



תיק משימטיקה

שימוש במשפט מזויר:

משולשים

להנגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

© כל הזכויות שמורות

תוכן עניינים

3	פתיחה
3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
3	החומרים והעזרים הדרושים
4	רקע
4	הצעה למהלך העבודה
5	עבודה על משימות הערכה
6	משימה 1: האם הנימוק מצדיק?
7	משימה 2: היכן הטעות?
8	הערכת תוצרי תלמידים
9	פעילות בעקבות ההערכה
9	פעילות: כל התנאים שבמשפט
10	עבודה על דף הפעילות חלק א': דנים במשימות
11	דיון
12	עבודה על דף הפעילות חלק ב': בודקים נימוקים ומתקנים שגיאות
13	דיון וסיכום



מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים להשתמש במשפט במהלך הוכחת טענה גיאומטרית, רק אם מתקיימים כל התנאים ההכרחיים לשימוש במשפט. התיק עוסק בנושא משולשים. ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- ❖ לפסול נימוק לטענה גיאומטרית כאשר מתקיימים רק חלק מהתנאים ההכרחיים לשימוש בו.



זמני עבודה משוערים

- ❖ עבודה על משימות הערכה: 20-30 דקות.
- ❖ פעילות בעקבות ההערכה: 40-60 דקות.



החומרים והעזרים הדרושים

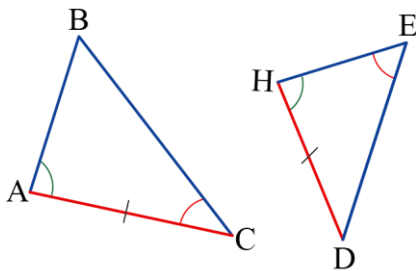
- לצורך העבודה על משימות הערכה (לכל תלמיד/ה):
 - ❖ דף משימה 1: **האם הנימוק מצדיק?**
 - ❖ דף משימה 2: **היכן הטעות?**
- לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):
 - ❖ לחלק א'
 - דף הפעילות חלק א': **דנים במשימות.**
 - יישומון גיאוגברה [שלושה קטעים שלוש זוויות.](#)
 - יישומון גיאוגברה [אילו קטעים שווים?](#)
 - יישומון גיאוגברה [שתי זוויות וצלע.](#)
 - ❖ לחלק ב'
 - דף הפעילות חלק ב': **בודקים נימוקים ומתקנים שגיאות.**

¹ שלושה תיקי משימטיקה עוסקים בשימוש במשפטים ידועים במהלך הוכחה. שני תיקים – **שימוש במשפט מזויף: משולשים ושימוש במשפט מזויף: מרובעים** – מתמקדים בתנאים הנדרשים לשימוש במשפט. תיק נוסף – **מציאת משפט מתאים – פרופורציה ודמיון** – מתמקד בבחירה מושכלת של משפטים מתאימים.



רקע

הוכחה והפרכה של טענות הן פעילויות מרכזיות בכל ענפי המתמטיקה. במהלך הוכחה של טענות מתמטיות בכלל, וטענות גיאומטריות בפרט, מתבססים לעיתים קרובות על הסקה דדוקטיבית תוך כדי שימוש במשפטים ידועים. קושי נפוץ של תלמידים במהלך הוכחה בגיאומטריה הוא הסקת מסקנה תוך התבססות על משפט ידוע, כאשר חלק מהתנאים המאפשרים שימוש במשפט אינם מתקיימים.



לדוגמה, ישנם תלמידים שמסיקים ששני משולשים השווים זה לזה בשתי זוויות ובאורך צלע (כמו אלה שבשרטוט) בהתבסס על משפט החפיפה זווית-צלע-זווית. זאת למרות שתנאי הכרחי לשימוש במשפט החפיפה הזה אינו מתקיים במקרה זה: בכל אחד מהמשולשים, הצלע בעלת האורך השווה צריכה להימצא בין שתי הזוויות שגודלן שווה (כלומר, שתי הזוויות והצלע במשולש אחד, צריכות להיות שוות **בהתאמה** לשתי הזוויות והצלע במשולש האחר).

הנושא משולשים הוא מרכזי בתוכנית הלימודים בגיאומטריה. התיק **שימוש במשפט מזויף: משולשים** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים המתקשים להתחשב בכל התנאים שבמשפט במהלך הוכחה והנמקת מסקנות, ולתת מענה לקושי זה.



הצעה למהלך העבודה

- ❖ עבודה על משימות הערכה:
 - משימה 1: **האם הנימוק מצדיק?**
 - משימה 2: **היכן הטעות?**
- ❖ הערכת תוצרי התלמידים.
- ❖ פעילות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימות הערכה

בתיק זה שתי משימות הערכה:

❖ משימה 1: **האם הנימוק מצדיק?**

❖ משימה 2: **היכן הטעות?**

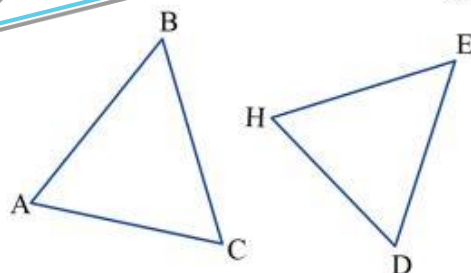
בשתי המשימות התלמידים נדרשים לזהות נימוקים שבהם יש שימוש ב"משפט מזויף", כלומר משפט שמושמטים ממנו חלק מהתנאים.



משימה 1: האם הנימוק מצדיק?

משימה 1: האם הנימוק מצדיק?

לפניכם טענות. לכל טענה נרשום נימוק של תלמיד או תלמידה שמצדיקים אותה. קבעו לכל טענה אם הנימוק שניתן מצדיק אותה. אם אינו מצדיק, הסבירו.



א. נתון: $\triangle ABC \cong \triangle DEH$

$$AC = DE$$

$$\angle C = \angle D$$

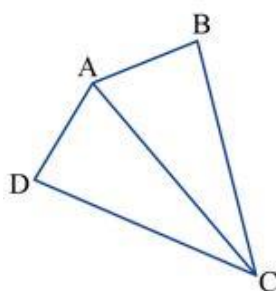
$$\angle B = \angle E$$

מסקנה: $\triangle ABC \cong \triangle DEH$

הנימוק של דני: אם גדלים של שתי זוויות ואורך צלע במשולש אחד, שווים לגדלים של שתי זוויות ואורך צלע במשולש אחר, אז המשולשים חופפים.

האם הנימוק של דני מצדיק את המסקנה? ☐ כן ☐ לא

הסבר:



ב. נתון: מרובע ABCD

$$AB = AD$$

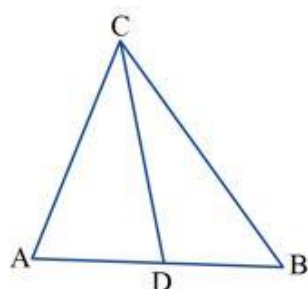
$$\angle BAC = \angle DAC$$

מסקנה: $\triangle ABC \cong \triangle ADC$

הנימוק של רותי: אם אורכי שתי צלעות וגודל הזווית שביניהן במשולש אחד, שווים לאורכי שתי צלעות וגודל הזווית שביניהן במשולש אחר, אז המשולשים חופפים.

האם הנימוק של רותי מצדיק את המסקנה? ☐ כן ☐ לא

הסבר:



ג. נתון: $\triangle ABC$

$$AC = AB$$

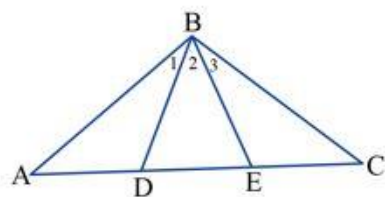
$$AD = BD$$

מסקנה: $\angle ACD = \angle BCD$

הנימוק של יעל: תיכון במשולש שווה שוקיים הוא גם חוצה זווית.

האם הנימוק של יעל מצדיק את המסקנה? ☐ כן ☐ לא

הסבר:



ד. נתון: $\triangle ABC$ הנקודות D ו-E על הצלע AC

$$EC = DE = AD$$

$$\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B_3$$

הנימוק של אפרת: מול צלעות שוות באורכן נמצאות זוויות שוות בגודלן.

האם הנימוק של אפרת מצדיק את המסקנה? ☐ כן ☐ לא

הסבר:

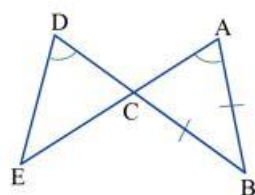
למשימה 1 מונגשת



משימה 2: היכן הטעות?

משימה 2: היכן הטעות?

אלכס הוכיח טענה. המורה בחנה את ההוכחה של אלכס ואמרה שהוא טועה. במסגרת שלפניכם הטענה שהוכיח אלכס. אחרי המסגרת ההוכחה של אלכס.



נתון: שני קטעים AE ו-BD נחתכים בנקודה C

(כמתואר בשרטוט)

$$AB = DC$$

$$\angle A = \angle D$$

צריך להוכיח: $\triangle CED$ שווה שוקיים

ההוכחה של אלכס:

$$\angle A = \angle D \text{ (נתון)}$$

$$\angle A = \angle E \text{ (זוויות מתחלפות שוות בגודלן)}$$



$$\angle D = \angle E$$



$$CE = CD \text{ (כי אם במשולש CED יש שתי זוויות שוות בגודלן אז הוא שווה שוקיים.)}$$

א. הסבירו את הטעות של אלכס:

ב. נטלי טענה: הצלעות השוות באורכן במשולש CED הן $ED = EC$ וזאת הסיבה ש- $\triangle CED$ הוא משולש שווה שוקיים.

האם טענתה של נטלי משכנעת ש- $\triangle CED$ שווה שוקיים? הסבירו.

למשימה 2 מונגשת

הערכת תוצרי תלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה.

שם התלמיד/ה	משימה 1 כל התשובות נכונות	משימה 1 טעו בהצדקת הנימוקים	משימה 2 תשובה נכונה	משימה 2 לא מצאו את הטעות	הערות
תלמיד 1	✓		✓		
תלמיד 2		✓	✓		משימה 2 סעיף ב: חסרים שלבים בהסבר.
תלמיד 3		✓		✓	
סה"כ					

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרונות להלן:

פתרון משימה 1: האם הנימוק מצדיק?

- הנימוק של דני אינו מצדיק את המסקנה, כיוון שלא קיימת ההתאמה הנדרשת במיקום הזוויות השוות בגודלן, ביחס לצלעות השוות באורכן. המסקנה אינה נובעת מהנתונים.
- הנימוק של רותי מצדיק את המסקנה. המשולשים חופפים. הנימוק המנוסח קובע את ההתאמה (כלומר קובע את מיקום הזוויות השוות בגודלן ביחס לצלעות השוות באורכן, בשני המשולשים).
- הנימוק של יעל אינו מצדיק את המסקנה, כיוון שלפי הנתון התיכון חוצה את השוק של המשולש שווה שוקיים. המשפט הוא: תיכון לבסיס במשולש שווה שוקיים חוצה את זווית הראש של המשולש.
- הנימוק של אפרת אינו מצדיק את המסקנה, כיוון שמול צלעות שוות באורכן נמצאות זוויות שוות בגודלן **בתנאי שהמשולשים חופפים**, וכאן הם אינם חופפים.

פתרון משימה 2: היכן הטעות?

- הטעות של אלכס היא בשורה השנייה בהוכחה: זוויות מתחלפות בין ישרים וחותר שוות בגודלן רק אם הישרים מקבילים זה לזה. כיוון שלא נתון שהישרים מקבילים, לא ניתן להסיק שהזוויות המתחלפות שוות בגודלן.
- המשפט הוא: זוויות מתחלפות בין שני ישרים מקבילים וחותר, שוות בגודלן.

פעילות בעקבות ההערכה

הפעילות מיועדת לתלמידים שלא פסלו נימוקים המבוססים על "משפט מזויף", כלומר, קיבלו נימוקים כאשר לא כל התנאים הנדרשים במשפט הגיאומטרי התקיימו.



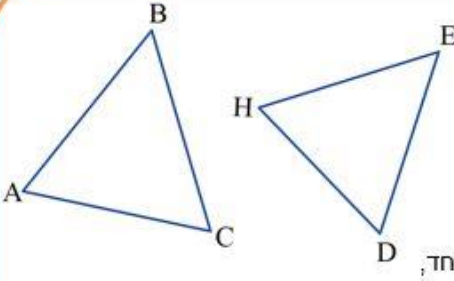
פעילות: כל התנאים שבמשפט

שלבי הפעילות

1. עבודה על דף הפעילות חלק א': **דנים במשימות.**
2. דיון.
3. עבודה על דף הפעילות חלק ב': **בודקים נימוקים ומתקנים שגיאות.**
4. דיון וסיכום.

דף הפעילות חלק א': דנים במשימות

1. במסגרת שלפניכם סעיף א ממשימה 1:



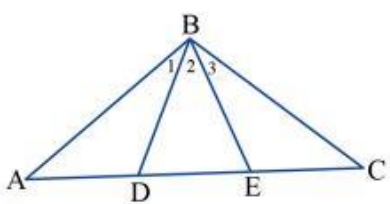
נתון: $\triangle ABC \cong \triangle DEH$
 $AC = DE$
 $\angle C = \angle D$
 $\angle B = \angle E$

מסקנה: $\triangle ABC \cong \triangle DEH$

הנימוק של דני: אם גדלים של שתי זוויות ואורך צלע במשולש אחד, שווים לגדלים של שתי זוויות ואורך צלע במשולש אחר, אז המשולשים חופפים.

- א. סמנו את הנתונים בשרטוט.
- ב. לפניכם שיחה בין שני תלמידים שדנים בנימוק של דני. קבעו מי משני התלמידים צודק, והסבירו.
- אבי: דני צודק. הוא משתמש ב- ז.צ.ז.
- יוני: דני טועה. כי בניסוח ז.צ.ז. הזוויות השוות בגודלן צריכות להימצא ליד הצלעות השוות באורכן.

2. במסגרת שלפניכם סעיף ד ממשימה 1:



נתון: $\triangle ABC$ הנקודות D ו-E על הצלע AC
 $EC = DE = AD$

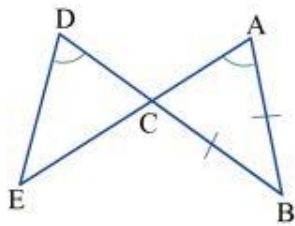
מסקנה: $\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B_3$

הנימוק של אפרת: מול צלעות שוות באורכן נמצאות זוויות שוות בגודלן.

- א. הסבירו מדוע לא ניתן להסיק את שוויון הזוויות על סמך הנימוק של אפרת.
- ב. באילו תנאים נכון לומר שמול צלעות שוות באורכן נמצאות זוויות שוות בגודלן?
- ג. האם שלוש הזוויות האלה יכולות להיות שוות בגודלן? אם כן, מה יהיה גודל כל אחת מהן?
- ד. פתחו את היישומון: שלושה קטעים ושלוש זוויות ובדקו את השערותיכם.

3. במסגרת שלפניכם הטענה של אלכס (ממשימה 2).

ההוכחה של אלכס אחרי המסגרת.



נתון: שני קטעים AE ו-BD נחתכים בנקודה C

(כמתואר בשרטוט)

$$AB = BC$$

$$\angle A = \angle D$$

צריך להוכיח: $\triangle CED$ שווה שוקיים

הפתרון של אלכס:

$$\angle A = \angle D \text{ (נתון)}$$

$$\angle A = \angle E \text{ (זוויות מתחלפות שוות בגודלן)}$$



$$\angle D = \angle E$$



$$CE = CD \text{ (כי אם במשולש CED יש שתי זוויות שוות בגודלן אז הוא שווה שוקיים.)}$$

א. מה הטעות בהוכחה של אלכס?

ב. פתחו את היישומון: "אילו קטעים שווים?" הראו שהזוויות A ו-E לא בהכרח שוות בגודלן. הסבירו.

ג. הוכיחו ש- $\triangle CED$ הוא משולש שווה שוקיים שצלעותיו השוות באורך, הן: $CE = DE$.

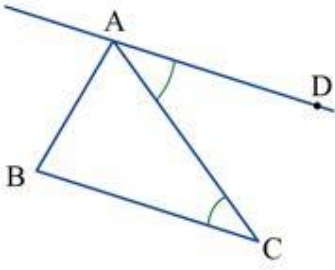
לדף פעילות חלק א': דנים במשימות מוגש

דיון

❖ חשיבות ההתאמה במיקום ההדדי של זוויות וצלעות כאשר עוסקים בחפיפת משולשים.

(אפשר להיעזר ביישומון שתי זוויות וצלע כדי להמחיש שמשולשים לא בהכרח חופפים, אם אין התאמה

(כזאת).



דף הפעילות חלק ב': בודקים נימוקים ומתקנים שגיאות

1. בכל סעיף רשומים טענה גיאומטרית ונימוקים. קבעו לכל נימוק אם הוא מצדיק את המסקנה, והסבירו.

א. נתון: $\triangle ABC$ דרך נקודה A מעבירים ישר ומסמנים עליו נקודה D

$\angle DAC = \angle BCA$

מסקנה: $AD \parallel BC$

הנימוקים:

- כי הזוויות שוות בגודלן.
- כי אם הזוויות המתחלפות שוות בגודלן, אז הישרים מקבילים.
- כי יש זוויות מתחלפות שוות בגודלן בין הישרים.
- כי הזוויות בין הישרים מתחלפות.

ב. נתון: $\triangle ABC$

$AC = AB$

$AD \perp CB$

מסקנה: $BD = CD$

הנימוקים:

- AD הוא גובה במשולש.
- במשולש שווה שוקיים הגובה לבסיס הוא גם תיכון.
- כי המשולש שווה שוקיים.
- הגובה והתיכון לבסיס במשולש שווה שוקיים מתלכדים.
- כי הגובה מתלכד עם התיכון.

2. לפניכם שתי טענות והצעות של תלמידים להוכחה שלהן. בכל הצעה להוכחה יש שגיאה.
- א. מצאו את השגיאה בכל הצעה.
- ב. בדקו אם המסקנה הרשומה נכונה. אם המסקנה נכונה, תקנו את ההוכחה.

הטענה של טל

נתון: $\angle BAC$

D נקודה על AB

E נקודה על AC

$BE \perp AC$

$CD \perp AB$

M אמצע BE

מסקנה: $\triangle DBM \cong \triangle ECM$

הצעה של טל להוכחה:

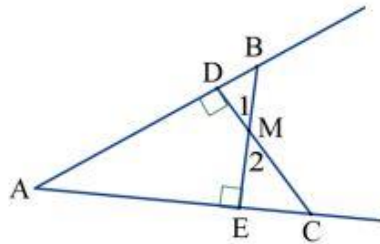
$\angle M_1 = \angle M_2$ (זוויות קודקודיות)

$\angle E = \angle D = 90^\circ$ (נתון)

$ME = BM$ (נתון M אמצע BE)

$\Downarrow$

$\triangle DBM \cong \triangle ECM$ (ז.ז.ז.)



הטענה של דור

נתון: $\triangle ACE$

CD תיכון לצלע AB במשולש ACB

CB תיכון לצלע DE במשולש ECB

$CB = CD$

מסקנה: $CA = CE$

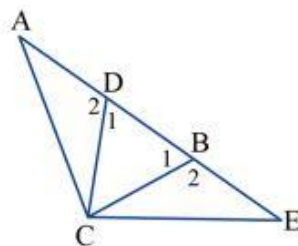
הצעה של דור להוכחה:

$\angle B_1 = \angle D_1$ (זוויות בסיס במשולש שווה שוקיים DCB)

$\angle B_2 = \angle D_2$ (זוויות צמודות לזוויות שוות בגודלן)

$\Downarrow$

$CE = CA$ (מול זוויות שוות בגודלן נמצאות צלעות שוות באורכן)



לדף פעילות חלק ב': דנים במשימות מוגש

דיון וסיכום

- ❖ שימוש במשפט גיאומטרי מחייב שכל התנאים שבמשפט יתקיימו.
- ❖ גם כאשר שימוש ב"משפט מזויף" (לא כל התנאים הנדרשים מתקיימים) מביא למסקנה נכונה, ההוכחה שגויה.

הצעה לפתרון דפי הפעילות

פתרון לדף הפעילות חלק א': דנים במשימות

2. זוויות שוות בגודלן נמצאות מול צלעות שוות באורכן בתנאי שהמשולשים חופפים, וכאן שלושת המשולשים לעולם אינם חופפים.

הוכחה המסבירה מדוע לא קיים מקרה בו שלוש הזוויות האלה שוות:

אם $\angle B_1 = \angle B_2$ אז לפי הנתון BD הוא חוצה זווית וגם תיכון במשולש ABE, ולכן הוא גם גובה במשולש.

אם $\angle B_2 = \angle B_3$ אז לפי הנתון BE הוא חוצה זווית וגם תיכון במשולש BDC, ולכן הוא גם גובה במשולש.

ואז במשולש DBE יש שתי זוויות ישרות בסתירה למשפט בדבר סכום הזוויות במשולש.

לכן שלוש הזוויות האלה לעולם אינן שוות בגודלן.

פתרון לדף הפעילות חלק ב': בודקים נימוקים ומתקנים שגיאות

1. א. הנימוק: כי אם הזוויות המתחלפות שוות בגודלן, אז הישרים מקבילים, וכן הנימוק: כי יש זוויות שוות בגודלן

בין הישרים, מצדיקים את המסקנה. כלומר, בהם מצוינים כל התנאים הנדרשים במשפט שעליו מסתמכים.

הנימוק: כי הזוויות שוות בגודלן, והנימוק: כי הזוויות בין הישרים מתחלפות, אינם מצדיקים את המסקנה.

הנימוקים האלה חסרים: בראשון לא נתון שהזוויות הן זוויות מתחלפות. באחר לא נתון שהזוויות שוות בגודלן.

ב. רק הנימוק: במשולש שווה שוקיים הגובה לבסיס הוא גם תיכון והנימוק: הגובה והתיכון לבסיס במשולש שווה

שוקיים מתלכדים, הם נימוקים מלאים. הנימוקים האחרים אינם מצדיקים את המסקנה כי הם נימוקים חסרים.

לא נתון שמדובר בגובה לבסיס או לא נתון שמדובר בגובה לבסיס במשולש שווה השוקיים או לא נתון שהגובה

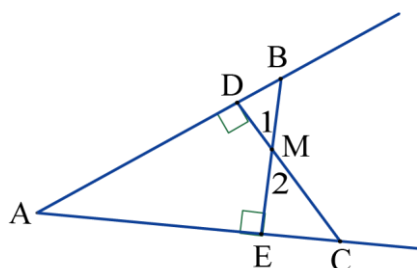
והתיכון מועברים לבסיס במשולש שווה השוקיים.

2. א. השגיאה היא במסקנה $\triangle DBM \cong \triangle ECM$ (ז.צ.ז.).

הנימוק ז.צ.ז. שגוי במקרה זה, כי אין התייחסות להתאמה הנדרשת:

מיקום הזוויות ביחס לצלע חייב להיות זהה בשני המשולשים.

השרטוט משמאל משמש דוגמה נגדית לטענה.



א. בשאלה זו המסקנה נכונה אבל הנימוק לשוויון $CE = CA$ שגוי.

מול זוויות שוות בגודלן נמצאות צלעות שוות באורכן רק אם

המשולשים חופפים (או אם מדובר באותו משולש). כדי לתקן את ההוכחה

יש להוכיח תחילה את החפיפה: $\triangle ACD \cong \triangle ECB$ (לפי ז.צ.ז.) ולהוסיף

בנימוק את המילים "במשולשים חופפים".

