



תיק משימטיקה

זהויות מתמטיות:

נוסחאות הכפל המקוצר

תוכן עניינים

3	פתיחה
3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
3	החומרים והעזרים הדרושים
4	רקע
5	הצעה למהלך העבודה
6	עבודה על משימות הערכה
6	משימה 1: יצירת רביעיות
9	משימה 2: לוח כפל
10	משימה 3: נוסחאות בטבלה
11	הערכת תוצרי תלמידים
13	פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה
13	פעילות 1: זהות או לא זהות?
14	עבודה על דף פעילות 1 זהות או לא זהות?
16	דיון
17	פעילות 2: צלעות ושטחים
17	עבודה על דף פעילות 2 צלעות ושטחים
19	דיון
20	פעילות 3: השלמת ביטויים
20	עבודה על דף פעילות 3 השלמת ביטויים
21	דיון

פתיחה¹



מטרות התיק

זה נועד לסייע למורה להעריך את יכולות התלמידים ליצור ולהשתמש בזהויות מתמטיות הנקראות נוסחאות הכפל המקוצר, ולתת מענה לקשיים שמתגלים. התיק עוסק בזהויות:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \qquad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- ❖ ליצור זהויות מתמטיות המבוססות על נוסחאות הכפל המקוצר.
- ❖ להשתמש בנוסחאות הכפל באופן סימטרי.
- ❖ להשתמש בנוסחאות הכפל בהקשר הכרוך בראייה מבנית של ביטויים אלגבריים.



זמני עבודה משוערים

- ❖ עבודה על משימות הערכה: 40–60 דקות.
- ❖ פעילויות בעקבות ההערכה: 30–45 דקות.



החומרים והעזרים הדרושים

ליצור עבודה על משימות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- ❖ דף משימה 1 [יצירת רביעיות](#).
 - ❖ דף משימה 2 [לוח כפל](#).
 - ❖ דף משימה 3 [נוסחאות בטבלה](#).
- לצורך הפעילויות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):
- ❖ דף פעילות 1 [זהות או לא זהות?](#)
 - ❖ דף פעילות 2 [צלעות ושטחים](#).
 - ❖ דף פעילות 3 [השלמת ביטויים](#).

¹ ארבעה תיקי משימטיקה עוסקים בזהויות מתמטיות. שני תיקים – **נוסחאות הכפל המקוצר וחוקי החזקות** – עוסקים בזהויות שהשימוש בהן שכיח. תיק נוסף **ביטויים ומשוואות עם מכנים מספריים** – עוסק בזהויות המכילות מכנים והטיפול בהם במהלך פתרון משוואות. התיק **ביטויים נגדיים** עוסק בקשר בין זהויות וזוגות של ביטויים נגדיים.



רקע

במתמטיקה קיימות זהויות מסוגים שונים: זהויות טריגונומטריות, מעריכיות, לוגריתמיות ועוד. אחד השימושים השכיחים בזהויות מתמטיות הוא החלפה של ביטוי אחד בביטוי אחר זהה לו במהלך פתרון בעיה. לדוגמה, אם ידוע הערך של $\sin x$, ניתן למצוא בקלות את הערך של $\cos x$ בעזרת שימוש בזהות $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. העיסוק בזהויות מתמטיות במסגרת לימודי האלגברה בחטיבת הביניים כולל זהויות מתמטיות המכונות נוסחאות הכפל המקוצר:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

לזהויות אלה יש שימוש רב בפתרון בעיות שבהן יש לבצע פעולות אלגבריות מורכבות כמו: פירוק לגורמים, צמצום שברים אלגבריים, פתרון משוואות עם מכנים. למשל, בצמצום השבר הבא:

$$(x \neq -4) \quad \frac{x^2 + 8x + 16}{x + 4}$$

מקבלים:

$$(x \neq -4) \quad \frac{x^2 + 8x + 16}{x + 4} = \frac{(x + 4)^2}{x + 4} = x + 4$$

