הטענה אינה נכונה. קיים מרובע שבו 3 זוויות שגודלן כל אחת מהן 80° וזווית אחת שגודלה 120° .

האם ההסבר של יוליה משכנע שהטענה אינה נכונה? נמקו.

ב. במסגרת שלפניכם טענה ולאחריה הסברים של שלוש תלמידות לטענה. בדקו כל הסבר אם הוא משכנע ונמקו.

טענה: **מרובע שיש בו שתי צלעות מקבילות ושתי צלעות שוות באורכן, הוא מקבילית.**

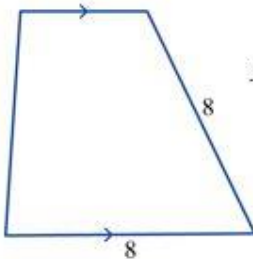
❖ **רותי אמרה:** הטענה נכונה, כדי להוכיח שרטטתי במחשב מרובעים כאלה ותמיד התקבלה מקבילית.



האם ההסבר של **רותי** משכנע שהטענה נכונה? נמקו.

❖ **עומר אמר:** הטענה נכונה, לפי המשפט: **מרובע שבו יש זוג צלעות נגדיות מקבילות ושוות באורכן, הוא מקבילית.**

האם ההסבר של **עומר** משכנע שהטענה נכונה? נמקו.



❖ **נעמי אמרה:** הטענה אינה נכונה. בשרטוט יש דוגמה של מרובע

שיש בו שתי צלעות מקבילות ושתי צלעות שוות באורכן, והוא אינו מקבילית.

האם ההסבר של **נעמי** משכנע שהטענה אינה נכונה? נמקו.

ג. לפניכם טענה: **מרובע שיש בו זוג צלעות מקבילות ושתי זוויות סמוכות שוות בגודלן, הוא מלבן.**

בדקו באמצעות היישומון: "זוג צלעות מקבילות וזוג זוויות סמוכות שוות" אם ניתן ליצור דוגמה נגדית לטענה.

אם יצרתם דוגמה נגדית העתיקו אותה לדף. אם לא, נסו להוכיח שהטענה נכונה.

ד. לפניכם טענה: **במלבן האלכסונים מאונכים זה לזה.**

בדקו באמצעות היישומון: "האם האלכסונים במלבן מאונכים?" אם ניתן ליצור דוגמה נגדית לטענה.

אם יצרתם דוגמה נגדית העתיקו אותה לדף. אם לא, נסו להוכיח שהטענה נכונה.

[לפעילות 2 מוגשת](#)

לסיכום דנים בנקודות הבאות:

❖ טענה נכונה רק אם היא נכונה עבור כל מקרה פרטי המקיים את הנתונים. לכן:

- דוגמאות אינן מספיקות כדי להסיק שטענה נכונה ויש להוכיח אותה, אלא אם מדובר בטענת קיום.
- כדי לפסול טענה מספיק להביא דוגמה נגדית: דוגמה המקיימת את הנתונים ואינה מקיימת את המסקנה. (על מנת להסביר זאת, אפשר להיעזר בהפרכת טענות פשוטות שאינן נכונות. למשל, בכל יום רביעי יש לימודים בביה"ס או טענה במתמטיקה: הסכום של שני מספרים שלמים גדול מכל אחד מהמחבורים.)

❖ דוגמה נגדית אינה חייבת להיות שרטוט. (הדוגמה של יוליה משכנעת שהטענה אינה נכונה.)

לבדיקת תשובות התלמידים בדפי הפעילויות ניתן להיעזר בפתרונות להלן.

פתרונות לדף פעילות 1: האם ההסברים משכנעים?

- א. ההסבר של גליה אינו משכנע בנכונות הטענה. גם דוגמאות רבות אינן יכולות להבטיח נכונות של טענה, אלא אם הוכחנו שנבדקו כל הדוגמאות האפשריות. בדיקה באמצעות גיאומטריה דינמית (למשל גיאוגברה) מחזקת השערה בדבר נכונות הטענה אבל עדיין לא מבטיחה שנבדקו כל הדוגמאות האפשריות ולא מסבירה את נכונות הטענה.
- ב. הטענה נכונה. בוריס הביא דוגמאות לקיום הטענה, אך דוגמאות אינן יכולות לשכנע שהטענה נכונה – ייתכן שקיימת דוגמה אחרת שתפריך אותה. אורי הוכיח שהטענה נכונה ולכן ההסבר שלו משכנע בנכונות הטענה.

פתרונות לדף פעילות 2: מפריכים טענות באמצעות דוגמאות נגדיות

- א. הטענה אינה נכונה. אסתר ויוליה הביאו דוגמאות נגדיות לטענה ולכן הסבריהם משכנעים.
- דינה ניסתה להסביר מדוע הטענה נכונה וטענה בכך שהתייחסה למלבן במקום למרובע כלשהו.
- ב. הטענה אינה נכונה. הדוגמאות ששרטטה רותי מקיימות את הנתונים והן מקבילות, אך אינן יכולות לשכנע שתמיד תתקבל מקבילית. עומר ניסתה להסביר למה הטענה נכונה, והביאה משפט המתייחס לזוג צלעות מקבילות ושוות, אבל התעלמה מכך שבטענה לא נאמר שהצלעות המקבילות והשוות הן אותן צלעות. נעמי הביאה דוגמה נגדית לטענה, ולכן ההסבר שלה משכנע שהטענה אינה נכונה.
- ג. דוגמה נגדית לטענה: טרפז שווה שוקיים שבו יש שתי צלעות מקבילות ושתי זוויות סמוכות שוות בגודלן, והוא אינו מלבן.
- ד. דוגמה נגדית:

