



**תיק משימטיקה**

**התחשבות באילוצים**

**בפתרון בעיות**

להגשה פרטנית נא לפנות: [st.negishut@weizmann.ac.il](mailto:st.negishut@weizmann.ac.il)

© כל הזכויות שמורות

## תוכן עניינים

3	פתיחה
3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
3	החומרים והעזרים הדרושים
4	רקע
5	הצעה למהלך העבודה
6	עבודה על משימות הערכה
6	משימה 1: קובעים אילוצים
7	משימה 2: פותרים בעיות
8	הערכת תוצרי תלמידים
9	פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה
10	פעילות 1: מהם האילוצים?
10	עבודה על דף פעילות 1: מהם האילוצים?
12	דיון
13	פעילות 2: איזו השפעה יש לאילוצים?
13	עבודה על דף פעילות 2: איזו השפעה יש לאילוצים?
14	דיון

# פתיחה<sup>1</sup>



## מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים להתחשב באילוצים (כלומר, בערכים שיכולים לקבל המשתנים שנקבעו) במהלך פתרון אלגברי של בעיות המוצגות בשפה טבעית (בעיות מילוליות).

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- ❖ לקבוע את האילוצים במהלך פתרון אלגברי של בעיה המוצגת בשפה טבעית.
- ❖ להשתמש באילוצים במהלך פתרון אלגברי של בעיה המוצגת בשפה טבעית.



## זמני עבודה משוערים

- ❖ עבודה על משימות הערכה: 15-30 דקות.
- ❖ פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה: 30-45 דקות.



## החומרים והעזרים הדרושים

לצורך עבודה על משימות הערכה (לכל תלמיד/ה):

- ❖ דף משימה 1: [קובעים אילוצים](#).
  - ❖ דף משימה 2: [פותרים בעיות](#).
- לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):
- ❖ דף פעילות 1: [מהם האילוצים?](#)
  - ❖ דף פעילות 2: [איזו השפעה יש לאילוצים?](#)

<sup>1</sup> חמישה תיקי משימטיקה עוסקים בהיבטים שונים של שימוש במידול מתמטי לפתרון בעיות המוצגות בשפה טבעית בהקשרים פנים וחוץ-מתמטיים: **אותה בעיה – הגדרות שונות של המשתנה, התחשבות באילוצים בפתרון בעיות, בניית משוואות כמודל מתמטי, בעיות בהקשר ומשוואות, בעיות בהקשר ופונקציות.**



## רקע

פתרון מתמטי של בעיות המוצגות בשפה טבעית (בעיות מילוליות) כולל בנייה של מודל מתמטי לבעיה והפעלה של כלים מתמטיים על המודל כדי למצוא פתרון לבעיה. בניית מודל מתמטי כרוכה בקביעת אילוצים הנובעים מנתוני הבעיה; שימוש במודל לצורך פתרון הבעיה כרוך בהתחשבות באילוצים אלה.

לדוגמה, נתונה הבעיה: מהו אורך צלע הריבוע, שקיצור שתי צלעות מקבילות שלו ב-6 ס"מ יוצר מלבן שהיקפו 8 ס"מ? מודל מתמטי מתאים לבעיה הוא המשוואה:  $2x + 2(x - 6) = 8$  עם האילוץ  $x \geq 6$ , כאשר המשתנה  $x$  מייצג את אורך צלע הריבוע (בס"מ).

תלמידים נוטים לעיתים קרובות להתעלם מהצורך לקבוע את האילוצים במהלך פתרון אלגברי של בעיה המנוסחת בשפה טבעית, והם אינם כוללים אותם במודל המתמטי שהם בונים לבעיה. למשל, תלמידים לא מצרפים את האילוץ  $x \geq 6$  למשוואה בדוגמה שלמעלה. קושי נוסף של תלמידים, המתבטא בהתייחסות לפתרון של המודל המתמטי שבנו כאל פתרון הבעיה, ללא התחשבות באילוצים הנובעים מנתוני הבעיה. למשל, טעות נפוצה של תלמידים היא להסיק במקרה של הבעיה למעלה, שפתרון המשוואה  $x = 5$  הוא אורך צלע הריבוע. זאת בלי להתחשב בכך שכדי שאפשר יהיה לבנות מלבן כמתואר בבעיה, אורך צלע הריבוע חייב להיות לפחות 6 ס"מ.

התיק **התחשבות באילוצים בפתרון בעיות** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים שיש להם קשיים אלה, ולתת להם מענה.



## הצעה למהלך העבודה

❖ עבודה על משימות הערכה:

- משימה 1: [קובעים אילוצים](#).
- משימה 2: [פותרים בעיות](#).

❖ הערכת תוצרי התלמידים.

❖ פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה.

## עבודה על משימות הערכה

בתיק זה שתי משימות הערכה.

❖ משימה 1: **קובעים אילוצים**.

❖ משימה 2: **פותרים בעיות**.

בכל משימת הערכה נתונות שתי בעיות המנוסחות בשפה טבעית (בעיה מילולית). שתי המשימות המופיעות במשימה 1 חוזרות ומופיעות במשימה 2, אך המטלות הנדרשות בכל משימה שונות. במשימה 1 התלמידים מתבקשים לקבוע את האילוצים המתאימים לנתוני הבעיה ולהגדרת המשתנה. במשימה 2 התלמידים מתבקשים למצוא את פתרון הבעיה תוך התחשבות באילוצים.



### משימה 1: קובעים אילוצים

#### משימה 1: קובעים אילוצים

בסעיפים הבאים שתי בעיות (כל אחת מהן בתוך מסגרת). בכל בעיה עליכם לרשום את האילוצים שנובעים מנתוני הבעיה (כלומר, את תחום הערכים שהמשתנה  $x$  יכול לקבל).

א. שולי, מרינה, ואנה קראו ביחד 14 ספרים במהלך חופשת הקיץ. מרינה קראה 5 ספרים יותר משולי. אנה קראה 6 ספרים פחות משולי. כמה ספרים קראה שולי?

$x$  מייצג את מספר הספרים שקראה שולי.

השלימו: מנתוני הבעיה נובע שתחום הערכים שהמשתנה  $x$  יכול לקבל הוא \_\_\_\_\_.

ב. מקצרים ב-5 ס"מ זוג אחד של צלעות נגדיות של ריבוע, ואת זוג הצלעות האחר מקצרים ב-7 ס"מ. שטח המלבן שנוצר הוא 15 סמ"ר. מהו אורך הצלע של הריבוע המקורי?

$x$  מייצג את אורך הצלע של הריבוע המקורי (בס"מ).

השלימו: מנתוני הבעיה נובע שתחום הערכים שהמשתנה  $x$  יכול לקבל הוא \_\_\_\_\_.

[למשימה 1 מוגשת](#)



## משימה 2: פותרים בעיות

### משימה 2: פותרים בעיות

לפניכם שתי הבעיות ממשימה 1 (כל בעיה במסגרת).  
לאחר כל בעיה יש משוואה מתאימה לבעיה שהציעה תלמידה, ופתרונות של שתי תלמידות.  
עליכם להחליט מי מהתלמידות צודקת?

א. שולי, מרינה, ואנה קראו ביחד 14 ספרים במהלך חופשת הקיץ.  
מרינה קראה 5 ספרים יותר משולי.  
אנה קראה 6 ספרים פחות משולי.  
כמה ספרים קראה שולי?

**מישל אמרה:** אם  $x$  מייצג את מספר הספרים שקראה שולי, המשוואה המתאימה:  $3x - 1 = 14$ .

**מישל** פתרה את המשוואה שרשמה ואמרה ששולי קראה 5 ספרים.

**רחל** אמרה שלבעיה הזאת אין פתרון.

סמנו מי צודקת:  מישל  רחל

נמקו תשובתכם:

ב. מקצרים ב-5 ס"מ זוג אחד של צלעות נגדיות של ריבוע,  
את זוג הצלעות האחר מקצרים ב-7 ס"מ.  
שטח המלבן שנוצר הוא 15 סמ"ר.  
מהו אורך הצלע של הריבוע המקורי?

**רויטל אמרה:** אם  $x$  מייצג את אורך הצלע של הריבוע המקורי (בס"מ), המשוואה המתאימה היא:  
 $(x - 5)(x - 7) = 15$ . למשוואה זו יש שני פתרונות 2 ו-10. לכן אורך צלע הריבוע יכול להיות 2 ס"מ או 10 ס"מ.

**יוכבד** אמרה לרויטל שאינה צודקת כי רק אחד מהפתרונות של המשוואה יכול להתאים לאורך צלע הריבוע

סמנו מי צודקת:  רויטל  יוכבד

נמקו תשובתכם:

מהו אורך צלע הריבוע?  
\_\_\_\_\_

[למשימה 2 מוגשת](#)

## הערכת תוצרי תלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

הערות	לא התחשבו באילוצים במציאת תשובה לבעיה	התקשו בקביעת האילוצים	כל התשובות נכונות	שם התלמיד/ה
	√	√		<a href="#">תלמיד 1</a>
			√	<a href="#">תלמיד 2</a>
		√		<a href="#">תלמיד 3</a>
				סך-הכול

### פתרון משימות הערכה

#### משימה 1

א.  $6 \leq x \leq 9$

ב.  $x \geq 7$

#### משימה 2

א. רחל צודקת. אין פתרון לבעיה בשל אילוצי הבעיה. הפתרון  $x = 5$  אינו כלול בתחום הבעיה.

ב. יוכבד צודקת. פתרון המשוואה  $x = 2$  אינו כלול בתחום הבעיה כיוון שאינו מקיים את האילוץ  $x \geq 7$ .

אורך הצלע של הריבוע המקורי הוא 10 ס"מ.



## פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

פעילות 2	פעילות 1	למי מיועדת הפעילות?
✓	✓	לתלמידים שהתקשו בקביעת אילוצי הבעיה
✓		לתלמידים שלא התחשבו באילוצים במציאת פתרון לבעיה



## פעילות 1: מהם האילוצים?

### דף פעילות 1: מהם האילוצים?

א. מקצרים שתי צלעות נגדיות של ריבוע ב-2 ס"מ, ואת שתי הצלעות הנגדיות האחרות מקצרים ב-5 ס"מ. שטח המלבן שנוצר 28 סמ"ר.

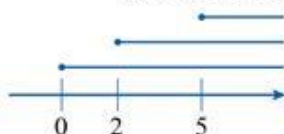
1. השלימו בטבלה את הביטויים האלגבריים והאילוצים המתאימים להם.

אילוצים	ביטויים
$x \geq 0$	אורך צלע הריבוע המקורי (בס"מ): $x$
_____	אורך צלע אחת של המלבן שנוצר (בס"מ): _____
_____	אורך צלע שניה של המלבן שנוצר (בס"מ): _____

2. מבין האפשרויות הבאות סמנו את האפשרויות השייכות לתחום הבעיה, ונסבירו את בחירתכם.

$x = 6.3$      $x = 3$      $x = -4$      $x = 2.5$      $x = 5.5$

3. יוסף רצה למצוא את אילוצי הבעיה, והציע לשרטט את האילוצים המתאימים לביטויים כך:



האם ההצעה של יוסף עוזרת למציאת אילוצי הבעיה? הסבירו.

- ב. תלמידי כיתה ט' יצאו לטיול של שלושה ימים.  
 ביום השני עברו 3 ק"מ פחות מאשר ביום הראשון.  
 ביום השלישי עברו 20 ק"מ יותר מאשר ביום השני.  
 בסה"כ עברו תלמידי כיתה ט' 20 ק"מ.

1. השלימו בטבלה את הביטויים האלגבריים והאילוצים המתאימים להם, והוסיפו את שרטוט האילוצים על הסקיצה שבעמודה השמאלית.

סקיצה של האילוצים על ציר מספרים	אילוצים	ביטויים
	_____	המרחק בק"מ שעברו ביום הראשון: $x$
	_____	המרחק בק"מ שעברו ביום השני: _____
	_____	המרחק בק"מ שעברו ביום השלישי: _____

2. מהו תחום הערכים של  $x$  המתאים לנתוני הבעיה? \_\_\_\_\_

- ג. באולם אירועים יש שולחנות מלבניים, שולחנות עגולים, ושולחנות בר גבוהים. מספר השולחנות העגולים הוא פי 8 ממספר השולחנות המלבניים. מספר השולחנות הגבוהים (שולחנות בר) קטן ב- 30 ממספר השולחנות המלבניים. בסך הכול יש באולם 200 שולחנות מכל שלושת הסוגים. כמה שולחנות מכל סוג יש באולם?

1. השלימו את הביטויים האלגבריים והאילוצים המתאימים, בטבלה.

אילוצים	ביטויים
_____	מספר השולחנות המלבניים: $x$
_____	מספר השולחנות העגולים: _____
_____	מספר השולחנות הגבוהים (שולחנות בר): _____

2. מהו תחום הערכים של  $x$  המתאים לנתוני הבעיה? \_\_\_\_\_
3. **אנה** אמרה: אין פתרון לבעיה.  
הסתמכו על אילוצי הבעיה, והסבירו את טענתה של **אנה**.
4. הציעו מספר אחר לסך כל השולחנות, כך שיהיה פתרון לבעיה, והסבירו את בחירתכם.

[לפעילות 1 מוגשת](#)

## דיון

לסיכום דנים בנקודה הבאה:

- ❖ מצבים חוץ-מתמטיים שונים וההשלכות שלהם לגבי אילוצי בעיה (למשל: אורך של צלע לא יכול להיות שלילי, מספר אנשים חייב להיות מספר טבעי).



## פעילות 2: איזו השפעה יש לאילוצים?

### שלבי הפעילות

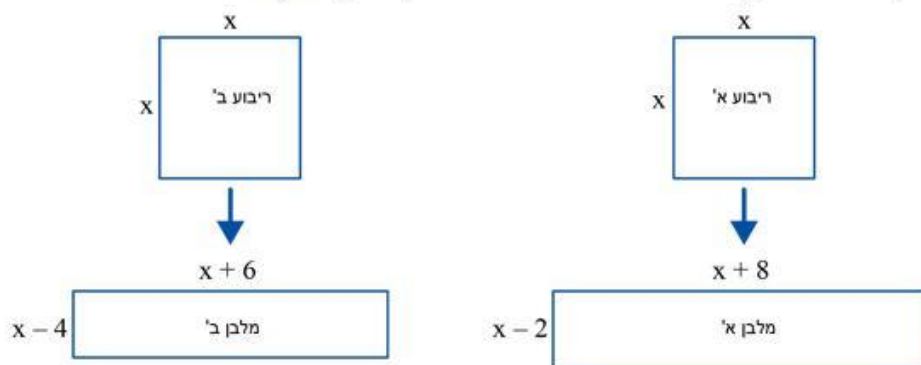
1. עבודה על דף פעילות 2: איזו השפעה יש לאילוצים?
2. דיון.

### עבודה על דף פעילות 2: איזו השפעה יש לאילוצים?

#### דף פעילות 2: איזו השפעה יש לאילוצים?

א. בנו שני מלבנים על-ידי שינוי אורכי הצלעות של שני ריבועים זהים. מלבן א' התקבל על-ידי קיצור זוג אחד של צלעות נגדיות של ריבוע א' ב-2 ס"מ, והארכת הזוג האחר ב-8 ס"מ. מלבן ב' התקבל על-ידי קיצור זוג אחד של צלעות נגדיות של ריבוע ב' ב-4 ס"מ, והארכת הזוג האחר ב-6 ס"מ.

נסמן ב- $x$  את האורך בסיימ של הצלע של הריבועים המקוריים ( $x \geq 4$ ).



המורה שאלה:

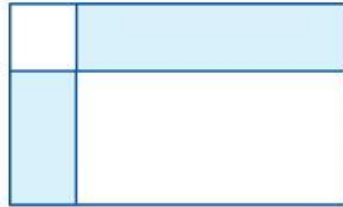
מהו אורך הצלע של הריבוע המקורי, אם ההפרש בין שטח מלבן א' לשטח מלבן ב' הוא 20 סמ"ר?  
**גליה** אמרה: אורך הצלע של הריבוע המקורי הוא 3 ס"מ.  
**אריאל** אמרה: לבעיה אין פתרון.  
 מי מהן צודקת? נמקו תשובתכם.

ב. מקצרים **זוג אחד** של צלעות נגדיות של ריבוע ב-6 ס"מ ומקבלים מלבן.

נסמן ב- $x$  את האורך בסיימ של צלע הריבוע.

1. מהו תחום הערכים של  $x$  המתאים לנתוני הבעיה?
2. האם ייתכן שהיקף המלבן הוא 8 ס"מ? אם כן, מצאו את אורך הצלע של הריבוע המקורי.
3. האם ייתכן שהיקף המלבן הוא 13 ס"מ? אם כן, מצאו את אורך הצלע של הריבוע המקורי.

ג. בשרטוט שלפניכם תכננו של גינה מלבנית שמידותיה 6 מטר x 10 מטר. לפי התכנון, ישתלו בגינה שתי ערוגות פרחים (בשרטוט הן צבועות), ושתי מדשאות מלבניות (בשרטוט הן לבנות) – אחת מהן ריבועית.

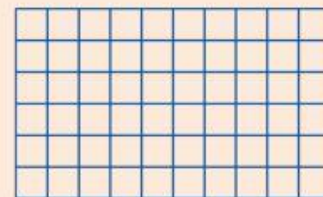
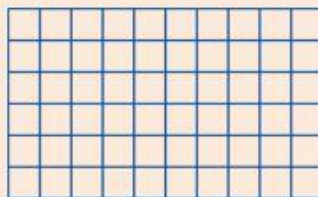


- לפניכם **שתי הצעות** לתכנון הגינה: הצעה של הגן הראשי והצעה של מעצבת גינות. לכל אחת מההצעות:
- שרטוט שרטוט/שרטוטים מתאימים לתכנון הגינה,
  - רשמו משוואה מתאימה (כולל אילוצים),
  - פתרו את המשוואה שרשמתם,
  - חשבו את שטח המדשאה הריבועית שתתקבל. (רמז: תיתכן יותר מתשובה אחת).

**הצעה של הגן הראשי:**

השקיית דשא דורשת כמויות גדולות של מים, ולכן המדשאות יהיו בשטח כולל של מחצית משטח הגינה. בשאר השטח ישתלו פרחים.

שרטוטים לתכנון הגינה



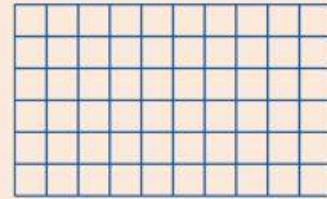
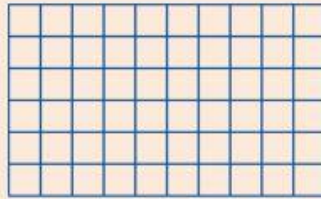
סמנו ב-x את אורך הצלע של המדשאה הריבועית, רשמו **משוואה** מתאימה (כולל אילוצים), ופתרו אותה.

שטח המדשאה הריבועית: \_\_\_\_\_

### הצעה של המעצבת:

פרחים עולים הרבה כסף, ולכן ערוגות הפרחים יהיו בשטח כולל של 14 מ"ר. בשאר השטח ישתלו דשא.

שרטוטים לתכנון הגינה



סמנו ב-x את אורך הצלע של המדשאה הריבועית, רשמו **משוואה** מתאימה (כולל אילוצים), ופתרו אותה.

שטח המדשאה הריבועית: \_\_\_\_\_

### לפעילות 2 מוגשת

#### דיון

לסיכום דנים בנקודות הבאות:

- ❖ הצורך בהתחשבות באילוצים בפתרון הבעיה.
- ❖ פתרון המשוואה הוא לאו דווקא פתרון הבעיה.