יש קשיים שונים העולים בהקשר של השימוש בנוסחאות הכפל. בתיק זה נתייחס לקשיים הבאים:

❖ קושי ביצירת זהויות מתמטיות המבוססות על נוסחאות הכפל המקוצר, בהקשר של פתיחת סוגריים. שגיאות אופייניות של תלמידים הן לכתוב כך:

$$(a-b)^2 = a^2 - b^2 \quad \text{או} \quad (a+b)^2 = a^2 + b^2$$

❖ קושי ביצירת זהויות מתמטיות המבוססות על נוסחאות הכפל המקוצר, בהקשר של פירוק לגורמים. למשל:

כאשר יש למצוא את אורכי הצלעות של ריבוע ששטחו מיוצג על ידי הביטוי $16x^2 - 24x + 9$, יש תלמידים המתקשים להבחין שהביטוי הנתון זהה לביטוי $(4x-3)^2$, ולכן הביטוי $4x-3$ ($x > \frac{3}{4}$) מייצג את אורך צלע הריבוע.

❖ קושי ביצירה ובשימוש בנוסחאות הכפל, כאשר הם כרוכים בראייה מבנית של ביטויים אלגבריים. למשל:

בפישוט הביטוי $(4x-1)^2$, יש תלמידים המתקשים להתייחס לביטוי $4x$, כאילו הוא המשתנה a בנוסחת

הכפל $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ או להתייחס לביטוי $(4x-1)$ כאילו הוא הביטוי $a-b$ באותה הנוסחה.

התיק **זהויות מתמטיות: נוסחאות הכפל המקוצר** נועד לסייע למורים לזהות תלמידים שיש להם קשיים אלה, ולתת להם מענה.



הצעה למהלך העבודה

❖ עבודה על משימות הערכה:

- משימה 1 [יצירת רביעיות](#).
- משימה 2 [לוח כפל](#).
- משימה 3 [נוסחאות בטבלה](#).

❖ הערכת תוצרי התלמידים.

❖ פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימות הערכה

בתיק זה שלוש משימות הערכה:

- ❖ משימה 1 **יצירת רביעיות**.
- ❖ משימה 2 **לוח כפל**.
- ❖ משימה 3 **נוסחאות בטבלה**.

במשימה 1 **יצירת רביעיות** התלמידים מתבקשים ליצור רביעיות הקשורות לנוסחאות הכפל. בכל רביעייה שלושה ביטויים זהים, שכולם מיצגים שטח נתון.

במשימה 2 **לוח כפל** התלמידים מתבקשים להשתמש בנוסחאות הכפל כדי להשלים חלקים מלוח כפל.

במשימה 3 **נוסחאות בטבלה** התלמידים מתבקשים להשתמש בראייה מבנית בהקשר של נוסחאות הכפל.



משימה 1: יצירת רביעיות

משימה 1: יצירת רביעיות

לפניהם:

- ❖ לוח ליצירת רביעיות.
- ❖ דף לגזירת קלפים.

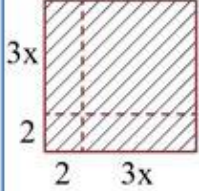
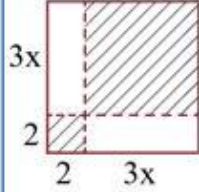
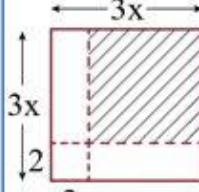
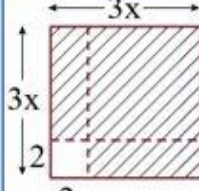
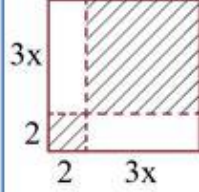
צרו רביעיות באופן הבא:

- א. גזרו את 17 הקלפים מהדף **לגזירת קלפים**.
- ב. הניחו 12 מן הקלפים שגזרתם על הלוח **ליצירת רביעיות** באופן הבא: בכל שורה הניחו שלושה קלפים מתאימים לביטוי האלגברי שבצד שמאל – קלף השטח (של החלק המקווקו), קלף המתאים לביטוי הרשום עם סוגריים, וקלף המתאים לביטוי ללא הסוגריים. שימו לב, יש שני קלפים מיותרים.
- ג. רשמו בעיגולים הריקים בתוך הלוח את המספר או האות שעל הקלף המתאים.

[למשימה 1 מונגשת](#)

לוח ליצירת רביעיות

$(3x + 2)^2$	שטח ☐	ביטוי עם סוגריים ☐	ביטוי ללא סוגריים ☐
$(3x - 2)^2$	שטח ☐	ביטוי עם סוגריים ☐	ביטוי ללא סוגריים ☐
$(3x)^2 - 2^2$	שטח ☐	ביטוי עם סוגריים ☐	ביטוי ללא סוגריים ☐
$(3x)^2 + 2^2$	שטח ☐	ביטוי עם סוגריים ☐	ביטוי ללא סוגריים ☐

 $(x \geq 0)$	$(3x + 2) \cdot (3x - 2)$	$9x^2 + 4$	א
 $(x \geq 0)$	$(3x) \cdot (3x) + 2 \cdot 2$	$9x^2 - 12x + 4$	ג
 $(x \geq \frac{2}{3})$	$(3x - 2) \cdot (3x - 2)$	$9x^2 - 4$	ה
 $(x \geq \frac{2}{3})$	$(3x + 2) \cdot (3x + 2)$	$9x^2 - 4$	ז
 $(x \geq 0)$	$(3x + 2) \cdot (3x + 2)$	$9x^2 + 12x + 4$	ט
$3x^2 + 4$	ל	$9x^2 + 4$	כ



משימה 2: לוח כפל

משימה 2: לוח כפל

לפניכם לוח כפל. השלימו בו ביטויים אלגבריים ללא סוגריים במשבצות הלבנות.

•	$x + 4$			
$x + 4$				
		$x^2 - 8x + 16$		
			$x^2 + 10x + 25$	$x^2 - 25$
$x - 5$				

[למשימה 2 מוגשת](#)



משימה 3: נוסחאות בטבלה

משימה 3: נוסחאות בטבלה

לפניכם טבלה. השלימו בה ביטויים אלגבריים ללא סוגריים לפי הביטויים בשורה הראשונה.

a	b	$a^2 - b^2$	$a^2 + 2ab + b^2$
$2x$	5		
		$9x^2 - 16$	
			$25 + 60x + 36x^2$
6	$\frac{1}{3}m$		
		$4x^2 - 49y^2$	

[למשימה 3 מונגשת](#)

הערכת תוצרי תלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה.

שם התלמיד/ה	כול התשובות נכונות	טעו בפתיחת סוגריים	טעו בפירוק לגורמים	טעו בראייה מבנית	הערות
תלמיד/ה 1	✓				
תלמיד/ה 2		✓		✓	
תלמיד/ה 3				✓	טעות אחת בלבד בראייה מבנית. טעות בשטח גיאומטרי.
סך-הכול					

לצורך בדיקת תוצרי ההערכה ניתן להיעזר בפתרונות המשימות שלהלן.

פתרון משימה 1 - יצירת רביעיות

ביטוי ללא סוגריים	ביטוי עם סוגריים	שטח	ביטוי נתון
ט	ח או י	1	$(3x + 2)^2$
ג	ו	3	$(3x - 2)^2$
ה או ז	ב	4	$(3x)^2 - 2^2$
א או כ	ד	2 או 5	$(3x)^2 + 2^2$

פתרון משימה 2 - לוח כפל

•	$x + 4$	$x - 4$	$x + 5$	$x - 5$
$x + 4$	$x^2 + 8x + 16$			
$x - 4$	$x^2 - 16$	$x^2 - 8x + 16$		
$x + 5$			$x^2 + 10x + 25$	$x^2 - 25$
$x - 5$				$x^2 - 10x + 25$

פתרון משימה 3 - נוסחאות בטבלה

a	b	$a^2 - b^2$	$a^2 + 2ab + b^2$
$2x$	5	$4x^2 - 25$	$4x^2 + 20x + 25$
$3x$	4	$9x^2 - 16$	$9x^2 + 24x + 16$
5	$6x$	$25 - 36x^2$	$25 + 60x + 36x^2$
6	$\frac{1}{3}m$	$36 - \frac{1}{9}m^2$	$36 + 4m + \frac{1}{9}m^2$
$2x$	$7y$	$4x^2 - 49y^2$	$4x^2 + 28xy + 49y^2$

פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

להלן הצעות לשלוש פעילויות דיפרנציאליות שמטרתן לסייע למורה לתת מענה לקשיים שונים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.

- ❖ פעילות 1 **זהות או לא זהות?**
- ❖ פעילות 2 **צלעות ושטחים.**
- ❖ פעילות 3 **השלמת ביטויים.**

למי מיועדת הפעילות?	פעילות 1	פעילות 2	פעילות 3
לתלמידים שטענו ביצירת זהויות המבוססות על נוסחאות הכפל בהקשר של פתיחת סוגריים	V		
לתלמידים שטענו ביצירת זהויות המבוססות על נוסחאות הכפל בהקשר של פירוק לגורמים		V	
לתלמידים שטענו בראייה מבנית של ביטויים			V



פעילות 1: זהות או לא זהות?

שלבי הפעילות

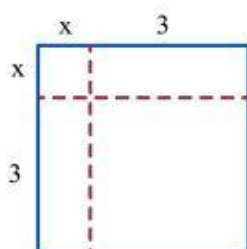
1. עבודה על דף פעילות 1 **זהות או לא זהות?**
2. דיון.

עבודה על דף פעילות 1 זהות או לא זהות?

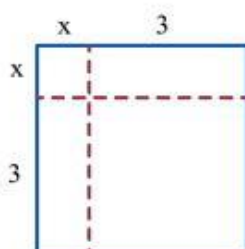
זהות או לא זהות?

1. לפניכם שלושה ריבועים בעלי אותו אורך צלע $x + 3$ (המידות בס"מ, $x \geq 0$).

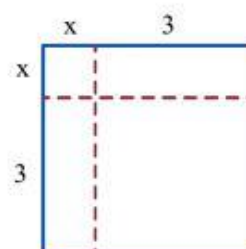
מתחת לכל ריבוע נרשום ביטוי אלגברי המתאר שטח (המידות בסמ"ר).



$$x^2 + 6x + 9$$



$$(x + 3)^2$$



$$x^2 + 9$$

א. צבעו בכל ריבוע, את השטח המתאים לביטוי הרשום מתחתיו.

ב. הסבירו לפחות בשתי דרכים שונות, מדוע הביטויים $x^2 + 9$ ו- $(x + 3)^2$ אינם זהים.

הסבר א'

הסבר ב'

$$(a + b)^2$$

$$a^2 + b^2$$

2. לפניכם שני ביטויים אלגבריים:

א. מצאו זוג מספרים שהצבתם במקום a ו- b מקיימת: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

ב. מצאו זוג מספרים נוסף שהצבתם במקום a ו- b מקיימת: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

ג. מצאו זוג מספרים שהצבתם במקום a ו- b מקיימת: $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$.

ד. מצאו זוג מספרים נוסף שהצבתם במקום a ו- b מקיימת: $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$.

ה. סמנו ✓ ליד הטענה הנכונה והסבירו:

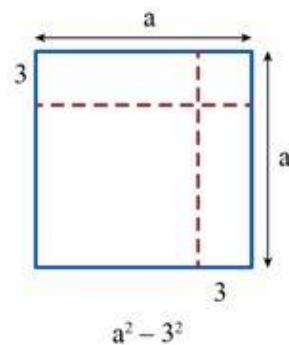
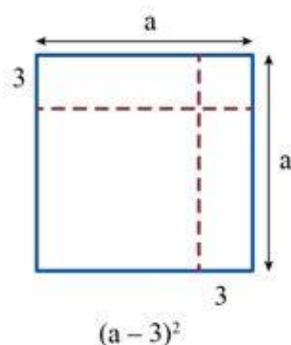
☐ הביטוי $(a + b)^2$ והביטוי $a^2 + b^2$ הם ביטויים זהים (לכל a ו- b ממשיים).

☐ הביטוי $(a + b)^2$ והביטוי $a^2 + b^2$ אינם ביטויים זהים.

הסבירו:

[לדף פעילות 1 מוגש](#)

3. לפניכם שני ריבועים בעלי אותו אורך צלע a (המידות בס"מ, $a \geq 3$). מתחת לכל ריבוע נרשום ביטוי אלגברי המתאר שטח (המידות בסמ"ר).



א. צבעו בכל ריבוע את השטח הרשום מתחתיו.

ב. הסבירו לפחות בשתי דרכים שונות, מדוע הביטויים $a^2 - 3^2$ ו- $(a - 3)^2$ אינם זהים.

הסבר א' _____

הסבר ב' _____

$$(a - b)^2$$

$$a^2 - b^2$$

4. לפניכם שני ביטויים אלגבריים:

א. מצאו זוג מספרים שהצבתם במקום a ו- b מקיימת: $(a - b)^2 = a^2 - b^2$.

ב. מצאו זוג מספרים נוסף שהצבתם במקום a ו- b מקיימת: $(a - b)^2 = a^2 - b^2$.

ג. מצאו זוג מספרים שהצבתם במקום a ו- b מקיימת: $(a - b)^2 \neq a^2 - b^2$.

ד. מצאו זוג מספרים נוסף שהצבתם במקום a ו- b מקיימת: $(a - b)^2 \neq a^2 - b^2$.

ה. סמנו ✓ ליד הטענה הנכונה והסבירו:

□ הביטוי $(a - b)^2$ והביטוי $a^2 - b^2$ הם ביטויים זהים (לכל a ו- b ממשיים).

□ הביטוי $(a - b)^2$ והביטוי $a^2 - b^2$ אינם ביטויים זהים.

הסבירו: _____

[להמשך דף פעילות 1 מוגש](#)

היתרונות והחסרונות של הדרכים לאימות הזהות של שני ביטויים אלגבריים או הפרכתה, באמצעות ייצוג גיאומטרי כשטח, באמצעות דוגמה מספרית או בדרך אלגברית.

❖ באמצעות ייצוג גיאומטרי כשטח:

שני ביטויים המייצגים שטחים שווים הם המחשה של נוסחת כפל, רק לגבי המספרים החיוביים ולכן זו אינה הוכחה לקיום הזהות. לעומת זאת, שני ביטויים המייצגים שטחים שונים הם דוגמה נגדית לקיום הזהות, ולכן מהווים הוכחה לכך שהביטויים אינם זהים.

❖ באמצעות דוגמאות מספריות:

הצבת אותו מספר בשני ביטויים שנותנת אותה תוצאה, אינה מוכיחה את קיום הזהות. לעומת זאת, אם הצבה של מספר אחד נותנת תוצאות שונות בשני ביטויים, זו הוכחה שהביטויים האלה אינם זהים.

❖ בדרך אלגברית:

אפשר להוכיח את קיום הזהות באמצעות ביצוע הפעולות האלגבריות שבנוסחאות הכפל המקוצר.



פעילות 2: צלעות ושטחים

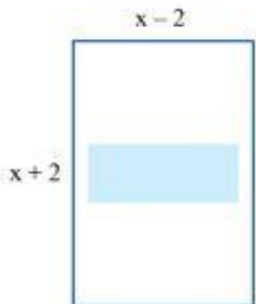
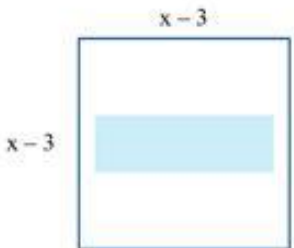
שלבי הפעילות

- עבודה על דף פעילות 2 **צלעות ושטחים**.
- דיון.

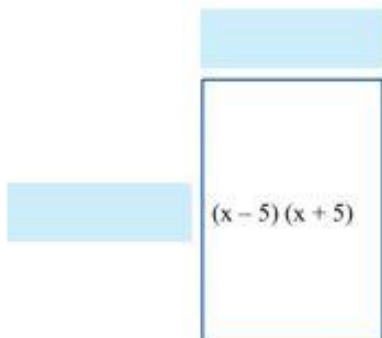
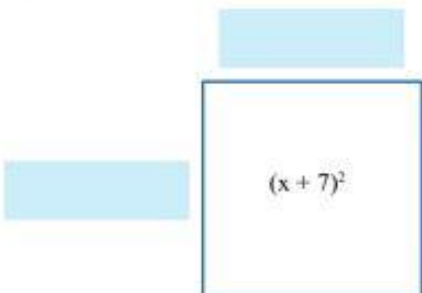
עבודה על דף פעילות 2 **צלעות ושטחים**

צלעות ושטחים

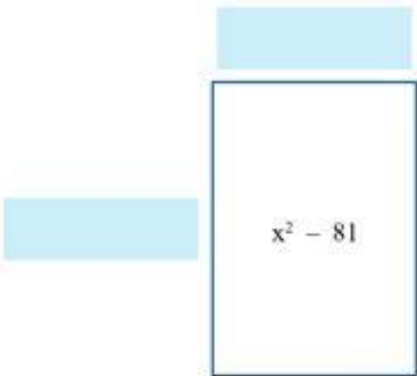
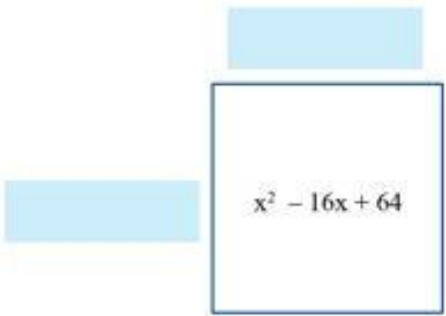
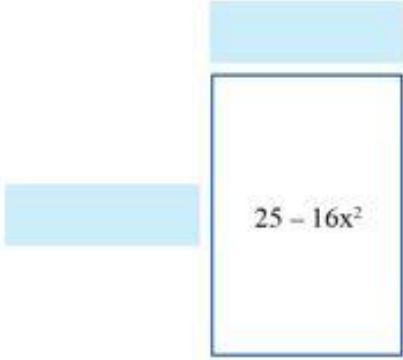
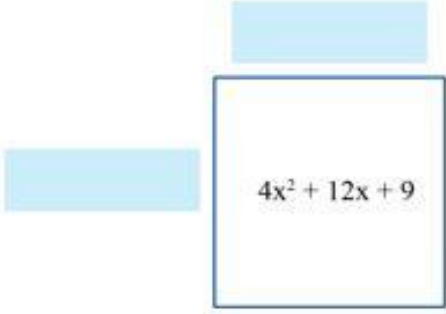
1. הביטויים הרשומים מייצגים את אורכי הצלעות (בס"מ) של המרובע, השלימו בכל סעיף ביטוי אלגברי ללא סוגריים המתאים לשטח המרובע (מידות השטח בסמ"ר).

מלבן	ריבוע
$(x \geq 2)$ 	$(x \geq 3)$ 

2. הביטויים הרשומים מייצגים את שטחי המרובעים (בסמ"ר), השלימו בכל סעיף ביטויים אלגבריים לאורכי הצלעות של המרובעים (בס"מ).

מלבנים	ריבועים
$(x \geq 5)$ 	$(x \geq -7)$ 

[לדף פעילות 2 מוגש](#)

מלבנים	ריבועים
$(x \geq 9)$ 	$(x \geq 8)$ 
$(x \leq 1.25)$ 	$(x \geq -1.5)$ 

3. השלימו כל סעיף בשני אופנים שונים.

א. $x^2 + _ + _ = (x + _)^2$ $x^2 + _ + _ = (x + _)^2$	ב. $c^2 - _ = (_ + _)(_ - _)$ $c^2 - _ = (_ + _)(_ - _)$
ג. $(3a - _)^2 = _ - _ + _$ $(3a - _)^2 = _ - _ + _$	ד. $(_ - _)(_ + _) = _ - 49y^2$ $(_ - _)(_ + _) = _ - 49y^2$

[להמשך דף פעילות 2 מוגש](#)

לסיכום דנים בנקודות הבאות:

- ❖ הסימטריה של סימן השוויון בהקשר של נוסחאות הכפל המקוצר. למשל, באמצעות הפעלת נוסחאות הכפל בהקשר של פתיחת סוגריים, מקבלים:

$$(a \pm b)^2 \rightarrow a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (a+b)(a-b) \rightarrow a^2 - b^2$$

ומהפעלת נוסחאות הכפל בהקשר של פירוק לגורמים, מקבלים:

$$(a+b)(a-b) \leftarrow a^2 - b^2 \quad (a \pm b)^2 \leftarrow a^2 \pm 2ab + b^2$$

- ❖ התחשבות באילוצים של תוכן הבעיה לקביעת תחום ההגדרה. למשל: אורך צלע חייב להיות מספר אי-שלילי. במהלך העבודה על בעיה, קביעת האילוצים הוא לפעמים תהליך הכרוך בפירוק לגורמים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר.



פעילות 3: השלמת ביטויים

שלבי הפעילות

1. עבודה על דף פעילות 3 **השלמת ביטויים**
2. דיון.

עבודה על דף פעילות 3 השלמת ביטויים

השלמת ביטויים

1. נתון כי: $7x + 1 = 3$

השתמשו בנתון כדי למצוא את ערכי הביטויים הבאים, **מבלי לחשב** את ערכו של x . הציגו את דרך החישוב.

א. $(7x + 1)^2 + 2 \cdot (7x + 1) =$

ב. $49x^2 + 14x + 1 =$

2. נתון כי: $3x + 5 = 12$ וכן: $3x - 5 = 2$

השתמשו בנתון כדי למצוא את ערכי הביטויים הבאים, **מבלי לחשב** את ערכו של x . הציגו את דרך החישוב.

א. $(3x + 5)^2 =$

ב. $9x^2 - 30x + 25 =$

ג. $9x^2 - 25 =$

[לדף פעילות 3 מוגש](#)

3. לפניכם לוח כפל. השלימו בו ביטויים אלגבריים ללא סוגריים במשבצות הלבנות.

•	$3x+4$			
$3x+4$				
		$9x^2 - 24x + 16$		
			$49x^2 + 28x + 4$	$49x^2 - 4$
$7x-2$				

להמשך דף פעילות 3 מונגש

דיון

לסיכום דנים ביתרונות של ראייה מבנית בשימוש בנוסחאות הכפל עם ביטויים אלגבריים מורכבים. למשל:
 אם ידוע $4x + 1 = 12$ וכן $4x - 1 = 10$, אפשר באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר למצוא בקלות ביטויים המורכבים מ- $(4x + 1)^2$ או מ- $(4x - 1)^2$, וכן למצוא ביטויים זהים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר, כמו לראות באמצעות הביטוי: $16x^2 - 8x + 1$ את הביטוי $(4x - 1)^2$ ולראות באמצעות הביטוי $16x^2 - 1$ את הביטוי $(4x - 1)(4x + 1)$.